UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CÍNTIA CRISTINA NEPOMUCENO

O TEOREMA DE PITÁGORAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Campina Grande/PB
2016

CÍNTIA CRISTINA NEPOMUCENO

O TEOREMA DE PITÁGORAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Me Kátia Suzana Medeiros Graciano

Campina Grande/PB
2016

N441t Nepomuceno, Cíntia Cristina.
O Teorema de Pitágoras e algumas aplicações [manuscrito] / Cíntia Cristina Nepomuceno. - 2016.
30 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano, Departamento de Matemática".

1. Teorema de Pitágoras. 2. Triângulos. Relações métricas. I. Título.

21. ed. CDD 516.24

CÍNTIA CRISTINA NEPOMUCENO

O TEOREMA DE PITÁGORAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profª. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Orientador

Castor da Paz Filho

Profº. Me. Castor da Paz Filho
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Maria Isabelle Silva

Profª. Dra. Maria Isabelle Silva
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Campina Grande, 01 de junho de 2016.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que me permitiu chegar até aqui.

Aos meus pais, Maria José Nepomuceno e Heleno Nepomuceno, por todo amor e educação que me deram e por estarem sempre me apoiando na vida. Vocês são minha base.

Às minhas irmãs, Sílvia e Silmara, e ao meu sobrinho, Vitor, por todo amor, companheirismo, paciência e por sempre me entenderem. Amo vocês.

Ao meu marido, Wellington, por estar sempre do meu lado, em tudo, por não permitir que eu desista e por todo amor e carinho tem comigo.

À minha doce Helena, tão pequena, que ilumina tanto, por essa calma trouxe ao nosso lar. É por você que levanto todos os dias.

À minha orientadora, Kátia Suzana, por aceitar esse desafio.

Obrigada a todos.

RESUMO

Neste trabalho de conclusão de curso é apresentando uma rápida passagem pela origem do conhecimento matemático. Ainda na parte histórica discutimos um pouco do surgimento da Trigonometria e da vida de um de seus maiores colaboradores, Pitágoras de Samos. Antes de irmos para as relações métricas no triângulo retângulo, fazemos um estudo sobre os triângulos, seus elementos e classificações. Conhecer as relações métricas no triângulo retângulo faz com que tenhamos mais entendimentos nas demonstrações do teorema que vêm posteriormente. Para finalizar, abordamos as principais aplicações do teorema que é um dos mais importantes no estudo da Trigonometria.

Palavras-chave: Triângulos, Relações Métricas no Triângulo Retângulo, Teorema de Pitágoras.

ABSTRACT

This course conclusion research presents a brief overview through the origin of mathematical knowledge. Still in the historical part, we discuss a little of the emergence of trigonometry and the life of one of its major contributors, Pythagoras Samos. Before going to the metric relations in right triangle, we make a study of triangles, their elements and ratings. Knowing the metric relations in right triangle means that we have more understanding in the statements of the theorem that comes later. As a conclusion, we discuss that the main applications of the theorem are the most important in studying of trigonometry.

Keywords: Triangles; Metric relations in right triangle; Pythagoras theorem.

LISTA DE FIGURAS

Sumário

1 INTRODUÇÃO

No decorrer de nossa vida escolar ouvimos falar inúmeras vezes no Teorema de Pitágoras. Isso nos faz perceber a importância desse intelectual e desse teorema que leva o seu nome.

Esse trabalho começa apresentando uma breve passagem pela história dos números, pelo começo da contagem e pelas necessidades que levaram o homem a contar. Ainda no capítulo I, abordaremos o surgimento da Trigonometria e os principais colaboradores para o seu desenvolvimento, seguindo com um pouco da vida de Pitágoras, um dos mais importantes. Uma vez que nenhuma biografia foi preservada, não temos nenhuma certeza de como viveu, pois os relatos que chegaram aos dias de hoje foram escritos posteriormente.

O próximo capítulo segue com uma passagem pelos triângulos, seus elementos, e classificação quanto aos ângulos e lados, além da semelhança de triângulos. Isso servirá para entendermos melhor as relações métricas no triângulo retângulo que serão abordadas no capítulo seguinte.

Depois de conhecermos melhor os triângulos e seus elementos podemos analisar as relações métricas em um triângulo retângulo e como dividir um triângulo retângulo em outros dois semelhantes a ele. O capítulo III servirá como uma introdução para as demonstrações do teorema.

