



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB**  
CAMPUS VI- POETA PINTO DO MONTEIRO  
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS - CCHE  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

**Aldelânia Pereira Campos**

**Integral Dupla e Aplicações**

**Monteiro - PB**

**2016**

**ALDELÂNIA PEREIRA CAMPOS**

## **Integral Dupla e Aplicações**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB , em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática .

Orientador: Me. Luciano dos Santos Ferreira

**Monteiro - PB**  
**2016**

C198i Campos, Aldelânia Pereira  
Integrais duplas e aplicações [manuscrito] / Aldelania Pereira  
Campos. - 2016.  
59 p. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)  
- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e  
Exatas, 2016.

"Orientação: Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira,  
Departamento de Matemática".

1. Integral dupla. 2. Cálculo de áreas 3. Figuras planas. 3.  
Geometria. I. Título.

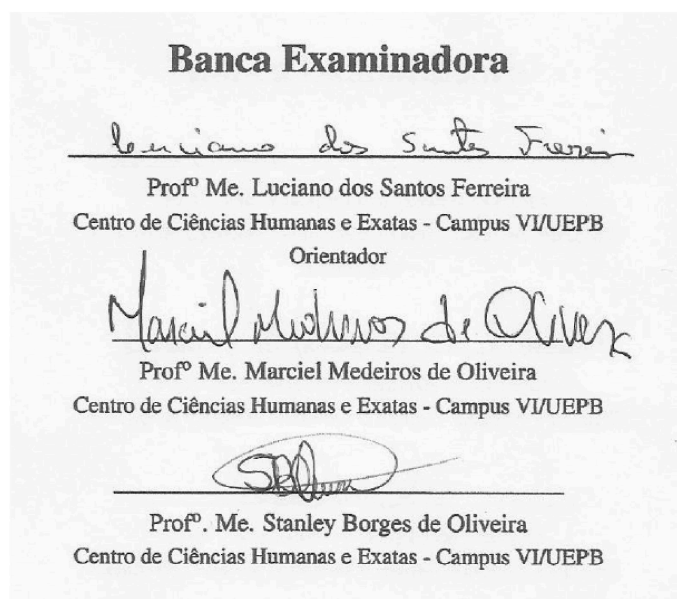
21. ed. CDD 516.22

**ALDELÂNIA PEREIRA CAMPOS**

## **Integral Dupla e Aplicações**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB , em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática .

Aprovado pela banca examinada em 11 de Maio de 2016.



Dedico este trabalho a Deus pela oportunidade de alcançar essa vitória, a minha família que em todos os momentos me apoiaram no curso de graduação em matemática e a todos os meus amigos.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por este sonho realizado. Pelo dom da vida, pela fé e perseverança para vencer os obstáculos surgidos nesta fase da minha vida. A minha Família: Josefa , minha mãe; Bernardo, meu pai; minha irmã, Aldenir; e meus irmãos, Lindenberg e Gutemberg; que tiveram paciência e me incentivaram, no decorrer deste período, a eles muito obrigada. A minha outra Família que adotou como mais um membro: M<sup>a</sup> do Socorro, José Donatinho, Aurea Flaviana e Heman, tendo mim apoiado em todos momentos vivenciado no decorrer desta formação. Ao meu ex-noivo Nelson José pelos os seus conselhos e palavras de otimismo transmitida nos momentos que passamos juntos. Aos meus colegas de trabalho do CAPS pela paciência, pelo apoio e pelo incentivo em todas as situações vivida na minha graduação. Aos meus amigos feitos no processo da minha formação de licenciatura plena em Matemática que me ajudaram; obrigada pela amizade, paciência e convivência. Aos docentes da UEPB pelos ensinamentos e atenção dedicada no decorrer do curso de Matemática.

*"A Matemática é o caminho  
para fazer sua imaginação  
descobrir as belezas através  
dos cálculos ."*

## Resumo

O presente trabalho trata da exposição das integrais duplas com uma linguagem atrativa para facilitar a compreensão desta ferramenta na resolução de problemas. Por meio dela faremos algumas aplicações utilizando o cálculo de áreas, volume, massa, centro de massa, momento de inércia e outros. Deste modo, nos é essencial o entendimento da sua aplicabilidade na Matemática, na Engenharia, na Física e em outras ciências. Logo, temos por propósito resgatar, desenvolver e apresentar alguns conceitos fundamentais de Integrais Duplas em funções de duas variáveis reais através interpretações geométricas, algébricas e questões comuns para solucionar de um jeito simples. Para a concretização de tais metas utilizamos pesquisas bibliográficas e gráficas com auxílio de livros e softwares matemáticos.

**Palavras-Chave:** Integral Dupla. Área de figuras planas. Volume de superfícies. Aplicação.



## **Abstract**

This paper deals with the exposure of the double integrals with an attractive language to facilitate understanding of this tool in solving problems. Through it we will make some applications using area calculation, volume, mass, center of mass, moment of inertia and others. Thus, it is essential in the understanding of its applicability in mathematics in engineering, physics and other sciences. So we have a way to rescue, develop and present some fundamental concepts of integrals Doubles in two real variables functions through geometric interpretations, algebraic and common issues to solve in a simple way. To achieve these goals we use bibliographic and graphic research with the aid of books and mathematical software.

**Keywords:** Double Integral. Area of plane figures. Volume surfaces. Application.

## Lista de Figuras

1.1.	Subintervalo da forma $[x_{k-1}, x_k]$ . . . . .	14
1.2.	Soma de Riemann . . . . .	14
1.3.	Região Fechada e limitada <b>R</b> . . . . .	14
1.4.	Grade retangular particionando a região <b>R</b> . . . . .	15
1.5.	Região Fechada . . . . .	17
1.6.	Integrais iteradas . . . . .	22
1.7.	Área de uma secção transversa . . . . .	25
1.8.	Região de integração . . . . .	26
1.9.	Região de integração . . . . .	26
1.10.	região delimitada pelos gráficos das equações . . . . .	27
1.11.	região delimitada pelos gráficos das equações . . . . .	28
2.1.	Volume de lâminas . . . . .	30
2.2.	Área de uma região $R_x$ . . . . .	31
2.3.	Área do Retangulo vertical . . . . .	32
2.4.	gráficos de $x = y_3$ , $x + y = 2$ e $y = 0$ . . . . .	33
2.5.	Retângulo de área $dx dy$ . . . . .	33
2.6.	Retângulo de área . . . . .	34
2.7.	Volume do prisma ilustrado . . . . .	35
2.8.	Densidade da massa por área . . . . .	36
2.9.	Triângulo isósceles . . . . .	36
2.10.	Carga elétrica . . . . .	37
2.11.	Exemplo . . . . .	38
2.12.	Momento lâmina . . . . .	39
2.13.	Triângulo isósceles . . . . .	40
2.14.	Ponto de equilíbrio . . . . .	41
2.15.	superfície de evolução . . . . .	42
2.16.	semi-circulo . . . . .	42

2.17. Casca Cilindrica . . . . .	43
3.1. $\Delta A = \bar{r}\Delta r\Delta\theta$ . . . . .	44
3.2. Partição polar interior . . . . .	45
3.3. Região em forma de cunha . . . . .	46
3.4. Cunha típica de regiões polares . . . . .	47
3.5. Laço de lemniscata . . . . .	47
3.6. Arcos circulares . . . . .	48
3.7. círculos de raio a e b . . . . .	49
3.8. Eixo polar . . . . .	49
3.9. Sólido delimitado . . . . .	50
3.10. paralelogramo . . . . .	52
3.11. Região triangular . . . . .	53
3.12. Área da superfície do parabolóide . . . . .	54

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>1. Integral Dupla</b>	<b>13</b>
1.1. Revisão da Integral Definida	13
1.2. Integral Dupla	14
1.3. Interpretação Geométrica	17
1.4. Propriedades da Integral Dupla	17
1.5. Integral Iterada	21
<b>2. Área e Volume da Integral Dupla</b>	<b>29</b>
2.1. Volume	29
2.2. Área	30
2.3. Densidade de Integrais Duplas	35
2.4. Momentos e Centros de Massa	38
<b>3. Integral Dupla em Coordenadas Polares</b>	<b>44</b>
3.1. Coordenadas Polares	44
3.2. Área de uma Superfície	51
<b>Considerações Finais</b>	<b>54</b>
<b>Referências</b>	<b>57</b>
<b>A. Apêndice</b>	<b>58</b>
A.1. Teorema 6.1	58
A.2. Definição	58
A.3. Definição 6.24	58
A.4. Volume $V$ de um disco circular 6.7	59
A.5. Teorema 13.11	59
A.6. Definição 14.27	59
A.7. Teorema 16.10	59

## Introdução

Os problemas matemáticos relacionados com os conceitos de área, comprimento e volume remota ao tempos dos egípcios há mais de 400 anos, quando problemas como cálculo de áreas de campos e volumes de grãos começaram a ter importância. Ao longo do desenvolvimento histórico da humanidade e com isso, da matemática, várias barreiras foram sendo ultrapassadas e com elas muitos conceitos novos concebidos, uma das maiores descobertas foi a do Cálculo Integral criado por Leibniz. Através desta descoberta várias ferramentas surgiram para contribuir solucionando problemas que até então não possuíam respostas.

Podemos destacar entre essas ferramentas a integral dupla que surge a partir da extensão dos conceitos e propriedades de integral simples, através dela vários problemas geométricos foram solucionados, por exemplo problema de áreas e volume, tendo também grande contribuição na física possibilitando a solução de problemas envolvendo centro de massa, momentos de inércia, entre outros.

Este trabalho tem como objetivo geral estudar as integrais duplas, trazendo definições, propriedades e aplicações, mostrando a importância delas em situações simples.

Deste modo, o trabalho está organizado em três capítulos, no capítulo I expomos a revisão de integral simples estendida para integral dupla na qual abordaremos a definição e suas propriedades, além de mostrar a soma de Riemann, as integrais iteradas e os cálculos para resolução das integrais duplas. No segundo capítulo veremos as fórmulas de volume e área com funções de duas variáveis que ajudaram a resolver cálculos de problemas que envolvem figuras irregulares e no terceiro capítulo abordaremos os cálculos de integrais duplas em coordenadas polares, utilizando a definição de integral iterada para solucionar questões em regiões polares delimitada por arcos circulares .

# 1 Integral Dupla

Neste capítulo estendemos a noção de uma integral definida de uma função simples para funções de duas variáveis por um modo natural. Na primeira seção faremos uma revisão de integral definida para funções de uma variável. Na segunda seção definiremos as Integrais Duplas e destacaremos algumas propriedades e é relevante que se tenha conhecimento de algumas definições tais como, a integral de Riemann, continuidade, limite e o Teorema Fundamental do Cálculo.

## 1.1. Revisão da Integral Definida

Iniciaremos nosso estudo revisando a construção da **integral definida**  $\int_a^b f(x)dx$  de uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua definida no intervalo fechado  $[a, b]$  no conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais tais que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Agora, particionando o intervalo, ou seja, dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos escolhendo  $n - 1$  pontos, digamos  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  entre  $a$  e  $b$  sujeitos a seguinte condição  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$ . Para tornar a notação coerente, consideremos  $a = x_0$  e  $b = x_n$ .

O conjunto  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  é chamado **partição** de  $[a, b]$ . A Partição  $P$  define  $n$  intervalos fechados:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

O subintervalo fechado da forma  $[x_{k-1}, x_k]$  é chamado  $k$ -ésimo subintervalo de  $P$ .

Para cada  $0 \leq k \leq n$  escolhemos um número  $T_k$  no subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ .

Com isso podemos formar a **soma de Riemann**:

$$S = \sum_{k=1}^n f(T_k) \Delta x_k$$

onde  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  é o comprimento do  $k$ -ésimo subintervalo.

Se  $\|P\|$  é a norma da partição considerada (ou seja, o maior dos  $\Delta x_k$ ), então:

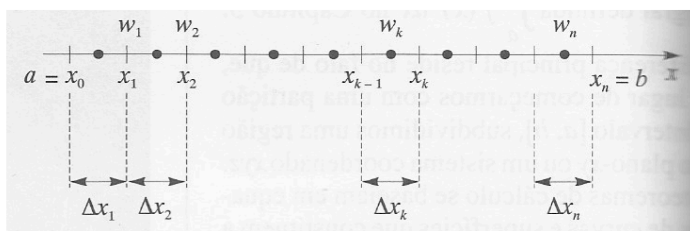


Figura 1.1.: Subintervalo da forma  $[x_{k-1}, x_k]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(T_k)\Delta x_k.$$

esta definição independe da partição  $P$  considerada e dos pontos  $T_k$  escolhidos.

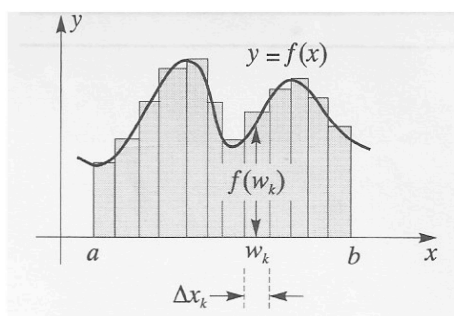


Figura 1.2.: Soma de Riemann

## 1.2. Integral Dupla

Consideremos agora uma função  $z = f(x, y)$  composta de duas variáveis definida numa região fechada e limitada  $\mathbf{R}$  do plano  $\mathbb{R}^2$ . Toda região  $\mathbf{R}$  desse tipo está contida em uma região retangular  $\mathbf{J}$ .

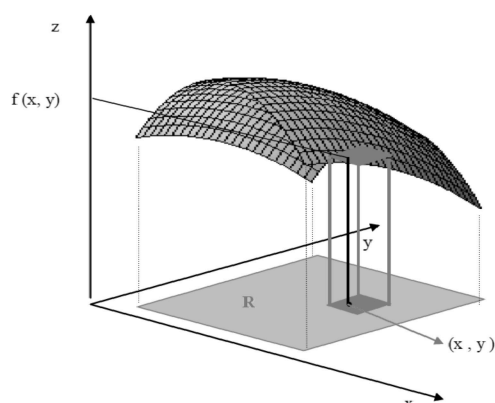


Figura 1.3.: Região Fechada e limitada  $\mathbf{R}$

Se  $J$  é dividida em retângulos por meio de uma rede de retas horizontais e verticais, ou seja, traçando retas paralelas aos eixos dos  $x$  e dos  $y$ , os quais terá delimitado os intervalos fechados em  $\mathbf{R} = [a, b] \times [c, d]$ , relativamente, revestimos a região  $\mathbf{R}$  por pequenos retângulos.

