UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS – VI POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JACKSON MANUEL NEVES

DO SENSÍVEL AO MUNDO DAS IDEIAS: REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA

MONTEIRO – PB
2014

JACKSON MANUEL NEVES

DO SENSÍVEL AO MUNDO DAS IDEIAS: REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas (CCHE) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida

MONTEIRO – PB
2014

N511d Neves, Jackson Manuel.
Do sensível ao mundo das ideias [manuscrito] : reflexões sobre o ensino de geometria / Jackson Manuel Neves. - 2014.
67 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2014.
"Orientação: Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, Departamento de Matemática".

1. Modelo Van Hiele. 2. Ensino de geometria. 3. Poliedros de Platão. I. Título.

21. ed. CDD 372.7

JACKSON MANUEL NEVES

DO SENSÍVEL AO MUNDO DAS IDEIAS: REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas (CCHE) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Aprovado pela banca examinadora em 23 de julho de 2014.

____
Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida / UEPB
Orientador

Marília Lidiane Chaves Costa Alcantara
____
Profª. Ma. .Marília Lidiane Chaves Costa Alcântara / UEPB
Examinadora

Maria José Neves de Amorim Moura
____
Prof.ª Ma. Maria José Neves de Amorim Moura/ UEPB
Examinadora

À minha Mãe pela força, coragem e inspiração, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, autor de meu destino, meu guia, socorro presente nas horas angustiantes.

A meu pai João Batista, minha mãe Maria José, guerreira que me inspira a cada dia e aos meus irmãos Jandson, Jadla, Jaidson, Jaedson e André que tanto me fazem sorrir.

Ao professor José Joelson Pimentel de Almeida pelas leituras sugeridas ao longo desse período, pela dedicação e paciência que teve comigo ao longo desta escrita.

Aos membros da banca examinadora deste trabalho pelas sábias críticas e sugestões.

Ao grupo de Pesquisa de Leitura e Escrita em Educação Matemática (LEEMAT), em especial à professora Patrícia que disponibilizou sua turma para que pudéssemos realizar as atividades.

Aos professores do Curso de graduação da UEPB, em especial, que contribuíram ao longo desde quatro anos, por meio das disciplinas e debates, para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos funcionários da UEPB, pela presteza e atendimento quando nos foi necessário.

Aos colegas de classe pelos momentos de amizade e apoio, em especial a Aderlânia Nayara que tornou ainda mais agradáveis os momentos de estudos.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação acadêmica, o meu muito obrigado.

Escolas que são gaiolas existem para que os pássaros desaprendam a arte do voo. Pássaros engaiolados são pássaros sob controle. Engaiolados, o seu dono pode levá-los para onde quiser. Pássaros engaiolados sempre têm um dono. Deixaram de ser pássaros. Porque a essência dos pássaros é o voo.
Escolas que são asas não amam pássaros engaiolados. O que elas amam são pássaros em voo. Existem para dar aos pássaros coragem para voar. Ensinar o voo, isso elas não podem fazer, porque o voo já nasce dentro dos pássaros. O voo não pode ser ensinado. Só pode ser encorajado.

(Rubem Alves)

R E S U M O

Este trabalho traz uma reflexão sobre possibilidades para o ensino de geometria. Temos como objetivo principal refletir sobre práticas de ensinar geometria em sala de aula, partindo do concreto ao abstrato e, com base nas atividades realizadas pelos alunos que participaram de nossa pesquisa, fazer uma classificação do nível de pensamento geométrico baseados no modelo de aprendizagem desenvolvido pelo casal Van Hiele (modelo de Van Hiele). Pelas leituras feitas ao longo deste trabalho percebemos que o ensino de geometria tem sido negligenciado pelos professores e escolas que não priorizam o trabalho com esta área da Matemática, apresentam seus assuntos de maneira complementar a carga horária desta disciplina, não fazendo nenhuma relação com os outros temas estudados. As dificuldades apontadas pelos professores por esta omissão são diversos, dois são citados com frequência: o fraco desempenho dos discentes e um currículo ultrapassado Croeley (1994). Entendemos que não há fórmulas mágicas que irão sanar todas as dificuldades encontradas nos processos de ensino e aprendizagem de geometria, mas com este trabalho trazemos possibilidades para seu ensino. Do planejamento à execução das atividades contamos com a participação do Leitura e Escrita em Educação Matemática - Grupo de Pesquisa (LEEMAT). Na pesquisa utilizamos uma abordagem qualitativa semelhante ao que Cobb (2000) denomina de experimentos de ensino em que, desenvolvendo atividades planejadas e concebidas junto com os professores, que fazem parte da equipe de pesquisa, aplicamos as atividades aos seus alunos, analisando seus resultados. A intervenção ocorreu no laboratório de Matemática da UEPB, com uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental onde aplicamos a sequência didática proposta pelo grupo de pesquisa LEEMAT envolvendo os poliedros. Entre os resultados obtidos destacamos a intensa participação dos alunos durante a realização das atividades e a apreensão dos conceitos de geometria plana e espacial.

PALAVRAS-CHAVE: 1. Modelo Van Hiele. 2. Ensino de geometria. 3. Poliedros de Platão.

A B S T R A C T

This paper presents a reflection on possibilities for teaching geometry. Our main objective to reflect on practice to teach geometry in the classroom, starting from concrete to abstract, and based on the activities performed by the students who participated in our research, we make a classification of the level of geometrical thinking based on the learning model developed by double Van Hiele (Van Hiele model). The readings taken throughout this work we realize that the teaching of geometry has been neglected by teachers and schools that do not prioritize working with this area of mathematics, presented his subjects to complement the workload of this course way, making no relationship with others subjects studied. The difficulties pointed out by teachers for this failure are many, two are frequently cited: the poor performance of students and an outdated curriculum Croeley (1994). We understand that there is no magic formula that will solve all the problems encountered in the teaching and learning of geometry, but with this work bring opportunities for your education. From planning to execution of the activities we have the participation of Reading and Writing in Mathematics Education - Research Group (LEEMAT). In the survey used a similar to what Cobb (2000) calls for experiments in education that develop activities planned and designed together with teachers that are part of the research team, qualitative approach applied activities to its students, analyzing their results. The intervention took place in the lab Math UEPB, with a group of sixth year of elementary school where we apply the didactic sequence proposed by the research group LEEMAT involving polyhedra. Among the results highlight the intense participation of students during the performance of activities and the seizure of the concepts of planar and spatial geometry.

KEYWORDS: 1. Van Hiele model. 2. Teaching geometry. 3. Plato polyhedra.

LISTA DE ILUSTRAÇÃO

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE SIGLAS

CCHE	Centro de Ciências Humanas e Exatas
LEEMAT	Leitura e Escrita em Educação Matemática – Grupo de Pesquisa
LEM	Laboratório de Ensino de Matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Dentre inúmeros problemas encontrados em nossas escolas, destacamos aqueles de ordem estrutural que muitas vezes impedem a execução de um trabalho de qualidade, mas que podem ser resolvidos facilmente com investimentos em educação. Temos também os problemas de ordem pedagógica, estes, a nosso ver são problemas que merecem uma preocupação maior, pois para saná-los precisamos de uma nova postura dos professores.

Uma das grandes dificuldades que os alunos possuem é de reconhecer e aplicar em situações cotidianas os conceitos geométricos estudados na escola, este é um grande desafio para os professores, pois a geometria está presente em diversas situações, destacamos sua presença na natureza, artes e nas construções humanas (ALMEIDA, SILVA E ANDRADE, 2012). Tradicionalmente, o livro didático é o recurso mais utilizado por professores quando irão explorar os conceitos geométricos (LORENZATO, 1995). E como são abordados estes assuntos? Apresentam os conceitos primitivos, exploram conceitos e propriedades, trazem exemplos de aplicações e por fim exercícios. Em discussões e reflexões com o Leitura e Escrita em Educação Matemática – Grupo de Pesquisa (LEEMAT), do Centro de Ciências Humanas e Exatas (CCHE), campus VI da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), percebemos que o caminho deve ser justamente o inverso, pois temos contato com o concreto, para então abstrairmos nossas ideias. A proposta discutida neste trabalho é um relato da inversão desta lógica predominante no ensino da geometria.

Em 2013 foi criado o LEEMAT que se reúne semanalmente na Universidade com o intuito de discutir textos referentes à Educação Matemática, analisar e refletir sobre propostas de ensino. Percebemos, pelas leituras de textos, que há um abandono do ensino de geometria (PAVANELLO, 1993) e quando os professores exploram estes assuntos muitas vezes ele é feito de maneira superficial, sendo deixando para serem estudados no final do ano letivo, não restando tempo hábil para os professores trabalharem com profundidade estes assuntos (LORENZATO, 1995).

Os conceitos geométricos podem trazer caminhos e procedimentos metodológicos em relação a outros conhecimentos matemáticos, principalmente na construção curricular dos conteúdos de álgebra das medidas e da aritmética (MUNHOZ, 2011). Para os alunos o ensino da geometria possibilita seu desenvolvimento intelectual, seu raciocínio lógico, da passagem da intuição dos dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização (FAINGUELERNT, 1995).

Sendo assim, planejamos uma sequência de atividades para serem aplicadas em uma turma dos anos iniciais do Ensino Fundamental, onde propusemos ensinar os conceitos geométricos partindo do concreto ao abstrato.

Analisaremos a sequência didática proposta pelo Grupo de Pesquisa no intuito de experimentar uma possibilidade para o ensino de geometria partindo da geometria espacial, especificamente dos poliedros de Platão, para a geometria plana, com conceitos primitivos (ponto, reta e plano). No sentido de refletir sobre práticas pedagógicas, temos também como objetivo fazer uma classificação do nível do pensamento geométrico das respostas dadas pelos alunos baseados nos estudos de van Hiele (modelo de Van Hiele).

No primeiro capítulo apresentamos tópicos históricos da geometria, faremos uma discussão das principais abordagens referentes ao processo de ensino e de aprendizagem de geometria, assim como as características do modelo de aprendizagem de geometria (modelo Van Hiele). No segundo capítulo discutimos tópicos de História da Matemática, estudo dos poliedros regulares e a presença destes, em situações diárias. No último, temos os aspectos metodológicos de nossa pesquisa, a descrição e análise dos dados coletados na intervenção do LEEMAT.

CAPÍTULO 1

ENSINO DE GEOMETRIA: TÓPICOS HISTÓRICOS E CONCEITUAIS

Neste capítulo, apresentamos tópicos da História da Matemática que relatam a criação e evolução dos conceitos abordados quando ensinamos geometria, apresentamos quais são os principais desafios enfrentados pelos professores e alunos referentes ao ensino e aprendizagem dos conceitos geométricos. Relatamos as principais ideias do construtivismo de Jean Piaget e o modelo Van Hiele, contribuições para explicar como ocorre o processo de ensino e aprendizagem da geometria.

A palavra geometria é derivada do grego formada pelo prefixo *geo*, que significa terra e *metria*, que significa medida. Assim se considerada ao pé da letra, geometria significa "medida da terra" (PIROLA, 2001, p. 1184). Esta denominação foi feita porque inicialmente a utilização da geometria tinha esta finalidade: fazer as medidas de terras.

Utilizamos a expressão geometria espacial para denominar o estudo das propriedades que sobressaem ao plano, ou seja, as que possuem mais de duas dimensões, a geometria das formas tridimensionais.

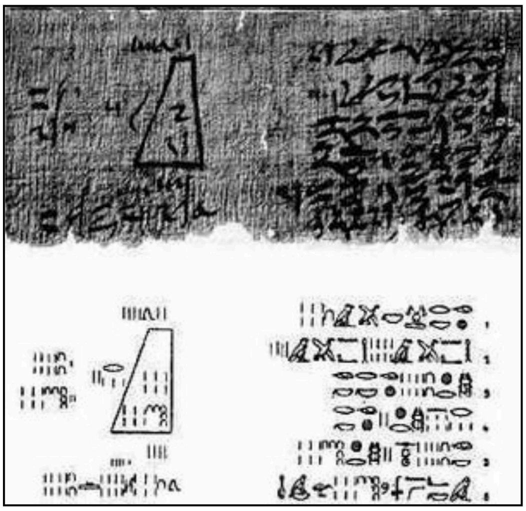
Não sabemos ao certo quando surgiu a necessidade em estudar e sistematizar as propriedades hoje conhecidas como conceitos geométricos, pois as informações encontradas muitas vezes divergem e não apontam exatamente os responsáveis em sistematizar os conceitos que hoje estudamos. Há relatos que os homens pré-históricos faziam suas representações diárias através de desenhos e formas (hieróglifos), o que possivelmente possibilitou a necessidade de estudar as propriedades e características das figuras geométricas. Essas representações retratavam aspectos de seu cotidiano, tais como agricultura e fenômenos naturais. Diversas civilizações contribuíram para a sistematização dos conceitos geométricos. Apresentaremos a seguir as que mais se destacaram.

Sabemos, que os estudos geométricos da civilização babilônica (2000 a.C. a 100 a.C.) se relacionavam intimamente com a mensuração prática. Segundo Eves (2004), esta civilização possivelmente estaria familiarizada com regras gerais do cálculo da área de triângulos diversos, de volumes de prismas retos de base trapezoidal. É atribuída também aos babilônicos a ideia da "divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais." (EVES, 2004, p. 61).

As principais contribuições deste povo estão registradas em papiros, como os apresentados a seguir.

Ilustração 01: Papiro de Rhind

Ilustração 02: Papiro de Moscovo



Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm36/papirode.htm

Neste contexto, percebemos que tópicos de geometria espacial eram conhecidos e estudados desde aquela época. No primeiro papiro há o registro de estudos de trigonometria, progressões e cálculos de comprimentos, nele estão representados cerca de oitenta e cinco problemas. O papiro de Moscovo possui oito centímetros de largura por cinco metros de comprimento, no qual estão registrados vinte e cinco problemas, os quais apresentavam situações cotidianas dos egípcios.

Na ilustração 02 pode-se ver uma forma de cálculo de volume do tronco de uma pirâmide quadrada. Em 3000 a.C., a civilização egípcia utilizava os esticadores de corda para demarcar as terras dos faraós, após a cheia do rio Nilo, com o intuito de utilizá-las para agricultura. O desenvolvimento da geometria como um campo de pesquisa e sistematização do saber deu-se pelos trabalhos de muitos estudiosos, entre eles destacamos: Pitágoras, com a criação da Escola Pitagórica; Platão, que associava o estudo da geometria com a metafísica; Tales de Mileto, com o estudo do cálculo da altura de pirâmides, assim como o cálculo da distância até navios do mar, utilizando técnicas de triangulação no período de 500 a.C. Arquimedes, com seus estudos sobre esfera e cilindro; e o grego Euclides, nascido no século III a.C. , autor da obra “Os Elementos”, que entre os muitos conceitos explanados no livro trazem teoremas e axiomas que ainda utilizamos atualmente em nossas vidas e escolas.

1.1 A Geometria e a contextualização de seu ensino

É natural que os professores da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio) façam uma divisão rígida entre os conceitos de álgebra, aritmética, geometria plana e geometria espacial, uma vez que a Matemática aparentemente é tratada como se os conteúdos fossem independentes que não guardam relações explícitas entre si, nem aplicações em situações de nosso dia-a-dia. Tradicionalmente, o ensino de geometria é tido como complementar da carga horária das aulas de matemática sendo tratado de forma independente, como uma ramificação dela, e seu ensino torna-se ausente ou quase ausente da sala de aula (LORENZATO, 1995, p. 3). Concordamos que o ensino de geometria é tão importante quanto às demais áreas do saber, como argumenta Fainguelernt:

> O ensino da geometria oferece um vasto campo de idéias de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e dos dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização. Ativa as estruturas mentais, possibilitando a passagem do estágio das operações concretas para o das abstratas. Portanto, a geometria, tema integrador entre as diversas partes da Matemática, bem como campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar. Ela desempenha papel primordial no ensino, porque a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituem a sua essência. (FAINGUERLERNT, 1995, p. 46)

Além disso, a geometria está por toda parte, mas precisamos enxergá-la, lidamos com as ideias de paralelismo, perpendicularismo, áreas, volumes, medições, simetria e proporcionalidade, em nossas atividades diárias (LORENZATO, 1995). “A geometria nos traz novos caminhos e procedimentos metodológicos em relação a outros conhecimentos matemáticos, principalmente na construção curricular dos conteúdos de álgebra, das medidas e da aritmética” (MUNHOZ, 2011, p. 131). Entendemos, portanto, que a geometria, além de estar presente nas mais diversas situações, possui essa capacidade de integração com as diversas áreas da Matemática, além de proporcionar o desenvolvimento da criatividade dos alunos como argumenta Pirola (2001).

