Universidade Estadual da Paraíba - UEPB
Centro de Ciências Humanas e Exatas
Curso de Licenciatura Plena em Matemática

Felipe Teixeira da Silva

Introdução ao Espaço $\mathbb{R}^n$

Monteiro - PB

Julho - 2014

Felipe Teixeira da Silva

Introdução ao Espaço $\mathbb{R}^n$

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado na Licenciatura Plena em Matemática .

Orientador: Me. Natan de Assis Lima

Monteiro - PB
Julho - 2014

S586i Silva, Felipe Teixeira da.
Introdução ao espaço R^n [manuscrito] : / Felipe Teixeira da Silva. - 2014.
49 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2014.
"Orientação: Prof. Me. Natan de Assis Lima, Departamento de Matemática".

1. Análise Matemática. 2. Espaço Euclidiano no R^n. 3. Conjuntos abertos. 4. Conjuntos fechados. 5. Conjuntos compactos. I. Título.
21. ed. CDD 510

Felipe Teixeira da Silva

Introdução ao Espaço $\mathbb{R}^n$

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado na Licenciatura Plena em Matemática .

Aprovado pela banca examinadora em 30 / 07 / 2014

Banca Examinadora

Natan de Assis Lima

Prof^{o}. Me. Natan de Assis Lima
Centro de Ciências Humanas e Exatas - Campus VI/UEPB
Orientador

Cládio Odair Pereira da Silva

Prof^{o}. Me. Cládio Odair Pereira da Silva
Centro de Ciências Humanas e Exatas - Campus VI/UEPB

Marciel Medeiros de Oliveira

Prof^{o}. Me. Marciel Medeiros de Oliveira
Centro de Ciências Humanas e Exatas - Campus VI/UEPB

Dedico este trabalho a minha família que sempre esteve me apoiando no curso de graduação em matemática, em especial a minha mãe, pelas angustias e preocupações que passou por minha causa, por ter dedicado sua vida a mim, pelo amor carinho e estímulo que me ofereceu, que sem dúvida alguma, plantou em mim forças para que eu pudesse chegar ao fim, dedico-lhe essa conquista como gratidão.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por este sonho realizado, pelo dom da vida, pela fé e perseverança para vencer os obstáculos surgidos nesta fase da minha vida.
Segundo a minha mãe e irmãs que me deram forças para seguir em frente.
Agradeço aos meus tios João, que é meu símbolo de educação e compromisso, José por me mostrar que trabalho honesto é fundamental para ser um homem de bem, a Cida por ensinar que os estudos nos leva em frente, agradeço a ela por ser minha força no momento mais difícil de minha vida e a tia Izabel que me mostrou como a humildade é um dom.
Agradeço também a minha tia Fátima, já falecida, que me acolheu quando minha mãe estave doente.
Aos meus avôs por serem um espelho de fé e esperança. Ao meu primo Edno.
Aos meus colegas que conheci nessa jornada da vida: A Cristóvão, irmão de luta, estudamos a alfabetização juntos e estamos estudando hoje a universidade, Manuela colega de ensino médio, PIBICjr e PIBID. A Aldelânia por me incentivar e todos os outro colegas Aderlânia, Vanderlânia, Vanderleia, Maria Edilma, Maria Célia, Samuel, Ana Paula e Jakson.
Aos professores que participaram da minha formação, em especial ao professor Natan de Assis Lima ,que me orientou e esteve ao meu lado durante esta última fase do curso, ao professor Luiz Lima de Oliveira Júnior que me incentivou a fazer o curso de Licenciatura em Matemática. A Vanda Maria Félix, por ser uma grande amiga.
A agradeço a José Joelson, José Luiz, Luciano dos Santos, Tiago e Marciel que são excelentes professores.
Aos meus colegas que trilharam este caminho comigo e as pessoas que indiretamente com o seu carinho contribuiriam de forma significativa para Tal momento nesta fase de meu curso de graduação.
E por fim, porém não menos importante ao professor Brauner por sua ajuda com o programa de Latex.

"A Matemática é a chave de ouro com que podemos abrir todas as ciências."
"Victor Duruy"

Resumo

A Topologia começou como um ramo da geometria, mas durante o segundo quartel do século XX passou por generalizações, e se envolveu com tantos outros ramos da matemática que hoje talvez, numa visão mais adequada, possa ser considerada, ao lado da geometria, da álgebra e da análise, como uma área fundamental da matemática. O presente trabalho tem como principal objetivo apresentar uma introdução a Análise do Espaço $\mathbb{R}^n$, servindo de auxilio aos alunos de Licenciatura em Matemática em fase de conclusão de curso, como bibliografia introdutória sobre o referido assunto. Para o desenvolvimento do trabalho, adotamos uma metodologia na qual foram coletadas obras bibliográficas e documentos eletrônicos disponíveis na internet sobre o assunto. Após a sondagem, efetuamos uma pesquisa exploratória sobre o objeto a ser estudado, a fim de selecionarmos os conteúdos que mais se adequavam a realização da monografia.
Palavra chave: Análise Matemática. Espaço Euclidiano no $\mathbb{R}^n$. Conjuntos Abertos. Conjuntos Fechados. Conjuntos Compactos.

Abstract

The topology began as a branch of geometry, but during the second quarter of the twentieth century underwent generalizations, and was involved with many other branches of mathematics that today perhaps a more adequate view, can be considered part of the geometry, algebra and analysis as a key area of mathematics. This paper aims to present an introduction to Analysis of Space $mathbbR^n$, serving to aid students in Mathematics nearing completion of the course, as an introductory bibliography on that subject. For development work, we have adopted a methodology in which literature works and electronic documents available on the Internet on the subject were collected. After the survey, we carried out an exploratory research on the object to be studied, in order to select the content that best suited the study was undertaken.
Keywords: Math Analysis. Euclidean Space $\mathbb{R}^n$. Open Sets. Closed Sets. Compact Sets.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Para iniciarmos nosso estudo sobre Análise do Espaço $\mathbb{R}^n$ vamos começar com um pouco da história e da sua importância na matemática. O nascimento da topologia geral ocorre durante a tentativa de reformular o cálculo diferencial e integral, baseando-se em conceitos mais formais. O que antes era entendido através de noções intuitivas baseadas na geometria euclidiana e na mecânica (Newton e Leibniz, século XVII), começou a ser formulado dentro da linguagem matemática: definição de limite de sequências (D'Alembert 1) e sequências de Cauchy no século (XVIII).

Entre 1879 e 1894 Cantor publicou estudos a respeito de problemas envolvendo séries trigonométricas, focando seus estudos em alguns pontos Topológicos. Essas investigações o levaram a desenvolver os princípios da teoria dos conjuntos e da topologia, introduzindo conceitos fundamentais no estudo de subconjuntos do espaço euclidiano, juntamente com contemporâneos como Jordan, Borel, Poincaré, Baire e Lebesgue.

Em 1914, Felix Hausdorff introduziu o conceito de vizinhança, culminando, assim, a primeira definição satisfatória de um espaço topológico, seguido pela introdução do primeiro Axioma de Enumerabilidade, dado por Root também em 1914. Paralelamente, em 1916, Robert Lee Moore também introduzia axiomas para o estudo de espaços abstratos. A definição atual de um espaço topológico é devida a Kuratowski e os primeiros resultados importantes feitos sobre espaços abstratos podem ser encontrados nos trabalhos de Kuratowski, Alexandroff, Hausdorff e Urysohn.

Topologia ("do grego topos", "lugar", e logos, "estudo") é o ramo da matemática que estuda os Espaços Topológicos. A palavra topologia é usada tanto para descrever essa área de estudo quanto para designar uma família de conjuntos (conjuntos abertos) utilizados para definir o conceito básico da teoria. A palavra topologia foi oficialmente usada pela primeira vez por Johann Benedict Listing em 1847. Entretanto Listing já vinha usando tal termo há pelo menos 10 anos, em suas correspondências, o termo "topology"(Topologia em inglês) foi introduzido muitos anos mais tarde na revista Nature em um artigo de 1883 com a finalidade de "distinguir a geometria qualitativa da geometria comum onde os aspectos qualitativos são primariamente estudados".

Espaços topológicos estão presentes em quase todos os ramos da matemática, tal fato permitiu que a topologia se tornasse uma ponte entre diversas teorias matemáticas. A Topologia Geral, define e estuda propriedades dos espaços topológicos como conexidade e compacidade.

O presente trabalho está ordenado da seguinte forma. O primeiro capítulo foi dividido em duas seções, na primeira apresentamos informações sobre o Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, na segunda seção estudamos propriedades das sequências. O segundo capítulo desenvolvemos um estudo sobre os conjuntos abertos e fechados no espaço $\mathbb{R}^n$. Por fim o terceiro capítulo trazemos a definição e as propriedades dos conjuntos compactos, das coberturas e o Teorema Heine-Borel.

1 O Espaço Euclidiano no $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo veremos alguns resultados importantes da Análise Matemática e enunciaremos apenas os resultados essências para o desenvolvimento do assunto, como a definição do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, norma, produto interno e distância entre elementos e suas propriedades. Em seguida estudaremos as sequências neste espaço.

1.1 O Espaço $\mathbb{R}^n$

Definição 1.1 *Seja $n \in \mathbb{N}$, o espaço euclidiano n-dimensional é o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$.*

Notação : $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$

Seus elementos são as n-uplas reais $x = (x_1, ..., x_n)$ cujas coordenadas $x_1, ..., x_n$ são números reais.