Note que a coleção de todas as sub-regiões fechadas retangulares que estão completamente dentro da região  $\mathbf{R}$  constituirão uma partição interior  $P$  de  $\mathbf{R}$ . Estas partições interiores se denotam por  $R_k$  e são enumeradas de  $R_1$  a  $R_n$ . O comprimento da maior diagonal de todas as  $R_k$  é a norma  $\|P\|$  da partição. O símbolo  $\Delta A_k$  denota a área de  $R_k$ , isto é,  $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$  é a área do retângulo  $R_k$ . Para cada  $k$  escolhemos um ponto arbitrário  $(x_k, y_k)$  em  $R_k$ . Com isso podemos definir as somas de Riemann:

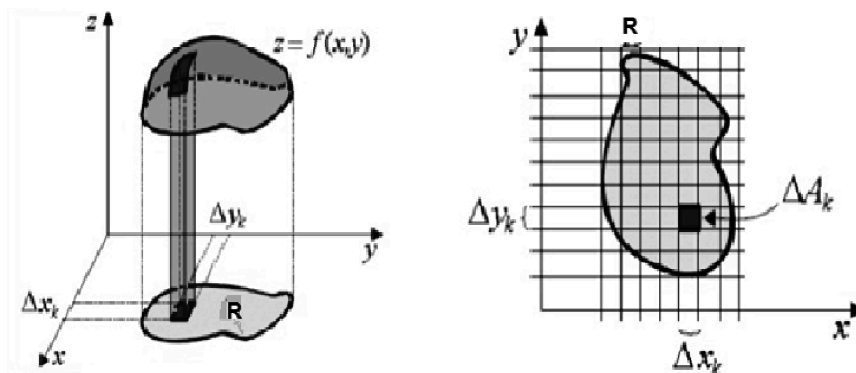


Figura 1.4.: Grade retangular particionando a região  $\mathbf{R}$

**Definição 1.1** *Seja  $f$  uma função de duas variáveis definida em uma região  $\mathbf{R}$ , e seja  $P = \{R_k\}$  uma partição interior de  $\mathbf{R}$ . Uma **soma de Riemann** de  $f$  para  $P$  é qualquer soma da forma*

$$\sum_k f(x_k, y_k) \Delta A_k \quad (1.1)$$

em que  $(x_k, y_k)$  é um ponto de  $R_k$  e  $\Delta A_k$  é a área de  $R_k$ . A somatória se estende a todas as sub-regiões  $R_1, R_2, \dots, R_n$  de  $P$ .

Se traçarmos mais retas paralelas aos eixos dos  $x$  e dos  $y$ , as dimensões dos retângulos tornam-se cada vez menores fazendo a diagonal máxima dos retângulos na região  $\mathbf{R}$  tender a zero quando  $n$  tende ao infinito. Pode-se mostrar que se  $f$  é contínua em  $\mathbf{R}$ , as somas de Riemann tendem para um número real  $L$  quando  $\|P\| \rightarrow 0$ , independentemente da escolha dos  $(x_k, y_k)$  nas sub-regiões de  $R_k$ . O número  $L$  é a integral dupla  $\iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dA$ .

Abaixo veremos uma definição matemática precisa de um limite de somas de Riemann.

**Definição 1.2** *Seja  $f$  uma função de duas variáveis definida em uma região  $\mathbf{R}$ , e seja  $L$  um número real. A afirmação*



$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k f(x_k, y_k) \Delta A_k = L$$

significa que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que, se  $P = \{R_k\}$  é uma partição interior de  $\mathbf{R}$  com  $\|P\| < \delta$ , então

$$\left| \sum_k f(x_k, y_k) \Delta A_k - L \right| < \varepsilon \quad (1.2)$$

para toda escolha de  $(x_k, y_k)$  em  $R_k$ .

A definição (1.2) afirma que podemos tornar toda soma de Riemann tão próxima de  $L$  quanto quisermos, escolhendo uma partição interior com norma  $\|P\|$  suficientemente pequena.

Com isso, podemos definir a seguir integral dupla de  $f$ :

**Definição 1.3** *Seja  $f$  uma função de duas variáveis definida em uma região  $\mathbf{R}$ . A integral dupla de  $f$  sobre  $\mathbf{R}$  é*

$$\iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k f(x_k, y_k) \Delta A_k \quad (1.3)$$

desde que o limite exista.

Quando a integral dupla de  $f$  sobre  $\mathbf{R}$  existe, então dizemos  $f$  é integrável sobre  $\mathbf{R}$ . Prova-se em textos mais avançados que, se  $f$  é contínua em  $\mathbf{R}$ , então  $f$  é integrável sobre  $\mathbf{R}$ . Denotamos a integral dupla de uma função  $f$  sobre uma região  $\mathbf{R}$ , por

$$\iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dA$$

ou

$$\iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy.$$

Observamos que:

- i) A região  $\mathbf{R}$  é denominada *região de integração*;
- ii) A soma (1.1) é chamada soma de Riemann de  $z = f(x, y)$  sobre  $\mathbf{R}$ ;
- iii) O limite (1.3) deve ser independente da escolha das retas que subdividem a região  $\mathbf{R}$  e dos pontos  $(x_k, y_k)$  tomados nos retângulos  $R_k$ .

iv) A existência do limite (1.3) depende da função  $z = f(x, y)$  e também da região  $\mathbf{R}$ . Em nosso estudo, vamos supor que o contorno da região  $\mathbf{R}$  é formado por um número finito de arcos de curvas 'suaves', isto é, os arcos de curvas não contêm pontos angulosos.

### 1.3. Interpretação Geométrica

Seja  $f$  contínua e  $z = f(x, y) \geq 0$  em toda a região  $\mathbf{R}$ . Denotemos por  $\mathbf{S}$  o gráfico de  $f$  e por  $\mathbf{Q}$  o sólido situado abaixo de  $\mathbf{S}$  sobre  $\mathbf{R}$ , conforme figura 1.5.

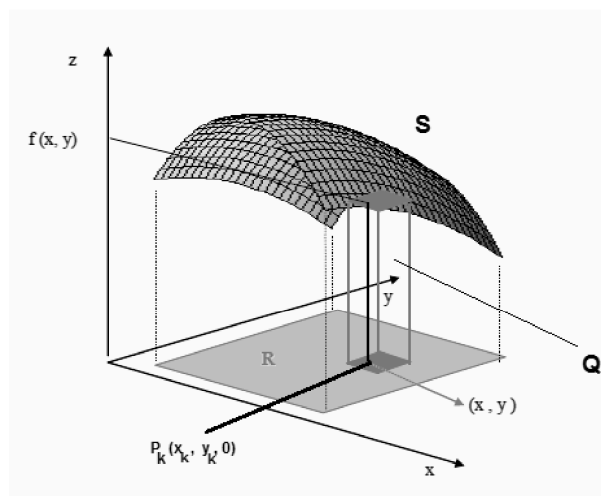


Figura 1.5.: Região Fechada

Se  $P_k(x_k, y_k, 0)$  é um ponto na sub-região  $R_k$  de uma partição interior  $P$  de  $\mathbf{R}$ , então  $f(x_k, y_k)$  é a distância do plano- $xy$  ao ponto  $T_k$  em  $\mathbf{S}$ , diretamente acima de  $P_k$ .

O produto  $f(x_k, y_k)\Delta A_k$  é o volume do prisma de base retangular de área  $\Delta A_k$  ilustrado na figura 1.5. A soma de todos esses volumes de prismas é uma aproximação do volume  $\mathbf{V}$  de  $\mathbf{Q}$ . Como esta aproximação do volume melhora fazendo  $\|P\|$  tender para zero, definimos  $\mathbf{V}$  como o limite de somas dos números  $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ . Aplicando a definição, obtemos:

**Definição 1.4** *Seja  $f$  uma função contínua de duas variáveis tal que  $f(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y)$  em uma região  $\mathbf{R}$ . O volume  $\mathbf{V}$  do sólido compreendido entre o gráfico de  $z = f(x, y)$  e acima de  $\mathbf{R}$  é*

$$V = \iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dA. \quad (1.4)$$

**Observação 1.1** *Se  $f(x, y) \leq 0$  em toda  $\mathbf{R}$ , a integral dupla de  $f$  sobre  $\mathbf{R}$  é o negativo do volume do sólido situado acima do gráfico de  $f$  e sob a região  $\mathbf{R}$ .*

### 1.4. Propriedades da Integral Dupla

Veremos algumas propriedades das integrais duplas supondo que todas as regiões e funções restringidos convenientemente. Desta forma, a fronteira na região de integração  $\mathbf{R}$  é

constituída por um número finito de arcos com curvas suaves, sem conter pontos angulosos, logo as funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  são contínuas sobre a região  $\mathbf{R}$ . Dessa maneira as integrais duplas envolvidas tem a garantia da existência.

**Proposição 1.1** I) *Proposição homogênea:* Seja  $K \in \mathbb{R}$  temos

$$\iint_{\mathbf{R}} Kf(x, y)dA = K \iint_{\mathbf{R}} f(x, y)dA.$$

II) *Proposição aditiva:*

$$\iint_{\mathbf{R}} [f(x, y) + g(x, y)]dA = \iint_{\mathbf{R}} f(x, y)dA + \iint_{\mathbf{R}} g(x, y)dA.$$

III) *Proposição Comparação:* Se  $f(x, y) \geq g(x, y)$  para todo  $(x, y) \in \mathbf{R}$ , então

$$\iint_{\mathbf{R}} f(x, y)dA \geq \iint_{\mathbf{R}} g(x, y)dA.$$

IV) *Proposição positividade:* Se  $f(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y)$  pertencente à região  $\mathbf{R}$ , então

$$\iint_{\mathbf{R}} f(x, y)dA \geq 0.$$

**Demonstração:**

I) Fazendo  $m(x, y) = Kf(x, y)$  e usando a definição 1.3 segue que

$$\iint_{\mathbf{R}} Kf(x, y)dA = \iint_{\mathbf{R}} m(x, y)dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n m(x_k, y_k)\Delta A_k$$

como  $m(x, y) = Kf(x, y)$ , logo:

$$\begin{aligned} & \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n m(x, y)\Delta A_k \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Kf(x_k, y_k)\Delta A_k \\ &= K \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k)\Delta A_k \\ &= K \iint_{\mathbf{R}} f(x, y)dA. \end{aligned}$$

Portanto, temos que para qualquer  $f(x, y)$  integrável e  $K$  constante numa região  $\mathbf{R}$  do  $\mathbb{R}^2$ , segue que:

$$\iint_R Kf(x,y)dA = K \iint_R f(x,y)dA.$$

II) Supondo que  $m(x,y) = f(x,y) \pm g(x,y)$  e usando 1.3 segue que

$$\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \iint_R m(x,y)dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n m(x,y)\Delta A_k$$

com  $m(x,y) = f(x,y) \pm g(x,y)$ , logo:

$$\begin{aligned} & \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n m(x,y)\Delta A_k \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(x,y) \pm g(x,y)]\Delta A_k \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x,y)\Delta A_k \pm \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(x,y)\Delta A_k \\ &= \iint_R f(x,y)dA \pm \iint_R g(x,y)dA. \end{aligned}$$

Portanto, temos que para qualquer  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$  integrável numa região  $\mathbf{R}$  do  $\mathbb{R}^2$ , segue que:

$$\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA \pm \iint_R g(x,y)dA.$$

III) Como  $f$  e  $g$  são integráveis na região  $\mathbf{R}$ ,  $\iint_R f(x,y)dA$  e  $\iint_R g(x,y)dA$  existem. Logo,

$$\iint_R f(x,y)dA - \iint_R g(x,y)dA = \iint_R [f(x,y) - g(x,y)]dA.$$

Seja  $m$  a função definida por  $m(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$ , então  $m(x,y) \geq 0$  para todo  $(x,y)$  em  $\mathbf{R}$ , pois  $f(x,y) \geq g(x,y)$  para todo  $(x,y)$  em  $\mathbf{R}$ .

Queremos provar que  $\iint_R m(x,y)dA \geq 0$ . Por definição, temos

$$\iint_R m(x,y)dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n m(x,y)\Delta A_k.$$

Vamos supor que  $\iint_R m(x,y)dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{K=1}^n m(x,y)\Delta A_k = L < 0$ .

Para  $\varepsilon = -L$ , existe um  $\delta \geq 0$ , tal que se  $\|P\| < \delta$ , então

$$\left| \sum_{K=1}^n m(x,y)\Delta A_k - L \right| < -L.$$

Porém,  $\sum_{K=1}^n m(x,y)\Delta A_k - L \leq \left| \sum_{K=1}^n m(x,y)\Delta A_k - L \right|$ .

Segue, das duas expressões acima, que se  $\|P\| < \delta$ , então:

$$\sum_{k=1}^n m(x,y)\Delta A_k - L < -L \implies \sum_{K=1}^n m(x,y)\Delta A_k < 0.$$

No entanto essa afirmativa é impossível, pois  $m(x,y)$  é sempre não negativo e  $\Delta A_k > 0$ ; assim temos uma contradição à nossa hipótese. Assim sendo, segue que

$$\iint_R m(x,y)dA \geq 0.$$

Como  $m(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$ , temos que:

$$\iint_R m(x,y)dA = \iint_R [f(x,y) - g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA - \iint_R g(x,y)dA \geq 0.$$

Portanto, para qualquer  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$  integrável numa região  $\mathbf{R}$  de  $\mathbb{R}^2$ , onde  $f(x,y) \geq g(x,y)$ , segue que:

$$\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA.$$

IV) Queremos provar que  $\iint_R f(x,y)dA \geq 0$ . Por definição, temos:

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{K=1}^n f(x,y)\Delta A_k.$$

Vamos supor que  $\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{K=1}^n f(x,y)\Delta A_k = L < 0$ .