> A geometria, assim como outros campos da Matemática, pode favorecer o desenvolvimento da criatividade na medida em que o professor estimula seus alunos a buscarem novos caminhos para a solução de problemas e cria condições para que as crianças comuniquem suas ideias. (PIROLA, 2001, p.1185)

Percebemos então a importância que os assuntos de geometria podem trazer para nossos alunos visto que além de proporcionar benefícios para eles também favorecem a relação entre a resolução de problemas, história da matemática, etnomatemática, utilização de jogos e materiais concretos, possibilitando assim a utilização de outras tendências para o ensino de Matemática.

Se de fato a geometria é tão relevante e presente, por que seu ensino é tratado de maneira dispensável ou com uma abordagem complementar da carga horária das aulas de Matemática? São muitos autores que tentam responder a esta questão. Usiskin (1994, p. 21) aponta que "quase todos os trabalhos sobre geometria escolar decorrem de dois problemas principais: o fraco desempenho dos alunos e um currículo ultrapassado". Para Lorenzato (1995) há várias causas para que os professores não trabalhem geometria em suas salas de aula, mas duas merecem destaque: A primeira é que a maioria deles não possuem conhecimentos geométricos suficientes para ensinar a seus alunos e a segunda é culpa da exagerada importância que damos ao uso do livro didático, o qual trata dos assuntos de geometria em suas últimas páginas sem apresentar nenhuma relação com os assuntos estudados. Sendo assim na maioria das vezes não sobra tempo hábil para os professores planejarem atividades para abordar os assuntos de geometria, como consequência a maioria dos alunos acredita que geometria consiste em simplesmente decorar fórmulas para aplicá-las em problemas que somente utilizarão na escola.

Pavanello (1993) argumenta que o abandono do ensino de geometria é um fenômeno mundial, também destaca que os livros didáticos desenvolvem os assuntos de geometria progressiva e sistematicamente com um todo, sem nenhuma relação entre as diversas áreas da Matemática. Nasser (2003) salienta que os livros didáticos são baseados na geometria euclidiana, são livros muito teóricos e quase não possuem aplicações da geometria em situações do nosso cotidiano.

Cabe aqui fazermos uma ressalva quanto ao segundo motivo apontado por Lorenzato (1995), e o argumento de Nasser, pela omissão geométrica, o dos livros didáticos trazerem os assuntos apenas no final. O Programa Nacional do Livro Didático (PROGRAMA, PNLD, 2014) traz como exigência que as editoras estabeleçam relações entre os Blocos de Conteúdos dos PCN, a saber, Números e Operações, Grandezas e Medidas, Espaço e Forma, Álgebra e Tratamento da Informação. Essa exigência pode minimizar a omissão geométrica, pois os assuntos agora são tratados de forma que estabeleçam relações entre os blocos de conteúdos dos PCN, mas ainda a ausência da geometria é marcante em nossas escolas, pois mesmo o livro didático tendo o espaço para geometria os professores muitas vezes não abordam estes capítulos e, quando o fazem, realizam superficialmente.

Outra dificuldade encontrada no ensino de geometria decorre da carência dos cursos de formação contínua de professores, que na maioria das vezes trazem no currículo apresentado a geometria com uma fragilíssima posição. Ainda acrescentamos a forte influência do Movimento da Matemática Moderna (MMM), Movimento este que tentou algebrizar a geometria, o que não funcionou (LORENZATO, 1995). Outro ponto destacado é que há ausência de criação e manipulação de materiais concretos e de dispositivos que ressaltem o aspecto dinâmico da geometria, esta dificuldade, porém, está sendo diminuída com o aumento da utilização das mídias computacionais em sala de aula.

1.2 Como ensinar e aprender geometria?

Segundo Fainguelernt (1995) há três aspectos que devem ser abordados no ensino de geometria, a saber: aspectos topológicos, projetivos e euclidianos. Estes aspectos devem ser explorados desde os anos iniciais. Os aspectos topológicos são os mais elementares, mas são tão importantes quanto os outros dois. As relações topológicas referem-se às percepções do sujeito com o objeto: perto, longe, dentro, fora, continuidade, descontinuidade e ordem perceptiva e representativa. Nas relações projetivas as crianças não precisam tocar os objetos para percebê-los, elas são capazes de associar um objeto a uma forma geométrica conhecida, nessa relação à abstração ainda não é uma realidade, esta capacidade se manifesta no nível posterior. O último aspecto é o euclidiano, nível importantíssimo, pois é nele em que as crianças fazem uma transição das ideias, do espaço para o plano, é neste aspecto que a criança começa a perceber a geometria euclidiana, por isso possui aquele nome. Os objetos são representados no plano.

Para Piaget (1950) a geometria deve ser vivenciada pela criança de forma natural, uma vez que ela tem contato com as mais diversas formas, sejam em suas brincadeiras, como em um jogo de futebol, ou em atividades escolares propostas pelos seus professores. Portanto seu ensino deve estar essencialmente relacionado à experimentação, à compreensão e à problematização do espaço pela criança, bem como à quantificação desse espaço, ou seja:

> No processo de Ensino e Aprendizagem da área de Educação Infantil, a matemática deve estar essencialmente relacionada ao mundo-vivido-experenciado da criança, para que ela o admire e o questione, numa mistura de sonho e realidade. (ALMEIDA, SILVA E ANDRADE, 2012, p. 104).

Piaget (1995) afirma que a criança constrói seu conhecimento por meio de uma experimentação ativa, ou seja, ela experiencia os objetos sem formar conceitos, pois estes só aparecerão mais tarde. Ele concebeu a aprendizagem em estágios, os quais serão explanados posteriormente neste trabalho. “O ensino de geometria não pode ser reduzido à mera aplicação de fórmulas e de resultados estabelecidos por alguns teoremas, sem preocupação da descoberta de caminhos para sua demonstração, como também para a dedução de suas fórmulas” (FAINGUELERNT, 1995, p. 45).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) indicam que os conteúdos referentes ao bloco de Espaço e Forma devem ser, entre outros, os seguintes:

> - Observação de formas geométricas presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem e de suas características: arredondadas ou não, simétricas ou não, etc.
> - Estabelecimento de comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos — esféricos, cilíndricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos — sem uso obrigatório de nomenclatura.
> - Percepção de semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos.
> - Construção e representação de formas geométricas. (BRASIL, 2001, p. 73).

Para que os professores possam fazer uma abordagem adequada dos conteúdos trabalhados em geometria, os mesmos precisam compreender como ocorre o processo de ensino e aprendizagem da geometria e como os alunos desenvolvem seu raciocínio geométrico.

Existem diversas teorias que explicam como os alunos aprendem geometria, uma delas é o modelo desenvolvido no ano de 1957 pelo casal holandês Dina van Hiele e Pierre Marie van Hiele, originado dos trabalhos de doutorado dos mesmos. Seus trabalhos foram desenvolvidos tendo por base as dificuldades apresentadas por seus alunos do curso secundário na Holanda. Segundo Matos (1985) este estudo surgiu em um contexto no qual a Educação Matemática estava sendo discutida internacionalmente, pois havia necessidade de criação de novos métodos de ensino e novos tópicos curriculares.

O casal Van Hiele desenvolveu o seu modelo no contexto de um currículo que apresentava a geometria como instrumento para exercitar as capacidades lógicas da mente. Seu modelo sofreu grande influência das ideias de Piaget. A seguir, apresentaremos os pressupostos básicos da teoria de Piaget a fim de verificarmos a semelhança com os de Van Hiele.

1.3 O construtivismo de Jean Piaget

Jean Piaget nasceu na cidade de Neuchâtel (Suíça) em 9 de agosto de 1896 e morreu em 16 de setembro de 1980, aos 84 anos. Especializou-se em Psicologia Evolutiva e também no estudo de Epistemologia Genética. Em seus estudos concluiu que o desenvolvimento cognitivo da criança é uma evolução gradativa no qual ela vai se capacitando em níveis cada vez mais complexos do conhecimento seguindo uma sequência lógica e que o conhecimento adquirido em um estágio não se perde no nível subsequente.

Piaget fez uma classificação do desenvolvimento da estrutura da inteligência em estágios que se caracterizam pelas diferentes maneiras do indivíduo interagir com a realidade. São quatro os períodos de desenvolvimento cognitivo das crianças, a saber: Estágio Sensório Motor, Estágio Pré-Operacional, Operatório Concreto e Operatório Formal. Estes estágios não acompanham necessariamente a idade cronológica da criança, mas o desenvolvimento cognitivo depende da interação familiar e do meio social. Piaget observou características regulares que se manifestam em cada etapa, como apresentado. Nosso estudo está baseado nos estudos de Kesselring (2008).

1. Estágio Sensório-Motor (de zero a dois anos aproximadamente); esta fase é o ponto de partida para novas condutas, adquiridas com ajuda da experiência. É uma fase em que a criança traz tudo para si através de reflexos. Todos os objetos são trazidos para seu corpo, sua inteligência é baseada em sensações e movimentos. Ainda não possui capacidade de representar mentalmente objetos.
2. Estágio Pré-Operatório (de dois a sete anos aproximadamente); a principal conquista alcançada nesta fase é a aquisição da linguagem, o egocentrismo é marcante nessa etapa, a criança não consegue colocar-se no lugar do outro, ela situa-se no tempo e é capaz de descrever o passado e inserir-se no futuro, ainda não é capaz de resolver problema racionalmente, tão pouco a reversibilidade deles.
3. Estágio das Operações Concretas (de sete aos doze anos aproximadamente); é nesse estágio que as crianças adquirem a capacidade de reversibilidade do pensamento, este estágio também tem como característica marcante a forte capacidade de concentração.
4. Estágio das Operações Formais (Após os 11 ou 12 anos aproximadamente); Neste nível há uma generalidade completa do pensamento, as crianças conseguem trabalhar com situações hipotéticas e há um forte idealismo nesta fase.

Na próxima seção apresentaremos as ideias desenvolvidas pelo casal Van Hiele, as características de seu modelo, bem como destacaremos a importância dos professores fazerem uma classificação da maturidade dos alunos quanto ao nível em que eles se encontram, pois a partir desta classificação os professores podem adaptar suas práticas pedagógicas para o nível de seus alunos.

1.4 Características do Modelo Van Hiele

Segundo Rodrigues (1994) o próprio Van Hiele fazia uma distinção de sua teoria com a de Piaget, pois a sua teoria era da aprendizagem enquanto a de Piaget era uma teoria do desenvolvimento. Apesar desta diferença, ele admite ter recebido algumas influências após leituras de textos piagetianos. Para o Van Hiele não importa a idade cronológica da criança, o importante é o seu nível de maturidade geométrica.

O modelo supõe que há diversos níveis de aprendizagem do pensamento geométrico e que a evolução de um nível deve ocorrer através de uma sequência de fases de ensino e que a evolução de um nível para o outro depende de um procedimento didático adequado. Cada nível é caracterizado por relações entre os objetos de estudo e linguagem próprios. Consequentemente, não pode haver compreensão quando um assunto é dado num nível mais elevado do que o atingido pelo aluno. Segundo Pereira, Silva e Motta (2005), o modelo possui a característica de ser sequencial, ou seja, para haver uma evolução de um nível para outro são necessárias intervenções adequadas, mas para haver essa evolução é necessário passar pelos níveis anteriores. Corroborando com o conceito, Crowley (1994) aponta cinco características importantes do modelo.

> Sequencial. Uma pessoa deve necessariamente passar pelos vários níveis, sucessivamente. Para se sair bem num determinado nível, o aluno deve ter assimilado as estratégias dos níveis precedentes.
> Avanço. A progressão (ou não) de um nível para outro depende mais do conteúdo e dos métodos de instrução recebidos do que a idade.
> Intrínseco e extrínseco. Os objetivos inerentes a um nível tornam-se objetos de ensino no nível seguinte.
> Linguística. "Cada nível tem seus próprios símbolos linguisticos e seus próprios sistemas de relações que ligam esses símbolos" (P. van Hiele, 1984ª, p. 246).
> Combinação inadequada. Se um aluno está num certo nível e o curso num nível diferente, o aprendizado e o progresso desejados podem não se verificar. (CROWLEY, 1994, p. 4).

Todas as características citadas são importantes para que os professores possam aperfeiçoar sua própria prática. Destacamos a última característica (combinação inadequada) ela é muito importante para os professores, pois esclarece que o docente precisa ter a percepção de qual nível de aprendizagem se encontra seus alunos para adequar suas metodologias e linguagens, pois essa distinção é fundamental para que haja uma progressão de um nível para outro. É aí também que reside o fracasso escolar no que concerne às dificuldades referentes ao ensino e à aprendizagem de geometria, pois os alunos não entendem o que os professores querem dizer nem o professor consegue entender porque os alunos não conseguem aprender.

Isto acontece porque geralmente a maneira com que os assuntos são ministrados está em um nível mais elevado do que o nível atingido pelos alunos. Para haver evolução de um nível para o outro depende mais de aprendizagem adequada do que a idade da criança. Pereira, Silva e Motta (2005) afirmam que o modelo pode ser usado para orientar a formação assim como avaliar as habilidades dos alunos.

1.5 Descrição do Modelo

Segundo o modelo de Van Hiele existem cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, são eles: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor.

Nível 0 (reconhecimento ou de visualização): neste nível o conhecimento é básico, os alunos apenas reconhecem o espaço em torno deles, a descrição das figuras é baseada principalmente em seus aspectos físicos e posição no espaço, não conhecem as propriedades de determinada figura. Os alunos neste nível conseguem aprender o vocabulário geométrico e reproduzir figuras (PEREIRA, SILVA e MOTTA, 2005, p. 24). As figuras são vistas em sua totalidade, as suas propriedades não são entendidas. Neste nível é importante que o professor propicie os alunos a trabalhar com materiais manipuláveis, pois os alunos manuseando os materiais são estimulados a conhecer as partes que compõem todo o objeto. A partir do momento que os alunos conseguem fazer análises dos conceitos geométricos eles já se encontram preparados para o próximo nível.

Nível 01 (análise): como sugere o nome deste nível, neste momento os alunos fazem uma análise dos conceitos geométricos, começam a diferenciar características das figuras, não são capazes de fazer a inclusão em classes, ou seja, não conseguem estabelecer relações entre elas, por exemplo, entender que todo retângulo é um paralelogramo. Neste nível os alunos não conseguem entender as definições formais, mas são capazes de identificar propriedades que podem ser usadas para caracterizar ou diferenciar diferentes figuras.

Nível 02 (dedução informal ou ordenação): Neste nível os alunos já conseguem fazer a inclusão em classes, ou seja, estabelecem relações entre figuras, já compreendem as definições, mas não conseguem generaliza-las ou aplicar os axiomas usados em outras definições, portanto não conseguem generalizar os conceitos apreendidos.

Nível 03 (dedução formal): É neste nível que os alunos conseguem fazer demonstrações generalizadas, aplicam os conceitos estudados em sistemas matemáticos cada vez mais complexos. Tem como característica também a capacidade do aluno em compreender vários tipos de demonstrações efetuadas em um mesmo tipo de questão. Neste nível o alunos devem trabalhar com as definições da geometria axiomática.

Nível 04 (rigor): este é o nível máximo de compreensão que os alunos podem alcançar. Eles são capazes de fazer demonstrações rigorosas e compreender geometrias não euclidianas conseguem estabelecer relações de ordem topológica superior.