O teorema tem o nome de Pitágoras, pois acredita-se que o matemático tenha sido o primeiro a fazer uma demonstração do mesmo. Conhecendo as relações métricas do triângulo retângulo, seguiremos para o capítulo IV, fazendo duas demonstrações do teorema de Pitágoras, a demonstração clássica e a demonstração por semelhança. Apesar de existir várias demonstrações, essas são as mais usadas.

O teorema não é tão conhecido por acaso, podemos utilizá-lo em muitas situações. No capítulo V, o último capítulo, veremos algumas aplicações básicas que nos fazem perceber a importância desse teorema para a matemática.

2 CAPÍTULO I – UM POUCO DE HISTÓRIA

2.1 Histórias dos Números: Evolução do Homem e Início da Contagem

Não sabemos ao certo quando o homem começou a contar, nem mesmo se os números cardinais precederam os ordinais ou o contrário, o que sabemos é que, para chegarmos conhecimento que temos hoje, foi preciso um salto muito grande.

Alguns antropólogos acreditam que os números podem ter aparecido primeiramente em rituais que exigiam a aparição de indivíduos, numa certa ordem, sucessivas vezes, daí surge a ideia de que o conceito de número ordinal tenha surgido antes do cardinal, o que contradiz a ideia original de que o cardinal tivesse surgido antes.

Nos primórdios, o homem era nômade e se deslocava de um lugar para outro à medida que os recursos naturais iam se esgotando. Acompanhando manada de animais, o homem procurava rios mais piscosos e áreas onde as raízes, os frutos e as folhas comestíveis não tivessem se acabado e, provavelmente, não sentia a necessidade de contar.

Lentamente, o homem começou a perceber que, das sementes que caíam no chão, nasciam novas árvores e passou a guardá-las para plantá-las, deixando assim a necessidade de se mudar, tornando-se sedentário. A partir daí, o homem começou a controlar o ambiente em sua volta, caçando, pescando, cultivando e criando e foi, neste contexto do seu dia-a-dia, que surgiu a necessidade da contagem.

Para contar seus carneiros, os pastores faziam o seguinte: para cada ovelha que entrava no pastoreio, uma pedrinha era colocada em um saco. No final da tarde, para cada carneiro que saía, o pastor retirava uma pedrinha deste saco. Assim, se sobrasse alguma pedrinha, ele sabia se algum dos seus animais tinha sido roubado ou se perdido. Daí se explica a origem da palavra cálculo, que vem do latim *calculus* e significa pedrinhas.

Outra forma de contagem muito utilizada pelos nossos antepassados era incisões em ossos. O osso mais antigo já encontrado, data 35.000 a.C., trata-se de parte de um fêmur babuíno encontrado na África, nele havia 29 incisões. O osso que mais chama atenção é o osso de Ishango. Este foi encontrado pelo arqueólogo Jean de Heinzelin, perto da fronteira entre Uganda e Zaire, data aproximadamente 20.000 a.C. e mostra três linhas de incisões arrumadas, respectivamente, nos seguintes grupos: (i) 9, 19, 21, 11; (ii) 19, 17, 13, 11; (iii) 7, 5, 5, 10, 8, 4, 6, 3. Como nas duas primeiras linhas a soma é igual a 60, alguns pesquisadores especulam representar um registro das fases da Lua, mas outras observações também foram propostas como o fato da primeira linha conter uma sequência de números que diferem por 1 de 10 ou de 20 e a segunda conter uma sequência de números primos.

Estes sistemas de contagem não duraram muito tempo, pois o homem sentiu a necessidade de manipular grandes números. E essa necessidade segundo o estudioso LIVIO em "Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente", implicou na ideia de organizar os números em base:

> Por razões práticas, nenhum sistema simbólico que tivesse um nome ou objeto representativo e único para cada número poderia sobreviver por muito tempo. Da mesma maneira que as letras do alfabeto representam de algum modo o número mínimo de caracteres com os quais podemos expressar nosso vocabulário inteiro e todo o conhecimento escrito, um conjunto mínimo de símbolos caracterizando todos os números teria que ser adotado. Essa necessidade levou o conceito de 'base' – a noção de que os números podem ser arrumados hierarquicamente, de acordo com certas unidades. Temos tanta familiaridade com a base 10 em nossa vida cotidiana que é difícil imaginar que outras bases poderiam ter sido escolhidas. (LIVIO, 2008,p. 30)

Acredita-se que a base 10 tenha surgido pelo fato de termos dez dedos, o que facilitaria a contagem, mas de todas as outras bases usadas ao redor do mundo a mais conhecida é a base vigesimal, ou seja, a base 20.