Para  $\varepsilon = -L$ , existe um  $\delta \geq 0$ , tal que se  $\|P\| < \delta$ , então:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(x,y)\Delta A_k - L \right| < -L. \quad (1.5)$$

Além disso, temos:

$$\sum_{k=1}^n f(x,y)\Delta A_k - L \leq \left| \sum_{k=1}^n f(x,y)\Delta A_k - L \right|. \quad (1.6)$$

Se  $\|P\| < \delta$  então de 1.5 e 1.6, obtemos:

$$\sum_{k=1}^n f(x,y)\Delta A_k - L < -L \Rightarrow \sum_{k=1}^n f(x,y)\Delta A_k < 0.$$

Todavia essa afirmativa é impossível, pois  $f(x,y)$  é sempre não negativo e  $\Delta A_k > 0$ ; assim temos uma contradição a nossa hipótese. Assim sendo, segue que

$$\iint_R f(x,y)dA \geq 0. \quad \blacksquare$$

## 1.5. Integral Iterada

Em alguns casos determinar o valor da integral dupla diretamente a partir da definição 1.1 é quase impossível, ou seja, não é um modo prático de se calcular. Se  $\mathbf{R}$  é uma região  $R_x$  ou  $R_y$ , a integral dupla pode ser obtida por meio de duas integrais sucessivas, onde cada uma delas envolve apenas uma variável independente.

Suponha que  $f$  seja uma função contínua em uma região retangular fechada  $\mathbf{R}$  do tipo exposto na imagem abaixo. Ver-se em cálculo avançado que a integral dupla  $\iint_R f(x,y)dA$  pode ser resolvida através de uma integral iterada dos tipos abaixo:

I)  $\int_a^b \left[ \int_c^d f(x,y)dy \right] dx$ , inicia-se uma integração parcial relação a  $y$ , considerando  $x$  como constante. Colocando  $y$  pelos limites de integração  $c$  e  $d$  da maneira usual, obtemos uma expressão em  $x$ , que é iterada de  $a$  a  $b$ .

II)  $\int_c^d \left[ \int_a^b f(x,y)dx \right] dy$ , neste caso, primeiro efetuamos uma integração parcial em relação a  $x$ , considerando  $y$  como constante. Após substituir  $x$  pelo limites de integração  $a$  e  $b$ , integramos a expressão resultante em  $y$  de  $c$  a  $d$ .

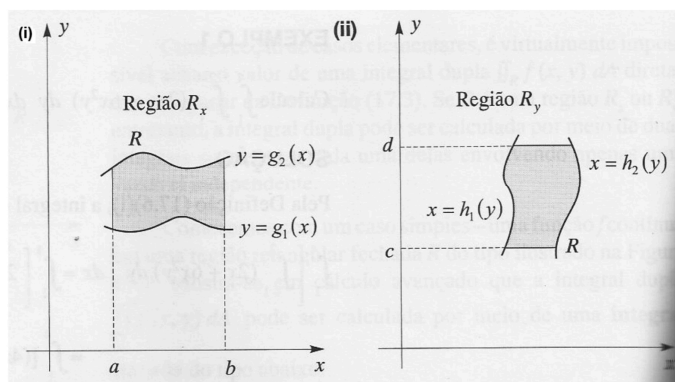


Figura 1.6.: Integrais iteradas

Costuma-se abreviar a notação para as integrais iteradas retirando os colchetes, conforme definiremos a seguir:

**Definição 1.5** 1)  $\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x,y) dy \right] dx$   
 2)  $\int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x,y) dx \right] dy$

Observe que a primeira diferencial à direita do integrando  $f(x,y)$  pela definição 1.5 especifica à variável da primeira integração parcial. O primeiro sinal de integral à esquerda de  $f(x,y)$  indica os limites de integração para aquela variável. Assim, ao resolver uma integral iterada, solucionamos primeiro a integral interna.

**Exemplo 1.1** Encontre o valor da integral  $\iint_R x^2 y dA$ , onde  $R = [0, 3] \times [1, 2]$ .

**Solução:**

Conforme a definição 1.5(1), a integral é igual a

$$\begin{aligned} \iint_R x^2 y dA &= \int_0^3 \left[ \int_1^2 x^2 y dy \right] dx = \int_0^3 \left[ x^2 \frac{y^2}{2} \right]_1^2 dx \\ &= \int_0^3 \left( x^2 \frac{2^2}{2} - x^2 \frac{1^2}{2} \right) dx = \int_0^3 \left( x^2 \frac{4}{2} - x^2 \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \int_0^3 \left( \frac{3x^2}{2} \right) dx = \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^3 \\ &= \left[ \frac{x^3}{2} \right]_0^3 = \frac{3^3}{2} = \frac{27}{2} = 13,5. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.2** Ache o valor da integral  $\iint_R x^2 y dA$ , onde  $R = [1, 2] \times [0, 3]$ .

**Solução:**

De acordo com a definição 1.5(2), a integral é igual a

$$\begin{aligned} \iint_x^2 x^2 y dA &= \int_1^2 \left[ \int_0^3 x^2 y dx \right] dy = \int_1^2 \left[ \frac{x^3 y}{3} \right]_0^3 dy \\ &= \int_1^2 \left( \frac{3^3 y}{3} - 0 \right) dy = \int_1^2 \left( \frac{27y}{3} - 0 \right) dy \\ &= \int_1^2 (9y) dy = \left[ \frac{9y^2}{2} \right]_1^2 \\ &= \frac{36}{2} - \frac{9}{2} = \frac{27}{2} = 13,5. \end{aligned}$$

**Observação 1.2** O motivo dos exemplos acima da definição 1.5 das integrais iteradas serem iguais não é acidental, pois se  $f$  é contínua, então as duas integrais iteradas são sempre iguais.

**Definição 1.6** Definição de integrais iteradas

$$\begin{aligned} \text{I)} \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx &= \int_a^b \left[ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy \right] dx \\ \text{II)} \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy &= \int_c^d \left[ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx \right] dy \end{aligned}$$

De acordo com a definição 1.6 primeiro operamos uma integração parcial em relação a  $y$ , e então substituímos  $y$  por  $g_2(x)$  e  $g_1(x)$  na maneira usual. Integramos então a expressão resultante em  $x$  de  $a$  a  $b$ . Na definição 1.6(II), integramos primeiro em relação a  $x$  e então, após trocar  $x$  por  $h_2(y)$  e  $h_1(y)$ , integramos a expressão resultante em relação a  $y$  de  $c$  a  $d$ . Bem como vimos na definição 1.5 para regiões retangulares, que opera a integração da integral interna em primeiro.

**Exemplo 1.3** Encontre

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy dx.$$

**Solução:**

Pela definição 1.6(I) a integral é igual a

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left[ \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy \right] dx &= \int_0^2 \left[ x^3 y + 4 \left( \frac{y^2}{2} \right) \right]_{x^2}^{2x} dx \\ &= \int_0^2 \left[ x^3 \cdot 2x + 4 \left( \frac{2x}{2} \right)^2 - (x^3 \cdot x^2 + 4 \cdot \left( \frac{x^2}{2} \right)^2) \right] dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 (2x^4 + 8x^2 - x^6 - 2x^4) dx \\
&= \int_0^2 (8x^2 - x^5) dx = \frac{8x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \Big|_0^2 \\
&= \left( 8 \frac{2^3}{3} - \frac{2^6}{6} \right) \\
&= \frac{64}{3} - \frac{64}{6} = \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

**Exemplo 1.4** *Ache*

$$\int_1^2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} 2y \cos x dx dy.$$

**Solução:**

*Pela definição 1.6(II), a integral é igual a*

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \left[ \int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} 2y \cos x dx \right] dy &= \int_1^3 2y \left[ \operatorname{sen} x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} dy \\
&= \int_1^3 2y \left( \operatorname{sen} y^2 - \frac{1}{2} \right) dy \\
&= \int_1^3 (2y \operatorname{sen} y^2 - y) dy \\
&= \left[ -\cos y^2 - \frac{1y^2}{2} \right]_1^3 \\
&= \left( -\cos 9 - \frac{9}{2} \right) - \left( -\cos 1 - \frac{1}{2} \right) = -2,55.
\end{aligned}$$

Agora veremos a afirmação através do teorema que se a região  $\mathbf{R}$  é uma região  $R_x$  ou  $R_y$  então  $\iint_{\mathbf{R}} f(x,y) dA$  pode ser calculada por meio de uma integral iterada.

**Teorema 1.1** *Teorema para o cálculo de integrais duplas*

*I) Seja  $\mathbf{R}$  a região  $R_x$  da figura 1.6(i). Se  $f$  é contínua em  $\mathbf{R}$ , então*

$$\iint_{\mathbf{R}} f(x,y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$$

*II) Seja  $\mathbf{R}$  a região  $R_y$  da figura 1.6(ii). Se  $f$  é contínua em  $\mathbf{R}$ , então*

$$\iint_{\mathbf{R}} f(x,y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$$

Para regiões mais complicadas, dividimos  $\mathbf{R}$  em sub-regiões  $R_x$  ou  $R_y$ , aplicamos o teorema 1.1 a cada uma e somamos os valores das integrais resultantes.

Em textos de cálculo avançado pode-se encontrar a demonstração do teorema 1.1. A exposição intuitiva seguinte torna plausível o resultado, ao menos para funções com valores não-negativos. Suponhamos  $f(x, y) \geq 0$  em toda a região  $R_x$  ilustrada na Figura 1.6(i). Sejam  $\mathbf{S}$  o gráfico de  $f$ ,  $\mathbf{Q}$  o sólido sob  $\mathbf{S}$  e sobre  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{V}$  o volume de  $\mathbf{Q}$ . Consideremos o plano que é paralelo ao plano  $yz$  e intercepta o eixo  $x$  em  $(x, 0, 0)$ , com  $a \leq x \leq b$ , e seja  $\mathbf{C}$  o traço de  $\mathbf{S}$  neste plano (ver Figura 1.7). Este plano intercepta as fronteiras de  $R$  —  $y = g_1(x)$  e  $y = g_2(x)$  em  $P_1(x, g_1(x), 0)$  e  $P_2(x, g_2(x), 0)$ .

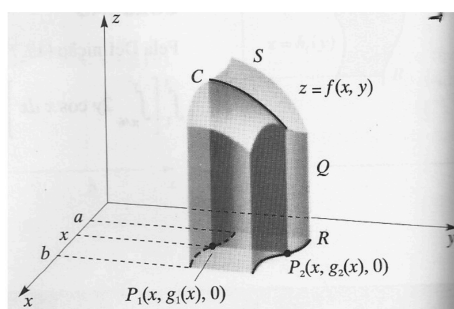


Figura 1.7.: Área de uma secção transversa

Pelo teorema do apêndice A.1, sabemos que a área  $A(x)$  desta porção do plano  $xy$  é

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

Como  $A(x)$  é a área de uma secção transversa típica de  $\mathbf{Q}$ , assim procede de acordo com a definição de volume por secções transversas do apêndice A.2 que é:

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

Levando em conta que  $\mathbf{V}$  também é dado pela definição 1.4, obtemos a fórmula de cálculo da parte(I) do teorema(1.1). Discussão análoga vale para a parte(II).

Para calcular aplicando o teorema 1.1 na integral dupla, é necessário representar um esboço da região  $\mathbf{R}$  e delimitar as suas fronteiras. Veremos a seguir exemplos de aplicação:

**Exemplo 1.5** Seja  $\mathbf{R}$  a região do plano  $xy$  delimita pelos gráficos de  $y = x^2$  e  $y = 2x$ . Calcule  $\iint_{\mathbf{R}} (x^3 + 4y) dA$  aplicando:

a) o teorema 1.1(I)

**Solução:**

A Figura 1.8 exibe a região  $\mathbf{R}$ . Note que  $\mathbf{R}$  é tanto uma região  $R_x$  como uma região  $R_y$ . Encaramos  $\mathbf{R}$  como uma região  $R_x$  com fronteira inferior  $y = x^2$  e fronteira superior

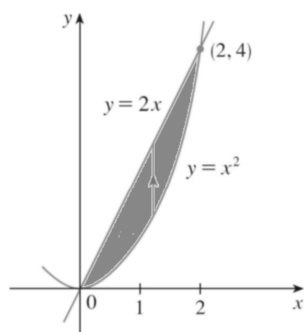


Figura 1.8.: Região de integração

$y = 2x$ , com  $0 \leq x \leq 2$ . Traçamos um segmento vertical entre essas duas fronteiras para indicar que a primeira integração é em relação a  $y$  (da fronteira inferior à fronteira superior).

$$\int_0^2 \int_y^{2x} (x^3 + 4y) dy dx.$$

Pelo Exemplo 1.3, sabemos que a última integral é igual a  $\frac{32}{3}$ .

b) o teorema 1.1(II)

**Solução:** Para aplicar o teorema 1.1 (II), encaramos  $\mathbf{R}$  como uma região  $R_y$  e resolvemos

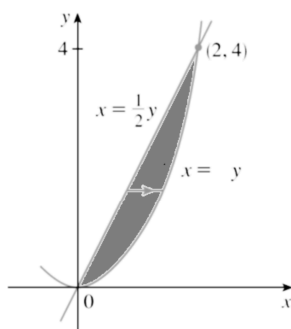


Figura 1.9.: Região de integração

cada uma das equações dadas em relação a  $x$  em termos de  $y$ , obtendo

$$x = \frac{1}{2}y \text{ e } x = \sqrt{y}, \quad 0 \leq y \leq 4.$$

O segmento horizontal da Figura acima se estende da fronteira esquerda à fronteira direita, indicando que a primeira integração é em relação a  $x$ . Pelo Teorema 1.1(II),

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)dA &= \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^3 + 4y) dx dy \\
&= \int_0^4 \left[ \frac{1x^4}{4} + 4xy \right]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^4 \left[ \left( \frac{1y^2}{4} + 4y^{\frac{3}{2}} \right) - \left( \frac{1y^4}{64} + 2y^2 \right) \right] dy = \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$

**Exemplo 1.6** Seja  $R$  a região delimitada pelos gráficos das equações  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \sqrt{3x-18}$  e  $y = 0$ . Se  $f$  é uma função contínua arbitrária em  $R$ , expresse a integral dupla  $\iint_R f(x,y)dA$  em termos de integrais iteradas utilizando apenas:

a) o teorema 1.1(I)

**Solução:**

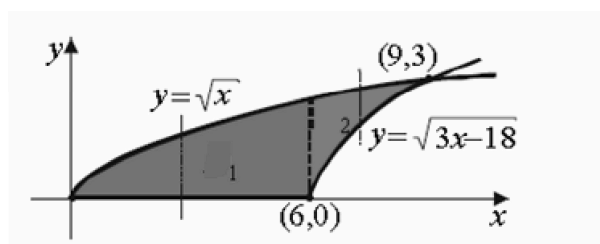


Figura 1.10.: região delimitada pelos gráficos das equações

Os gráficos de  $y = \sqrt{x}$  e  $y = \sqrt{3x-18}$  são as metades superiores das parábolas  $y^2 = x$  e  $y^2 = 3x-18$ . A região  $R$  está esboçada nas figuras (1.10) e (1.11).