A seguir apresentamos um quadro-resumo que contém o que os alunos conseguem realizar em cada nível.

Quadro 01: características do modelo de Van Hiele

Nível de Aprendizagem	**Características**	**O que os alunos fazem**
Nível 0 (Reconhecimento)	O aluno reconhece as figuras pelas suas semelhanças e diferenças	Diferenciam as propriedades físicas por meio de sua aparência física, ainda não nomeiam os polígonos, porém já são capazes de aprender um vocabulário geométrico.
Nível 01 (Análise)	Há um começo da diferenciação das propriedades geométricas para analisá-las.	Separar os objetos segundo suas características, por exemplo, em corpos redondos de corpos-não redondos.
Nível 02 (Dedução informal)	Neste nível os alunos conseguem classificar as figuras em relação as suas propriedades	Realização de demonstrações mediante raciocínio dedutivo formal. Capacidade para adquirir uma visão global dessas demonstrações
Nível 03 (Dedução formal)	Possuem domínio do processo dedutivo	Os alunos identificam o que é dado na questão e o que ela quer.
Nível 04 (Rigor)	Os alunos usam diversos teoremas e axiomas para realizar demonstrações	Demonstrações complexas, com o auxílio de vários teoremas e axiomas.

Baseado em: (CROWLEY, 1994)

Para que os alunos possam avançar de um nível para o outro, eles precisam *passar* por determinadas fases. Além dos níveis citados segundo Pereira, Silva e Mattos (2005), o modelo também é caracterizado por cinco fases de aprendizagens, que têm como objetivo organizar a aprendizagem a fim de que os alunos progridam de um determinado nível para o outro.

A primeira fase é da interrogação informatizada, ela possui este nome porque aluno e professor conversam sobre determinado assunto, são feitas várias observações e perguntas. Esse diálogo acontece em um mesmo nível, ou seja, o professor adapta-se ao nível dos alunos para alcançar a compreensão dos alunos. É a fase de preparação para estudos posteriores.

A segunda fase é da orientação dirigida, na qual os alunos executam as atividades planejadas pelo professor, utilizando materiais. Essas atividades exploram os conhecimentos de um determinado nível de aprendizagem.

A fase três é da explicação. O professor, com base nas experiências prévias de seus alunos, adéqua estes conhecimentos para desenvolver novas estruturas cognitivas, a fim de aperfeiçoar este saber. Como sugere o nome desta fase, o professor tem a função de explicar os assuntos com o uso de uma linguagem apropriada adequada ao novo nível de aprendizagem.

Na fase posterior (quarta fase), chamada de orientação livre, os alunos buscam maneiras de resolução de determinada atividade, o objetivo é que os alunos ganhem experiência e confiança para prosseguir nos estudos. É nesta fase também que os alunos comparam as respostas com outras e questionam as suas.

Por fim a quinta fase, a última, uma das mais significativas, que não será alcançada se as outras não forem adequadamente trabalhadas. Esta fase é denominada de integração, possui este nome por fazer uma integração entre todas as outras fases, é uma espécie de revisão, pois o aluno reler e resume tudo que foi visto com o objetivo de formar uma visão geral de nova rede de objetos e relações. É com o término desta fase que os alunos progridem de um determinado nível do modelo Van Hiele para outro.

CAPÍTULO 2

POLIEDROS, CONCEITOS E APLICAÇÕES

Para fazermos uma explanação das propriedades e características dos poliedros primeiramente apresentaremos sua definição. O sufixo *edro* deriva da palavra grega *hédra* cujo significado é face, já os prefixos indicam a quantidade de faces que cada poliedro apresenta e também deriva do grego, por exemplo: *tetra* (4), *hexa* (6), *octa* (8), *dodeca* (12) e *icosa* (20). Agora vejamos a definição formal dos poliedros:

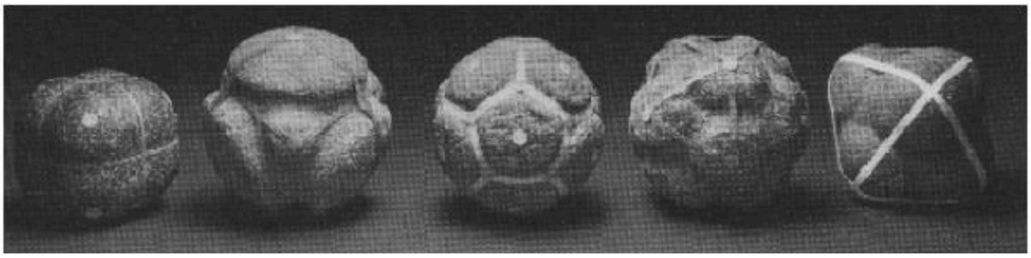
> Um *poliedro* é uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um destes polígonos é também lado de um, e apenas um outro polígono. Cada um destes polígonos chama-se uma *face* do poliedro, cada lado comum a duas faces chama-se uma *aresta* do poliedro e cada vértice de uma face é também chamado *vértice* do poliedro. Todo poliedro limita uma região do espaço chamada de *interior* deste poliedro. Dizemos que um poliedro é *convexo* se o seu interior C é convexo, isto é, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C. Em um poliedro convexo toda reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos. (LIMA et alii, 2006, p. 87)

O nosso estudo terá como base a classe dos poliedros regulares, que segundo Dante (2004, p. 152), "um poliedro convexo é regular quando todas as faces são regiões poligonais e congruentes e em todos os vértices concorre o mesmo número de faces." Isto é, para que um poliedro convexo seja regular é necessário que ele possua simultaneamente as duas condições citadas, um exemplo de um poliedro convexo que não é regular é a pirâmide de base quadrangular, pois quatro de suas faces são triangulares e uma face é quadrangular, porém nem todos os vértices concorrem para o mesmo número de arestas. Mostraremos nas seções seguintes que existem apenas cinco poliedros regulares que são popularmente conhecidos por sólidos platônicos. Segundo Sartori, (2011, p. 2) são "poliedros convexos regulares cujas faces são polígonos também regulares e congruentes entre si e que apresentam, em cada vértice, sempre o mesmo número de arestas".

2.1 Sólidos platônicos? Vamos à História

Não sabemos determinar com precisão quando os poliedros receberam um tratamento matemático. Segundo Eves (2004) há um início de tratamento matemático desses sólidos no Livro XIII dos elementos de Euclides. Alguns dos sólidos regulares foram esculpidos há 1000 anos pelos povos neolíticos que viveram na Escócia. A comprovação de tal fato pode ser encontrada no museu Ashmolean em Oxford, Reino Unido, conforme a ilustração abaixo dos modelos esculpidos pelos neolíticos dos sólidos platônicos.

Ilustração 03: Sólidos regulares esculpidos pelos neolíticos



Fonte: http://passeiomatematico.blogspot.com.br/2010_10_01_archive.html

Grande parte dos poliedros regulares era conhecida pelos antigos egípcios que usavam suas formas em sua arquitetura. A exemplo, tomemos as famosas Pirâmides do Egito. No livro XIII dos Elementos de Euclides, os sólidos são conhecidos por sólidos de Platão, denominação equivocada, pois de acordo com Eves (2004, p. 114) "[...] três deles, o tetraedro, o cubo e o dodecaedro se devem aos pitagóricos, ao passo que o octaedro e o icosaedro se devem a Teeteto" (417 a.C.-369 a.C.). Platão realizou um estudo detalhado dos cinco sólidos regulares, ele também provavelmente foi responsável pela primeira demonstração de que existem somente cinco poliedros regulares.

Para muitos autores, a descoberta dos sólidos platônicos se deve a Pitágoras (572 a.C. 497 a.C), porém, há muitas divergências no tocante ao responsável pela primeira demonstração de que existem somente cinco destes sólidos. Segundo Proclus, Pitágoras é o idealizador do teorema: "há somente cinco poliedros regulares". Encontramos outras literaturas que afirmam ser Platão o primeiro matemático a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares. Sabemos hoje que o teorema citado anteriormente é válido somente para poliedros regulares convexos e que Euclides fez um estudo sobre esses sólidos e com base nos trabalhos de Teeteto também demonstrou que não há outros poliedros regulares.

2.2 Relação de Euler

Para demonstrarmos que há cinco e somente cinco poliedros de Platão utilizamos o teorema demonstrado pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Euler nasceu em Basileia, ao norte da Suíça. A relação leva o nome de Euler porque ele foi o primeiro a fazer uma demonstração rigorosa desse fato.

Segundo Simões (2008) quem primeiro formulou a relação que leva o nome de Euler foi René Descartes (1596-1650), o criador da geometria analítica. Há um manuscrito de Descartes, produzido por volta de 1639, que contém resultados a partir dos quais se poderia obter a fórmula, mas Descartes não parece ter notado isso. O teorema é o seguinte: Seja P um poliedro convexo com F faces, A arestas e V vértices. Tem-se necessariamente $F - A + V = 2$. Utilizaremos este resultado para demonstrar que há somente cinco poliedros regulares.

Segundo Machado (1994) existem várias demonstrações de que há somente cinco poliedros regulares, duas são citadas com frequência. A primeira diz respeito ao caso geométrico, cuja demonstração foi dada originalmente por Euclides, esta foi intuitiva, no entanto é decorrente de uma sequência de resultados auxiliares. A segunda requer uso do teorema de Euler. Apresentaremos aqui a demonstração utilizando o teorema de Euler.

Consideremos V como sendo o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces de um poliedro convexo. Então, pela relação de Euler, temos: $V - A + F = 2$ (I). Agora consideremos um poliedro platônico, cujas faces são polígonos regulares de n lados. Sabemos que cada aresta é definida pela intersecção de dois lados do poliedro, então se contarmos todos os lados do poliedro estaremos contando duas vezes cada aresta do poliedro. Matematicamente, temos: $nF = 2A$ (II). Agora, analogamente, denotaremos por p o número de arestas que concorrem para cada vértice, assim se contarmos o número de arestas em cada face, estaremos contando duas vezes o número de arestas do poliedro, portanto:

$$pV = 2A \text{ (III).}$$

De II e III, temos:

$$2A = nF = pV$$

O que acarreta:

$$A = \frac{(nF)}{2} \text{ e } V = \frac{(nF)}{p}$$

Agora substituindo estes valores na relação de Euler (I), temos:

$$\frac{(nF)}{p} - \frac{(nF)}{2} + F = 2$$

O que implica, resolvendo com o auxílio do mínimo múltiplo comum,

$$\frac{(2nF - npF + 2pF)}{2\,p} = \frac{4p}{2p}$$

Colocando o F em evidência temos: F (2n + 2p – np) = 4p, temos:

$$F = \frac{4p}{2n+2p-np} \text{ (V)}$$

Para a fração ser possível, o denominador precisa ser maior do que zero, isto é:

$$2n + 2p - np > 0$$

$$\text{Logo, } 2n > np - 2p \Rightarrow 2n > p\,(n-2) \Rightarrow \frac{2n}{n-2} > p \text{ (IV)}$$

Como p é o número de arestas que converge para cada vértice teremos que ter $p \geq 3$. Substituindo em IV, temos que:

$$\frac{2n}{n-2} > p \geq 3 \Rightarrow 2n > 3n - 6 \Rightarrow -n > -6 \Rightarrow n < 6$$

Considerando que n é o número de lados dos polígonos, temos as seguintes possibilidades: n = 3, n = 4 e n = 5. Agora faremos as verificações, substituindo o valo de n em (V), temos:

- Se n = 3, temos:

$$F = \frac{4p}{6-p} \Rightarrow \begin{cases} p = 3 \Rightarrow F = 4 \text{ (tetraedro)} \\ P = 4 \Rightarrow F = 8 \text{ (octaedro)} \\ P = 5 \Rightarrow F = 20 \text{ (icosaedro)} \end{cases}$$

- Para n = 4, temos:

$$F = \frac{4p}{8-2p} = \frac{2p}{4-p} \Rightarrow p = 3 \Rightarrow F = 6 \text{ (hexaedro)}$$

- Para n = 5, temos:

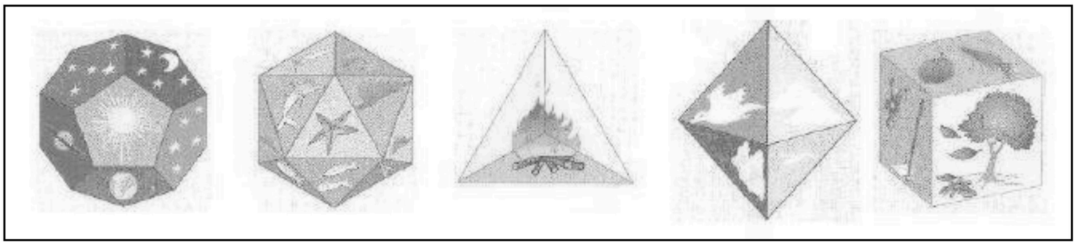
$$F = \frac{4p}{10-3p} \Rightarrow p = 3 \Rightarrow F = 12 \text{ (dodecaedro).}$$

Exaurindo então todas as possibilidades, concluímos que só há exatamente cinco poliedros regulares, chamados de sólidos platônicos.

Os nomes sólidos platônicos, mais usados, e corpos cósmicos, menos utilizado, foram nomenclaturas atribuídas em um diálogo feito por Platão (427 a.C.-34 a.C.), intitulado *Timeu*, onde ele explica a natureza. Para Platão, na matéria havia porções limitadas por triângulos ou quadrados, formando-se elementos que diferiam entre si pela natureza da forma das suas superfícies periféricas. Apresentamos a seguir, as associações que Platão fez dos poliedros com os elementos da natureza.

De acordo com o *Timeu,* Platão disse: Atribuamos à terra a forma cúbica, pois a terra, dos quatro elementos, é o que tem mais dificuldade em mover-se e, dos corpos, o mais adequado para ser moldado. Estabeleçamos que a figura sólida da pirâmide é o elemento que gerou o fogo e a sua semente digamos que, na ordem de geração, o ar é o segundo e a água o terceiro. Faltava apenas um assim Platão escreveu: "Faltava ainda uma quinta construção que Deus utilizou para organizar todas as constelações do céu". E, assim, associou o dodecaedro ao universo. Observe na ilustração abaixo os sólidos platônicos associados aos elementos clássicos da natureza (PLATÃO, 2011).

Ilustração 04: Sólidos regulares e os elementos clássicos da natureza



Fonte: http://iltonbruno.blogspot.com.br/2011/11/solidos-platonicos.html

Após a apresentação do contexto histórico, é interessante saber onde encontramos os poliedros e entender como o conhecimento de suas propriedades e características serviu de inspiração para criação de obras arquitetônicas e artísticas.

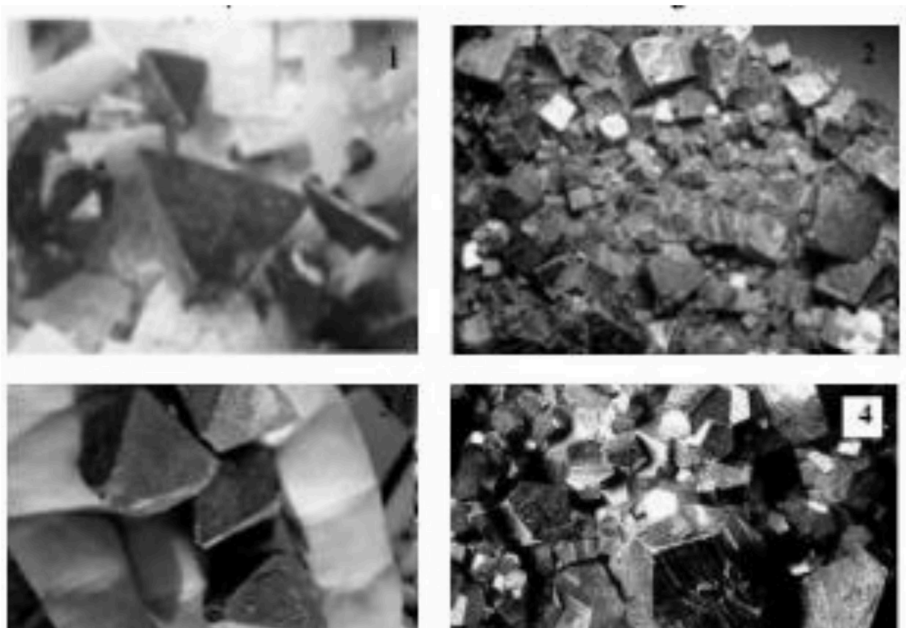
2.4 Os sólidos platônicos em nosso cotidiano

A geometria espacial é um tópico de matemática que requer muita habilidade dos alunos para imaginar, supor, visualizar o que não está explícito na lousa ou até mesmo no livro, no entanto nem todos os alunos dispõem dessa capacidade de abstração, assim compete ao professor procurar outros recursos didáticos que melhorem a percepção dos aprendizes com relação às figuras espaciais. Como a página de um livro ou o quadro-negro são objetos utilizados para fazer representações bidimensionais é fácil perceber que elas não são recursos suficientes para permitir a visualização de certas propriedades e características de formas geométricas. Levando em conta esses fatores, defendemos o uso de materiais concretos e as ferramentas computacionais como possíveis alternativas para que possamos abordar o assunto, pois estes possibilitam a rotação e translação de figuras.