Exemplo 1.1 *O $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ é a reta, isto é, o conjunto dos números reais. O $\mathbb{R}^2$ é o plano, ou seja, o conjuntos dos pares ordenados $z = (x, y)$ de números reais. O $\mathbb{R}^3$ é o espaço euclidiano tridimensional da geometria analítica cujos pontos são os ternos ordenados $p = (x, y, z)$. As vezes é conveniente considerar também $\mathbb{R}^0 = \{0\}$, o "espaço de dimensão zero ", formado pelo único ponto 0.*

Definição 1.2 *Dados $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos :*

i) $x = y$ se, e somente se, $x_1 = y_1, ..., x_n = y_n$.

ii) A soma $x + y = (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$.

iii) O produto $\alpha x = \alpha(x_1, ..., x_n) = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$.

iv) O vetor nulo $0 = (0, ..., 0)$ é chamado origem de $\mathbb{R}^n$.

v) O elemento simétrico da adição $x = (x_1, ..., x_n)$ é $-x = (-x_1, ..., -x_n)$.

No espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, definimos a base canônica (ou base natural) $\{e_1, ..., e_n\}$, formada pelos vetores

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 0, 1),$$

que tem na n-ésima coordenada 1 e as outras nulas. Dado $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ serão as vezes chamados pontos e as vezes vetores. Geometricamente, considerar $x \in \mathbb{R}^n$ como vetor significa imaginar a seta na qual tem origem no ponto 0 e extremidade em x.

Definição 1.3 *Seja $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ em $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual ou canônico de x e y é o número real definido por:*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n.$$

Exemplo 1.2 *Sejam $x = (1, 3)$ e $y = (3, 2)$ vetores pertencentes ao $\mathbb{R}^2$ o produto interno usual è dado por*

$$\langle(1, 3), (3, 2)\rangle = 1.3 + 3.2 = 9.$$

Observação 1.1 *Seja $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos as seguintes propriedades;*

P1 $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
P2 $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
P3 $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle$
P4 $x \neq 0 \Longrightarrow \langle x, x\rangle > 0$

Definição 1.4 *Definimos uma norma como sendo uma função $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumpra as condições N1 , N2 e N3 abaixo:*

N1: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
N2: $\|\alpha x\|= \|\alpha\|\|x\|$
N3: Se $\|x\| \geq 0$ *e* $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

Exemplo 1.3 *A aplicação $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ goza das condições $N1$, $N2$ e $N3$ onde $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.*

De fato,

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = \|\|x\| + \|y\|\|;$$

N2: De fato;

$$\|\alpha x\| = \langle \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha^2\langle x, x\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha^2\langle x, x\rangle} = \|\alpha\|\,\|x\|\,;$$

N3: $x \neq 0 \implies \|x\| > 0$ é óbvio que se $x = 0 \implies \|x\| = 0$ e quando $x \neq 0$ temos $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} > 0$.

Observação 1.2 *Dado $x \in \mathbb{R}^n$, temos $\langle x, x\rangle \geq 0$ e portanto a norma acima definida $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ é um número real não-negativo bem definido e é denominado de norma (ou comprimento) do vetor x e chamada norma Euclidiana.*

Exemplo 1.4 *Em $\mathbb{R}^2$, temos que $x = (x_1, x_2)$ e*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}.$$

Em $\mathbb{R}^n$ temos,

$$\|x\| = \sqrt{(x_1^2 + ... + x_n^2)}$$

onde $x = (x_1, ..., x_n)$.

Definição 1.5 *Dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais quando $\langle x, y\rangle = 0$.*

Exemplo 1.5 *Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $y \neq 0$, e pondo-se $\alpha = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$, o vetor $z = x - \alpha y$ é ortogonal a y.*

De fato, $\langle z, y\rangle = \langle x - \alpha y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \alpha\langle y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \alpha\|y\|^2 = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0$.

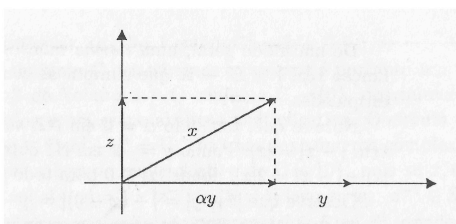

Figura 1.1: Fonte: Lima (2008)pag.5

Teorema 1.1 *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se $\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\| \|y\|$. Vale a igualdade se, somente se, um dos vetores x, y é múltiplo escalar do outro.*

Demonstração: Isto é óbvio se $y = 0$. Se, porém, for $y \neq 0$, poremos $\alpha = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$. Pelo exemplo 1.5, o vetor $z = x - \alpha y$ é ortogonal a y. Segue dai que

$$\|x\|^2 = \langle z + \alpha y, z + \alpha y\rangle = \|z\|^2 + \alpha^2 \|y\|^2 \ ,$$

donde

$$\|x\|^2 \geq \alpha^2 \|y\|^2 = \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2},$$

ou seja: $\|x\|^2 \|y\|^2 \geq \langle x, y\rangle^2$, como queríamos demostrar. Vale a igualdade se, e somente se $z = 0$, ou seja, $x = \alpha y$ ■

Observação 1.3 *Existem infinitas normas no $\mathbb{R}^n$ a norma euclidiana é motivada pela fórmula do comprimento de um vetor no plano em coordenadas cartesianas. Para noções geométricas, ela é a mais natural. Quando não dissermos explicitamente qual a norma que estamos considerando em $\mathbb{R}^n$, fica implícito que se trata da euclidiana.*

Por outro lado, a duas normas que são mais utilizadas em $\mathbb{R}^n$, quando houver conveniência são;

(a) Norma do Máximo:

Dado $x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, ..., x_n)$, define-se

$$\|x\|_M = Max\{\|x\|_1 \dots \|x\|_n\},$$

(b) Norma da soma:

Dado $x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, ..., x_n)$, define-se

$$\|x\|_S = \|x\|_1 + ... + \|x\|_n \,.$$

Definição 1.6 *Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ a distância entre x e y com relação à norma usual é definida por:*

$$d(x, y) = \|x - y\| \,.$$

Proposição 1.1 *As condições N1, N2 e N3, que a norma satisfaz, implica imediatamente que a distância admite as seguintes propriedades, para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ quaisquer:*
D1: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
D2: $d(x,y) = d(y,x)$
D3: $x \neq y \Rightarrow d(x,y) > 0$

Demonstração: D1: Com efeito,

$$d(x,y) = \|x-y\| \leq \|x-z\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z);$$

D2: De fato,

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|y-x\| = d(y,y);$$

D3: Se $x = y$ temos,

$$d(x,y) = d(x,x) = \|x-x\| = 0$$

se,

$$x \neq y$$

Daí,

$$d(x,y) = \|x-y\| > 0$$

■

Definição 1.7 *A bola aberta de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto $B(a,r)$ dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor que r. Usaremos a notação $B(a,r)$ para indicar esse conjunto.*

Simbolicamente: $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x-a\| < r\}$

Analogamente definimos a bola $fechada$ $B[a,r]$ e a $esfera$ $S[a,r]$, ambas com centro a e raio r.

Simbolicamente: $B[a,r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x-a\| \leq r\}$ *e*

$$S = [a,r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x-a\| = r\}$$

Destas definições temos a seguinte afirmação;

$$B[a,r] = B(a,r) \cup S[a,r].$$

Exemplo 1.6 *Quando $n = 1$ a bola aberta $B(a, r)$ de cento a e raio r na reta $\mathbb{R}$ é o intervalo aberto $(a - r, a + r)$, a bola fechada $B[a, r]$ é o intervalo fechado $[a - r, a + r]$ e a esfera $S[a; r]$ reduz-se ao conjunto formado pelos dois pontos $a - r$ e $a + r$. Note que as três normas usuais do espaço euclidiano coincidem quando $n = 1$.*

Para $n = 2$, tomando a norma euclidiana, as bolas no plano chamam-se discos (abertos e fechados) e a esfera reduzem-se ao círculo.

Se $n = 3$, a norma euclidiana define no espaço, bolas e esferas que correspondem as imagens que delas fazemos.

Exemplo 1.7 *A norma euclidiano na bola fechada tem representação geométrica igual a figura 1.2, isto é, dada uma $B[p, \varepsilon]$ onde $p = (a, b)$ e $\varepsilon > 0$.*

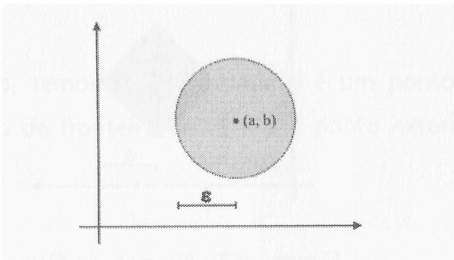

Figura 1.2: Fonte: Aldo (2008)pag.21

A forma geométrica das bolas e esferas depende em geral, é claro, da norma que usamos. Se, em vez da norma euclidiana, tomarmos no plano $\mathbb{R}^2$, por exemplo, $\|z\|_M = Max\{\|x\|, ..., \|y\|\}$ com a norma de $z = (x, y)$, a bola de centro $c = (a, b)$ e raio r será o quadrado de lados paralelos aos eixos de coordenadas, cada lado tem comprometo $2r$, e diagonais cortando-se no centro c.

Por outro lado, se tomarmos a norma da soma $\|z\|_S = \|x\| + \|y\|$, a bola de centro c e raio r será um quadrada cujas as diagonais são paralelas aos eixos coordenadas, ambas com comprimento 2r, e centro no ponto c.

Analogamente, a norma do máximo no espaço $\mathbb{R}^3$, produz bolas com formas de cubos de arestas paralelas aos eixos, enquanto que, na norma da soma, as bolas em $\mathbb{R}^3$ são octaedros com diagonais paralelas aos eixos.