Se quisermos utilizar apenas o teorema 1.1(I), então é necessário empregar duas integrais iteradas, porque, se  $0 \leq x \leq 6$ , a fronteira inferior da região é o gráfico de  $y = 0$ , se  $6 \leq x \leq 9$ , a fronteira inferior é o gráfico de  $y = \sqrt{3x-18}$ . (Os segmentos verticais na Figura 1.10 se estendem da fronteira inferior à fronteira superior de  $R$ .)

Se  $R_1$  denota a parte da região  $R$  compreendida entre  $x = 0$  e  $x = 6$  e se  $R_2$  denota a parte entre  $x = 6$  e  $x = 9$ , então tanto  $R_1$  como  $R_2$  são regiões  $R_x$ . Logo,

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)dA &= \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA = \\
&= \int_0^6 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y) dy dx + \int_6^9 \int_{\sqrt{3x-18}}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy dx.
\end{aligned}$$

b) o teorema 1.1(II)

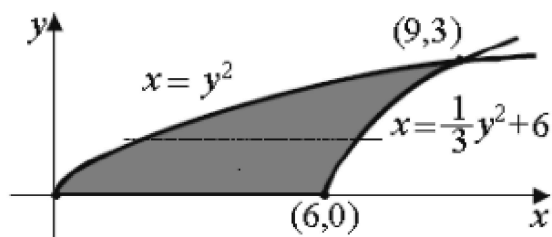


Figura 1.11.: região delimitada pelos gráficos das equações

**Solução:**

Para aplicar o teorema 1.1(II), devemos resolver em relação a  $x$  cada uma das equações dadas em termos de  $y$ , obtendo

$$x = y^2 \text{ e } x = \frac{y^2 + 18}{3} = \frac{1y^2}{3} + 6, \quad 0 \leq y \leq 3.$$

O segmento horizontal da Figura 1.11 se estende da fronteira esquerda à fronteira direita. Neste caso, é suficiente apenas uma integral iterada, pois  $\mathbf{R}$  é uma região  $R_y$ . Assim,

$$\iint_{\mathbf{R}} f(x,y) d\Lambda = \int_0^3 \int_{y^2}^{(\frac{y^2}{3})+6} f(x,y) dx dy.$$

Após expor os exemplos acima com certas integrais duplas sendo resolvidas, seja por (I) ou por (II) do teorema 1.1. Geralmente, a opção da ordem de integração  $dydx$  ou  $dxdy$  depende da forma de  $f(x,y)$  e da região  $\mathbf{R}$ . Às vezes, é extremamente difícil, ou mesmo impossível, calcular uma integral dupla iterada. Todavia, invertendo a ordem de integração de  $dydx$  para  $dxdy$ , chega-se a uma integral dupla equivalente que pode ser calculada com facilidade, se  $f$  for contínua.

## 2 Área e Volume da Integral Dupla

Neste capítulo analisaremos as diversas situações envolvendo cálculo de áreas e volumes com integral dupla. Dessa forma vamos mostrar uma forte ferramenta matemática para solucionar problemas de áreas e volumes irregulares que não possuíam até então respostas, a qual proporcionou um grande avanço e contribuição para várias ciências que necessitavam de uma ferramenta para o seu crescimento.

### 2.1. Volume

Vimos que se uma função  $f(x, y) \geq 0$  e se  $f$  é contínua, então o volume  $V$  do sólido compreendido sob o gráfico de  $z = f(x, y)$  e sobre uma região  $R_x$  do plano  $xy$  é dado por

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

em que  $A(x)$  é a área de uma subdivisão transversa típica do sólido. Assim a fórmula do volume de subdivisões transversais é aplicado pela definição volume por secções transversas do apêndice A.2,

$$V = \int_a^b A(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k A(T_k) \Delta x_k$$

em que  $P$  é uma partição do intervalo  $[a, b]$ ,  $T_k$  é um número arbitrário no  $k^{mo}$  pertencente ao subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  de  $P$  e  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ . Sendo  $A(T_k) \Delta x_k$  o volume de uma lâmina  $L_k$  como face paralela ao plano  $yz$  e base retangular de largura  $\Delta x_k$  no plano  $\mathbb{R}^2$ . Assim, o volume  $V$  é o limite de uma soma de volumes de tais lâminas.

Ao observarmos à figura 2.1, vemos que  $f(x_k, y_j) \Delta y_j \Delta x_k$  é o volume de um prisma de área de base  $\Delta y_j \Delta x_k$  e altura  $f(x_k, y_j)$ . Quando fixamos  $x$ , somamos os volumes dos prismas na direção do eixo  $y$ , para conseguir assim o volume da lâmina visto na primeira ilustração 2.1(i). Os volumes de todas essas lâminas são então somados na direção do eixo

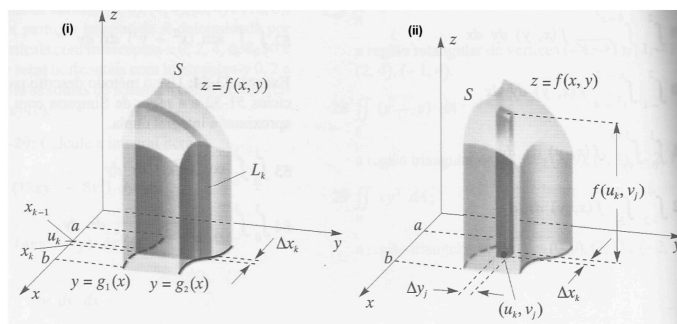


Figura 2.1.: Volume de lâminas

$x$ . Em certo sentido, a integral iterada toma limites quando as bases dos prismas tendem para pontos. Por meio desta interpretação torna-se fácil compreender a aplicação de integral dupla. Para destacar este ponto de vista, por vezes expressamos o volume como segue, em que  $\|P\|$  é o comprimento da maior diagonal das bases do prisma.

**Definição 2.1** *Volume como limite de somas duplas :*

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k \sum_j f(x_k, y_j) \Delta y_j \Delta x_k = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

## 2.2. Área

Ao calcular as áreas podemos também considerar os limites de somas duplas. Iniciamos denotando a integral dupla  $\iint_R 1 dA$  por  $\iint_R dA$ . Se  $\mathbf{R}$  é a região  $R_x$ , então, pelo o teorema de integral iterada,

$$\iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1 dy dx = \int_a^b [y]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx$$

o que, de acordo com o teorema A.1 do apêndice, é igual à área  $A$  de  $\mathbf{R}$ . Fórmula análoga vale se  $\mathbf{R}$  é uma região  $R_y$ . Tudo isto é também evidente pela definição de Integral Dupla, pois se  $f(x, y) = 1$  em toda a  $\mathbf{R}$ , então a soma de Riemann da definição 1.1 é uma soma de áreas de retângulos em uma partição interior  $P$  de  $\mathbf{R}$ . Quando a norma  $\|P\|$  tende para zero, esses retângulos cobrem mais e mais a região  $\mathbf{R}$ , e o limite é igual à área de  $\mathbf{R}$ . Podemos utilizar uma integral iterada para achar uma área considerando como limite de somas duplas de maneira análoga ao caso de volume. Especificamente, tal como na definição de volume como limite de somas duplas 2.1, com  $f(x, y) = 1$ , temos o seguinte resultado.

**Definição 2.2** *Área como limite de somas duplas:*

$$A = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k \sum_j \Delta y_j \Delta x_k.$$

Para facilitar a compreensão do conceito 2.2 faremos uso do método intuitivo para memorizar de acordo com:

**Definição 2.3** As diretrizes para achar a área de uma região  $R_x$  por meio de uma Integral Dupla

I) Esboçar a região, conforme figura 2.2 e exibir um retângulo típico de dimensões  $dx$  e  $dy$ .

II) Mantendo  $x$  fixo, encarar  $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}$  como um operador que soma os elementos de área  $dy dx$  na mesma direção do eixo  $y$ , da fronteira inferior para a fronteira superior. A expressão  $\left[ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right] dx$  representa a área do retângulo vertical.

III) Aplicar o operador  $\int_a^b$  a  $\left[ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right] dx$ , o que equivale a tomar um limite de somas de áreas dos retângulos verticais no item II, de  $x = a$  a  $x = b$ .

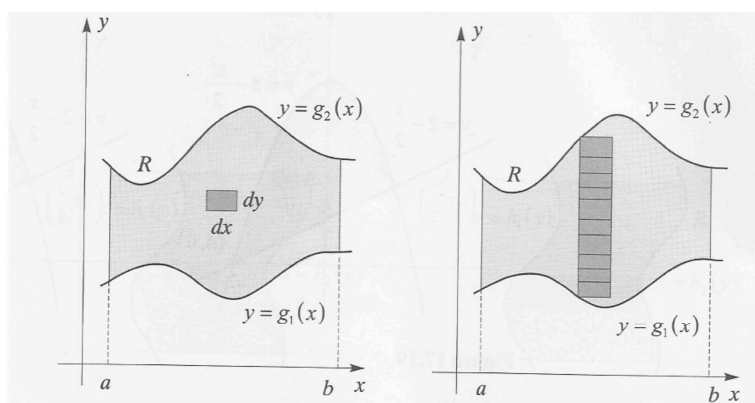


Figura 2.2.: Área de uma região  $R_x$

É necessário informar que as aplicações da definição 2.3 a uma região  $R_x$  ocorre no primeiro momento na integração em relação a  $y$ , e a segunda em relação a  $x$ . Assim conseguimos normalmente adquirir a área da região da figura 2.2 pelos métodos da seção. O motivo de utilizarmos uma Integral Dupla é para adquirir prática em lidar com limites de somas duplas. Este semelhante processo será empregado em problemas que não podem ser resolvidos por métodos de uma variável.

**Exemplo 2.1** Encontre a área  $A$  da região do plano  $xy$  delimitada pelos gráficos de  $2y = 16 - x^2$  e  $x + 2y = 4$ .

**Solução:**



Seguindo a definição 2.3 no item I, esboçamos a região e um retângulo típico de área  $dx dy$ , segundo a figura 2.3(i). Resolvemos as equações em relação a  $y$  em termos de  $x$  e rotulamos as fronteiras da região  $y = 2 - \frac{1}{2}x$  e  $y = 8 - \frac{1}{2}x^2$ . Tal como no item II, a integração parcial

$$\int_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} dy dx = \left[ \int_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} dy \right] dx.$$

representa a soma dos elementos de área  $dy dx$  da fronteira inferior até a fronteira superior. Isto nos dá a área do retângulo vertical na figura 2.3(ii).

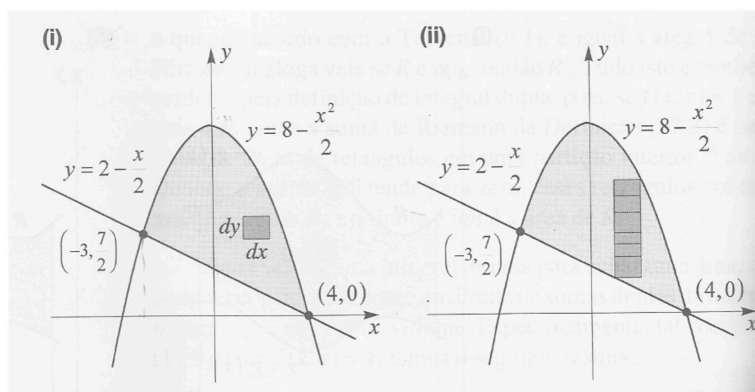


Figura 2.3.: Área do Retângulo vertical

Finalmente, utilizando o item III, aplicamos o operador  $\int_{-3}^4$ , o que equivale a tomar um limite de somas desses retângulos verticais de  $x = -3$  a  $x = 4$ :

$$A = \int_{-3}^4 \int_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} dy dx = \int_{-3}^4 [y]_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-3}^4 \left[ \left( 8 - \frac{x^2}{2} \right) - \left( 2 - \frac{x}{2} \right) \right] dx = \frac{343}{12} = 28,6.$$

Veremos a seguir diretrizes semelhantes a definição 2.3 para regiões  $R_y$

**Definição 2.4** Diretrizes para achar a área de uma região  $R_y$  por meio de uma integral dupla.

I) Esboçar a região, como na figura 2.4(i), e exibir um retângulo típico de dimensões  $dx$  e  $dy$ .

II) Mantendo  $y$  fixo, encarar  $\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx$  como um operador que soma os elementos de área  $dy dx$  na direção do eixo  $x$ , da fronteira esquerda para a fronteira direita. A expressão  $\left[ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \right] dy$  representa a área do retângulo horizontal na figura 2.4(ii).

III) Aplicar o operador  $\int_c^d$  a  $\left[ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \right] dy$ , o que equivale a tomar um limite de somas de áreas dos retângulos horizontais no item II, de  $y = c$  a  $y = d$ .

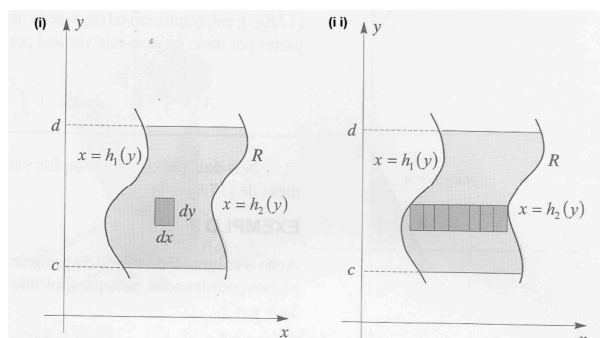


Figura 2.4.: gráficos de  $x = y^3$ ,  $x + y = 2$  e  $y = 0$

Quando aplicado a definição 2.4 na região  $R_y$  vemos que a integração da primeira variável é em relação a  $x$  e em seguida em relação a  $y$ . Vamos calcular por meios das definições citadas neste capítulo:

**Exemplo 2.2** Ache a área  $A$  da região do plano  $xy$  delimitada pelos gráficos de  $x = y^3$ ,  $x + y = 2$  e  $y = 0$ .