Outra ferramenta que dispõe o professor para ensinar sobre os poliedros é apresentá-los em situações na quais eles estão presentes, podendo aumentar a percepção, a motivação, a curiosidade e o pensamento geométrico dos alunos, uma vez que, em diversas situações, encontramos elementos naturais que estão associados aos poliedros, como por exemplo, nos cristais, nos organismos vivos, nas moléculas etc.

Na natureza encontramos vários poliedros, como por exemplo: o tetraedro pode ser observado em formas cristalinas (calcopirita, figura 1), o hexaedro (galena, figura 2) e o octaedro (magnetita, figura 3). Também pode ser encontrado um cristal com doze faces pentagonais e três arestas saindo de cada um de seus vinte vértices (pirita, figura 4). Porém suas faces não são regulares. Alguns cristais podem ser vistos nas ilustrações abaixo:

Ilustração 05: Cristais na forma de sólidos geométricos

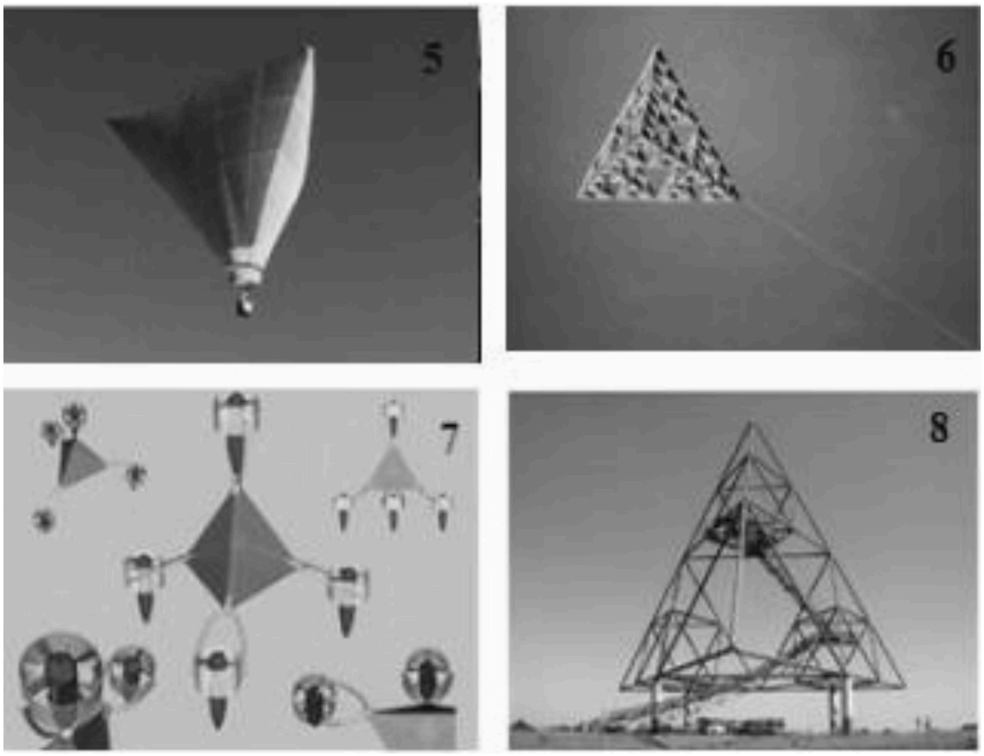


Fonte: http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/tetraedro-br.html

Os poliedros também podem ser vistos, além da natureza, em atividades humanas (pinturas, esculturas, religião, arquitetura, *design* etc). Mostraremos agora uma variedade de situações, objetos, curiosidades, esculturas e construções arquitetônicas em formato dos sólidos platônicos.

Na sequência de figuras em formato de tetraedro (Ilustração 06) temos a pipa Tetraédrica (figura 5), que foi estudada por Alexander Granhan Bell (1847-1922) no início do século XX, o objeto faz referência à pirâmide de Sierpinski, que é a versão tridimensional do triângulo de Sierpinski e do conjunto de Cantor. Em seguida (figura 6) temos o Balão Tetraédrico, esse projeto artístico comporta 72000 pés cúbicos de gás. Na figura 7 apresentamos o Projeto de Gravidade Zero, cujo formato garante estabilidade no modelo de uma pequena plataforma voadora. O autor do projeto teve como objetivo confeccionar uma câmera voadora que possa, por exemplo, transmitir uma partida de basquete de pontos de vista e perspectivas não usuais. Por fim, apresentamos a Plataforma de Observação em Bottrop-Batenbrock (figura 8), seu projeto foi possível graças ao arquiteto Wolfgang Christ em 1995. Possui uma altura de 65 metros e está localizada na área industrial da cidade de Bottrop-Batenbrock na Alemanha.

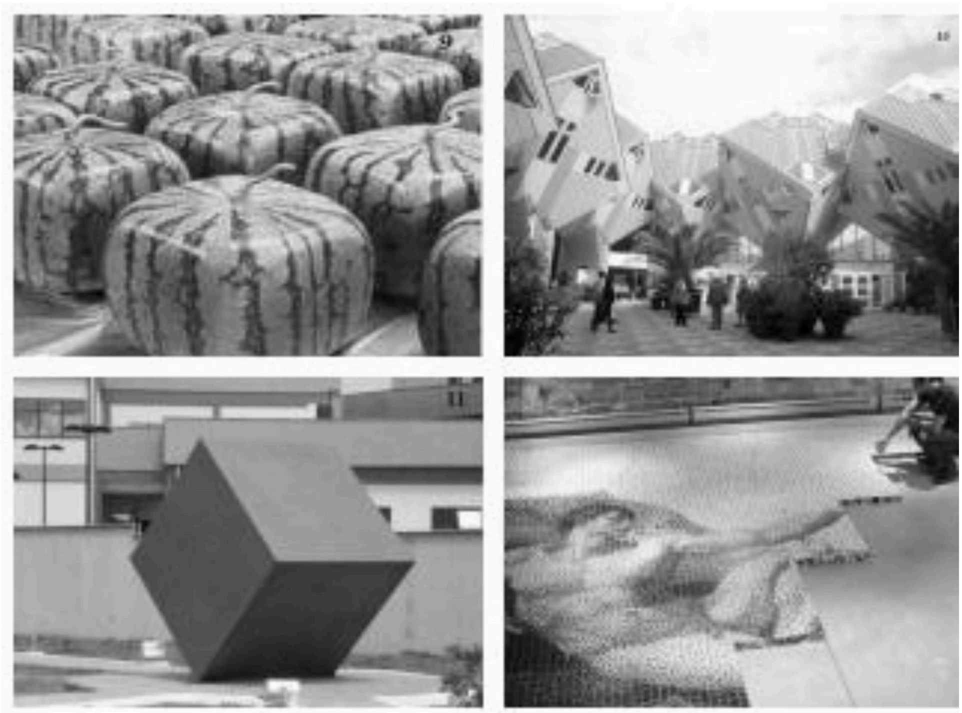
Ilustração 06: Obras artísticas e construções em forma de tetraedros



Fonte: http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/tetraedro-br.html

O cubo (Hexaedro regular) pode ser visto em diversas situações do cotidiano. Apresentamos a seguir uma curiosidade: uma melancia em forma de um cubo (figura 9). Essa técnica de transformá-la em um hexaedro surgiu dos agricultores asiáticos, o formato é obtido colocando as melancias ainda pequenas dentro de moldes cúbicos de plástico e alumínio. Assim, à medida que crescem, adquirem esse molde, isso é feito por que facilita o armazenamento e o transporte. Apresentamos também a arquitetura de casas e, esculturas em formatos de hexaedros (figuras 10 e 11) e, por fim, apresentamos a arte de mosaicos, utilizando pequenos *cubos mágicos.* Esta técnica consiste em colocar os pequenos cubos coloridos de modo que a junção de todos eles represente um desenho maior (figura 12).

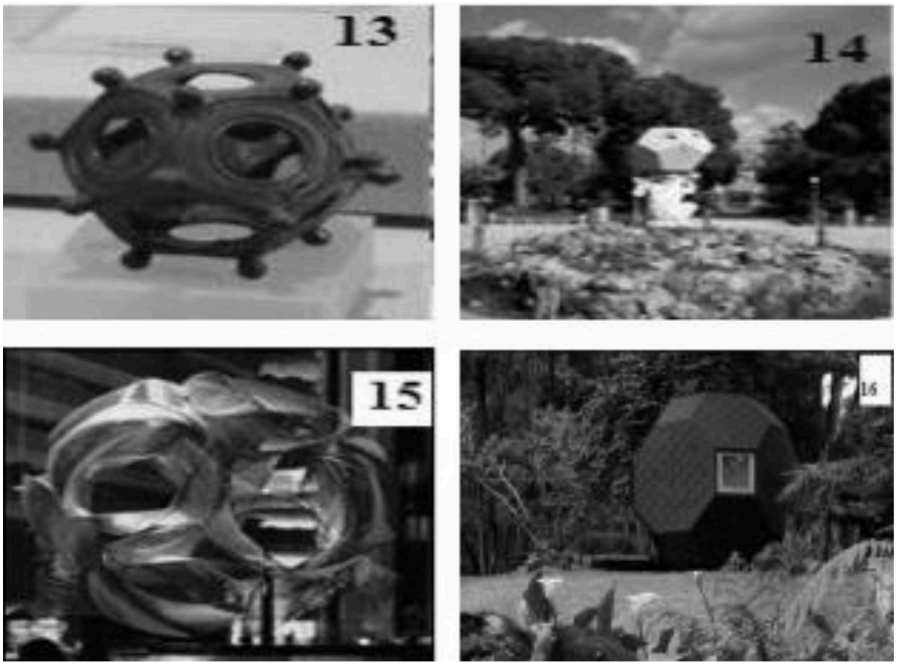
Ilustração 07: Construções e curiosidades em forma de hexaedros



Fontes: http://forum.antinovaordemmundial.com/Topico-melanciasquadradas-exstem [9]
http://falacultura.com/10-edificios-impressionantes [10 e 11]
http://www.i9store.com.br/blog/arte/arte-com-cubos-magicos [12]

Muitas esculturas encontradas em museus, praças públicas e centros universitários possuem o formato dos sólidos platônicos. O dodecaedro também é outro poliedro muito presente nas artes. Na primeira (figura 13) temos um objeto de bronze que foi encontrado em 1939 na cidade de Leopoldswall (Alemanha). Não se sabe a intenção dessa escultura, vários documentos afirmam ser um calendário, um instrumento de guerra, um instrumento de medida ou até mesmo um objeto místico. Na figura 14 temos o relógio solar que se encontra localizado em uma praça na cidade de Palermo, Itália. Na figura 15 temos uma escultura em formato de eclipse com aproximadamente 12 metros de altura. Está localizada no Hyatt Regency Hotel em São Francisco, nos Estados Unidos. Foi idealizada por Charles Perry. Sua estrutura possui várias camadas, começando com um dodecaedro regular. Por fim, apresentamos uma curiosa casa em formato de dodecaedro (figura 16).

Ilustração 08: Construções e curiosidades em formatos de dodecaedros



Fonte: http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/dodecaedro-br.html

Poderíamos apresentar inúmeras outras aplicações, curiosidades e situações onde encontramos poliedros, mas paremos por aqui.

No próximo capítulo apresentamos os dados coletados e as reflexões feitas durante a intervenção do LEEMAT, referente ao assunto poliedros de Platão.

CAPÍTULO 3

ASPECTOS METODOLÓGICOS E RESULTADOS DA PESQUISA

Conforme citado em Almeida (2012), utilizaremos uma abordagem semelhante ao que Cobb (2000) denomina *experimentos de ensino em sala de aula*, pois as atividades desenvolvidas nos encontros realizados na universidade incluem também problemas a serem enunciados pelos membros do Grupo de Pesquisa. Esses experimentos ocorrem no interior da escola, desenvolvendo atividades planejadas e concebidas junto com os professores, que fazem parte da equipe de pesquisa aplicando as atividades aos seus alunos, analisando seus resultados (COBB, 2000, apud ALMEIDA, 2012). Para o mesmo autor devemos ter a necessidade de se olhar coletivamente para os sujeitos da pesquisa, mesmo sem desconsiderar os desempenhos individuais dos participantes.

Os experimentos de ensino se referem a pesquisas que essencialmente têm lugar no interior da escola, desenvolvendo atividades planejadas e concebidas junto com os professores, que fazem parte da equipe de pesquisa, aplicando as atividades aos seus alunos, analisando seus resultados.

A pesquisa que estamos apresentando possui uma abordagem qualitativa, pois, como enfatiza Figueiredo e Souza (2008):

> Esse método fundamenta-se em informações deduzidas das interações interpessoais e da coparticipação dos informantes. O pesquisador é um participante ativo, ele interage em todo o processo, compreende, interpreta e analisa os dados a partir da significação das informações coletadas. (FIGUEIREDO e SOUZA, 2010, p. 84)

Possui ainda as características apontadas por Bogdan e Biklen (1994), ao enfatizar que neste tipo de pesquisa, “a fonte de dados é o ambiente natural, a investigação qualitativa é descritiva. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos tendendo a analisar os seus dados de forma indutiva. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa” (BOGAN e BIKLEN, 1984, p. 47 - 50).

Pretendemos descrever, compreender e explicar os fatos e fenômenos observados durante a aplicação da sequência didática do Grupo de Pesquisa LEEMAT, verificando como o grupo trabalha a História, Filosofia e o uso de materiais concretos para abordar conteúdos de geometria espacial.

Aplicamos antes da intervenção do Grupo um pré-teste contendo questões do tipo aberta e questões fechadas, para verificarmos qual o nível de maturidade geométrica das respostas dadas pelos alunos segundo o modelo Van Hiele. Fizemos esta classificação para que pudéssemos fazer adaptações em nossa linguagem e atividades a fim de elas que estivessem de acordo com o nível dos alunos segundo o modelo.

Apresentamos os dados coletados em gráficos, tabelas, quadros, transcrições das respostas dadas, além de fotografias. A intervenção foi realizada em uma turma de sexto ano de Ensino Fundamental de uma escola localizada na cidade de Monteiro-PB, que possui 30 discentes. Escolhemos esta turma, pois a professora titular é um dos membros do Grupo de Pesquisa LEEMAT. As atividades realizadas foram desenvolvidas no laboratório de Matemática do campus VI da Universidade Estadual da Paraíba. Escolhemos este ambiente, pois, em uma reunião, decidimos que o ambiente possivelmente não era conhecido pelos participantes, também percebemos nesta situação uma oportunidade de as crianças conhecerem a universidade.

Utilizamos diversos instrumentos para recolhermos nossos dados, tais como: gravações de áudio, fotografias e o diário de bordo (PATTON, 2002 apud ALMEIDA, 2012).