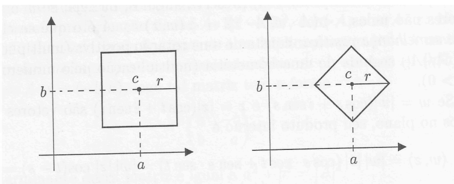

Figura 1.3: Fonte: Lima (2008) pag.12.

Definição 1.8 *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se limitado quando existe um número real $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c$, para todo $x \in X$. Isto equivale dizer que x está contido na bola fechada de centro na origem e raio c.*

Exemplo 1.8 *Diz-se que o conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado quando está contido em alguma bola $B[a, r]$.*

De fato, como $B[a, r] \subset B[a, k]$, onde $k = r + \|a\|$ dizer que X é limitado equivale a dizer que existe $k > 0$ tal que $\|x\| \leq k$, $\forall x \in X$;

Para mostrar que $B[a, r] \subset B[0; r + \|a\|]$, note que;

$$\|x - a\| \leq r \Rightarrow \|x - a + a\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq r + \|a\| .$$

Assim $x \in B[a, r]$, então $x \in B[0, r + \|a\|]$.

Observação 1.4 *Assim, um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado se, e somente se, está contido em alguma bola cujo centro não é necessariamente a origem.*

Observação 1.5 *As três normas usuais do espaço $\mathbb{R}^n$, e as desigualdades $\|x\|_M \leq \|x\|_S \leq n\|x\|_M$ mostram que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado em relação a uma dessas normas se e,somente se, é limitado em relação a qualquer dos outras duas. Com efeito,*

$$\|x\|_M = Max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\} \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| = \|x\|_S \leq n \cdot Max\{|x_1|, |x_2|, ...|x_n|\} = \|x\|_M.$$

Definição 1.9 *Seja $x, y \in \mathbb{R}^n$ .O segmento de reta de extremos x, y é o conjunto $[x, y] = \{(1 - t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}$.*

Definição 1.10 *Um subespaço $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se convexo quando qualquer segmento de reta cujo extremo pertence a X , ou seja, $x, y \in X \Rightarrow [x, y] \subset X$.*

Exemplo 1.9 *i) Todo subespaço vetorial $E \subset \mathbb{R}^n$ é convexo:*
ii) Um exemplo de conjunto não-convexo é $X = \mathbb{R} - \{0\}$, pois $e_1 \in X$, $-e_1 \in X$ mas $0 \in [-e_1, e_1]$.

Teorema 1.2 *Toda bola aberta $B \subset \mathbb{R}^n$ é convexa.*

Demonstração: Seja $B = B(a, r)$ a bola aberta de centro a e raio r. Para qualquer $t \in [0, 1]$ temos;

$$\|(1-t)x+ty-a\| = \|(1-t)x+ty-a+(ta-ta)\|$$
$$\leq \|(1-t)x+(ty-ta)+ta-a\|$$
$$\leq \|(1-t).(x-a)+t(y-a)\|$$
$$\leq (1-t)\|x-a\|+t\|y-a\| < r.$$

Note que a demonstração acima usa apenas as propriedades N1, N2 e N3 da norma, que pode arbitrária.

■

1.2 Sequências em $\mathbb{R}^n$

Definição 1.11 *Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. O valor que essa aplicação assume no número k é indicado com x_k e chama-se o $k-$ésimo termo da sequência. Usaremos as notações*

$$(x_1, ..., x_k, ...), \ (x_k) \text{ ou } (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

para indicar a sequência cujo k-ésimo termo é $x_k \in \mathbb{R}^n$.

Uma subsequência de (x_k) é a restrição da sequência a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{k_1 < k_2 <, ..., k_n < ....\} \subset \mathbb{N}$. A subsequência é indicada pelas notações:

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}'} \text{ ou } (x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}} \text{ ou } (x_{k_1}, ..., x_{k_n})$$

Observação 1.6 *Diz que a sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ é limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado em $\mathbb{R}^n$, ou seja, quando existe um número real $c > 0$ tal que $\|x_k\| < c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 1.10 *Uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ equivale a n sequências de números reais.*

Com efeito, para cada $k \in \mathbb{N}$ temos $x_k = (x_{k_1}, ..., x_{k_n})$ onde $x_{k_i} = \pi_i(x_k) =$ i-ésima coordenada de x_k $\{i = 1, ..., n\}$.

As n sequências $(x_{k_i})_{k\in\mathbb{N}}$ $\{i = 1, ..., n\}$ são chamadas as sequências das coordenadas de (x_k).

No plano $\mathbb{R}^2$, uma sequência de pontos $z = (x_k, y_k)$ é o mesmo que um par de sequências $(x_k), (y_k)$ de números reais.

Observação 1.7 *Se a sequência (x_k) é limitada, para todas $i = \{1, ..., n\}$ a sequência $(x_{k_i})_{k\in\mathbb{N}}$ das i-ésimas coordenadas de x_k também é limitada, pois $\|x_{k_i}\| \leq \|x_k\|$.*

Vale a recíproca. Para prová-la, adotaremos em $\mathbb{R}^n$ a norma do máximo. Então, se $\|x_{k_1}\| \leq c_1, \|x_{k_2}\| \leq c_2, ..., \|x_{k_n}\| \leq c_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$, chamando de c o maior dos números $c_1, c_2, ..., c_n$, teremos $\|x\|_M = Max\{\|x\|_1 ... \|x\|_n\} \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, se cada $(x_{k_i})_{k\in\mathbb{N}}$ $\{i = 1, ..., n\}$ é limitada a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Exemplo 1.11 *A sequência $x_k = \left(\frac{-1}{k}, \frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitado pois;*

$$\|x_k\| = \sqrt{\left(\frac{-1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{k} \leq \sqrt{2}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

A sequência $(x_k) = (k, 1)_{k\in\mathbb{N}}$ não é limitado pois;

$$\|x\| = \sqrt{k^2 + 1^2} = \sqrt{k^2 + 1} > \sqrt{k^2} = k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definição 1.12 *Diz-se que o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é limite da sequência de pontos $x_k \in \mathbb{R}^n$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado é possível obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k >_0$, então $\|x_k - a\| < \varepsilon$. Neste caso, diz-se também que (x_k) converge para a ou simplesmente $x_k \longrightarrow a$.*

Em símbolos: $\forall \varepsilon > 0, \exists\ k_0 \in \mathbb{N};\ k > k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon$

Outras notações: $\lim\limits_{x\to a} x_k = a, \lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ e $\lim x_k = a$.

Exemplo 1.12 *A sequência $(x_k) = \left(\frac{-1}{k}, \frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = (0, 0)$.*

De fato, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ com $k_0 > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$ tal que $k \geq k_0$ implica em $\|x_k - (0, 0)\| < \varepsilon$.

Observação 1.8 *Quando existe o limite da sequência (x_k) dizemos que a sequência é convergente, caso contrário dizemos que (x_k) é divergente.*

Exemplo 1.13 *Uma sequência constante $(a, a, ..., a, ...)$ é convergente e se $a \neq b$, então a sequência $(a, b, a, b, ..., a, b, ...)$ é divergente.*

Observação 1.9 *Tem-se $\lim x_k = a$ se, somente se, qualquer bola aberta de centro a contém todos os termos x_k exceto, possivelmente para um número finito de índice k.*

Com efeito, se $\varepsilon > 0$ é o raio da bola e k_0 é um número natural que corresponda a ε na definição de limite, fora da bola $B(a, \varepsilon)$ só poderão está no máximo alguns termos $(x_1, ..., x_{k_0})$.

Observação 1.10 *O resultado acima diz que toda sequência convergente é limitada.*

De fato, se $\lim x_k = a$ *então fora da bola aberta de centro* a *e raio* 1 *existe no máximo os termos* $x_1, ..., x_{k_0}$ *da sequência. Se* r *é maior dos números* 1,

$$\|x_1 - a\|, ..., \|x_{k_0} - a\|,$$

vemos que todos os termos da sequência estão contidos na bola $B(a, r)$. *A recíproca é falsa, se* $a \neq b$ *a sequência* $(a, b, a, b, ...)$ *é divergente e limitada.*

Observação 1.11 *Se* (x_k) *converge para* a *então toda subsequência* (x_k) *também converge para* a.

Se $x_k \longrightarrow a$, *então para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\|x_k - a\| < \varepsilon, \forall k \geq k_0$. *Mas* $v_k \geq k$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$, *logo:*

$k \geq k_0 \Rightarrow v_k \geq k_0 \Rightarrow \|x_{v_k} - a\| > \varepsilon$.

Portanto $x_{v_k} \longrightarrow a$.

Teorema 1.3 *O limite de uma sequência convergente é único, ou seja, se* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ *e* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$, *então* $a = b$.

Demonstração: Com efeito, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$0 \leq \|a - b\| \leq \|x_k - a\| + \|x_k - b\|.$$

Logo,

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - a\| = \lim_{k\to\infty} \|x_k - b\| = 0 \Rightarrow a = b,$$

Em particular, se $\lim x_k = a$ e uma subsequência de x_k convergente para o ponto $b \in \mathbb{R}^n$, então $a = b$.

■

Teorema 1.4 *Uma sequência* (x_k) *em* $\mathbb{R}^n$ *converge para o ponto* $a = (a_1, ..., a_n)$ *se, e somente se, para cada* $i = \{1, ..., n\}$ *tem-se* $\lim x_{k_i} = a_i$, *isto é, cada coordenadas de* x_k *converge para a coordenada que corresponde de* a.

Demonstração: Com

$$\|x_{k_i} - a_1\| \leq \|x_k - a\|,$$

vemos que

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{k_i} = a_i,$$

para cada $\{i = 1, ..., n\}$.