**Solução:**

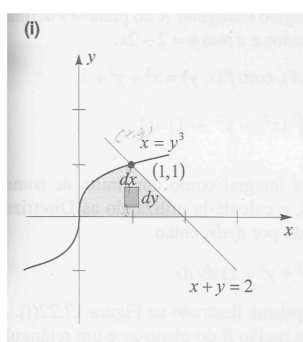


Figura 2.5.: Retângulo de área  $dx dy$

Na imagem acima há um esboço da região, juntamente com retângulo de área  $dx dy$ . Tal como na Definição 2.4, a integração parcial

$$\int_{y^3}^{2-y} dx dy = \left[ \int_{y^3}^{2-y} dx \right] dy$$

representa a soma de elementos de área  $dx dy$  da fronteira esquerda para a fronteira direita. Isto nos dá a área do retângulo horizontal da figura 2.6.

De acordo com o item 3 da definição 2.4, aplicamos o operador  $\int_0^1$ , o que equivale a tomar um limite do somas desses retângulos horizontais de  $y = 0$  a  $y = 1$ :

$$A = \iint_R dA = \int_0^1 \int_{y^3}^{2-y} dx dy = \int_0^1 [x]_{y^3}^{2-y} dy = \int_0^1 (2 - y - y^3) dy = \frac{5}{4}.$$

Poder-se-ia também achar a área aplicando o teorema 1.1; entretanto, em tal caso, seria necessário dividir  $R$  em duas partes por meio de uma reta vertical por  $(1, 1)$ . Teríamos

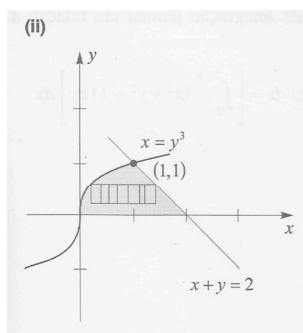


Figura 2.6.: Retângulo de área

então:

$$A = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{x}} dy dx + \int_1^3 \int_0^{2-x} dy dx.$$

**Exemplo 2.3** Calcule o volume  $V$  do sólido do primeiro octante delimitado pelos planos coordenados, parabolóide  $z = x^2 + y^2 + 1$  e pelo plano  $2x + y = 2$ .

**Solução**

De acordo com a imagem 2.7(i), o sólido está abaixo do parabolóide e acima da região retangular  $R$  do plano  $xy$  delimitado pelos eixos coordenados e a reta  $y = 2 - 2x$ . Pela definição 2.1, com  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ ,

$$V = \iint_R (x^2 + y^2 + 1) dA.$$

Podemos interpretar esta integral como um limite de somas duplas, e calculá-la utilizando as diretrizes 2.3. Representando  $dA$  por  $dy dx$ , então

$$(x^2 + y^2 + 1) dy dx.$$

representa o volume do prisma ilustrado na figura 2.7(i). A figura 2.7(ii) mostra a região do plano  $xy$  e um retângulo correspondente à seguinte integração parcial em relação a  $y$  (mantendo-se  $x$  fixo):

$$\int_0^{2-x} (x^2 + y^2 + 1) dy dx = \left[ \int_0^{2-x} (x^2 + y^2 + 1) dy \right] dx.$$

Esta fórmula representa a soma de volumes de prismas  $(x^2 + y^2 + 1) dy dx$  na direção paralela ao eixo  $y$  e dá o volume de uma lâmina cuja face é paralela ao plano  $yz$ . Finalmente, aplicamos o operador  $\int_0^1$ , isto é, tomamos um limite de somas desses volumes laminares de

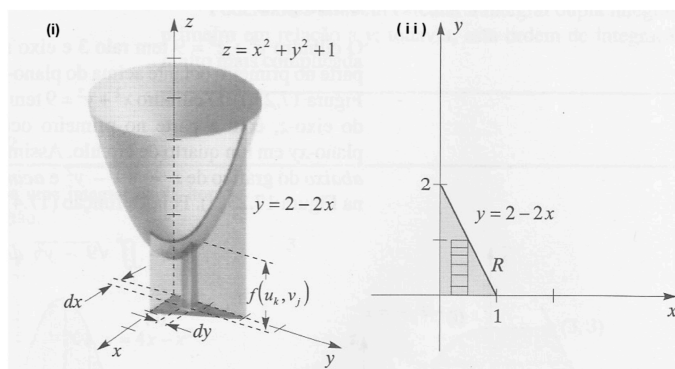


Figura 2.7.: Volume do prisma ilustrado

$x = 0$  e  $x = 1$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 \left[ \int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1) dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_0^{2-2x} dx \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{-14}{3} x^3 + 10x^2 - 10x + \frac{14}{3} \right) dx \\
 &= \left[ \frac{-7}{6} x^4 + \frac{10}{3} x^3 - 5x^2 + \frac{14}{3} x \right]_0^1 = \frac{11}{6}.
 \end{aligned}$$

Podemos também achar  $V$  integrando primeiro em relação a  $x$ , a integral iterada toma então a forma

$$V = \int_0^2 \int_0^{\frac{2-y}{2}} (x^2 + y^2 + 1) dx dy.$$

## 2.3. Densidade de Integrais Duplas

Vamos considerar uma sub-região retangular  $R_k$  que contenha o ponto  $P$  e tenha área  $\Delta A_k$ . Neste caso, a densidade de massa por área em  $P(x, y)$  é definida por

$$\sigma(x, y) = \lim_{\|\Delta A_k\| \rightarrow 0} \frac{\Delta m_k}{\Delta A_k}.$$

**Definição 2.5** As unidades de  $\sigma(x, y)$  são massa por unidade de área, como  $\text{Kg}/\text{m}^2$ . Vale para uma lâmina de fórmula:

$$m = \iint_R \sigma(x, y) dA.$$

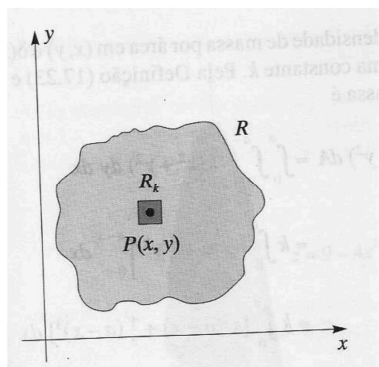


Figura 2.8.: Densidade da massa por área

**Exemplo 2.4** Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles com lados iguais de comprimentos  $a$ . Calcule a massa, se densidade de massa por área em um ponto  $P$  é diretamente proporcional ao quadrado da distância de  $P$  ao vértice oposto à hipotenusa.

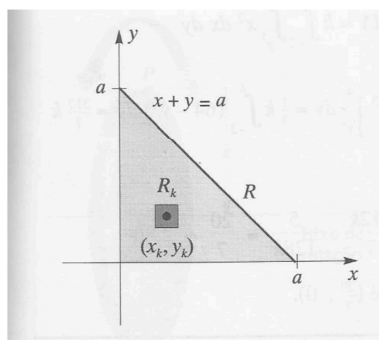


Figura 2.9.: Triângulo isósceles

**Solução:** é conveniente introduzir um sistema coordenado como o da Figura 2.9, com o vértice na origem e a hipotenusa do retângulo ao longo da reta  $x + y = a$ . A figura exhibe também um retângulo típico  $R_k$  (de área  $\Delta_k$ ) de uma partição interior com um ponto  $(x_k, y_k)$  no retângulo. Por hipótese, a densidade de massa por área em  $(x, y)$  é  $\sigma(x, y) = k(x^2 + y^2)$  para uma constante  $k$ . Pela definição 2.5 e o teorema 1.1, a massa é

$$\begin{aligned} m &= \iint_R k(x^2 + y^2) dA = \int_0^a \int_0^{a-x} k(x^2 + y^2) dy dx \\ &= k \int_0^a \left[ x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{a-x} dx \\ &= k \int_0^a \left[ x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx. \end{aligned}$$

A última integral é igual a  $\frac{1ka^4}{6}$ .

A seguir uma quantidade tal como massa ou carga elétrica distribuída de um modo contínuo, uniforme ou não, sobre uma porção do plano  $xy$ . Representamos esta função  $\sigma$  de duas variáveis como uma densidade para estas duas distribuições dimensionais se, para toda região admissível  $R$  no plano  $xy$ ,  $\iint_R \sigma(x,y) dx dy$  dá a soma da quantidade contida em  $R$ .

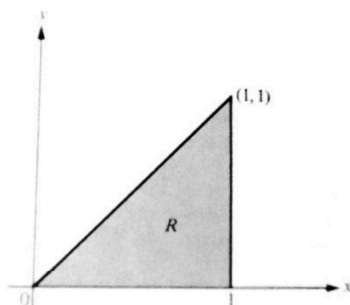


Figura 2.10.: Carga elétrica

**Exemplo 2.5** A carga elétrica é distribuída sobre a região  $R$  triangular da Figura 2.10, visto que a densidade de carga em qualquer ponto  $(x,y)$  em  $R$  é dada por

$$\sigma(x,y) = (x - x^2)(y - y^2) \text{Coulomb/cm}^2.$$

Encontre a soma total de carga elétrica na região  $R$ .

**Solução:** A carga total na superfície  $R$  é dada por

$$\begin{aligned} \iint_R \sigma(x,y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^x (x - x^2)(y - y^2) dy dx = \int_0^1 (x - x^2) \left( \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^x dx = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^3}{2} - \frac{5x^4}{6} + \frac{x^5}{3} \right) dx = \left( \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{18} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{72} \text{coulomb}. \end{aligned}$$

Agora, suponha que uma quantidade de carga elétrica é distribuída sobre uma região  $R$  no plano  $xy$  e que  $\sigma$  é a sua função de densidade. Escolha um ponto  $(a,b)$  na região  $R$  e considere a pequena área retangular  $\Delta R$  na Figura 2.11 como o centro em  $(a,b)$  com dimensões  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , e com área  $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$ . Se  $\Delta q$  representa a soma da quantidade contida na região  $\Delta R$ , então

$$\Delta q = \iint_{\Delta R} \sigma(x,y) dx dy.$$

Se  $\sigma$  é contínua e  $\Delta x$  e  $\Delta y$  são muito pequenos, então o valor de  $\sigma(x,y)$  é próximo do valor de  $\sigma(a,b)$  para todos os pontos  $(x,y)$  dentro do retângulo  $\Delta R$ ; isto é,  $\sigma(x,y) \approx \sigma(a,b)$

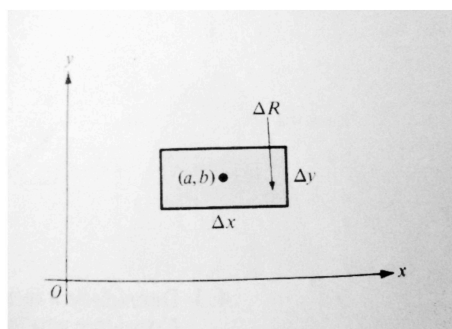


Figura 2.11.: Exemplo

para todos os pontos  $(x, y)$  em  $\Delta R$ .

Portanto, parece razoável que

$$\Delta q = \iint_{\Delta R} \sigma(x, y) dx dy \approx \iint_{\Delta R} \sigma(a, b) dx dy = \sigma(a, b) \iint_{\Delta R} dx dy,$$
 já que  $\sigma(a, b)$  é uma constante. Note que  $\iint_{\Delta R} dx dy = \Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$ ; logo,

$$\Delta q \approx \sigma(a, b) \Delta A = \sigma(a, b) \Delta x \Delta y.$$

Portanto,

$$\sigma(a, b) = \frac{\Delta q}{\Delta A},$$

presumivelmente com uma aproximação muito melhor à medida que  $\Delta x$  e  $\Delta y$  são suficientemente pequenos. Consequentemente, a densidade  $\sigma(a, b)$  nos pontos  $(a, b)$  pode ser interpretada como o valor limite da soma de quantidade por unidade de área em uma pequena região  $\Delta R$  em volta do ponto  $(a, b)$  quando  $\Delta R$  "tende a zero". Em outras palavras,

$$\sigma(a, b) = \frac{dq}{dA} \text{ ou } dq = \sigma(a, b) dx dy.$$

Podemos interpretar a última fórmula como dando a quantidade "infinitesimal"  $dq$  de matéria contida em um retângulo infinitesimal de dimensões  $dx$  e  $dy$ , com centro no ponto  $(a, b)$ .

## 2.4. Momentos e Centros de Massa

Vamos utilizar integrais duplas para estender os conceitos de uma lâmina não-homogênea  $L$  que tenha a forma de uma região  $\mathbf{R}$  do plano  $xy$ . Se a densidade de massa por área no ponto  $(x, y)$  é  $\sigma(x, y)$  e  $\sigma$  é uma função contínua em  $\mathbf{R}$ , então, pela a definição 2.5, a massa  $m$  de  $L$  é dada por

$$m = \iint_R \sigma(x, y) dA.$$

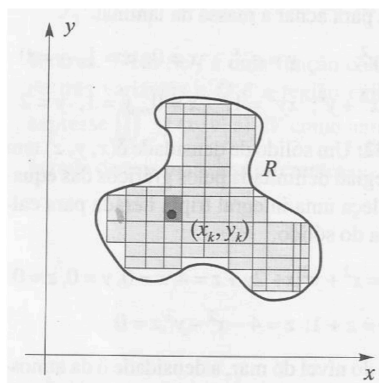


Figura 2.12.: Momento lâmina

Seja uma partição interior  $P = R_k$  de  $\mathbf{R}$  e, para cada  $k$ , seja  $(x_k, y_k)$  um ponto arbitrário de  $R_k$ . Como  $\sigma$  é contínua, uma pequena variação em  $(x, y)$  acarreta uma pequena variação na densidade  $\sigma(x, y)$ , isto é,  $\sigma$  é quase constante em  $R_k$ . Logo, se  $\|P\| \rightarrow 0$ , a massa  $\Delta m_k$  que corresponde a  $R_k$  pode ser aproximada por  $\sigma(x_k, y_k)\Delta A_k$  em que  $\Delta A_k$  é a área de  $R_k$ . Admitindo a massa  $\Delta m_k$  concentrada em  $(x_k, y_k)$ , então o **momento** deste elemento de  $L$  em relação ao eixo  $x$  é o produto  $y_k\sigma(x_k, y_k)\Delta A_k$ . Como a soma dos momentos  $\sum_k y_k\sigma(x_k, y_k)\Delta A_k$ , deve aproximar-se do **momento da lâmina**, definimos o momento  $M_k$  de  $L$  em relação ao eixo  $x$  como segue:

$$M_k = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k y_k \sigma(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R y \sigma(x, y) dA.$$

Da mesma forma, o momento  $M_k$  de  $L$  em relação ao eixo  $y$  é

$$M_k = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k x_k \sigma(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R x \sigma(x, y) dA.$$

Tal como na definição A.3 do apêndice, definimos o centro de massa (ou centro de gravidade) da lâmina como o ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$  tal que  $\bar{x} = \frac{M_y}{m}$ ,  $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$ .