A variedade de instrumentos para a coleta ocorre para que a análise de dados seja coerente e facilite a descrição do fenômeno investigado. Usamos a gravação em áudio para registrar as repostas dadas oralmente em uma avaliação final, a utilização do gravador facilitou a descrição fiel das respostas dadas, mas destacamos, como ponto negativo, o excesso de ruídos que dificultou o entendimento de algumas respostas dadas.

Usamos as fotografias para que pudéssemos descrever posteriormente as pessoas, os lugares e as atividades apresentadas. Utilizamos este instrumento, pois ele está intimamente ligado à investigação qualitativa (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 183). Por fim, usamos o diário de bordo, nele registramos nossas percepções, vivências e experiências.

3.1 Análises dos dados

Para fazermos uma classificação do nível de pensamento geométrico das repostas dadas pelos participantes de nossa pesquisa, realizamos algumas atividades, envolvendo avaliações escritas, preenchimento de tabelas e montagem dos poliedros regulares. A seguir faremos as descrições e reflexões dos dados coletados nas intervenções.

Como dissemos, as atividades foram realizadas com uma turma de uma Escola Municipal de Ensino em uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental, com trinta alunos dos quais vinte e sete participaram no primeiro encontro e vinte e nove no segundo.

O desenvolvimento da sequência didática foi realizada no laboratório de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba Campus VI, Monteiro - PB, por ser um ambiente que nos proporcionou os recursos e espaço necessários às intervenções.

Os conteúdos que foram abordados durante a sequência foram os seguintes:

- Classificação de objetos em corpos redondos e não-redondos;
- Identificação de vértices, faces e arestas dos poliedros;
- Estudo da momenclatura de polígonos e poliedros;
- Classificação de poliedros em regulares e não regulares e estudo de suas planificações;
- Relação de Euler.

Essas atividades foram criadas e selecionadas pelos participantes do Grupo em nossas reuniões semanais e teve como eixo norteador os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Os discentes, ao chegarem ao laboratório de matemática, ficaram encantados com o ambiente, pois certamente nunca haviam visto um espaço como aquele. Observavam atentamente as formas, figuras e objetos, faziam conjecturas e comparações de como usar os objetos e criavam nomes para eles. Após um certo tempo inciamos as atividades planejadas.

3.2 Avaliação diagnóstica

A primeira atividade realizada na intervenção foi uma avaliação diagnóstica, a qual era composta por quatro questões, elaboradas pelo Grupo. Tinha como objetivo principal fazer um levantamento dos conhecimentos prévios a repeito dos conteúdos abordados na sequência didática, para que, baseados nas respostas dadas, pudéssemos fazer uma possível classificação da maturidade geométrica baseados no modelo Van Hiele.

Durante a realização desta atividade não houve a ajuda dos demais colegas ou dos integrantes do grupo de pesquisa (LEEMAT). As perguntas formuladas tinham como referência os PCN de Matemática, terceira edição, publicada no ano de 2001. Segundo os mesmos, os conteúdos a serem trabalhados no Ensino Fundamental I no bloco de Espaço e Forma são os seguintes:

- Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre corpos redondos, como esfera, o cone, o cilindro e outros.
- Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre poliedros (como os primas, as pirâmides e outros) e identificação de elementos como faces, vértices e arestas.
- Exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais.
- Percepção de elementos geométricos nas formas da natureza e nas criações artísticas. (BRASIL, 2001, p. 88)

Para explorarmos estes assuntos apontados neste bloco de conteúdos, a primeria questão abordava o quarto conteúdo (percepção de elementos geométricos nas formas da natureza e nas criações artistícas); a segunda questão explorava dois conteúdos: o segundo, reconhecimento e diferenças entre poliedros (como os prismas e as pirâmides e outros) e identificação de elementos como faces, vértices e arestas, e o primeiro, exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais.

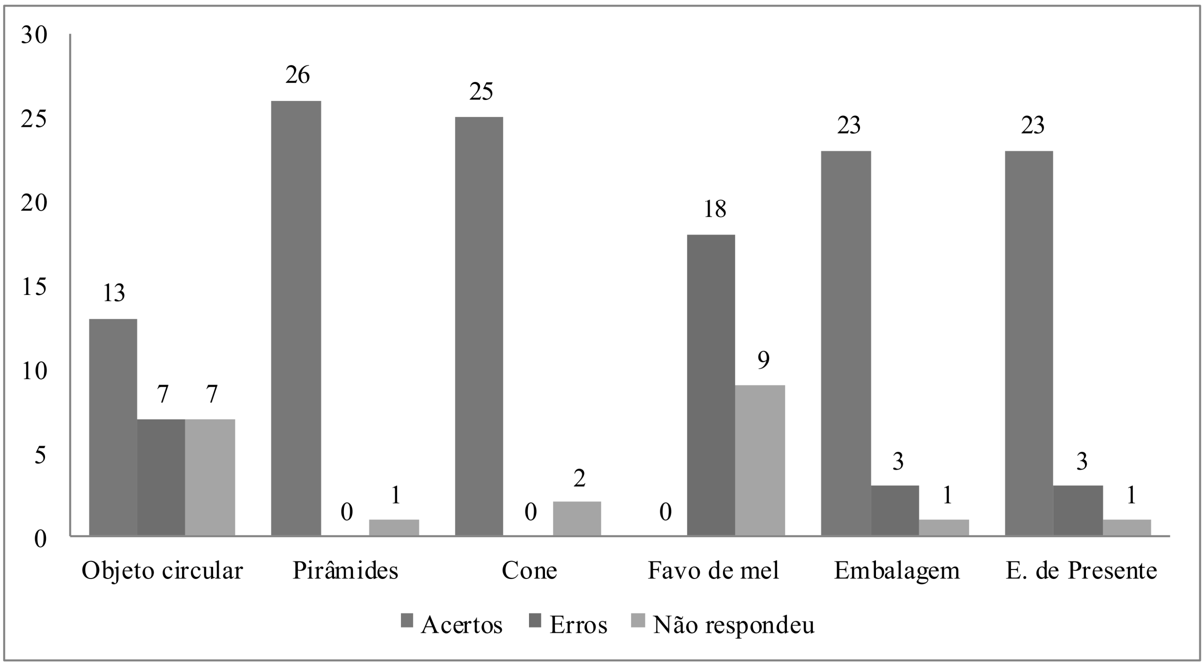
A atividade foi realizada individualmente, porém os alunos estavam dispostos em grupos devido à falta de espaço e prévia organização das mesas presentes no laboratório de Matemática. A organização das equipes foi feita naturalmente por afinidade entre os próprios participantes da pesquisa. A seguir apresentaremos as reflexões das respostas dadas para a avaliação dos conhecimentos prévios.

3.2.1 Primeira questão

Na primeira questão (vide apêndice A) foram apresentadas algumas imagens de objetos: um recipiente cilíndrico, pirâmides, cone, prismas em forma de favos de mel, embalagens em formas de paralelepípedo e uma embalagem para presente em formato de cubo. Os objetos eram conhecidos pelas crianças, eles deveriam reconhecer visualmente os modelos geométricos presentes nestas figuras (cilindro, círculo, tetraedro, triângulos, cones, prismas, hexágonos, paralelepípedo, retângulos, cubo ou quadrados) e registrá-los na questão.

A maioria conseguiu identificar nas imagens alguns polígonos representados, porém a nossa expectativa de que as respostas dadas seriam os nomes dos sólidos presentes nas imagens não foi correspondida. Com exceção do cone para o qual a maioria conseguiu identificar pelo nome convencional. Os PCN de Matemática orientam que o trabalho do ensino da geometria “deve ser feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.” (BRASIL, 2001, p. 56). As quantidades de acertos e erros da primeira questão estão apresentadas no gráfico seguinte.

Gráfico 01: Respostas dadas à primeira questão



Elaborado pelo pesquisador.

Analisando as repostas dadas à primeira questão percebemos que a grande maioria dos participantes conseguiu *visualizar* as figuras geométricas identificadas nas ilustrações de objetos presentes em nosso dia-a-dia. Os que nos permite classificar algumas de suas respostas em um nível zero e outras em nível um, os que conseguiram responder o nome dos polígonos presentes nas figuras (nível um), pois, segundo Crowley (1994), há uma análise dos conceitos geométricos, ou seja, as figuras são reconhecidas por meio de suas partes. Para o mesmo autor no nível zero os alunos não conseguem visualizar as partes do objeto, veem apenas como entidades totais que não possuem componentes ou atributos. A figura à qual ninguém conseguiu associar o objeto a formas geométricas foi o favo de mel. Esta dificuldade é compreendida visto que os prismas ou hexágonos presentes na imagem não são figuras que costumamos nomeá-las fora da sala de aula de acordo com os conceitos geométricos.

3.2.2 Segunda questão

Para a segunda pergunta entregamos vários sólidos geométricos aos alunos a fim de verificarmos se eles conheciam alguma das propriedades destes sólidos

Ilustração 09: Segunda questão da avaliação prévia

2. Você recebeu um objeto. Sobre ele responda as seguintes perguntas:

a- Qual o nome deste objeto?

____

b- Quantos vértices, faces e arestas ele possui?

Vértice:____________Faces:__________Arestas:__________

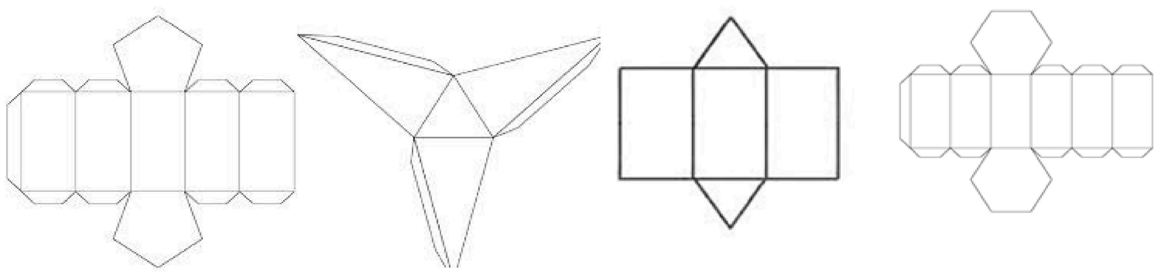
c- Qual o nome dos polígonos encontrados nas faces deste objeto?

1.________________ 2.________________

d- Esse objeto parece com algum objeto que você possui ou vê diariamente? Se sim, qual?

____

e- Qual das seguintes figuras poderia ser uma planificação deste objeto?



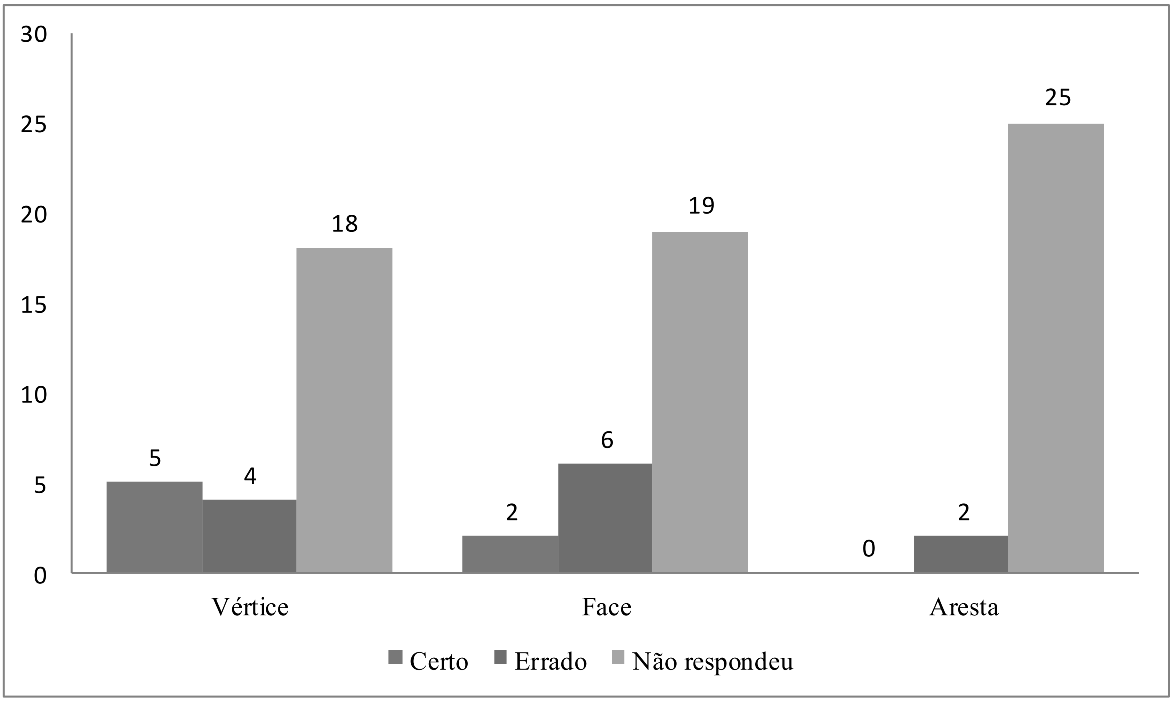
a-( ) b-( ) c-( )

d-( ) e – Nenhuma das anteriores ( )

Elaborada pelo LEEMAT.

Tivemos como resultado: 4 responderam corretamente ao nome do sólido (os sólidos conhecidos eram o cubo e o cone); 8 não responderam; e 15 responderam errado. Destes apenas 2 associaram o nome ao poliedro, no caso o poliedro recebido foi o cubo e o objeto associado foi o dado, 2 disseram respostas erradas e 11 responderam que o nome do sólido era o nome do polígono encontrado na face do sólido. Com relação aos conceitos de faces, vértices e arestas, verificamos que estes conceitos ainda não eram apreendidos pela maioria dos alunos, conforme mostra o gráfico seguinte.

Gráfico 02: Respostas dadas à segunda questão



Elaborado pelo pesquisador.

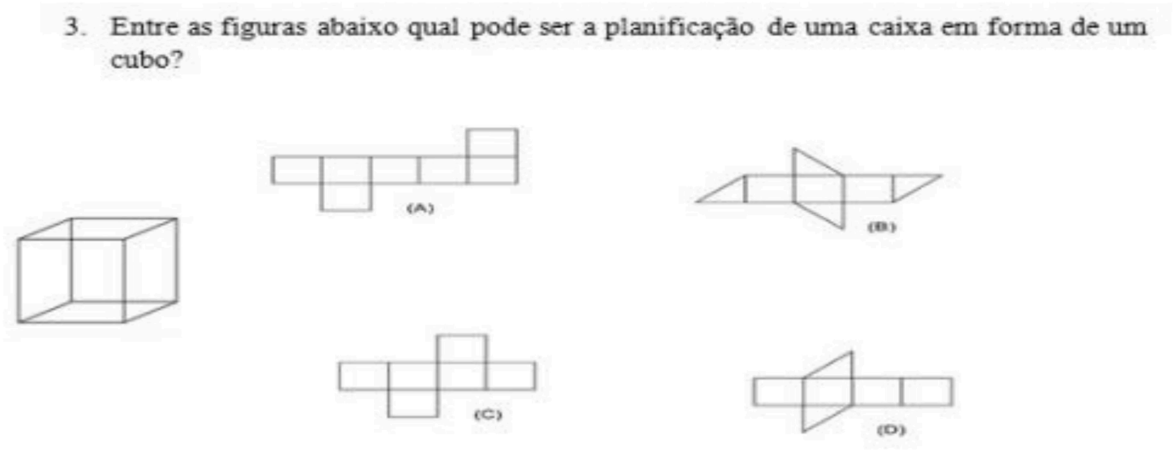
Segundo os PCN, os conteúdos conceituais e procedimentais sugeridos no grupo de Espaço e Forma envolvem o "reconhecimento de semelhanças e diferenças entre poliedros (como prisma e pirâmides) e identificação de elementos como faces, vértices e arestas" (BRASIL, 2001, p. 88). Verificamos com a avaliação inicial que se estes temas foram abordados em sala de aula isto deve ter ocorrido de uma maneira superficial, não eficaz para compreensão deles.