Reciprocamente, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_i} = a_i$ para todo $i = \{1, ..., n\}$ então dado $\varepsilon > 0$, existe números naturais $k_1, ..., k_n$ tais que:

$$k > k_i \Rightarrow \|x_{k_i} - a_i\| < \varepsilon.$$

Seja

$$k_0 = Max\{k_1, ..., k_n\},$$

então

$$k > k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| = Max\,\|x_{k_i} - a_i\| < \varepsilon,$$

Logo: $\lim x_k = a$.

$\blacksquare$

Corolário 1.1 *Dadas as sequências convergentes* $(x_k), (y_k) \subset \mathbb{R}^n$ *e* $(\alpha_k) \subset \mathbb{R}$*, tal que* $\lim x_k = a$,$\lim y_k = b$ *e* $\lim \alpha_k = \alpha$*. Então*

i) $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k + y_k) = a + b$*;*
ii) $\lim\limits_{k\to\infty} (\alpha_k y_k) = \alpha a$*;*
iii) $\lim\limits_{k\to\infty} \langle x_k, y_k\rangle = \langle a, b\rangle$*;*
vi) $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k\| = \|a\|$.

Demonstração: Com efeito, utilizando os fatos conhecidos sobre limites de somas e de produtos de números $\mathbb{R}$, vemos que, para cada $i = \{1, ..., n\}$, valem;

$$\lim_{k\to\infty} (x_{ki} + y_{ki}) = a_i + b_i$$

e

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha_{ki} y_{ki}) = \alpha a_i$$

Em vista do teorema 1.4, as igualdades i) e ii) ficam demonstradas. Analogamente,

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_k, y_k\rangle = \lim_{k\to\infty} (x_{k1}y_{k1} + ... + x_{kn}y_{kn}) =$$
$$= a_1 b_1 + ... + a_n b_n = \langle a, b\rangle.$$

Isto prova 3).

Finalmente,

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\langle x_k, x_k\rangle} =$$
$$= \sqrt{\langle x_k, x_k\rangle} = \sqrt{\langle a, a\rangle} = \|a\|,$$

o que prova 4). Também poderíamos provar 4) observando que

$$\left\| \|x_k\| - \|a\| \right\| \leq \|x_k - a\| .$$

Esta maneira tem a vantagem de valer para qualquer norma, euclidiana ou não.

■

Teorema 1.5 *(Bolzano-Weierstrass). Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Sabemos que o Teorema de Bolzano-Weiestrass é válido na reta(Lima (2013)pag. 123). toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Dada a sequência limitada (x_k) em $\mathbb{R}^n$, as primeiras coordenadas dos seus termos formam uma sequência limitada $(x_{k_1})_{k\in\mathbb{N}}$ de números reais, a qual possui uma subsequência convergente. Isto é, existem um subconjunto infinitos $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ e um número real a_1 tais que

$$\lim_{k\in\mathbb{N}_1} x_{k_1} = a_1.$$

Por sua vez, a sequência limitada $(x_{k_2})_{k\in\mathbb{N}_1}$ de números reais, possui uma subsequência convergente; dai obtemos um subconjunto infinito $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ e $a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{k\in\mathbb{N}_2} x_{k_2} = a_2.$$

E assim por diante, até encontrarmos conjuntos infinitos

$$\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \cdots \supset \mathbb{N}_n$$

e números reais $a_1, ..., a_n$ tais que

$$\lim_{k\in\mathbb{N}_i} x_{k_i} = a_i$$

para $i = \{1, 2, ..., n\}$. Então pomos $a = (a_1, ..., a_n)$ e vemos pelo teorema 1.4, que $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}_n} x_k = a$, o que conclui a demonstração.

■

Definição 1.13 *Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é valor de aderência de uma sequência de pontos $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ quando alguma subsequência de (x_k) converge para a.*

Observação 1.12 *O Teorema 1.5 afirma que o conjunto dos valores de aderência de uma sequência* (x_k) *em* $\mathbb{R}^n$ *(necessariamente ilimitada) não possui valores de aderência, e escreve-se* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \infty$. *Isto significa que* (x_k) *não possui subsequência limitadas, ou seja que para todo número real* A*, dado arbitrariamente, existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $k > k_0 \Rightarrow \|x\|_k > A$.

Em termos de bolas o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ *é valor de aderência da sequência* (x_k) *se, e somente se, toda bola de centro* a *contém termos* (x_k) *com índices arbitrário grandes. Mais precisamente; dado* $\varepsilon > 0$ *e* $k_o \in \mathbb{N}$ *existe* $k > k_0$ *tal que* $\|x_k - a\| < \varepsilon$.

Exemplo 1.14 *Uma sequência covergente possui um único valor de aderência. A recíproca não vale.Por exemplo, a sequência de números reis (1,2,1,3,1,4,...) possui um único valor de aderência mas não converge.*

Teorema 1.6 *Uma sequência limitada em* $\mathbb{R}^n$ *é convergente se, e somente se, possui um único valor de aderência.*

Demonstração: Seja a um valor de aderência da sequência limitada (x_k). Se for $a = \lim x_k$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que o conjunto

$$\mathbb{N}' = \{k \in \mathbb{N}; x_k \notin B(a;\varepsilon)\}$$

é infinito . A subsequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ é limitada e seus termos satisfaz todas as condições

$$\|x_k - a\| \geq \varepsilon.$$

Pelo Teorema 1.5 ela possui uma subsequência que converge para um ponto $b \in \mathbb{R}^n$. Ora, de $\|x_k - a\| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}'$, concluímos por passagem ao limite que

$$\|b - a\| \geq \varepsilon.$$

Então $b \neq a$ a sequência (x_k) tem pelo menos dois valores de aderência distintos. Isto demonstra metade do Teorema 1.6. A recíproca é imediata. ∎

Observação 1.13 *Uma sequência* (x_k) *em* $\mathbb{R}^n$ *diz-se uma sequência de Cauchy quando para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$k, r > k_0 \Rightarrow \|x_k - x_r\| < \varepsilon.$$

Usando em $\mathbb{R}^n$ a norma do máximo, temos;

$$\|x_k - x_r\|_M = Max\{\|x_{x_1} - x_{r_1}\|, ..., \|x_{k_n} - x_{r_n}\|\},$$

logo (x_k) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ se, somente se, para cada $i = \{1, ..., n\}$ a sequência $(x_{1_i}, x_{2_i}, ..., x_{k_i}, ...)$ das suas í-ésimas coordenadas é uma sequência de Cauchy de números reais.

Teorema 1.7 *Uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ é de Cauchy se, e somente se, é convergente.*

Demonstração: Se (x_k) é uma sequência de Cauchy então, para cada $i = \{1, ..., n\}$, sua i-ésimas coordenadas formam uma sequência de Cauchy de números reais $(x_{k_i})_{k\in\mathbb{N}}$, a qual possui o limite $a_i = \lim\limits_{k\to\infty} x_{k_i}$.(Lima (2013) pag. 127). Seja $a = (a_1, ..., a_n)$. Resulta do Teorema 1.4 acima que $a = \lim x_k$. Logo toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ é convergente.

Reciprocamente, se (x_k) é convergente, como $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, então

$$\|x_k - x_r\| \leq \|x_k - a\| + \|x_r - a\|,$$

concluímos que $\lim\limits_{k,r\to\infty} \|x_k - x_r\| = 0$, ou seja (x_k) é de Cauchy. ■

Exemplo 1.15 *O conjunto $S = (0, 1] \subset \mathbb{R}$ não é completo, pois a sequência $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em S mas $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ não converge em S.*

Definição 1.14 *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ chama-se ponto de acumulação do conjunto X quando toda bola aberta de centro a contém algum ponto de X, diferente do ponto a. Em outros termos, para todo $\varepsilon > 0$, deve existir $x \in X$ tal que $0 < \|x - a\| < \varepsilon$.*

O conjunto dos pontos de acumulação de X será representado pela notação X', o chamamos o conjunto derivado de X.

Exemplo 1.16 *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ a bola aberta de centro na origem e raio $r > 0$. Todo ponto $a \in \mathbb{R}^n$ com $\|a\| = r$ é ponto de acumulação de X. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, podemos, sem perda de generalidade, suponha que $\varepsilon < 2r$.*

Então o ponto $x = (1 - \frac{\varepsilon}{2r})a$ pertencente à bola X, é diferente de a e tem-se $\|a - x\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Como vimos no exemplo 1.5 o ponto de acumulação do conjunto X pode não pertencer a X.

Teorema 1.8 *Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) a é ponto de acumulação de X;

ii) Existe uma sequência de pontos $x_k \in X$, com $\lim x_k = a$ e $x_k \neq a$ para todo $k \in \mathbb{N}$;

iii) Toda bola aberta de centro a contém uma infinitude de pontos de X.

Demonstração: Suponhamos i), para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos um ponto $z_k \in X$ tal que $0 < \|x_k - a\| < \frac{1}{k}$, donde $x_k \neq a$ e $\lim x_k = a$. Logo $i) \Rightarrow ii)$.

Por outro lado, supondo $ii)$ então para qualquer $k_0 \in \mathbb{N}$ o conjunto $\{x_k : k > k_0\}$ é infinito porque do contrário haveria um termo x_k que se repetiria infinitas vezes e isto forneceria uma subsequência (constante) convergindo para o limite $x_k \neq a$. Então $ii) \Rightarrow iii)$.

Finalmente, é óbvio que iii) $\Rightarrow$ i).