**Definição 2.6** *Seja  $L$  uma lâmina com a forma de uma região  $\mathbf{R}$  do plano  $xy$ . Se a densidade de massa por área em  $(x, y)$  é  $\sigma(x, y)$  e se  $\sigma$  é contínua em  $\mathbf{R}$ , então a massa  $m$ , os momentos  $M_x$  e  $M_y$  e o centro de massa  $(\bar{x}, \bar{y})$  são*

$$(I) m = \iint_R \sigma(x, y) dA$$



$$(II) M_x = \iint_R y\sigma(x,y)dA, M_y = \iint_R x\sigma(x,y)dA$$

$$(III) \bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_R x\sigma(x,y)dA}{\iint_R \sigma(x,y)dA}, \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_R y\sigma(x,y)dA}{\iint_R \sigma(x,y)dA}$$

Se  $L$  é homogênea, então a densidade de massa por área  $\sigma(x,y)$  é constante e pode ser cancelada em 2.6(III).

Assim, como na definição de volume de um disco circular A.4 do apêndice, o centro de massa de uma lâmina homogênea depende apenas de sua forma;  $(\bar{x}, \bar{y})$  é o centroide da região  $R$ .

**Exemplo 2.6** Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles com lados iguais de comprimento  $a$ . A densidade de massa por área no ponto  $P$  ao vértice oposto á hipotenusa. Ache o centro de massa.

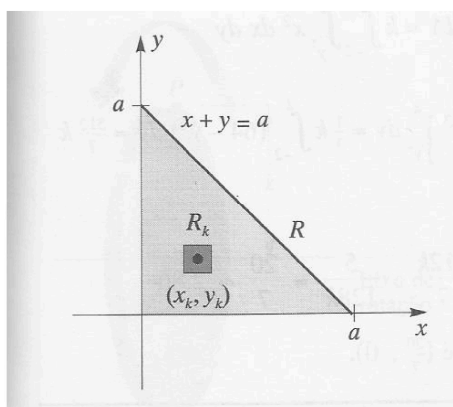


Figura 2.13.: Triângulo isósceles

**Solução:**

A lâmina é a mesma que a do Exemplo 2.4 da definição 2.3, em que colocamos o triângulo conforme a figura 2.13. Utilizando a densidade de massa por área  $\sigma(x,y) = k(x^2 + y^2)$  obtivemos  $m = \frac{1ka^4}{6}$ . Pela definição 2.6(II),

$$M_y = \iint_R xk(x^2 + y^2)dA = \int_0^a \int_0^{a-x} xk(x^2 + y^2)dydx = \frac{ka^5}{15}$$

Pela definição 2.6(III);

$$\bar{x} = \frac{\frac{1ka^5}{15}}{\frac{1ka^4}{6}} = \frac{2a}{5}.$$

Analogamente,  $M_x = \frac{1ka^5}{15}$  e  $\bar{y} = \frac{2a}{5}$ . Assim, o centro de massa que é ponto de equilíbrio da lâmina é  $\left(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$ .

**Exemplo 2.7** Uma lâmina tem a forma da região  $R$  do plano  $xy$  delimitada pela parábola  $x = y^2$  e a reta  $x = 4$ . A densidade de massa por área no ponto  $P = (x, y)$  é diretamente proporcional à distância do eixo  $y$  a  $P$ . Ache o centro de massa

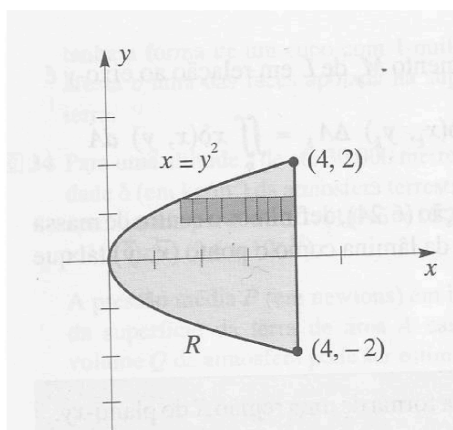


Figura 2.14.: Ponto de equilíbrio

**Solução:**

A Figura 2.14 ilustra a região. Por hipótese, a densidade de massa por área em  $(x, y)$  é  $\sigma(x, y) = kx$  para uma constante  $k$ . Segue-se da forma de  $\sigma$  e da simetria da região, que o centro de massa está sobre o eixo  $x$ , isto é,  $\bar{y} = 0$ . Pela definição (2.6)(I) e integrando primeiro em relação a  $x$ , conforme indicado pela linha de retângulos na Figura, temos

$$m = \iint_R kx \, dA = k \int_{-2}^2 \int_{y^2}^4 x \, dx \, dy = k \int_{-2}^2 \left[ \frac{1x^2}{2} \right]_{y^2}^4 dy = \frac{1k}{2} \int_{-2}^2 (16 - y^4) dy = \frac{128k}{5}.$$

Pela definição (2.6)(II),

$$M_y = \iint_R x(kx) \, dA = k \int_{-2}^2 \int_{y^2}^4 x^2 \, dx \, dy = k \int_{-2}^2 \left[ \frac{1x^3}{3} \right]_{y^2}^4 dy = \frac{1k}{3} \int_{-2}^2 (64 - y^6) dy = \frac{512k}{7}.$$

Consequentemente,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{512k}{7} \cdot \frac{5}{128k} = \frac{20}{7} = 2,86.$$

Logo, o centro de massa é  $\left( \frac{20}{7}, 0 \right)$ .

**Definição 2.7 Inércia** é uma propriedade geral da matéria. Considere um corpo não submetido a ação de forças ou submetido a um conjunto de forças de resultante nula, nesta condição esse corpo não sofre varia de velocidade.

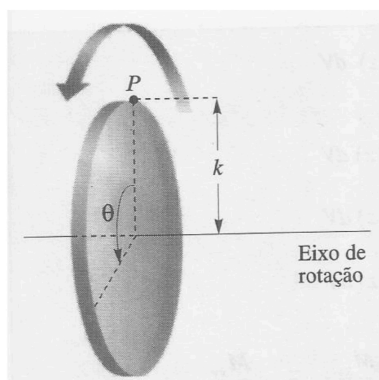


Figura 2.15.: superfície de evolução

Os momentos  $M_x$  e  $M_y$  na definição 2.6 são também chamados primeiros momentos de  $L$  em relação aos eixos coordenados. Tomando os quadrados das distâncias dos eixos coordenados, obtemos os segundos momentos de inércia  $I_x$  e  $I_y$  em relação ao eixo  $x$  e ao eixo  $y$ , respectivamente. Ao adicionar  $I_0 = I_x + I_y$  é o momento polar de inércia, ou momento de inércia em relação à origem. Na fórmula seguinte,  $I_0$  pode ser obtido como limite de uma soma, utilizado-se o quadrado da distância da origem  $a(x_k, y_k)$  na figura 2.15.

**Definição 2.8** *Momentos de inércia de uma lâmina*

$$(I) I_x = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k y_k^2 \sigma(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R y^2 \sigma(x, y) dA$$

$$(II) I_y = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k x_k^2 \sigma(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R x^2 \sigma(x, y) dA$$

$$(III) I_0 = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k (x_k^2 + y_k^2) \sigma(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R (x^2 + y^2) \sigma(x, y) dA$$

**Exemplo 2.8** *Uma lâmina tem a forma semicircular da figura 2.16. A densidade de massa por área é diretamente proporcional à distância do eixo  $x$ . Ache o momento de inércia em relação ao eixo  $x$ .*

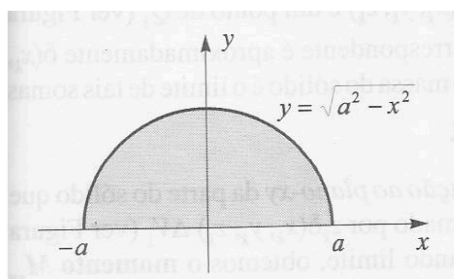


Figura 2.16.: semi-circulo

**Solução:**

Por hipótese, a densidade de massa por área em  $(x, y)$  é  $\sigma(x, y) = ky$ . Aplicando a definição 2.8, vemos que o momento de inércia em relação ao eixo  $x$  é

$$I_x = \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2(ky) dy dx = k \int_{-a}^a (a^2 - 2a^2x^2 + x^4) dx = \frac{4ka^5}{15}.$$

Finalizaremos este capítulo com uma demonstração do teorema:

**Teorema 2.1 Teorema de Pappus.** *Seja  $R$  uma região de um plano situada inteiramente a um lado de uma reta  $l$  do plano. Fazendo  $R$  envolver uma vez em torno de  $l$ , o volume do sólido resultante é o produto da área de  $R$  pela distância percorrida pelo centroide de  $R$ .*

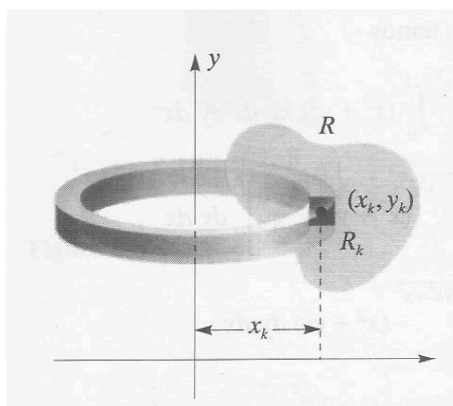


Figura 2.17.: Casca Cilíndrica

**Demonstração:**

Podemos admitir que  $l$  seja o eixo  $y$  e  $R$  uma região no primeiro quadrante, conforme figura 2.17. Seja  $R_k$  uma partição interior  $P$  de  $R$ , e denotemos por  $\Delta A_k$  a área de  $R_k$ . Para cada  $k$ , escolhamos  $(x_k, y_k)$  como centro do retângulo  $R_k$ .

Fazendo  $R$  envolver em torno do eixo  $y$ , então, conforme Figura 2.17,  $R_k$  gera uma casca cilíndrica de volume  $2\pi x_k \Delta A_k$ . Assim, o volume  $V$  do sólido gerado por  $R$  é

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k 2\pi x_k \Delta A_k = \iint_R 2\pi x dA.$$

Se aplicamos a definição 2.6 aos centroides, tomando  $\sigma(x, y) = 1$  e  $m = A$ , então

$$V = 2\pi \iint_R x dA = 2\pi M_y = 2\pi \bar{x} A.$$

Podemos, assim, achar o volume  $V$  multiplicando a área  $A$  de  $R$  pela distância  $2\pi \bar{x}$  percorrida pelo centroide quando  $R$  desloca-se uma vez em torno do eixo  $y$ .

■

### 3 Integral Dupla em Coordenadas Polares

Neste terceiro capítulo mostraremos como calcular uma integral dupla sobre a região  $R$  delimitada de coordenadas cartesianas para uma integral iterada equivalente e expressa em coordenadas polares.

#### 3.1. Coordenadas Polares

Vimos até agora integral dupla de uma função sobre uma região  $\mathbf{R}$  no plano  $\mathbb{R}^2$ , onde começamos cortando  $\mathbf{R}$  em retângulos cujos lados eram paralelos aos eixos coordenados, mas no momento vamos utilizar coordenadas polares em setores circulares considerando a região polar elementar da Figura 3.1, a qual é delimitada por arcos de círculos de raios  $r_1$  e  $r_2$ , com centro na origem e por dois raios emanados da origem. Se  $\Delta\theta$  é a medida em radianos do ângulo entre os raios e se  $\Delta r = r_2 - r_1$ , então a área  $\Delta A$  da região sombreada é

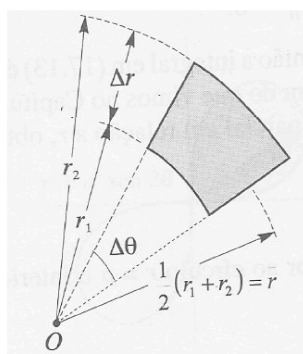


Figura 3.1.:  $\Delta A = \bar{r}\Delta r\Delta\theta$

$$\Delta A = \frac{1}{2}r_2^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_1^2\Delta\theta. \quad (3.1)$$

Denotando por  $\bar{r}$  o raio médio  $\frac{1}{2}(r_2 + r_1)$  então

$$\Delta A = \bar{r}\Delta r\Delta\theta. \quad (3.2)$$

Em seguida, consideremos a região  $\mathbf{R}$  do tipo ilustrada na Figura 3.2(i), delimitada por dois raios que fazem ângulos positivos  $\alpha$  e  $\beta$  com eixo polar, pelos gráficos de suas equações polares  $r = g_1(\theta)$  e  $r = g_2(\theta)$ , em que  $g_1$  e  $g_2$  são funções contínuas e  $g_1(\theta) \leq g_2(\theta)$  para  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ . Se  $\mathbf{R}$  é subdividida por meio de arcos circulares e raios conforme a Figura 3.2(ii), então a coleção de regiões polares elementares  $R_1, R_2, \dots, R_n$  que estão complementares dentro de  $\mathbf{R}$  é chamada uma partição polar interior  $P$  de  $\mathbf{R}$ . A norma  $\|P\|$  da partição é o comprimento da maior diagonal dos  $R_k$ . Escolhido um ponto  $(r_k, \theta_k)$  em  $R_k$  tal que  $r_k$  seja o raio médio, então,

$$\Delta A_k = r_k \Delta r_k \Delta \theta_k. \quad (3.3)$$

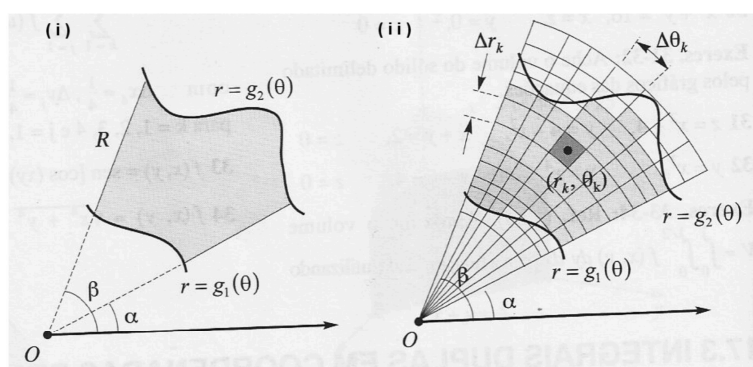


Figura 3.2.: Partição polar interior

Se  $f$  é uma função contínua das variáveis polares  $r$  e  $\theta$ , então pode-se provar o seguinte.