A partir das respostas dadas à primeira e segunda questões podemos dizer que os alunos estão em um nível de reconhecimento (nível zero), pois, segundo Alves (2010), neste nível há um reconhecimento visual de uma figura, mas as suas propriedades ainda não são reconhecidas, são descritas de forma imprevisível. Neste nível eles são capazes de aprender um vocabulário geométrico.

3.2.3 Terceira questão

A terceira questão tinha como objetivo principal verificar se os alunos eram capazes de reconhecer a planificação de um cubo, pergunta esta elaborada consoante o bloco de conteúdos de Espaço e Forma: a "exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais" (BRASIL, 2001, p. 89). Na questão, apresentávamos várias alternativas com possíveis planificações do cubo e pedíamos para que assinalassem a planificação que correspondia ao cubo. A questão está representada abaixo.

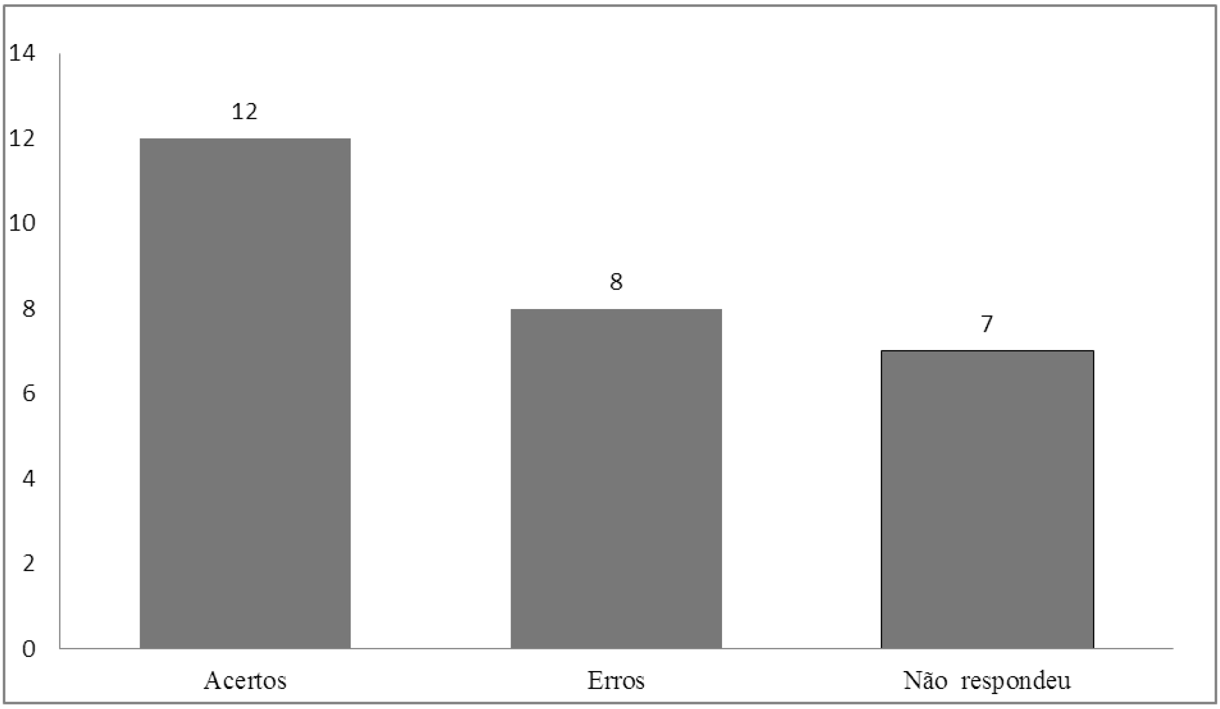
Ilustração 10:Terceira questão da avaliação prévia



Elaborada pelo LEEMAT.

O resultado das respostas dadas está representado no gráfico seguinte.

Gráfico 03: Respostas dadas à terceira questão



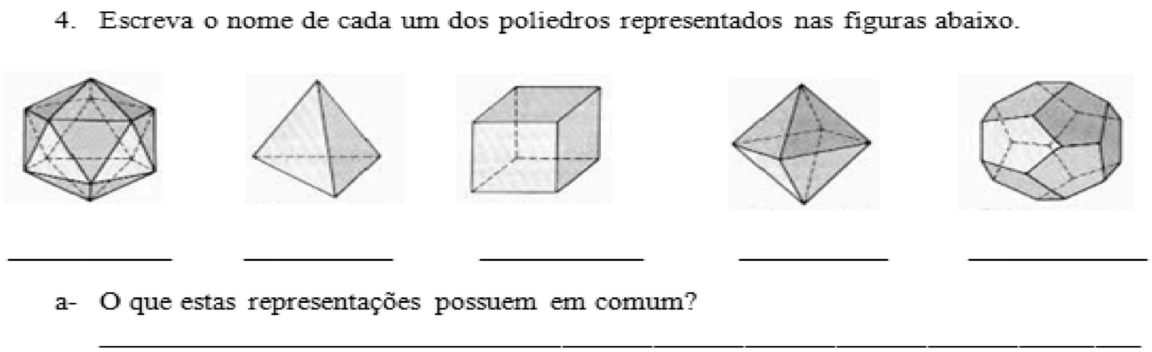
Elaborado pelo pesquisador.

Pelo gráfico acima percebemos que menos da metade da turma reconheceu planificações do cubo. Este dado corrobora o nível de classificação das respostas dadas à primeira questão, ou seja, eles encontram-se no nível de reconhecimento: apenas identificam o objeto estudado, não sendo capazes de verificar suas propriedades.

3.2.4 Quarta questão

A última questão foi elaborada com o conteúdo do bloco Espaço e Forma dos PCN, reconhecimento de semelhanças e diferenças entre poliedros. A questão indagava se os alunos conheciam algum dos cinco poliedros de Platão (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), representados na questão.

Ilustração 11: Foto da quarta questão da avaliação prévia


4. Escreva o nome de cada um dos poliedros representados nas figuras abaixo.

a- O que estas representações possuem em comum?

Elaborada pelo LEEMAT.

Constatamos que apenas o cubo era conhecido por sete alunos, pois associaram a forma geométrica cúbica ao seu nome. As demais formas geométricas não deram qualquer resposta.

3.3 Intervenção: Primeira atividade

Nesta seção apresentamos as descrições/reflexões realizadas durante as atividades propostas pelo Grupo LEEMAT. A primeira atividade realizada partia do nível zero de visualização. Foi planejada baseada neste nível a fim de verificarmos se os alunos encontravam-se neste do modelo de aprendizagem (Van Hiele) e se estavam aptos a progredir de nível.

Segundo Pirola (2001), “é importante que o estudo da geometria tenha início com os poliedros e corpos redondos, com o objetivo de levar os alunos ao desenvolvimento da percepção e à discriminação de formas” (PIROLA, 2001, p. 1186). Baseamo-nos nesta afirmação para realizarmos as atividades do Grupo.

Nesta atividade realizamos uma apresentação em *slides*, a qual mostrava algumas imagens que possuem ou lembram a forma de poliedros. Mostramos sua presença nas atividades humanas e na natureza. O conteúdo abordado nesta atividade foi referente à “percepção de elementos geométricos nas formas da natureza e nas criações artísticas.” (BRASIL, 2001, p. 89).

Apresentamos a presença destas formas na natureza, como em alguns minerais, na arquitetura, a exemplo das pirâmides do Egito, nas artes e em embalagens de produtos conhecidos, como dispostas nas ilustrações 05 a 08, no capítulo 2 desta monografia. Durante a exibição da apresentação os discentes mostravam-se interessados e curiosos ao verem estas formas, mas quando questionados se eles já haviam visto elas em outros lugares, as respostas foram negativas. Eles não conseguiram estabelecer relação entre as formas mostradas na apresentação com os objetos encontrados no laboratório, em suas mesas ou em sua escola. Para Crowley (1994) as crianças ainda encontram-se no nível zero (visualização), pois os alunos percebem o espaço como algo que existe em torno deles. As figuras geométricas são reconhecidas por sua forma física, não por suas partes ou propriedades. Neste nível os alunos não conseguem estabelecer relações de propriedades.

3.3.1 Segunda atividade

Após a avaliação a classe já estava dividida em equipes de quatro participantes. Durante a semana que antecedeu a aplicação da sequência proposta pelo grupo LEEMAT, a professora titular da turma pediu para os alunos trazerem alguns objetos ou embalagens que possuam formas interessantes, diferentes ou curiosas que despertassem a atenção deles. Os objetos trazidos foram diversos como, por exemplo, garrafas de refrigerante, bolinhas de gude e algumas embalagens. Além dos objetos trazidos foram entregues outros objetos presentes no laboratório (poliedros e corpos redondos).

O conteúdo abordado nesta atividade estava de acordo com o bloco de conteúdos Espaço e Forma dos PCN: “reconhecimento de semelhanças e diferenças entre corpos redondos, como esfera, cone, o cilindro entre outros” (BRASIL, 2001, p. 88). Divididos em grupos, os alunos tiveram que preencher um quadro parcialmente reproduzido abaixo.

Quadro 02: Segunda atividade da intervenção

Contém partes arredondadas	Não contém partes arredondadas

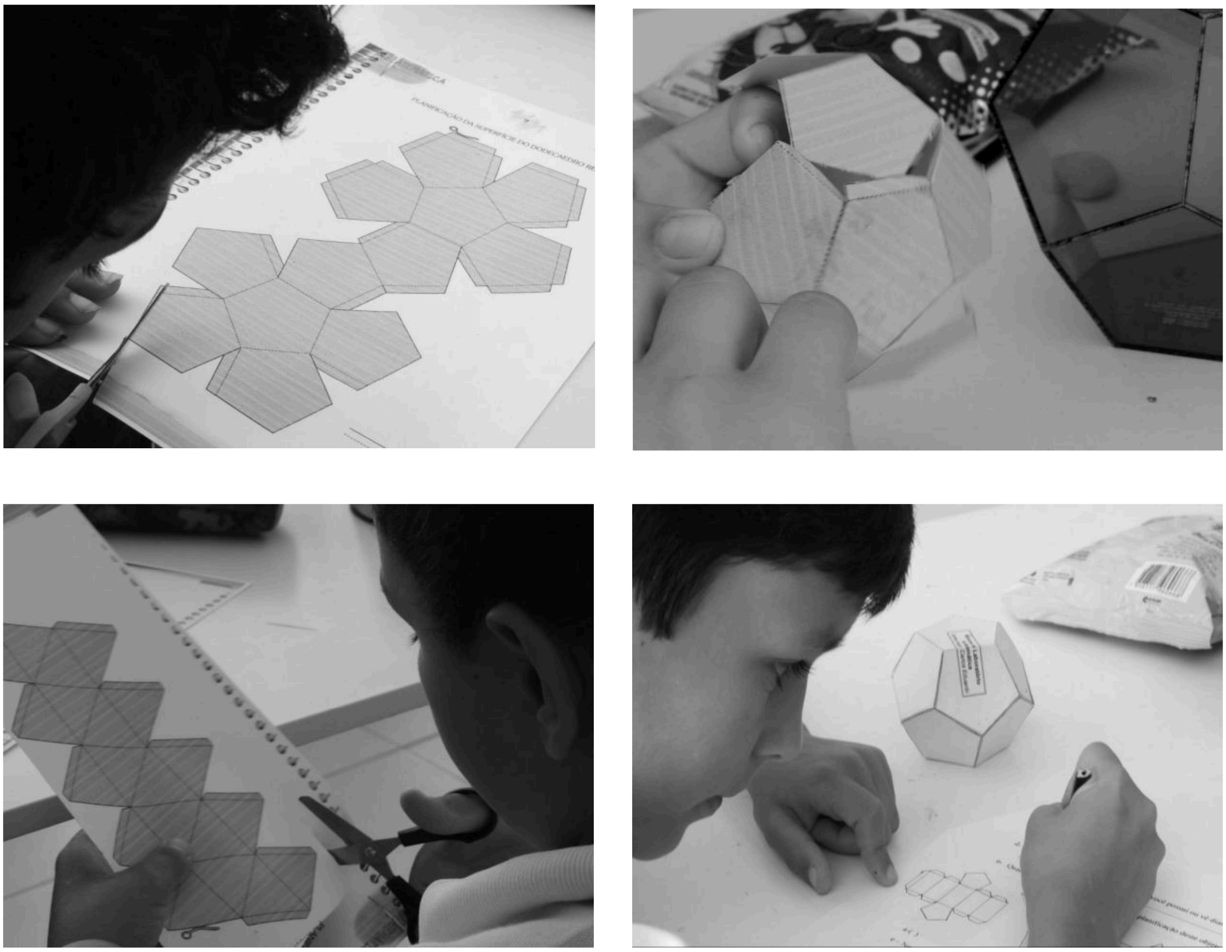
Elaborado pelo LEEMAT.

A primeira coluna devia ser preenchida com os objetos que possuíam partes arredondadas e a segunda com os objetos que não possuíam partes arredondadas. As respostas dos grupos foram bastantes favoráveis visto que todos os participantes conseguiram realizar a atividade com êxito. Após a análise das respostas percebemos que conseguiram fazer uma adequada classificação dos objetos em corpos que possuíam formas arredondadas dos que não possuíam , o que nos permite concluir que os alunos estavam aptos a progredir do nível zero (visualização) para o nível um (análise), porque neste nível "começa a análise dos conceitos geométricos. Nesta fase o aluno começa a discernir as características e propriedades das figuras, mas não consegue estabelecer relações entre essas propriedades e nem vê inter-relações entre figuras." (PEREIRA, SILVA, MOTTA, 2005, s/p).

3.3.2 Terceira atividade

Para Explorarmos o assunto de planificações, "exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais" (BRASIL, 2001, p. 88) e os conceitos de faces, vértices e arestas, realizamos o recorte e a montagem dos poliedros regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro). A atividade despertou interesse e colaboração entre os participantes, demonstrando empolgação em descobrir como era uma planificação e como ela iria transformar-se em um poliedro. Durante a montagem dos cinco sólidos os alunos mostraram curiosidade em descobrir os nomes daqueles, mas ainda não era o momento de revelá-los. Pedimos que mesmo não sabendo o nome formal dos poliedros, nomeassem de acordo com a sua imaginação. Os nomes dados foram diversos, como: *bola diferente* (dodecaedro), *bola maluca* (icosaedro), *pirâmide* (tetraedro), *dado* (hexaedro), *dupla pirâmide* (octaedro).

Ilustração 12: Fotos do estudo de planificação e montagem de poliedros



Arquivo do autor.

Após a montagem dos cinco sólidos explicamos os conceitos de vértices, faces e arestas. Realizamos uma contagem coletiva dos novos conceitos apreendidos de alguns dos sólidos. As respostas foram satisfatórias, os grupos mostraram intensa participação durante a atividade.

Terminada a explicação, os alunos passaram a realizar o preenchimento do quadro dois, parcialmente reproduzido na página 48. Os alunos deveriam utilizar os objetos trazidos para fazer a contagem do número de faces, vértices e arestas das formas poliédricas dos objetos.

Depois da contagem feita, eles foram desafiados a descobrir uma relação entre o número de faces, vértices e arestas. Esta atividade explora habilidades classificadas no nível dois (dedução). Segundo Crowley (1994), neste nível as definições passam a ter significados, há capacidade de estabelecer relações de propriedades. Esta era nossa meta: que houvesse uma dedução da relação de Euler. Para Pereira, Silva e Motta (2005), para haver uma evolução no nível de pensamento dos alunos devemos seguir uma série de etapas.

A primeira é da interrogação informatizada. Fizemos várias perguntas como, por exemplo:

1. O que acontece se somarmos o número de faces com o de vértices? Qual o resultado?
2. Precisamos somar que valor com o número de arestas para que os resultados sejam iguais?
3. Isto vale para todos os casos?
4. Para que serve esta dedução?