Seja em qual base for, o primeiro grupo de números apreciado e entendido foi o grupo dos números inteiros e não demorou muito para que lhes fossem atribuídos poderes. O que levou a duas linhas de estudo dos números: a primeira estava preocupada com a teoria dos números e a segunda com a numerologia.

Os pitagóricos, por exemplo, atribuíram a alguns números propriedades especiais, como relata Livio:

> O número 1, por exemplo, era considerado o gerador de todos os outros números e portanto não era visto propriamente como um número. Suponha-se Também que ele caracterizava a razão. (...) O número 2 era o primeiro número feminino e também o número da opinião e da divisão. (...) Suponha-se que 3 era o primeiro número masculino real e também o número da harmonia, pois combina unidade (o número 1) com divisão (o número 2). (LIVIO, 2008, p.45)

Uma explicação para o número 2 está ligado ao feminino e o 3 ao masculino dar-se pela configuração dos seios femininos e da genitália masculina. No geral, os números pares estavam ligados ao feminino e os ímpares ao masculino.

2.2 O início de Trigonometria

Não se sabe dizer com precisão onde e nem quando surgiu a Trigonometria. Sabe-se que seu desenvolvimento de seu a partir das necessidades práticas ligadas à Astronomia, Agrimensura e Navegação. Os primeiros registros rudimentares surgem no Egito e na Babilônia, isso pode ser visto no Papiro de Ahmes, mais conhecido como o Papiro de Rhind. Esse papiro é o documento de matemática mais extenso que chegou aos dias de hoje. Nele já se pode perceber o conceito de cotangente de um ângulo, como relata Boyer:

> O prob. 56 do Papiro de Rhimd tem especial interesse por conter rudimentos de Trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes. Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces e pode ter sido essa preocupação a levar os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de co-tangente de um ângulo. (BOYER, 1996, p. 13)

Apesar dos primeiros indícios de Trigonometria surgirem entre os egípcios e babilônios, foi o grego Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.) quem recebeu o titulo de Pai da Trigonometria. Importante astrônomo, Hiparco, em seus estudos sobre o espaço, desenvolveu a primeira tabela trigonométrica, o que lhe rendeu este título. Como suas obras se perderam, não se sabe como foi feita a tabela.

Outro nome citado na história da Trigonometria é o de Menelau de Alexandria. A maioria de suas obras foi perdida, a única preservada foi *Sphaerica*, obra composta por três livros. É no terceiro que se encontra o "teorema de Menelau", o trabalho mais antigo sobre Trigonometria esférica que se tem conhecimento.

O estudioso mais importante da Trigonometria é Cláudio Ptolomeu. Sua obra, *Syntaxismatemática*, formada por treze livros, foi escrita meio século antes de Menelau. A obra ficou conhecida como Almagesto, que significa em árabe "A maior", pois foi considerada a maior obra de astronomia da época. Esta obra sobreviveu ao tempo e por isso é de grande importância para nós que hoje, além de termos suas tabelas trigonométricas, temos os métodos em suas construções. É importante lembrar que parte dessa obra baseia-se no trabalho de Hiparco. Do autor não se sabe muito, onde e nem quando nasceu, mas, por Ptolomeu fazer observações em Alexandria, acredita-se que ele tenha nascido pelo fim do primeiro século.

Um dos gregos mais importantes para o desenvolvimento da Trigonometria foi Pitágoras de Samos. Acredita-se que ele tenha feito a primeira demonstração do Teorema de Pitágoras, por isso que o teorema leva o seu nome.

2.3 Pitágoras e os Pitagóricos

Pouca coisa sobre Pitágoras pode ser dita com certeza, pois nenhuma biografia escrita na antiguidade foi preservada, e as escritas mais tarde não têm tanta credibilidade. Acredita-se que o matemático tenha nascido por volta de 570 a.C. na ilha de Samos, mar Egeu, viveu alguns anos viajando pela Ásia Menor. Mais tarde retornou a sua cidade natal onde encontrou a tirania de Polícrates que havia estabelecido uma supremacia sâmia naval no mar Egeu, fazendo com que Pitágoras migrasse para Crotona, uma colônia grega situada ao sul da Itália.