### Teorema 3.1

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r_k \Delta \theta_k = \iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta.$$

**Observação 3.1** Note que o integrando à direita do teorema 3.1 é o produto de  $f(r, \theta)$  e  $r$ . Isto porque  $\Delta A_k$  é igual a  $r_k \Delta r_k \Delta \theta_k$ .

Vamos considerar a integral iterada pelo teorema 3.1 um limite de somas duplas. Portanto na primeira manteremos  $\theta$  fixo e somamos ao longo da região em forma de cunha exibido na Figura 3.3, do gráfico de  $g_1$  até o gráfico de  $g_2$ . Para a segunda somatória, varremos a região fazendo  $\theta$  variar de  $\alpha$  a  $\beta$ . A integral iterada denota o limite dessas somas quando  $\|P\| \rightarrow 0$ .

Se  $f(r, \theta) = 1$  em toda  $\mathbf{R}$ , então a integral em 3.1 é igual à área de  $\mathbf{R}$ . Após efetuar a integração parcial em relação a  $r$ , obtemos a fórmula do teorema A.5 .

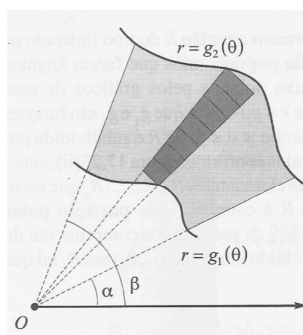


Figura 3.3.: Região em forma de cunha

**Exemplo 3.1** Encontre a área da região  $R$  exterior ao círculo  $r = a$  e interior ao círculo  $r = 2a \operatorname{sen} \theta$

**Solução:**

A Figura 3.4 é um esboço da região, juntamente com uma cunha de regiões polares elementares obtidas somando-se da fronteira interior  $r = a$  à fronteira exterior  $r = 2a \operatorname{sen} \theta$ . Varremos então a região fazendo  $\theta$  variar de  $\frac{\pi}{6}$  a  $\frac{5\pi}{6}$ . (Um erro comum consiste em fazer  $\theta$  variar de 0 a  $\pi$ ). Pelo Teorema 3.3 com  $f(r, \theta) = 1$ ,

$$A = \iint_R dA = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_a^{2a \operatorname{sen} \theta} r dr d\theta.$$

Para simplificar o cálculo, podemos utilizar a simetria de  $R$  em relação do eixo  $y$ . Neste caso, fazemos  $\theta$  variar de  $\frac{\pi}{6}$  a  $\frac{\pi}{2}$  e duplicamos o valor da integral. Assim,

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_a^{2a \operatorname{sen} \theta} r dr d\theta = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1r^2}{2} \right]_a^{2a \operatorname{sen} \theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4a^2 \operatorname{sen}^2 \theta - a^2) d\theta \\ &= a^2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left( 4 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - 1 \right) d\theta \\ &= a^2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \cos 2\theta) d\theta \\ &= a^2 \left[ \theta - \operatorname{sen} 2\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a^2 \left[ \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) - \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \\
 &= a^2 \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1,9a^2.
 \end{aligned}$$

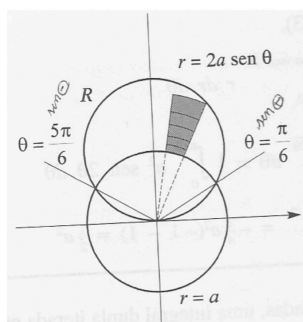


Figura 3.4.: Cunha típica de regiões polares

**Exemplo 3.2** Calcule a área da região  $R$  delimitada por um laço da lemniscata  $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ ,  $a > 0$ .

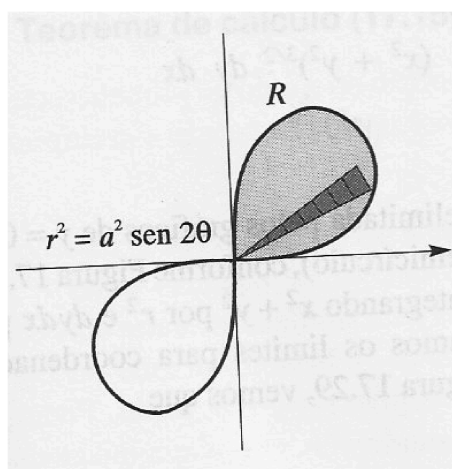


Figura 3.5.: Laço de lemniscata

**Solução:** A Figura 3.5 ilustra a lemniscata, juntamente com uma cunha de regiões polares elementares obtida somando-se da origem ( $r = 0$ ) à fronteira  $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$  de  $R$  no primeiro quadrante. Varremos então o laço fazendo  $\theta$  variar de  $0$  à  $\frac{\pi}{2}$ . (Note que  $r$  não é definido se  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  ou  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ).

Pelo Teorema 3.3



$$A = \iint_R dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1r^2}{2} \right]_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin 2\theta d\theta = \frac{1a^2}{2}.$$

Com condições adequadas podemos transformar uma integral dupla iterada em coordenadas regulares por uma integral dupla em coordenadas polares. Começamos substituindo as variáveis  $x$  e  $y$  no integrando por  $r \cos \theta$  e  $r \sin \theta$ . Em seguida, na integral iterada,  $dydx$  ou  $dxdy$  é substituído por  $rdrd\theta$  ou  $rd\theta dr$ . A fórmula seguinte indica a forma de um integrando típico. O sinal de integral dupla  $\iint_R$  deve ser substituído por sinais convenientes de integrais iteradas, e  $dA = dxdy$  por  $rdrd\theta$ .

### Teorema 3.2

$$\iint_R f(x,y) dydx = \iint_R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Se o integrando  $f(x,y)$  de uma integral dupla  $\iint_R f(x,y) dA$  contém a expressão  $x^2 + y^2$  ou se a região  $\mathbf{R}$  envolve arcos circulares com centros na origem, então a introdução de coordenadas polares em geral conduz a um cálculo mais simples, porque  $x^2 + y^2 = r^2$  e os arcos circulares têm equações da forma  $r = k$ . O exemplo seguinte ilustra o caso.

### Exemplo 3.3 Utilize coordenadas polares para calcular

$$\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dydx.$$

**Solução:** A região de integração é delimitada pelos gráficos de  $y = 0$  (o eixo- $x$ ) e

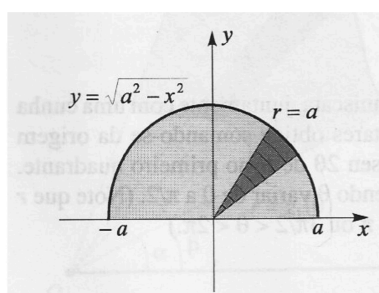


Figura 3.6.: Arcos circulares

$y = \sqrt{a^2 - x^2}$  (um semicírculo), de acordo com a Figura 3.6. Vamos substituir no integrando  $x^2 + y^2$  por  $r^2$  e  $dydx$  por  $rdrd\theta$ . Em seguida, passamos os limites para coordenadas polares. Referindo-nos à figura 3.6, vemos que

$$\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dydx = \int_0^{\pi} \int_0^a r^3 r dr d\theta = \int_0^{\pi} \left[ \frac{1r^5}{5} \right]_0^a d\theta = \frac{1a^5}{5} \int_0^{\pi} d\theta = \frac{1\pi a^5}{5}.$$

As coordenadas polares também podem ser usadas para integrais duplas se  $\mathbf{R}$  é uma região do tipo ilustrado na Figura 3.7(i). Neste caso  $\mathbf{R}$  é delimitada pelos arcos de dois círculos de raios  $a$  e  $b$  e pelos gráficos de duas equações polares e, em que  $h_1$  e  $h_2$  são funções contínuas  $h_1(r) \leq h_2(r)$  para  $a \leq r \leq b$ . Se  $f$  é função de  $r$  e se  $f$  é contínua em  $\mathbf{R}$ , então o limite na definição 3.1 existe e a fórmula de cálculo é dada no próximo teorema.

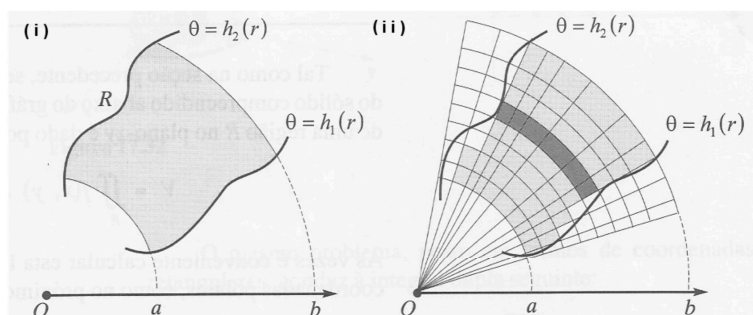


Figura 3.7.: círculos de raio  $a$  e  $b$

**Teorema 3.3** 
$$\iint_{\mathbf{R}} f(r, \theta) dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r, \theta) r d\theta dr.$$

A integral iterada no teorema 3.3 pode ser interpretada em termos de limites de somas duplas. Primeiro mantemos  $r$  fixo e somamos ao longo de um arco circular ilustrado pela região cinza da Figura 3.7(ii). Em seguida, somamos os termos em  $\mathbf{R}$  que correspondendo às regiões em forma de anel, de  $r = a$  a  $r = b$ .

**Exemplo 3.4** Ache a área da menor das regiões delimitadas pelo eixo polar, pelos gráficos de  $r = 1$  e  $r = 2$  e pela parte da espiral  $r\theta = 1$  de  $\theta = \frac{1}{2}$  a  $\theta = 1$ .

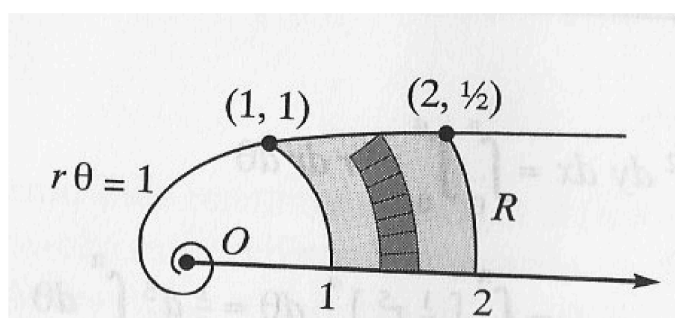


Figura 3.8.: Eixo polar

**Solução:**

A figura 3.8 mostra a região  $\mathbf{R}$  juntamente com um anel de regiões polares elementares. Apliquemos o teorema 3.3 com  $f(r, \theta) = 1$ :

$$\iint_R dA = \int_1^2 \int_0^{\frac{1}{r}} r d\theta dr = \int_1^2 r \left[ \theta \right]_0^{\frac{1}{r}} dr = \int_1^2 r \left( \frac{1}{r} \right) dr = \int_1^2 dr = \left[ r \right]_1^2 = 2 - 1 = 1.$$

Tal como na seção precedente, se  $f(x,y) \geq 0$ , o volume  $V$  do sólido compreendido abaixo do gráfico de  $z = f(x,y)$  e acima de uma região  $R$  no plano  $xy$  é dado por

$$V = \iint_R f(x,y) dA.$$

Às vezes é conveniente calcular esta integral dupla utilizando coordenadas polares, como no próximo exemplo.

**Exemplo 3.5** Encontre o volume  $V$  do sólido delimitado pelo parabolóide  $z = 4 - x^2 - y^2$  e o plano  $xy$ .

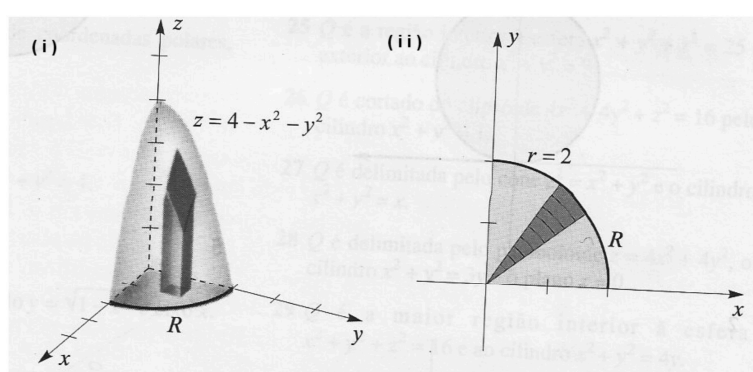


Figura 3.9.: Sólido delimitado

**Solução:**

A Figura 3.9(i) ilustra a porção do sólido no primeiro octante. por simetria, basta achar o volume desta porção e multiplicar o resultado por 4. A região  $R$  do plano  $xy$  é delimitada pelos eixos coordenados e por um quarto do círculo de equação polar  $r = 2$ , conforme figura 3.9(ii), na qual também se ilustra uma cunha de regiões polares elementares. A base do prisma na figura 3.9(i) corresponde a uma região polar elementar. Podemos obter o volume do sólido fazendo  $r^2 = x^2 + y^2$  e a mudança de variáveis dada pela fórmula.

$$V = 4 \iint_R (4 - x^2 - y^2) dA = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ 2r^2 - \frac{1r^4}{4} \right]_0^2 d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 d\theta = 16 \left[ \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi.$$

O mesmo problema, posto em termos de coordenadas regulares, conduz à integral dupla seguinte:

$$V = 4 \iint_R (4 - x^2 - y^2) dA = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - y^2) dy dx.$$

Contudo o cálculo da última integral deve ter o valor suficiente para convencer qualquer um da vantagem do uso de coordenadas polares em algumas questões problemas.