A atividade despertou a motivação dos participantes. Rapidamente, conseguiram deduzir a relação: somaram a quantidade de vértices com a de faces, e do número de arestas subtraíram dois. Perceberam que essa relação de somar o número de vértices com o de faces tem como resultado o número de aresta somado a dois, ou seja, $V + F = A + 2$, onde V é o número de vértices, F o de faces e A o de arestas. Fizemos uma explicação e generalização da fórmula para haver uma compreensão de sua validade.

3.3.3 Quarta Atividade

Segundo Pereira, Silva e Motta (2005) os alunos que se encontram no nível zero ou no nível um são capazes de aprender um vocabulário geométrico, sendo assim na atividade seguinte os alunos deveriam descobrir qual era do nome dos poliedros presentes em suas mesas. Para fazermos esta apresentação desenhamos uma tabela na lousa e fizemos algumas perguntas seguindo a sequência de fases apontadas por Alves e Sampaio (2010).

Primeira fase (interrogação informatizada). Fizemos questionamentos aos alunos como, por exemplo, perguntamos que título a seleção brasileira ganhou ao vencer a copa do mundo pela quarta vez. “O tetracampeonato”, responderam. Em 2014, ela poderá ser o quê? “Hexacampeã”.

Partimos então para a terceira fase (explicitação). Explicamos que estas palavras são prefixos gregos e também são utilizados para nomear os poliedros de acordo como o número de faces. Para formalizar estes nomes e completar a tabela, utilizamos uma apresentação em *slides*, a qual mostrava os poliedros de Platão associados a elementos da natureza: o tetraedro, ao fogo; o octaedro, ao ar; o hexaedro, à terra; o dodecaedro, ao universo; e por fim, o icosaedro à água. (EVES, 2004, p. 114).

Aproveitamos a oportunidade para fazermos uma apresentação da biografia de Platão, bem como das ideias referentes à sua filosofia. Explicamos que os poliedros eram conhecidos por outros povos, mas Platão foi o primeiro a demonstrar suas propriedades e que existem somente cinco. Exploramos a fase dois (orientação dirigida), na qual os alunos exploram o assunto de estudo através do material selecionado pelo professor. Pedimos que preenchessem um quadro, parcialmente reproduzido abaixo, e que na célula que não possui título fosse feita uma relação entre o objeto trazido a um poliedro regular (por exemplo: a borracha a um hexaedro) e completassem o quadro com o número de faces, vértices e arestas e por fim com a relação deduzida.

Quadro 03: Terceira e quarta atividade da intervenção

Objeto		Vértices (V)	Faces (F)	Arestas (A)	Relação de Euler

Elaborado pelo LEEMAT.

O resultado da atividade foi satisfatório visto que houve o preenchimento do quadro e conseguiram identificar nos objetos a quantidade de vértices, faces e arestas assim como conseguiram deduzir a relação de Euler e associá-los a um poliedro. Após a conclusão da atividade, cada grupo escolheu um objeto para completar o quadro projetado na lousa. Fizemos esta atividade para dirimir possíveis dúvidas que os alunos tivessem e para que todos participassem da atividade. Foi dado um tempo para que os alunos passassem pela fase da orientação livre, para que os alunos procurassem suas próprias soluções de maneiras diferentes, a fim de que possam ganhar experiência e confiança.

3.3.4 Quinta atividade

A última atividade tinha como objetivo principal a fixação da fórmula de Euler e dos conceitos apreendidos durante a intervenção. Entregamos um novo quadro para que fosse preenchido somente com o nome dos sólidos poliédricos regulares. Realizamos esta atividade porque, para Pereira, Silva, e Motta (2005), na última fase, denominada de integração, o aluno relê e resume o que foi aprendido, com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações, assim acontece o alcance de um novo nível de pensamento. O quadro que foi usado está parcialmente reproduzido abaixo.

Quadro 04: Quinta atividade da intervenção

Poliedros de Platão	Vértices (V)	Faces (F)	Arestas (A)	Relação de Euler

Elaborado pelo LEEMAT.

Os resultados da atividade estão mostrados na tabela seguinte. Lembramos que a atividade foi realizada em grupo e que, após um tempo, as atividades eram corrigidas em forma de plenária pelas equipes de trabalho.

Quadro 05: Resultados da quinta atividade da intervenção

	Vértice		Faces		Arestas		Relação de Euler
	Acertos	Erros	Acertos	Erros	Acertos	Erros	Conseguiram identificar
Tetraedro	9	0	9	0	9	0	9
Hexaedro	9	0	9	0	8	1	8
Octaedro	9	0	9	0	9	0	9
Dodecaedro	9	0	9	0	8	1	8
Icosaedro	8	1	7	2	7	2	7

Elaborado pelo pesquisador.

Com esta atividade, finalizamos a sequência proposta pelo Grupo LEEMAT, a qual propôs partir do concreto ao abstrato, do informal ao formal e da geometria espacial à plana.

Após, realizamos uma avaliação final, para verificarmos o quanto os alunos aprenderam com a intervenção proposta pelo LEEMAT.

3.4 Avaliação final

Para finalizarmos a nossa intervenção levamos os participantes a uma sala vizinha do laboratório de Matemática, para que pudéssemos realizar uma avaliação final, a fim de verificarmos o resultado do trabalho do Grupo. Houve uma mudança de sala, pois neste novo local as cadeiras estavam organizadas de modo que possibilitou a realização da atividade em forma individual, o que não era possível devido à disposição das mesas que há no laboratório de Matemática. A avaliação final era composta por sete questões, por meio das quais abordamos os assuntos explorados nos dois encontros. A seguir estão apresentados os resultados obtidos.

3.4.1 Avaliação final: questões um e dois

A primeira e segunda questões (vide apêndice E) indagavam se os alunos sabiam o que são poliedros e onde podemos encontrá-los. Esperávamos que fossem dadas respostas adequadas a respeito do que eram poliedros e onde encontra-los, visto que trabalhamos constantemente estes conceitos durante a intervenção. Seis não souberam ou não quiseram responder. A maior parte do restante do grupo respondeu que um poliedro era alguma *coisa* que possuía muitas faces. É importante salientarmos que o Grupo de Pesquisa durante a exposição do assunto ressaltou que o nome vem do grego, remetendo-se a poliedro, pois possuem várias faces. A maioria também soube exemplificar onde encontrar os sólidos em situações do cotidiano. Perguntávamos se sabiam o que eram os poliedros de Platão, e pedimos que eles escrevessem sobre o que sabiam sobre eles. Os alunos tiveram diversas respostas para esta questão, por exemplo. (cada parágrafo corresponde à resposta de um aluno, mantendo sua grafia):

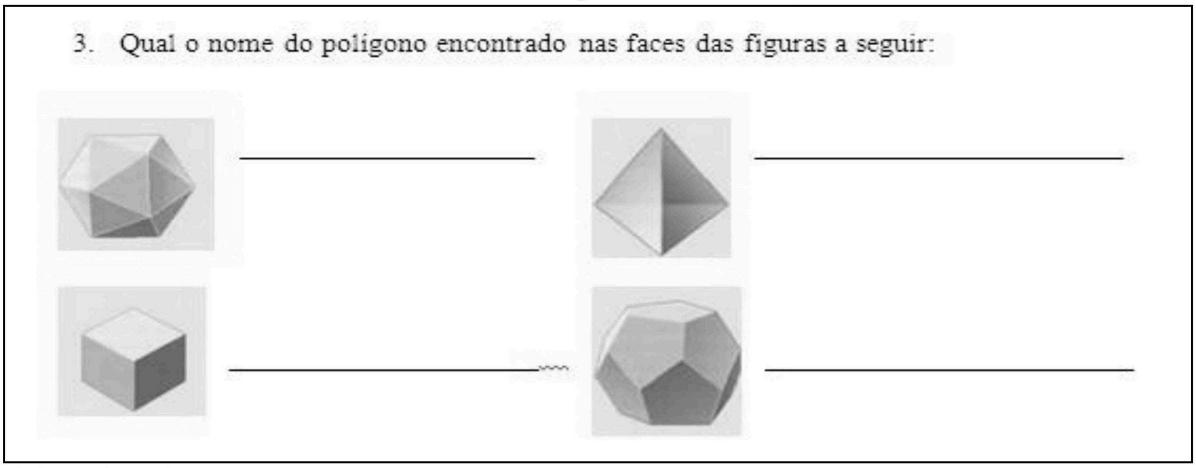
- Sim eu sei que ele descobriu cinco formas geométricas e só existem cinco por que só estas cinco tem os lados iguais
- cadaum dos 5 tem um significado ex: água, fogo, ar, terra universo
- Sim, eles são só cinco, existem muito mais, só que Platão só escolheu cinco porque só os cincos são com faces parecidas
- Sim que só existem 5 poliedros regulares e o nome verdadeiro de platão e cristoves.

Analisando as quatro respostas selecionadas, percebemos que houve compreensão dos conceitos abordados durante a sequência, pois embora que escritas de maneira informal, percebemos que houve uma compreensão sobre poliedros regulares, conceitos de algumas ideias pertencentes à filosofia de Platão e tópicos da História da Matemática.

3.4.2 Avaliação final: questão três

A terceira questão tinha como objetivo verificarmos se os alunos conseguiam *visualizar* as figuras geométricas presentes nas faces de alguns poliedros representados em figuras. Segundo Alves (2010), no nível zero o conhecimento de geometria é básico, a percepção das figuras geométricas ocorre de forma global e individual e no nível um se inicia o reconhecimento das propriedades geométricas presentes em cada figura. Há capacidade de analisar e reconhecer propriedades e elementos matemáticos.

Ilustração 13: Terceira questão da avaliação final



Elaborada pelo LEEMAT.

Em relação à imagem do icosaedro, 22 responderam corretamente o nome do polígono encontrado nas faces, 4 erraram e 3 não souberam ou não quiseram responder a questão. Em relação ao tetraedro, 16 responderam corretamente, 9 erraram e 4 não responderam. Ao hexaedro, 22 responderam corretamente, 4 responderam errado e 3 deixaram sem responder. Por fim, em relação ao dodecaedro, 13 acertaram, 8 erraram e 8 não responderam. Fazemos aqui uma ressalva: a maior parte dos participantes respondeu ao nome do polígono como sendo o poliedro de Platão que estava representado na imagem, demonstrando não ter entendido o nosso comando.

3.4.3 Avaliação final: questões quatro e sete

Analisamos a quarta e sétima questões (vide apêndice E) de uma só vez, pois a quarta refere-se à nomenclatura dos cinco poliedros de Platão e às planificações dos poliedros regulares. A tabela mostra apenas o número de acertos referentes a cada sólido.

Quadro 06: Resultados da quinta e sétima questões da avaliação final

Poliedro	Nomenclatura	Planificação
Tetraedro	20	22
Hexaedro	23	24
Octaedro	14	15
Dodecaedro	17	20
Icosaedro	16	19

Elaborado pelo pesquisador.

Comparando as respostas dadas, percebemos que os objetivos do Grupo de Pesquisa foram atingidos de modo satisfatório, uma vez que os poliedros e suas planificações foram reconhecidos. Comparando as respostas dadas ao hexaedro, percebemos que tivemos um aumento considerável no número de alunos que conseguiram responder corretamente, pois na avaliação inicial apenas 12 crianças acertaram a questão enquanto 23 acertaram após a intervenção. Analisando as respostas também notamos um considerável equilíbrio entre as respostas dadas aos nomes dos poliedros com sua planificação.

3.4.4 Avaliação final: questões cinco e seis

Analisamos estas duas questões ao mesmo tempo, pois ambas referem-se ao cálculo do número de faces, vértices e arestas de poliedros (vide Apêndice E). A quinta questão apresentava 3 poliedros regulares: tetraedro, hexaedro e icosaedro. Pedíamos que respondessem qual o número de faces, vértices e arestas. Analisamos primeiro as respostas dadas referentes ao tetraedro, depois ao hexaedro e por fim ao icosaedro (quadros 07, 08, e 09, respectivamente).

Quadro 07: Resultados da quinta questão (tetraedro)

Tetraedro	Acertos	Erros	Não respondeu
Faces	24	3	2
Vértices	21	6	2
Arestas	14	12	3

Elaborado pelo autor.

Quadro 08: Resultados da quinta questão (hexaedro)

Hexaedro	Acertos	Erros	Não respondeu
Faces	19	12	3
Vértices	19	12	3
Arestas	13	12	4

Elaborado pelo autor.

Quadro09: Resultados da quinta questão (icosaedro)

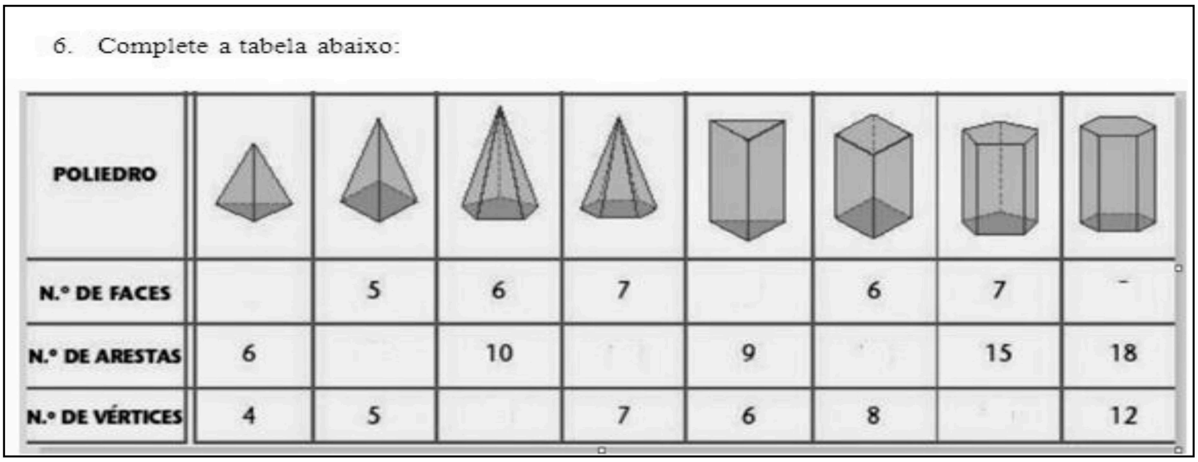
Icosaedro	Acertos	Erros	Não respondeu
Faces	12	13	4
Vértices	6	18	5
Arestas	12	12	5

Elaborado pelo autor.

Analisando as respostas dadas percebemos que a maioria dos participantes conseguiu responder corretamente às perguntas. Em relação às respostas dadas ao icosaedro percebemos que houve um maior número de erros. Tivemos este resultado, possivelmente porque a representação deste sólido no plano não é tão simples.

A sexta questão tinha como objetivo utilizar a relação de Euler para completar um quadro com alguns poliedros, como reproduzido na ilustração abaixo.

Ilustração 14: Foto da sexta questão da avaliação final



6. Complete a tabela abaixo:

POLIEDRO								
N.º DE FACES		5	6	7		6	7	-
N.º DE ARESTAS	6		10		9		15	18
N.º DE VÉRTICES	4	5		7	6	8		12

Adaptado de http://www.4shared.com/photo/wiqd0jyz/

Nesta questão apresentamos duas quantidades e pedimos a terceira, referentes ao número de faces, vértices e arestas. O número encontrado podia ser facilmente calculado utilizando a relação de Euler. O nosso resultado foi satisfatório visto que um aluno respondeu totalmente correto a tabela, 25 responderam parcialmente correto, 2 não responderam e apenas um errou totalmente o preenchimento da tabela.