$\blacksquare$

Corolário 1.2 *Se $X' \neq \emptyset$ então X é infinito.*

Um conjunto infinito pode não possuir ponto de acumulação. Tal é o caso do conjunto $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ dos números inteiros. Vale entretanto o teorema abaixo, também chamado "Teorema de Bolzano-Weierstrass"

Teorema 1.9 *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é infinito e limitado então $X' \neq \emptyset$.*

Demonstração: Sendo infinito, X contém um subconjunto enumerável $\{x_1, x_2, ..., x_k, ...\}$. Obtemos assim uma sequência (x_k), a qual é limitada, logo pelo Teorema 1.5, admite uma subsequência de que converge para um ponto $a \in \mathbb{R}^n$.

Como os Termos x_k são dois a dois distintos, no máximo um deles é igual a a. Eliminando -o, se necessário, obtermos uma sequência de pontos de X, todos diferente de a com limite a. Pelo Teorema 1.8, a é ponto de acumulação de X.

$\blacksquare$

Observação 1.14 *Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X, diz que a é um ponto isolado de x. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que exista $\varepsilon > 0$ com $B(a; \varepsilon) \cap X = \{a\}$.*

Quando todo ponto $a \in X$ é isolado, dizemos que X é um conjunto discreto.

2 Conjuntos Abertos, Fechados

Neste capítulo estudaremos algumas noções de conjunto abertos e fechados com suas respectivas definições e demonstração de alguns teoremas necessários.

2.1 Conjuntos abertos

Seja X um subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in X$ é um ponto interior a X se é centro de alguma bola aberta contida em X, ou seja, quando existir $\delta > 0$ tal que $\|x - a\| < \delta \Rightarrow x \in X$. O conjuntos de todos os potos interiores de X é denotado por $intX$, formado pelos pontos interiores a X. Quando $x \in intV$, dizemos que o conjunto V é um vizinhança do ponto x.

Definição 2.1 *Dizemos que um ponto $a \in X$ não é interior a X, quando toda bola aberta de centro a contém pontos do complementar de X, ou seja, quando para todo $\delta > 0$ existe $y \in \mathbb{R}^n - X$ com $\|y - a\| < \delta$.*

Definição 2.2 *Um conjunto $X \in \mathbb{R}^n$ chama-se aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando para cada $x \in X$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x;\delta) \subset X$.*

Observação 2.1 *Assim, X é aberto se, e somente se, $intX = X$.*

Exemplo 2.1 *Uma bola aberta $B(a;r) \subset \mathbb{R}^n$ é um exemplo de conjunto aberto.*

Com efeito, dado qualquer $x \in B(a;r)$, temos $\|x - a\| < r$, logo o número $\delta = r - \|x - a\|$ é positivo. Afirmamos que $B(x;\delta) \subset B(a;r)$.
De fato, se $y \in B(x;\delta)$, então $\|y - x\| < \delta$. Logo

$$\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| <$$

$$\delta + \|x - a\| = r.$$

Portanto, $y \in B(a;r)$.

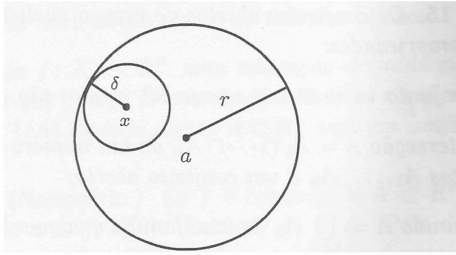

Figura 2.1: Fonte: Lima (2008) pag. 35

Também é aberto em $\mathbb{R}^n$ *o conjunto* $X = \mathbb{R}^n - B[a;r]$, *o complementar da bola fechada* $B[a;r]$. *Temos*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| > r\}.$$

Dado arbitrariamente $x \in X$, *seja* $\delta = \|x - a\| - r$. *Afirmamos que* $B(x;\delta) \subset X$.

De fato, se $y \in B(x;\delta)$*ento* $\|x - y\| < \delta$. *Logo*

$$\|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\| < \delta + \|y - a\| = \|x - a\| - r + \|y - a\| \Rightarrow \|y - a\| > r$$

Portanto $y \in X$.

Exemplo 2.2 *Para todo conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$, $intX$ *é um conjunto aberto.*

De fato, se $a \in intX$ *então existe* $r > 0$ *tal que* $B(a;r) \subset X$. *Se* $x \in B(a;r)$ *então pondo* $\delta = r - \|x - a\|$, *vemos que* $B(x,\delta) \subset B(a;r)$, *donde* $B(x;r) \subset X$ *e portanto* $x \in intX$.

Assim, todo ponto $a \in intX$ *é centro da bola* $B(a;r)$ *contido em* $intX$, *o que prova que* $intX$ *é aberta.*

Por outro lado, uma bola fechada $B[a;r]$ *em* $\mathbb{R}^n$ *não é um conjunto aberto pois, se tomarmos arbitrariamente um vetor unitário* $u \in \mathbb{R}^n$, *o ponto* $x = a + r.u$ *é tal que* $\|x - a\| = r$, *logo* $x \in B[a;r]$. *Mas nenhuma bola aberta* $B(x;\delta)$ *está contida em* $B[x,r]$.

Com feito, tomando $y = a + (r + \frac{\delta}{2})u$, *temos* $\|y - x\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ *mas* $\|y - a\| = r + \frac{\delta}{2} > r$. *Assim,* $y \in B(x,\varepsilon)$. *Mas* $y \notin B[a;r]$. *Este argumento mostra, de fato, que os pontos da esfera* $S[a;r]$ *não são interiores á bola fechada de centro* a *e raio* r.

Portanto, $intB[a;r] = B(a;r)$.

Observação 2.2 *Dados um conjunto* X *e um ponto* $a \in R^n$, *há três possibilidades que se excluem mutuamente: ou* $a \in intX$, *ou* $a \in \mathbb{R}^n - X$ *ou então toda bola aberta de centro* a *contém pontos de* X *e pontos do complementar de* X.

Os pontos que contém esta última propriedade constituem o conjunto ∂X, *que chamaremos de fronteira de* X. *Os pontos* $y \in \partial X$ *são chamados pontos de fronteiras de* X.

Exemplo 2.3 *Se X é a bola fechada $B[a;r]$,temos $\partial X = S[a;r]$. Observe que se chamarmos de Y a bola aberta $B(a;r)$ teremos $\partial X = \partial Y$.*

Definição 2.3 *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se, e somente se, nenhum dos seus pontos é ponto de fronteira de A, ou seja, se, e somente se, $A \cap \partial A = \emptyset$.*

Teorema 2.1 *Os conjuntos abertos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ satisfazem das seguintes propriedades:*

i) O conjunto vazio $\emptyset$ e o espaço $\mathbb{R}^n$ inteiro são aberto;

ii) A interseção $A = A_1 \cap ... \cap A_k$ de um número finito de conjuntos abertos $A_1, ..., A_k$ é um conjunto aberto;

iii) A reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos abertos A_λ é um conjunto aberto.

Demonstração: i) Um conjunto só pode deixar de ser aberto se contiver algum ponto que não seja interior. Como $\emptyset$ não contém ponto algum,então é aberto e $\mathbb{R}^n$ é obviamente aberto. Isto prova i)

Para prova ii). Seja $a \in A$. Então, para cada $i = 1, ..., k$ temos $a \in A_i$. Como A_i é aberto, existe $\delta_i > 0$ tal que $B(a;\delta_i) \subset A_i$.

Seja $\delta = min\{\delta_1, ..., \delta_k\}$. Então $B(a;\delta) \subset A_i$ para cada i, donde $B(a;\delta) \subset A$.

Finalmente, provemos iii). Dado $a \in A$, existe $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Sendo A_λ aberto, existe $\delta > 0$ com $B(a;\delta) \subset A_\lambda \subset A$. Logo A é aberto. ■

Observação 2.3 *Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Um subconjunto $A \subset X$ diz-se aberto em X quando, para cada $a \in A$ existe $\delta > 0$ tal que $B(a;\delta) \cap X \subset A$. Noutras palavras, para cada $a \in A$ existe $\delta > 0$ tal que os pontos $x \in X$, que cumprem a condição $\|x - a\| < \delta$ estão em A.*

Exemplo 2.4 *O conjunto $A = (0, 1]$ é aberto em $X = [0, 1]$.*

Chega-se a noção de conjunto aberto em X quando se faz abstração dos demais pontos do espaço $\mathbb{R}^n$, considerando-se apenas os pontos de X.

Observação 2.4 *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, um subconjunto $A \subset X$ é aberto em X se, e somente se, é aberto no sentido usual de $\mathbb{R}^n$.*

Proposição 2.1 *Um conjunto $A \subset X$ é aberto em X se, e somente se, existe um aberto $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A = X \cap B$.*

Demonstração: Com efeito, se A for aberto em X, tome B igual à reunião das bolas $B(a;\delta)$ com centro nos pontos $a \in A$, tais que $B(a;\delta) \cap X \subset A$. Reciprocamente, se for $A = X \cap B$, com B aberto em $\mathbb{R}^n$, para cada $a \in A$ existe uma bola $B(a;\delta) \subset B$, logo

$$B(a;\delta) \cap X \subset B \cap X = A$$

portanto A é aberto em X. ■

2.2 Conjuntos fechados

Definição 2.4 *Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ diz-se aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando é limite de uma sequência de pontos desse conjunto. Todo ponto $a \in X$ é aderente a X pois podemos escrever $a = \lim x_k$, com $x_k = a$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Mas a pode ser aderente a X mesmo que $a \in X$; neste caso, a é necessário ser um ponto de acumulação do conjunto.*

Exemplo 2.5 *Se $X = B(0;1) \subset \mathbb{R}^n$ é a bola aberta de centro na origem e raio 1, o ponto $e_1 = (1, 0, ..., 0)$ não pertence a X.*

Mas, pondo $x_k = (1 - \frac{1}{k}, 0, ..., 0)$, vemos que $x_k \in X$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = e_1$, logo e_1 é aderente a X.