Como a maioria das informações sobre Pitágoras continuam incertas, os autores entram em contradição sobre muitos relatos. Exemplo disso é Eves (2004) e Boyer (1996), quando falam da relação entre Pitágoras e Tales de Mileto. Para Boyer é improvável que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales por ter a diferença de meio século entre suas idades:

> Tales era um homem de negócios, mas Pitágoras era um profeta e um místico, nascido em Samos, uma das ilhas de Dodecaneso, não longe de Mileto, o lugar de nascimento de Tales. Embora alguns relatos afirmem que Pitágoras foi discípulo de Tales, isso é improvável dada a diferença de meio século entre suas idades. Algumas semelhanças dos seus interesses podem ser facilmente explicadas pelo fato de Pitágoras ter também viajado pelo Egito e Babilônia – possivelmente ido até a Índia. (BOYER, 1996, p. 33)

Já para Eves, existe a possibilidade de Pitágoras ter sido discípulo de Tales, mesmo sendo 50 anos mais novo, como ele relata em seu livro:

> Ao que parece Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C. na egeia de Samos. É possível que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales, pois era 50 anos mais novo do que este e morava perto de Mileto, onde vivia Tales. Depois parece que residiu por algum tempo no Egito e pode mesmo ter-se abalançado a viagens mais extensas. (EVES, 2011, p. 97)

Em Crotona, Pitágoras fundou a famosa escola pitagórica, essa escola não era apenas um centro de estudos (filosofia, matemática e ciências naturais), mas também uma irmandade unida por ritos secretos e cerimônias. A escola atraiu uma multidão de seguidores de todas as esferas, inclusive os da mais alta sociedade.

A vida dos pitagóricos era dedicada ao sossego, à pureza, à moderação e à obediência, além de serem vegetarianos, pois os animais destinados ao abate poderiam ser reencarnações de amigos mortos. Para a purificação da alma, os pitagóricos estabeleciam regras rígidas como, por exemplo, não comer grãos e uma ênfase extrema no treino da memória.

Segundo um relato, houve uma revolução por volta de 501 a.C., na qual foi derrubado o governo de Milos, incendiado o seu palácio e numerosos pitagóricos assassinados, fazendo com que Pitágoras fugisse para Tarento e em seguida para Metaponto onde foi assassinado numa segunda revolta um ano depois.

Supõe-se que a incomensurabilidade tenha sido descoberta através do Teorema de Pitágoras. Para Boyer, é improvável que Pitágoras conhecesse o problema, mas, provavelmente, a descoberta foi feita pelos pitagóricos por volta de 410 a. C.. Acredita-se que a incomensurabilidade tenha se dado pela aplicação do teorema em um triângulo isósceles.

Os pitagóricos restantes voltaram a se reunir ainda por alguns séculos, mas o comprometimento com o segredo que só os adeptos tinham acesso nos privou do conhecimento de suas vidas e costumes.

3 CAPÍTULO II – O TRIÂNGULO

O triângulo é o polígono como o menor número de lados e o único que não possui diagonais. Podemos definir triângulo como um polígono formado por três retas que se cruzam duas a duas formando três vértices, três ângulos e três lados.

3.1 Elementos de um Triângulo

Num triângulo podemos encontrar vários elementos. Veja a seguir:

a)Altura: É o segmento de reta perpendicular a um dos lados do triângulo que passa pelo vértice oposto a esse lado.

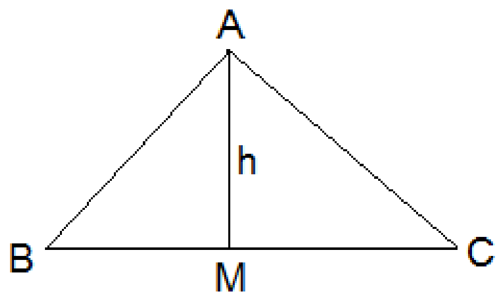

Figura 1 - Altura de um triângulo

No triângulo acima a altura é o seguimento de reta AM.

b) Mediana: É todo seguimento de reta que tem um extremo em um dos vértices e o outro extremo no ponto médio do lado oposto a este vértice.