Com esta atividade finalizamos a intervenção do Grupo LEEMAT. Antes que os participantes fossem embora fizemos ainda uma avaliação oral com o intuito de verificarmos a aceitação da sequência. Os alunos responderam que gostaram da *aula* porque conheceram um pouco mais de geometria. Segundo eles, aprenderam o que são e os nomes dos poliedros, suas propriedades, quem foi Platão, gostaram de montar os poliedros. Não foram apontados pontos negativos pelos alunos. Houve uma grande aceitação e curiosidade em conhecer o laboratório de Matemática da universidade, pois era para eles um ambiente desconhecido pela maioria dos participantes, mas que rapidamente tornaram-se familiarizados com o local.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao término deste trabalho, concluímos que os alunos participantes da pesquisa do Grupo LEEMAT demonstraram empolgação em realizar as atividades no laboratório de Matemática uma vez que este ambiente era desconhecido pelas crianças e serviu de motivação para explorar os assuntos de Matemática de maneira não convencional. Os discentes demonstraram ter aprendido conceitos fundamentais de geometrias plana e espacial, partindo do concreto ao abstrato. Foi notável também a satisfação da professora, também membro do LEEMAT, em proporcionar esta oportunidade aos seus alunos.

Os conteúdos referentes ao bloco de conteúdos Espaço e Forma dos PCN foram desenvolvidos ao longo desta sequência utilizando diversos materiais manipuláveis por meio da História da Matemática e recursos tecnológicos, com atividades simples, conseguimos fazer relação entre teoria e prática além de facilitarmos o processo de abstração dos conceitos geométricos dos alunos e o desenvolvimento de sua criatividade. Percebemos o fraco desempenho dos alunos no que se refere aos conteúdos de geometria corroborando com os estudos de Usiskin (1994).

Entendemos que seria impossível elevamos o nível de classificação de pensamento geométrico dos alunos baseados nos estudos de Van Hiele devido ao pouco tempo de intervenção que tivemos com o grupo investigado. Mas fornecemos caminhos metodológicos para que a professora titular da turma pudesse realizá-lo. Seguimos as fases apontadas por Pereira, Silva e Mattos (2005) para elevarmos o nível de maturidade geométrica dos alunos, constatamos sua importância e eficácia. Em algumas atividades foi inevitável evitar o excesso de conversas paralelas entre os alunos, este foi considerado um ponto negativo da intervenção, porém entendemos tal comportamento, pois a maioria dos conteúdos foi tratados de maneira não convencional, o que causou mudanças na concepção dos alunos referentes ao ensino de Matemática.

Argumentamos sobre a importância deste trabalho para os membros do Grupo, pois ele contribuiu no desenvolvimento de sua formação inicial e continuada. Este poderá contribuir para que professores possam refletir sobre suas práticas pedagógicas no sentido de inverter a lógica predominante no ensino de geometria que parte das idéias ao mundo real, sendo que a proposta deste trabalho é a inversão desta sequência.

Destacamos também que as atividades desenvolvidas pelo LEEMAT, serão posteriormente apresentadas e realizadas com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, para que eles possam realizá-lo em suas turmas e possam trazer estes resultados para fazermos uma reflexão e análise destes. Pretendemos divulgar estes resultados com o objetivo de que outros educadores possam reproduzir estas atividades.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, José Joelson P. *Gêneros do discurso como forma de produção de significados em aulas de Matemática*. Salvador: UFBA, 2012. (Tese de Doutorado).

ALMEIDA, José Joelson P., SILVA, Rita C. J., e ANDRADE, S. Matemática na Educação Infantil: O Campo Geométrico, Grandezas e Medidas. In: Rita de Cássia J. da SILVA. (Org.). *Matemática na Educação Infantil*, 2012. p. 103-141.

ALVES, G, SAMPAIO, F. *O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica.* F/ Revista de Sistemas da Informação da FSMA n.5 (2010) p. 69-73.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais (1ª a 4ª séries)*: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2001.

CROWLEY, Mary L. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico. In / Mary Montgomery Lindquist, Alberto P. (Org.), *aprendendo e ensinando geometria,* São Paulo: Atual, 1994. p. 1-20.

DANTE, Luíz Roberto. *Matemática.* Livro do professor. 1 ed. São Paulo: Ática, 2004.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática***.** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

FAINGUELERNT, Estela. *O Ensino de Geometria no 1º e 2º Graus*. *Educação Matemática em revista*. SBEM. n.4, p. 45 – 52. jan. 1995.

FIGUEIREDO, Antônio Macena de; SOUZA, Soraia Riva Goudinho de. Como elaborar projetos, monografias, dissertações e teses: da redação científica à apresentação do texto final. 3. ed. Rio de Janeiro: Lumen Juris, 2010.

KESSELRING, Thomas. *Jean Piaget.* Caxias do Sul. RS: Educs, 2008.

LIMA, Elon. *Meu Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: IMPA/VITAE, 1991.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: (Org.) LORENZATO, S. *O laboratório de ensino de Matemática na formação de professores*. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

__________. Por que não ensinar geometria? *Educação Matemática em Revista*. SBEM, v. 4, 1995, p. 3-13.

MATOS, J. M. Acomodando a teoria de Van Hiele a modelos cognitivos idealizados. In Quadrante I, (p.93-112), 1992.

NASSER, Lílian. *A teoria de Van Hiele para o ensino da geometria. Pesquisa e aplicação.* Anais do I Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, UFRJ.

MUNHOZ, Maurício de Oliveira. *Blog, Um Recurso Didático De Apoio Ao Ensino De Álgebra*. Curitiba, 2011. Monografia (Pós graduação).

PLATÃO. Timeu-Crítias. Trad. Rodolfo Lopes. Coimbra: Centro de Estudos Clássicos e Humanísticos/ Universidade de Coimbra, 2011.

PAVANELLO, Regina M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetiké*. Campinas, SP. Ano I, n° 1, p. 7-17, 1993.

PEREIRA, Gisliane A., SILVA, P. Sandreane, MOTTA, Walter dos Santos. O Modelo Van Hiele de Ensino de Geometria aplicado à 5a e 6ª séries do Ensino Fundamental. In *FAMAT em revista*, n° 5, setembro de 2005.

PIAGET, Jean. *Seis estudos de psicologia.* Trad. Maria Alice Magalhães D'Amorim e Paulo Sergio Lima Silva. 21. ed., Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1995.

PIROLA, Nelson Antonio. Geometria e seu ensino. In Geovano do Erfado de São Paulo. *PEC – Formação universitária*. São Paulo: USP/ UNESP/ PUC-SP/ SEE-SP, 2001. P. 1184 -

PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO 2014, MEC: Brasília, 2014, Disponível em:
< http://portal.mec.gov.br/index.php?Itemid=668id=12391option=com_contentview=article> acessado em: 05 de maio de 2014.

USISKIN, S. Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar. In LINDQUIST, M, M, e SHULTE, A. P. *Aprendendo e Ensinando Geometria.* São Paulo: Atual, 1994. 21-39.

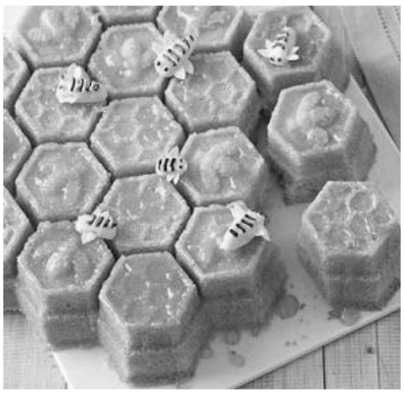
APÊNDICES

APÊNDICE A - Avaliação inicial

Grupo: Leitura e Escrita em Educação Matemática (LEEMAT)
Levantamento dos conhecimentos prévios

1. Você conhece algumas das figuras geométricas presentes nas ilustrações abaixo? Quais são os nomes delas?

_____________________ _________________________ ____________________



______________________ _______________________ ____________________

2. Você recebeu um objeto. Sobre ele responda as seguintes perguntas:

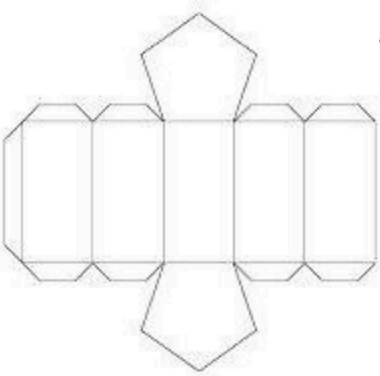
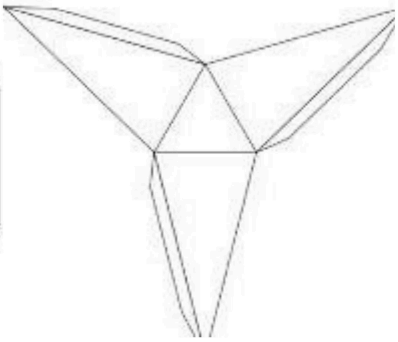
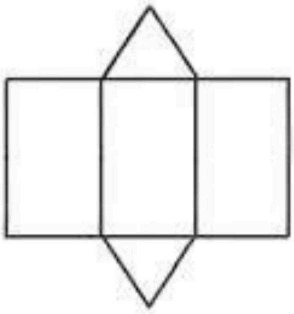
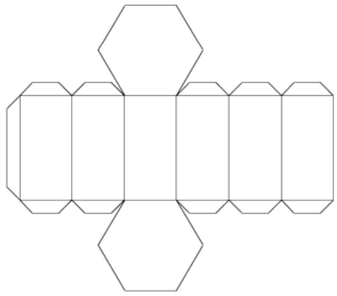
a- Qual o nome deste objeto?
____

b- Quantas vértices, faces e arestas ele possui?
Vértice:__________________ Faces:______________ Arestas:__________________

c- Qual o nome dos polígonos encontrados nas faces deste objeto?
1.__________________________ 2.___________________________

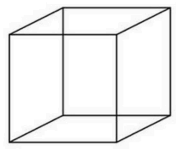
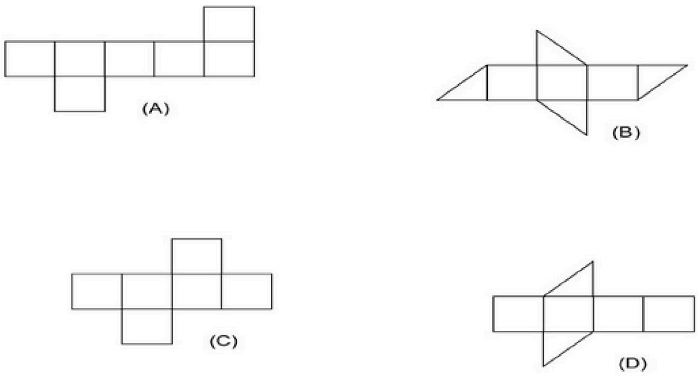
d- Esse objeto parece com algum objeto que você possui ou vê diariamente? Se sim, qual?
____

e- Qual das seguintes figuras poderia ser uma planificação deste objeto?

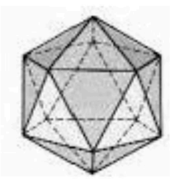
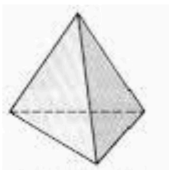
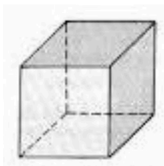
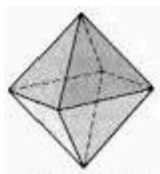
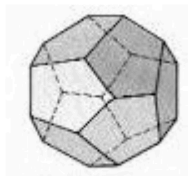





a-( ) b-( ) c-( ) d-( )
e – Nenhuma das anteriores ( )

3. Entre as figuras abaixo qual pode ser a planificação de uma caixa em forma de um cubo?

4. Escreva o nome de cada um dos poliedros representados nas figuras abaixo.

____________ ____________ ____________ ____________ ____________

a- O que estas representações possuem em comum?

____

APÊNDICE B – Segunda atividade da intervenção

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE

Leitura e Escrita em Educação Matemática - Grupo de Pesquisa (LEEMAT)

Projeto: Uma proposta para o ensino de Poliedros no Ensino Fundamental
Atividade 3

Quadro 1 - Classificação dos objetos

Contém partes arredondadas	Não contém partes arredondadas

APÊNDICE C - Terceira atividade da intervenção

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE

Leitura e Escrita em Educação Matemática - Grupo de Pesquisa (LEEMAT)

Projeto: Uma proposta para o ensino de Poliedros no Ensino Fundamental

Atividade 5

Quadro 2 – Poliedros

Objeto		Vértices (V)	Faces (F)	Arestas (A)	Relação de Euler

APÊNDICE D – Quinta atividade da intervenção

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE

<u>Leitura e Escrita em Educação Matemática - Grupo de Pesquisa (LEEMAT)</u>

Projeto: Uma proposta para o ensino de Poliedros no Ensino Fundamental
Atividade 7

<u>Quadro 2</u> – Poliedros de Platão

Poliedros de Platão	Vértices (V)	Faces (F)	Arestas (A)	Relação de Euler

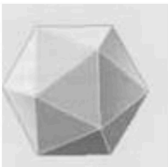
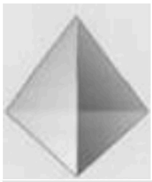
APÊNDICE E - Avaliação final

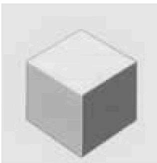
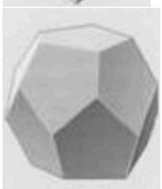
Grupo: Leitura e Escrita em Educação Matemática (LEEMAT)
Pós- teste

1. O que são poliedros? Onde podemos encontrá-los?
   -
   ____
   ____
   ____

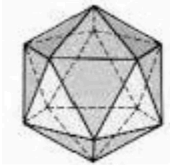
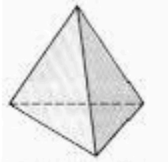
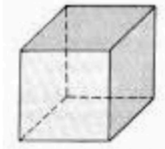
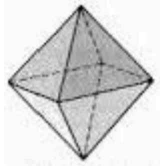
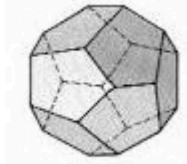
2. Você já ouviu falar em Poliedros de Platão? O que sabe sobre eles?
   ____
   ____
   ____
   ____

3. Qual o nome do polígono encontrado nas faces das figuras a seguir:

 ____________________  ____________________

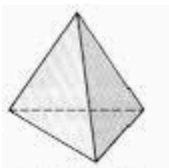
 ____________________  ____________________

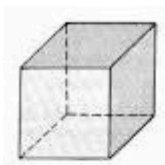
4. Você sabe qual o nome das figuras abaixo?

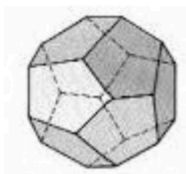
    

___________ ___________ ___________ ___________

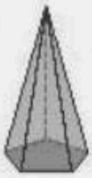
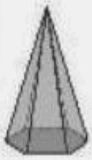
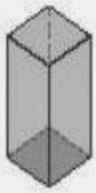
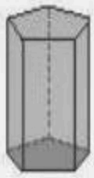
5. Conte nas figuras abaixo quantas faces, vértices e arestas cada figura abaixo possui.


F:_______
V:_______
A:_______


F:_______
V:_______
A:_______

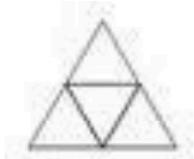

F:_____
V:_____
A:_____

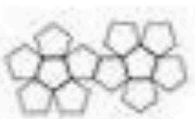
6. Complete a tabela abaixo:

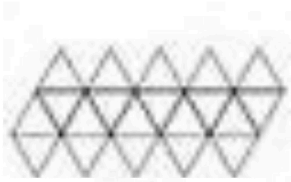
POLIEDRO								
N.º DE FACES		5	6	7		6	7	-
N.º DE ARESTAS	6		10		9		15	18
N.º DE VÉRTICES	4	5		7	6	8		12

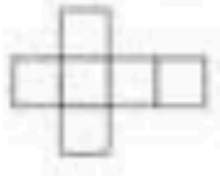
7. Qual a planificação dos Poliedros de Platão:

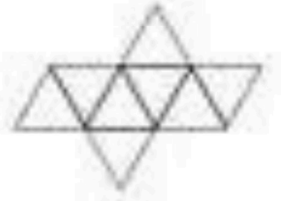
Hexaedro:
Dodecaedro:
Icosaedro:
Tetraedro:
Octaedro:

 ________________

 ___________________

 ________________

 __________________

 ___________________