Observação 2.5 *Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, toda bola aberta de centro a contenha algum ponto de X.*

Com efeito, a condição é necessária em virtude da definição de limite de uma sequência e é suficiente porque, se ela se verifica, em cada bola $B(a; \frac{1}{k})$ podemos escolher um ponto $x_k \in X$ e assim obtemos uma sequência com $\lim x_k = a$. O conjunto dos pontos aderente a X chama-se o fecho de X e é denotado $\overline{X}$.

Então, pelo que vimos um ponto $b \in \mathbb{R}^n$ não pertence ao fecho de X, é necessário e suficiente que exista uma bola aberta de centro b que não contém pontos de X. Noutros termos:

$$b \in \complement\overline{X} \Leftrightarrow \exists\ r > 0; B(b;r) \cap X = \emptyset.$$

Exemplo 2.6 *O fecho de uma bola aberta $B(a;r)$ é a bola fechada $B[a;r]$. Se $X = \mathbb{Q}$ é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas são números racional, então $\overline{X} = \mathbb{R}^n$.*

Definição 2.5 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se fechado quando contém todos seus pontos aderente, isto é, quando $X = \overline{X}$. Dizer que $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, significa, portanto, o seguinte se $\lim x_k = a$ e $(x_k) \subset X$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $a \in X$.*

Exemplo 2.7 *Uma bola $B[a;r]$ é um subconjunto fechado do espaço $\mathbb{R}^n$, pois se $\|x_k - a\| \leq r$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$ então $\|b - a\| = \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - a\| \leq r$.*

Dai, resulta que o fecho de todo conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado.

Com efeito, temos $X \subset B$, onde B é uma bola fechada. Logo $\overline{X} \subset \overline{B} = B$, donde $\overline{X}$ é limitado.

Observação 2.6 *Para todo $X \subset \mathbb{R}^n$, o complementar do fecho de X é aberto.*

Com efeito, seja $A = \complement\overline{X}$. Para todo $b \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(b;r) \cap X = \emptyset$. Afirmamos que $B(b;r) \subset A$. De fato, se $y \in B(b;r)$ então $B(b;r)$ é um aberto contendo y e disjunto de X, logo $y \in \complement\overline{X} = A$.

Teorema 2.2 *Um conjunto é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto. Noutras palavras, se $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado, seu complementar $\complement X$ é aberto em $\mathbb{R}^n$(pois $\complement X = \complement\overline{X}$).*

Demonstração: Reciprocamente, se $X \subset \mathbb{R}^n$ é tal que $A = \complement X$ é um conjunto aberto então

$$y \notin X \Rightarrow y \in A \Rightarrow B(y;r) \subset A,$$

para algum $r > 0 \Rightarrow B(y;r) \cap X = \emptyset \Rightarrow y$ não é aderente X.

Assim, todo ponto aderente a X deve pertencer X e consequentemente X é fechado. ∎

Corolário 2.1 *O fecho de todo conjunto é um conjunto fechado. Isto é $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$, para todo $X \subset \mathbb{R}^n$.*

Pelo teorema anterior a demonstração é de imediado.

Teorema 2.3 *Os conjuntos fechados do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ gozam das seguintes propriedades:*

i) O conjunto vazio $\emptyset$ e o espaço inteiro $\mathbb{R}^n$ são fechados;

ii) A reunião $F = F_1 \cup ... \cup F_k$ de um número finito de conjunto fechado $F_1, ..., F_k$ é um conjunto fechado;

iii) Interseção $F = \bigcap\limits_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.

Demonstração: i) é evidente.

ii), se $F_1, ..., F_k$ são fechado então sendo

$$A_1 = \complement F_1, ..., A_k = \complement F_k$$

são abertos, portanto $A_1 \cap ... \cap A_k$ é aberto. Logo

$$F_1 \cup .. \cup F_k = \complement A_1 \cup ... \cup \complement A_k = \complement(A_1 \cap ... \cap A_k)$$

é fechado.
iii), se cada $F_\lambda, \lambda \in L$, é fechado então cada $A_\lambda = \complement F_k$ é aberto, logo $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ também é aberto. Sendo assim, o conjunto

$$F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \bigcap_{\lambda \in L} \complement A_\lambda = \complement\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) = \complement A$$

é fechado.

∎

Observação 2.7 *Note que uma reunião infinita de conjuntos fechados pode ser fechado ou não. De fato, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, o conjunto $\{x\}$ é fechado. Ora todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é reunião dos seus pontos*

$$X = \bigcap_{\lambda \in X} \{\lambda\}.$$

Como há conjuntos em $\mathbb{R}^n$ que não são fechados, há reuniões (infinitas) de conjunto fechado que não são fechados.

Observação 2.8 *Segue da definição de fronteira que um ponto a pertence á fronteira do conjunto X se, somente se, a é aderente a X e a $\mathbb{R}^n - X$.*
Ou seja, $\partial X = \overline{X} \cap (\overline{\mathbb{R}^n - X})$. Em particular, a fronteira de todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado.

Fixemos um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Um subconjunto $F \subset X$ é fechado em X quando se tem $F = X \cap G$, onde G é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$. A fim de que o subconjunto $F \subset X$ seja fechado em X é necessário e suficiente que F contenha todos os seus pontos aderentes que pertençam a X.

Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, então um subconjunto $F \subset X$ é fechado em X se, somente se, é fechado em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.8 *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado e $F \subset X$, então F é fechado em X. Seja $X = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ a semi-reta positiva aberta. O intervalo semi-aberto $(0, 1]$ é fechado em X.*

Proposição 2.2 *Se $F \subset X$. A fim de que F seja fechado em X é necessário e suficiente que o conjunto $A = X - F$ (complementar de F relativamente a X) seja aberto em X.*

Demonstração: Com efeito, dados $F' = X \cap \mathbb{R}^n$ e $A' = \complement F'$, o complementar de F' em $\mathbb{R}^n$, temos

$$F = X \cap F' \Leftrightarrow X - F = X \cap A'.$$

Ora, F' é fechado em $\mathbb{R}^n$ se, somente se, A é aberto.

Assim, F é fechado em X se, e somente se $X - A$ é aberto em X.

■

Observação 2.9 *Dados $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$, podemos também definir o fecho de Y relativamente a X com sendo o conjunto $\overline{Y} \cap X$, dos pontos aderentes a Y que pertencem ao conjunto X. Então Y é fechado em X se, e somente se, coincide com seu fechado relativamente a X.*

Um caso particular importante se dá quando, o fecho de Y relativamente a X é todo conjunto X. Para descrever esta situação, damos a definição abaixo.

Definição 2.6 *Sejam $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que Y é denso em X quando $\overline{Y} \cap X = X$, ou seja, $X \subset \overline{Y}$, isto significa que todo ponto de X é limite de uma sequência cujos termos pertence a Y. Ou, ainda de outra maneira dado $Y \subset X$, tem-se Y denso em X se, e somente se, toda bola aberta com centro em algum ponto de X contém pontos de Y.*

3 Conjuntos Compactos

Este capítulo faremos o estudo dos conjunto compactos no qual destacaremos os seguintes pontos; a definição de conjunto compacto e propriedades, definiremos coberturas e apresentamos o teorema de Heine-Borel.

3.1 Conjuntos Compactos

Definição 3.1 *Diremos que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto quando ele for limitado e fechado.*

Exemplo 3.1 *Todas as esferas e bolas fechadas do espaço euclidiano são compactas, mas o espaço $\mathbb{R}^n$ inteiro não é compacto.*

Definição 3.2 *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos $x_k \in K$ possui uma subsequência que converge para um ponto de K.*

Observação 3.1 *Assim segue, direto da definição as seguintes propriedades;*

i) Se $k_1, ..., k_p$ são compactos em $\mathbb{R}^n$ então $K_1 \cup ... \cup K_p$ compacto.

ii) A interseção de uma família de qualquer de compactos $K_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto.

iii) Se $K \subset \mathbb{R}^m$ e $C \subset \mathbb{R}^n$ são compactos então o produto cartesiano $K \times C \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é compacto.

Menos óbvio é o seguinte fato, conhecido como a propriedade de Cantor;

iv) Dados uma sequência decrescente $K_1 \supset ... \supset K_k \supset ...$ de compacto não vazios, a interseção $K = \bigcap_{k=1}^{\infty} K_k$ (é compacto) e não é vazia.

Demonstração: Escolhemos, para cada $K \subset \mathbb{N}$, um ponto $x_k \in K_k$, obtendo assim uma sequência, a qual possui uma subsequência $(x_{k_i}), i \in \mathbb{N}$, convergindo para um ponto $x \in \mathbb{R}^n$.
Dado arbitrariamente $k \in \mathbb{N}$, temos $x_{k_i} \in K_k$ para todo $k_i > k$, logo $x = \lim_{k\to\infty} x_{k_i} \in K_k$.