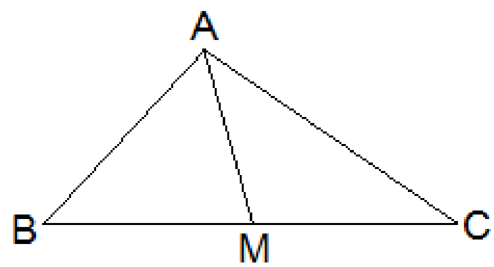

Figura 2 – Mediana de um triângulo

No triângulo acima a mediana é o seguimento de reta AM.

c) Ceviana: É todo seguimento de reta que tem um extremo em um dos vértices e o outro extremo em qualquer ponto do lado oposto a este vértice.

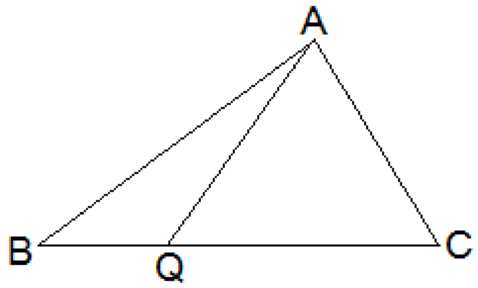

Figura 3 – Ceviana de um triângulo

No triângulo acima a ceviana é o seguimento de reta AQ.

d) Bissetriz: É todo seguimento de reta que tem um extremo em um dos vértices e outro do lado oposto a este vértice, dividindo o ângulo ao meio.

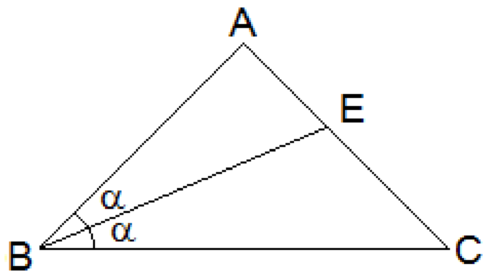

Figura 4 – Mediana de um triângulo

No triângulo acima a bissetriz é o seguimento de reta AE.

e) Incentro: É o ponto de interseção das três bissetrizes.

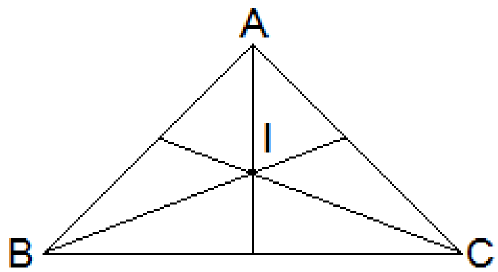

Figura 5 – Incentro de um triângulo

No triângulo acima encentro é o ponto I.

f) Baricentro: É o ponto de interseção das três medianas.

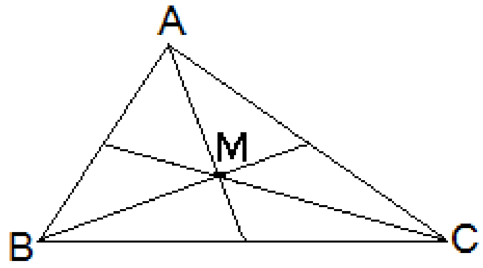

Figura 6 – Baricentro de um triângulo

No triângulo acima o baricentro é o ponto M.

g) Mediatriz: É o seguimento de reta perpendicular a um lado do triângulo passando pelo seu ponto médio.

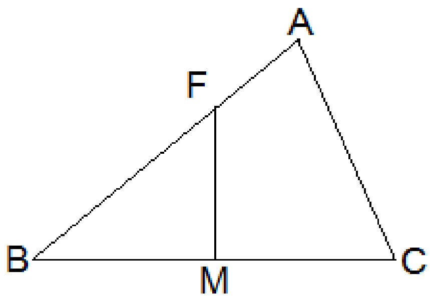

Figura 7 – Mediatriz de um triângulo

No triângulo acima a mediatriz é o seguimento de reta FM.

h) Ortocentro: É o ponto de interseção das três alturas de um triângulo.