### 3.2. Área de uma Superfície

Vamos conhecer um método para achar área de superfície mais gerais. Suponhamos que  $f(x, y) \geq 0$  em toda a região  $\mathbf{R}$  o plano  $xy$  e que  $f$  tenha derivadas parciais primeiras contínuas em  $\mathbf{R}$ . Denotamos por  $\mathbf{S}$  a porção do gráfico de  $f$  cuja projeção no plano  $xy$  é  $\mathbf{R}$ , segundo exposto na Figura 3.10. Para simplificar, admitiremos que não haja nenhum vetor normal a  $\mathbf{S}$  paralelo ao plano  $xy$ . Queremos conceituar a área  $A$  de  $\mathbf{S}$  e obter uma fórmula para calcular  $A$ .

Seja  $P = R_k$  uma partição interior de  $\mathbf{R}$ , sejam  $\Delta x_k$  e  $\Delta y_k$  as dimensões do retângulo  $R_k$ . Para cada  $k$ , escolhamos um ponto arbitrário  $(x_k, y_k, 0)$  em  $R_k$  e seja  $B_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$  o ponto correspondente em  $\mathbf{S}$ . Consideremos em seguida o plano tangente a  $\mathbf{S}$  em  $B_k$ , e sejam  $\Delta T_k$  e  $\Delta S_k$  as área das regiões no plano tangente em  $\mathbf{S}$ , respectivamente, obtidas projetando-se  $R_k$  verticalmente para cima. Se a norma  $\|P\|$  da partição é pequena, então  $\Delta T_k$  é uma aproximação da área  $A$  de  $\mathbf{S}$ . Esta aproximação deve melhorar à medida que  $\|P\|$  tende a para 0.

**Definição 3.1**  $A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k \Delta T_k$ .

Para encontrar uma fórmula de integral para  $A$ , escolhamos  $(x_k, y_k, 0)$  como o canto de  $R_k$  mais próximo da origem. De acordo com a visão isolada de  $\Delta T_k$  da figura 3.10, consideremos os valores  $a$  e  $b$  com ponto inicial  $B_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$  tangentes aos traços de  $S$  nos planos  $y = y_k$  e  $x = x_k$  respectivamente. Pelo Teorema A.7 do apêndice, os coeficientes angulares das retas determinadas por  $a$  e  $b$  nesses planos são  $f_x(x_k, y_k)$  e  $f_y(x_k, y_k)$ , respectivamente. Segue-se que

$$a = \Delta x_k i + f_x(x_k, y_k) \Delta x_k K.$$

$$b = \Delta y_k j + f_y(x_k, y_k) \Delta y_k K.$$

Pela definição A.6 do apêndice, a área  $\Delta T_k$  do paralelogramo definido por  $a$  e  $b$  e  $\|a \times b\|$ . Como

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Delta x_k & 0 & f_x(X_k, Y_k) \Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & f_y(X_k, Y_k) \Delta y_k \end{vmatrix}.$$

Temos,

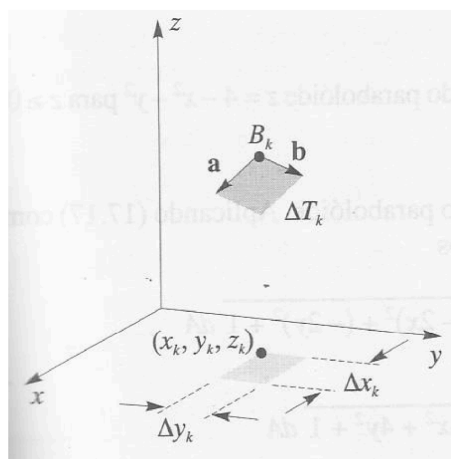


Figura 3.10.: paralelogramo

$$a \times b = -f_x(x_k, y_k)\Delta x_k \Delta y_k i - f_y(x_k, y_k)\Delta x_k \Delta y_k j + \Delta x_k \Delta y_k k.$$

Consequentemente,

$$\Delta T_k = \|a \times b\| = \left( \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1} \right) \Delta x_k \Delta y_k.$$

onde  $\Delta x_k \Delta y_k = \Delta A_k$ . Se, como na definição 3.1, tornarmos o limite de somas dos  $\Delta T_k$  e aplicamos a definição de integral dupla, obteremos o seguinte:

**Definição 3.2** *Integral para a área de uma superfície*

$$A = \iint_R \left( \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} \right) dA.$$

A fórmula da definição 3.2 é válida também se  $f(x, y) \leq 0$  em  $\mathbf{R}$ .

**Exemplo 3.6** *Seja  $R$  a região triangular no plano  $xy$  de vértices  $(0,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  e  $(1,1,0)$ . Ache a área da superfície da porção do gráfico de  $z = 3x + y^2$  que está acima de  $\mathbf{R}$ .*

**Solução:**

*A região  $\mathbf{R}$  no plano  $xy$  é limitada pelos gráficos de  $y = x$ ,  $x = 0$  e  $y = 1$ , conforme Figura 3.11. Fazendo  $f(x, y) = 3x + y^2$  e aplicando (3.2), temos*

$$\begin{aligned} A &= \iint_R \sqrt{3^2 + (2y)^2 + 1} dA = \int_0^1 \int_0^y (10 + 4y^2)^{\frac{1}{2}} dx dy \\ &= \int_0^1 (10 + 4y^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} [x]_0^y dy \end{aligned}$$

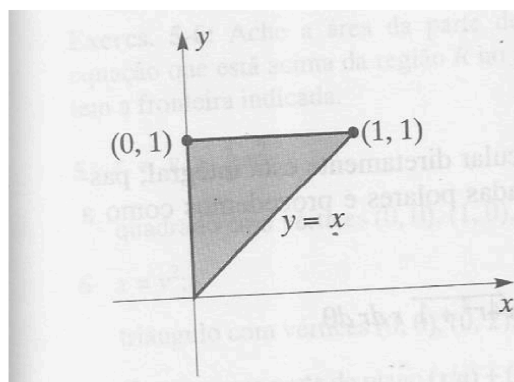


Figura 3.11.: Região triangular

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 (10 + 4y^2) \frac{1}{2} y dy \\
 &= \left[ \frac{1}{12} (10 + 4y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\
 &= \frac{14^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}}}{12} = 1,7 \text{unidade de área.}
 \end{aligned}$$

**Exemplo 3.7** Encontre a área da superfície do parabolóide  $z = 4 - x^2 - y^2$  para  $z \geq 0$ .

**Solução:**

A Figura 3.12 ilustra o parabolóide. Aplicando (3.2) com  $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ , temos

$$A = \iint_R \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1} dA = \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA.$$

em que  $R$  é a região do plano  $xy$  delimitada pelo círculo  $x^2 + y^2 = 4$ . Por simetria, podemos achar a área correspondente à parte de  $R$  no primeiro quadrante, conforme Figura 3.12 e então multiplicar este resultado por 4. Com uma integral iterada, temos

$$A = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dy dx.$$

Seria muito trabalhoso calcular diretamente esta integral; passamos, pois, para coordenadas polares e procedemos como a seguir:

$$\begin{aligned}
 A &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 d\theta \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{12} (17^{\frac{3}{2}} - 1) d\theta
 \end{aligned}$$

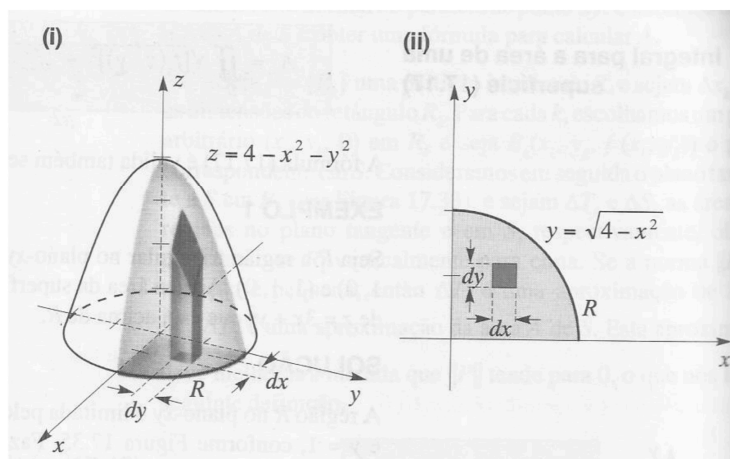


Figura 3.12.: Área da superfície do parabolóide

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3}(17^{\frac{3}{2}} - 1) \left[ \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{6}(17^{\frac{3}{2}} - 1) = 36,2.
 \end{aligned}$$

Podem-se estabelecer fórmulas análogas ao caso de a superfície ter projeções convenientes nos planos  $yz$  ou  $xz$ . Assim, se  $\mathbf{S}$  é o gráfico de uma equação  $y = g(x, z)$  e se a projeção no plano  $xz$  é  $R_1$ , então:

$$A = \iint_R \sqrt{[g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2 + 1} dA.$$

Pode-se estabelecer fórmula análoga se  $\mathbf{S}$  é dado por  $x = h(y, z)$ .

## Considerações Finais

Neste trabalho encontramos algumas noções de integral dupla a qual mostrou definições e teoremas para solucionar situações do cotidiano. Por meio desta ferramenta expomos algumas aplicações que possa facilitar a compreensão dos temas pesquisados os quais vemos algumas questões que esclarecem a importância deste tema em outras áreas do conhecimento, assim facilitando a ampliação e o progresso de diversas ciências.

Tendo em cada capítulo explicações com uma linguagem clara para facilitar a compreensão da disciplina para os leitores que tem dificuldade em assimilar o conteúdo de integrais duplas. Vimos também a abordagem dos cálculos em superfície difíceis por serem áreas irregulares e calculadas com facilidade através destes procedimentos.

Este trabalho tornou-se prazeroso à medida que buscava conhecimento para sua elaboração, devido ser um tópico complicado no período da graduação, motivou-me a procura de uma forma para ajudar os futuros graduandos.



## Referências

- FLEMMING, D. M. GONÇALVES, M. B. **Cálculo B**. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Editora Pearson Prentice Hall, 2007.
- MCCALLUM, WILLIAN G....[et al]; **Cálculo de Várias Variáveis** . São Paulo: Editora Blucher, 1997.
- SWOKOWSKI, EARL. WILLIAM **Cálculo com Geometria Analítica**. 2<sup>a</sup> ed. Volume I, São Paulo: Editora Makron Books, 1994.
- SWOKOWSKI, EARL. WILLIAM **Cálculo com Geometria Analítica**. 2<sup>a</sup> ed. Volume II São Paulo: Editora Makron Books, 1994.
- TAUSK, Daniel V. **Notas Para o Curso de Medidas de Integração**.Disponível em:  
<http://www.ime.usp.br/tausk/texts/NotasMedida.pdf>  
(Acessado em 29/03/2014 às 18h:30min).

# A Apêndice

## A.1. Teorema 6.1

Se  $f$  e  $g$  são contínuas e  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x$  em  $[a, b]$ , então a área  $A$  da região delimitada pelos gráficos de  $f$ ,  $g$ ,  $x = a$  e  $x = b$  é

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Cálculo com Geometria Analítica vol. I Swokowski pag.389

## A.2. Definição

Volumes por secções transversas

Se  $S$  um sólido delimitado por planos que são perpendiculares ao eixo  $x$  em  $a$  e  $b$ . Se, para todo  $x$  em  $[a, b]$ , a área por secções transversas de  $S$  é dada por  $A(x)$ , com  $A$  contínua em  $[a, b]$ , então o volume de  $S$  é

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Cálculo com Geometria Analítica vol. I Swokowski pag.419

## A.3. Definição 6.24

Seja  $S$  um sistema de massas pontuais  $m_1, m_2, \dots, m_n$  localizadas em  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  em um plano coordenado, e denotamos por  $m = \sum_{k=1}^n m_k$  a massa total.

i) O momento de  $S$  em relação ao eixo  $x$  é

$$M_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k$$

ii) O momento de  $S$  em relação ao eixo  $y$  é

$$M_y = \sum_{K=1} m_k y_k$$

iii) O centro de massa (ou centro de gravidade) de  $S$  é o ponto  $(x, y)$  tal que

$$x = \frac{M_y}{m}, y = \frac{M_x}{m}$$

Cálculo com Geometria Analítica vol. I Swokowski pag.446

#### A.4. Volume $V$ de um disco circular 6.7

$$V = \pi(\text{raio})^2 \cdot (\text{espessura})$$

Cálculo com Geometria Analítica vol. I Swokowski pag.403

#### A.5. Teorema 13.11

Se  $f$  é contínua e  $f(\theta) \geq 0$  em  $[a, b]$ , onde  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi$ , então a área  $A$  da região delimitada pelos gráficos de  $r = f(\theta)$ ,  $\theta = \alpha$  e  $\theta = \beta$  é

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)^2] d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Cálculo com Geometria Analítica vol. I Swokowski pag.195

#### A.6. Definição 14.27

O produto vetorial  $a \times b$  de  $a = (a_1, a_2, a_3)$  e  $b = (b_1, b_2, b_3)$  é

$$a \times b = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

Cálculo com Geometria Analítica vol.II Swokowski pag.245

#### A.7. Teorema 16.10

Seja  $S$  o gráfico de  $z = f(x, y)$  e  $P(a, b, f(a, b))$  um ponto de  $S$  onde  $f_x$  e  $f_y$  existem. Sejam  $C_1$  e  $C_2$  os traços de  $S$  nos planos  $x = a$  e  $y = b$ , respectivamente e sejam  $I_1$  e  $I_2$  as tangentes a  $C_1$  e  $C_2$  em  $P$

(i) O coeficiente angular de  $I_1$  ao plano  $x = a$  é  $f_y(a, b)$ .

(ii) O coeficiente angular de  $I_2$  no plano  $y = b$  é  $f'_x(a, b)$ .

Cálculo com Geometria Analítica vol. II Swokowski pag.375