Assim, o ponto x pertence a K_k para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja $x \in K = \bigcap_k K_k$ o que mostra que a K não é vazio. ∎

3.2 Coberturas

Definição 3.3 *Uma cobertura de um conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *é uma família* $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ *de subconjunto* $C_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$*. Isto significado que, para cada* $x \in X$*, existe um* $\lambda \in L$ *tal que* $x \in C_\lambda$*.*

Definição 3.4 *Uma subcobertura é uma subfamília de* $(C_\lambda)_{\lambda \in L'}$*,* $L' \subset L$*, tal que ainda se tem* $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$*.*

Teorema 3.1 *(Lindelof) Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto arbitrário. Toda cobertura aberta de* $X \subset \bigcup A_\lambda$ *admite uma subcobertura enumerável* $X \subset A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_i} \cup ...$

Demonstração: Seja $E = \{x_1, ..., x_i, ...\} \subset X$ um subconjunto enumerável denso em X. Consideremos o conjunto $\mathcal{B}$ de todas as bolas abertas $B(x, r)$, com centro num ponto de E, raio racional e tais que cada uma delas está contida em algum A_λ temos que$\mathcal{B}$ é um conjunto enumerável de bolas.Afirmamos que as bolas $B \in \mathcal{B}$ cobrem X.

Com efeito, dado $x \in X$, existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Com A_λ é aberto, existe $r > 0$ racional tal que $B(x, 2r) \subset A_\lambda$. Sendo E denso em X, podemos encontrar $x_i \in E$ com $\|x - x_i\| < r$. Então $x \in B(x_i; r)$.

Para mostrar que $x \in B(x_i; r) \in \mathcal{B}$, resta ver que esta bola está contida em A_λ. Ora, se $y \in B(x_i; r)$ então $\|y - x_i$. Assim

$$\|y - x_i\| < r \Rightarrow \|y - x\| \leq \|y - x_i\| + \|x_i - x\| < 2r$$

Portanto $y \in B(x_i; 2r) \subset A_\lambda$. Isto conclui a verificação de que as bolas $B \in \mathcal{B}$ cobrem X.

Tomando uma enumeração $B_1, .., B_i, ...$ para essas bolas e escolhendo, para cada $i \in \mathbb{N}$, um índice $\lambda_i \in L$ tal que $B_i \subset A_{\lambda_i}$, concluímos que $X \subset A_{\lambda_i} \cup ... \cup A_{\lambda_i} \cup ...$

∎

Teorema 3.2 *(Borel - Lebesgue). Seja* $K \subset \mathbb{R}^n$ *compacto (isto é, limitado e fechado). Toda cobertura aberta* $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ *admite uma subcobertura finita* $K \subset A_{\lambda_i} \cup ... \cup A_{\lambda_i}$*.*

Demonstração: Pela Teorema de Lindelof, obtemos uma subcobertura enumerável $K \subset A_{\lambda_i} \cup ... \cup A_{\lambda_i} \cup ....$Ponhamos $K_i = K \cap C(A_{\lambda_i} \cup ... \cup A_{\lambda_i})$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Isto nos dá uma sequência decrescente $K_1 \supset K_2 \supset ... \supset K_i...$ de compactos.

Dado qualquer $x \in K$, existe algum $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_{\lambda_i}$. Então $x \notin K_i$. Isto mostra que nenhum ponto $x \in K$ está em todos os K_i, ou seja, que $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_\lambda = \emptyset$. Seque-se então da propriedade de Cantor que algum dos compactos K_i é vazio, o que significa $K \subset A_{\lambda_i} \cup ... \cup A_{\lambda_i}$.

■

Teorema 3.3 *Se toda cobertura aberta do conjunto $K \subset \mathbb{R}^m$ admite uma subcobertura finita, então K é limitado e fechado (isto é, compacto).*

Demonstração: Em primeiro lugar, as bolas abertas de raio 1 e centros nos pontos de K constituem uma cobertura aberta $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x;1)$, a qual possui uma subcobertura finita $K \subset B(x_1;1) \cup ... \cup B(x_i;1)$. Assim, K está contido numa reunião finita de conjuntos limitados, logo é limitado.

Além disso, K é fechado pois, não fosse, existiria uma ponto $a \in \overline{K} - k$. Então, para cada $i \in \mathbb{N}$, tomamos A_i igual ao complementar da bola fechada $B[a; \frac{1}{i}]$.

Para todo $x \in K$, temos $x \neq a$, logo $\|x - a\| > \frac{1}{i}$ para algum i, o que nos dá $x \in A_i$. Portanto $K \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, uma cobertura aberta, da qual extraímos uma subcobertura finita $K \subset A_{i_1} \cup ... \cup A_{i_p}$. Como $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_i \subset ...$, toda reunião de uma coleção finita de conjuntos A_i é igual ao conjunto de maior índice na coleção.

Assim, temos $K \subset A_i$ para algum i. Esta inclusão significa que a bola $B[a; \frac{1}{i}]$ não tem pontos em comum com K, o que contradiz ser $a \in \overline{K}$ que prova o teorema.

■

Observação 3.2 *os Teoremas 3.2 e 3.3 mostram que poderíamos, equivalentemente, ter definido um conjunto compacto K pela condição de que toda cobertura aberta $K \subset A_\lambda$ admita uma subcobertura finita $K \subset A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_i}$. Tal definição é, de fato, a mais conveniente para estudos mais gerais.*

Exemplo 3.2 *Se o aberto U contém a interseção $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ de uma sequência decrescente $K_1 \supset K_2 \supset ... \supset K_i \supset ...$ de conjunto compactos, então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $K_i \subset U$.*

Demonstração: Com efeito, os abertos $U_i = \mathbb{R}^n - K_i$, juntamente com U. constante $K_1 \subset U \cup U_{i_1} \cup .. \cup U_{i_p}$. Seja i o maior dos índice $i_1, ..., i_p$. Como $U_1 \subset U_2 \subset ...$, temos $U_{i_1} \cup .. \cup U_{i_p} = U_1$.

Logo $K_1 \subset U \cup U_i$. Com maior razão $K_i \subset U \cup U_i$. Como nenhum ponto de K_i pode pertencer ao seu complementar U_i, devemos ter $K_i \subset U$, como queríamos demonstrar. ∎

Definição 3.5 *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$um subconjunto. Uma coleção C de conjuntos A é dita uma cobertura de K se:*

$$K \subset \bigcup_{A \in C} A$$

A cobertura é dita finita se C tem apenas um número finito de elementos. A cobertura A é dita aberta se todo A de C é aberto.

Se C e C_1 são ambas coberturas de K tal que $C_1 \subset C$, dizemos que C_1 é relativamente a C, uma subcobertura de K.

Exemplo 3.3 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $A_n = (-n, n)$. A coleção $C = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta enumerável de $\mathbb{R}$. Seja S o conjunto dos números pares. A família $C = (A_n)_{n \in L}$ é uma subcobertura de $\mathbb{R}$.*

Por outro lado, qualquer que seja o subconjunto finito

$$\{n_1 < n_2 < ... < n_k\}$$

de inteiros positivos, temos

$$A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup ... \cup A_{n_k} = A_{n_k}.$$

Logo, $C_2 = (A_{n_1}, A_{n_2}, ..., A_{n_k})$ não é uma subcobertura de $\mathbb{R}$.

Definição 3.6 *Uma subcobertura K de $\mathbb{R}^n$ é dito compacto quando toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finta.*

Exemplo 3.4 *O intervalo $(0,1)$ e $\mathbb{R}$ não são compactos. Note que $\{(\frac{1}{n}, 2)\}$ é uma cobertura de $(0,1)$ que não admite uma subcobertura finita. Logo, $(0,1)$ não é compacto.*

Lema 3.4 *O conjunto $K = [a,b]$, com $-\infty < a \leq b < \infty$, então é compacto.*

Demonstração: Seja C uma cobertura aberta de $[a,b]$ e considere

$$L = \{x \in [a,b]; [a,x] \; pode \; ser \; coberto \; por \; um \; nmero \; finito \; de \; abertos \; de \; C\}$$

Note que, i) $L \neq \emptyset$ pois, $a \in L$;

ii) L é limitado, porque $L \subset [a,b]$;

Seja $\alpha = sup\ L$. Logo $\alpha \in [a,b]$, pois [a,b] é fechado.

(Afirmação 1: $\alpha \in L$)

Temos, $\alpha \in [a,b]$ implica que existe $A \in C$ tal que $\alpha \in A$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset A$. Assim, $(\alpha - \delta, \alpha] \subset A$ para algum $\delta > 0$.
Desde que $\alpha = sup\ L$, então para todo $\beta < \alpha$ existe $x \in L$ tal que $\beta < x \leq \alpha$.
Em particular, para $\beta = \alpha - \delta < \alpha$ existe $x \in L$ tal que $\alpha - \delta < x \leq \alpha$, o que implica, $[x, \alpha] \subset (\alpha - \delta, \alpha] \subset A$.
Logo, pela definição de L, temos

$$[a, x] \subset A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k, \ \ A_i \in C,$$

e

$$[x, \alpha] \subset A.$$

Portanto,

$$[a, \alpha] \subset A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A.$$

Pela definição de L, temos que $\alpha \in L$.

(Afirmação 2: $\alpha = b$)

Suponhamos que $\alpha < b$ então Existe $\alpha < x < b$ tal que $[\alpha, x] \subset A_0$ para algum $A_0 \in C$. Desde que $\alpha \in L$ então:

$$[a, \alpha] \subset A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n.$$

Logo;

$$[a, x] \subset A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup A_0$$

que implica $x \in L$ o que contradiz o fato que $\alpha = sup\ L$. Portanto, $\alpha = b$.

$\blacksquare$

Exemplo 3.5 *Todo conjunto finito $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto.*

Seja $K = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$ e considere $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma cobertura aberta de K. Podemos supor sem perda de generalidade que $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_r \in A_r$. Logo, $\mathcal{A}_1 = \{A_1, A_2, ..., A_r\}$ é uma subcobertura para K.
Portanto, K é compacto.

Lema 3.5 *Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e $F \subset K$ é fechado, então F é compacto.*

Demonstração: Seja C_F uma cobertura abertura de F. Então:

$$C_K = C_F \cup \{\mathbb{R}^n - F\}$$

é uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, então:

$$K \subset A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup \{\mathbb{R}^n - F\}.$$

Como nenhum ponto de de F pode pertence a $\mathbb{R}^n - F$, temos necessariamente

$$F \subset A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup A_r; \;\; A_i \in C_F.$$

Portanto, F é compacto. ■

Definição 3.7 *Um intervalo fechado em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto I^n da forma $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$, onde $a_i < b_i$ para $i = 1, 2, ..., n$.*

Teorema 3.6 *(Heine-Borel) Seja $K \subset \mathbb{R}^n$, temos que K é compacto, se e somete se, é fechado e limitado.*

Demonstração: Sendo K limitado então $K \subset I^n$ onde $I = [a, b]$. Como I^n é compacto é $K \subset I^n$ é fechado então, pelo Lema anterior K é compacto.

Reciprocamente se K é compacto mostremos que K é fechado e limitado. Seja $x \in \complement K$ e para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos:

$$G_m = \left\{ y \in \mathbb{R}^n; \|y - x\| > \frac{1}{m} \right\}$$

Temos que, cada G_m é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\displaystyle\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = \mathbb{R}^n - \{x\}$.

Como $x \notin K$ temos $K \subset \displaystyle\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$. Desde que K compacto, segue que,

$$K \subset G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_r = G_r$$

pois, $(G_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é crescente.

Logo, a vizinhança

$$V = \left\{ z \in \mathbb{R}^n ; \|z - x\| < \frac{1}{r} \right\} \cap K = \emptyset$$

isto, é $V \subset \complement K$, donde $\complement K$ é aberto e, portanto, K é fechado.
Temos que K compacto então K é limitado, isto é,

$$K \subset \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| < r_0\} \; para \; algum \; r_0 > 0.$$

De fato, para cada $m \in \mathbb{N}$, seja H_m definido por:

$$H_m = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| < m\}$$

Temos que, cada H_m é aberto e $K \subset \displaystyle\bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$. Como K é compacto então:

$$K \subset H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_r = H_r$$

pois, $(H_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é crescente. Logo, existe $r > 0$ tal que $K \subset H_r$, o que implica que K é limitado. ■

Conclusão

Ao término deste trabalho, que muito acrescentou a nossa base de conhecimentos, notamos o quanto fomos transformados. Observando também o quanto amadurecemos e o quanto aprendemos, vemos que tudo valeu a pena, sabendo que é necessário que os leitores tenham já visto a Análise Matemática na reta (ou real) durante o curso. Aprendemos a estudar, a persistir, e a perceber a importância da Analise do Espaço $\mathbb{R}^n$ pois, ela é fundamental para estudar o cálculo das funções de varias variáveis.

Toda via, propomos aqui nesta trabalho de Conclusão de Curso uma introdução ao espaço $\mathbb{R}^n$ de modo mais compreensível e esperamos que este trabalho sirva de texto introdutório aos concluintes do curso de Licenciatura em Matemática ajudando a eles prosseguir os estudos de maneira mais clara possível.

Apêndice A

A1-Conjunto finito

Definição .8 *Um conjunto X chama-se finito quando é vazio ou quando existe, para algum $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção*

$$\phi : I_n \longrightarrow X,$$

onde $I_n\{1, ..., n\}$

Os seguintes fatores decorrem imediatamente das definições:

1) cada conjunto I_n é finito e possui n elementos;

2)se $f : X \longrightarrow Y$ é uma bijeção, uma desses conjuntos é finito se, e somente, o outro é.

A2-Conjunto enumerável

Definição .9 *Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. No segundo caso, X diz-se infinito enumerável e, tem-se $x_1 = f(1), x_2 = f(2), ..., x_n = f(n), ...,$. Assim $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Cada bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ chama-se uma enumeração (dos elementos) de X.*

Teorema .7 *Todo conjunto infinito X contém um subconjunto infinito enumerável. A demonstração se encontra no volume 1 de Lima (2013), pag.48.*

Corolário .1 *Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$, de X sobre sua parte própria $Y \subset X$. A demonstração se encontra no volume 1 de Lima (2013), pag.49.*

Teorema .8 *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável. A demonstração se encontra no volume 1 de Lima (2013), pag.48.*

Apêndice B

B-Limite na reta

Definição .10 *Diz-se que o número real a é limite da sequencia (x_n) de números rais, escreve-se$a = limx_n$, ou $a = limx_n$, ou $a = lim_{n\to\infty}x_n$, quando para cada numero real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - a\| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$.*

Em símbolos: $\lim x_n = a \;\equiv\; \forall\, \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow \|x_n - a\| < \varepsilon.$

Teorema .9 *Se $\lim x_n = a$ então toda subsequencia de (x_n) converge para o limite a. A demonstração se encontra no volume 1 de Lima (2013), pag.109.*

Teorema .10 *Toda sequência limitada é convergente. A demonstração se encontra no volume 1 de Lima (2013), pag.110.*

Teorema .11 *Toda sequencia monótona limitada é convergente. A demonstração se encontra no volume 1 de Lima (2013), pag.111*

Teorema .12 *Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, então:*

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$;

2. $\lim(x_n - y_n) = a - b$;

3. $\lim(x_n y_n) = ab$;

4. $\lim(\dfrac{x_n}{y_n}) = (\dfrac{a}{b})$ se $b \neq 0$.

A demonstração se encontra no volume 1 de Lima (1997), pag.27.

Apêndice C

C-Teorema de Bolzano-Weierstrass

Definição .11 *Dada uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma subsequência de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k, ...\}$ de $\mathbb{N}$.*

Escreve-se $x' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...)$, ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ para indicar a subsequencia $x' = x|\mathbb{N}'$.

Teorema .13 *Toda sequência limitada de limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Com efeito, basta mostrar que toda sequencia x_n possui uma subsequência monótona. Digamos que um termo x_n da sequência dada é destacado quando $x_n \geq x_p$ para todo $p > n$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado. Se D for um conjunto infinito, $D = \{n_1 < n_2 < ... < n_k, ...\}$, então a subsequência $(x_n)_{n\in D}$ será monótona não-crescente. se, entretanto, D for finito seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior do que os $n \in D$. Então x_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 > n_1$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$. Por sua vez, x_n não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Prosseguindo, obtemos uma subsequência crescente $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < ... < x_{n_k} < ...$ e assim monótona.

$\blacksquare$

Apêndice D

D-Sequencias de Cauchy

Definição .12 *Uma sequência de números reais dizemos que* x_n *é de Cauchy quando cumpre a seguinte condição:*

Dado arbitrariamente um número real $\epsilon > 0$*, pode-se obter* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $m > n_0$ *e* $n > n_0$ *o que implica* $\|x_m - x_n\| < \epsilon$*.*

Teorema .14 *Toda sequência convergente é de Cauchy. A demonstração se encontra no volume 1 de Lima (2013), pag.126.*

Teorema .15 *Toda sequência de Cauchy é limitada. A demonstração se encontra no volume 1 de Lima (2013), pag.128*

Lema .16 *Se uma sequência de Cauchy* (x_n) *possui uma subsequência convergente para* $a \in \mathbb{R}$*, então* $\lim x_n = a$*. A demonstração se encontra no volume 1 de Lima (2013), pag.127*

Teorema .17 *Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente. A demonstração se encontra no volume 1 de Lima (2013), pag.127.*

Referências Bibliográficas

ÁVILA, Geraldo S. S. **Introdução à Análise Matemática** . 2ª ed. São Paulo: Editora Blucher, 1999.

FLEMMIMG, D. M. GONÇALVES, M. B. **Cálculo B**. 2ª ed.São Paulo: Editora Pearson Prentice Hall, 2007.

LOURÊDO, Aldo Trajano. OLIVEIRA, A. LIMA, O. A. **Cálculo Avançado**.1ºed. Campina Grande, Editora Eduepb, 2010.

LOURÊDO, Aldo Trajano. OLIVEIRA, A. LIMA, O. A. **Cálculo Avançado**.2ºed. Campina Grande, Editora Eduepb, 2012.

LIMA, Elon L. **Análise Real 1** . Vol. 1 , 3ª Edição. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária ,IMPA, 1997.

LIMA, Elon L. **Curso de Analise** . Vol. 1, 14ª Edição. Projeto Euclides, IMPA, 2013.

LIMA, Elon L. **Curso de Analise** . vol 2 , 1ª Edição.Projeto Euclides IMPA, 2008.

LIMA, O. A. e MACIEL, A.B. **Introdução à Análise Real**. Campina Grande, Eduepb,2008.

MCCALLUM, WILLIAN G....[et al]; **Cálculo de Várias Variáveis** . São Paulo: Editora Blucher, 1997.

HALLACK, André A.**Análise II Notas de aulas**.Disponível em:http://www.ufjf.br/andrehallack/files /2009/08/an2-08.pdf (Acessado em 04/04/2014 às 14h:50min).

LIMA, Elon L.**A Análise Real Volume 2**.Disponível em:http://www.ing.una.py/pdf/analisis-en-la-recta2011/Analise RealVol2.pdf (Acessado em 29/03/2014 às 18h:30min).

NERI, Cássio.**Curso de análise Real**.Disponível em:http://www.labma.ufrj.br/ mcabral/textos/curso-analise-real-a4.pdf (Acessado em 29/03/2014 às 18h:30min).

TAUSK, Daniel V. **Notas Para o Curso de Medidas de Integração**.Disponível em: http:http://www.ime.usp.br/ tausk/texts/NotasMedida.pdf (Acessado em 29/03/2014 às 18h:30min).