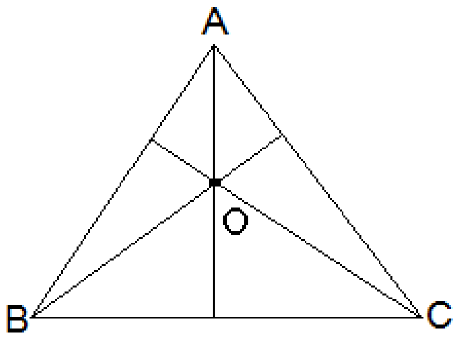

Figura 8 – Ortocentro de um triângulo

No triângulo acima o ortocentro é o ponto O.

i) Circuncentro: É o ponto de interseção das mediatrizes. É o centro da circunferência circunscrita a um triângulo.

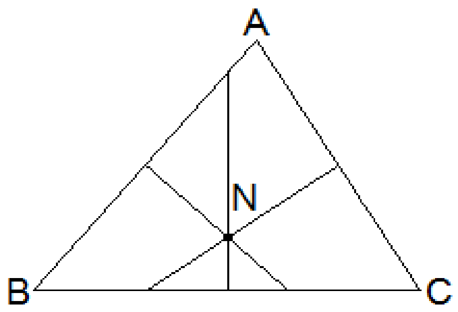

Figura 9 – Circuncentro de um triângulo

No triângulo acima o circuncentro é o ponto N

3.2 Tipos de Triângulos

Quanto aos lados, os triângulos podem ser classificados em:

a) Equilátero: Quando tem os três lados iguais.

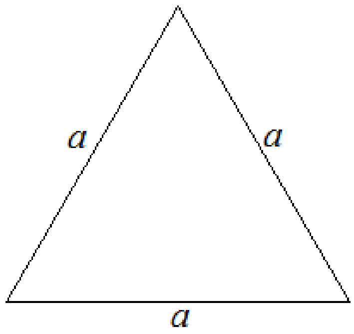

Figura 10 – Triângulo equilátero

b) Isósceles: Quando tem dois lados iguais e um diferente.

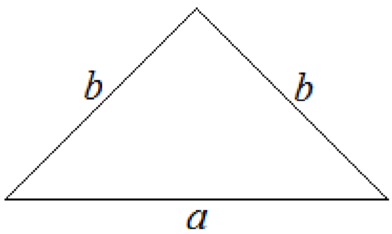

Figura 11 – Triângulo Isósceles

c) Escaleno: Quando tem os três lados diferentes.

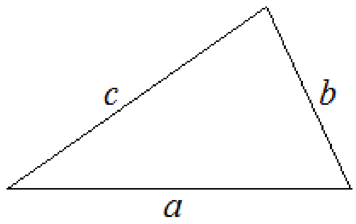

Figura 12 – Triângulo escaleno

Quanto aos ângulos, os triângulos podem ser classificados como:

a) Acutângulo: Quando possui todos os ângulos agudos.

$$\alpha, \beta, \gamma < 90°$$

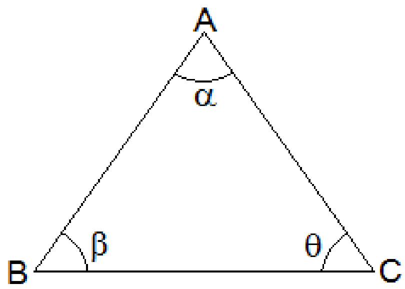

Figura 13 - Triângulo Acutângulo

b) Obtusângulo: Quando possui um ângulo obtuso.

$$\alpha > 90°$$

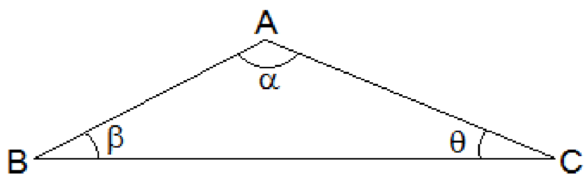

Figura 14 - Triângulo Obtusângulo

c) Retângulo: Quando possui um ângulo reto.

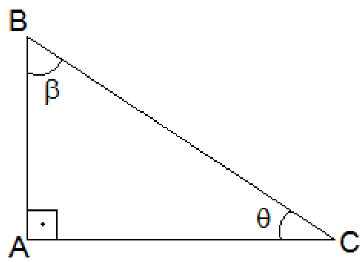

Figura 15 – Triângulo retângulo

3.3 Semelhança de Triângulos

Para dois triângulos ou mais serem semelhantes é preciso que os lados correspondentes deste triângulo sejam proporcionais e que os ângulos internos correspondentes sejam congruentes.

Exemplo:

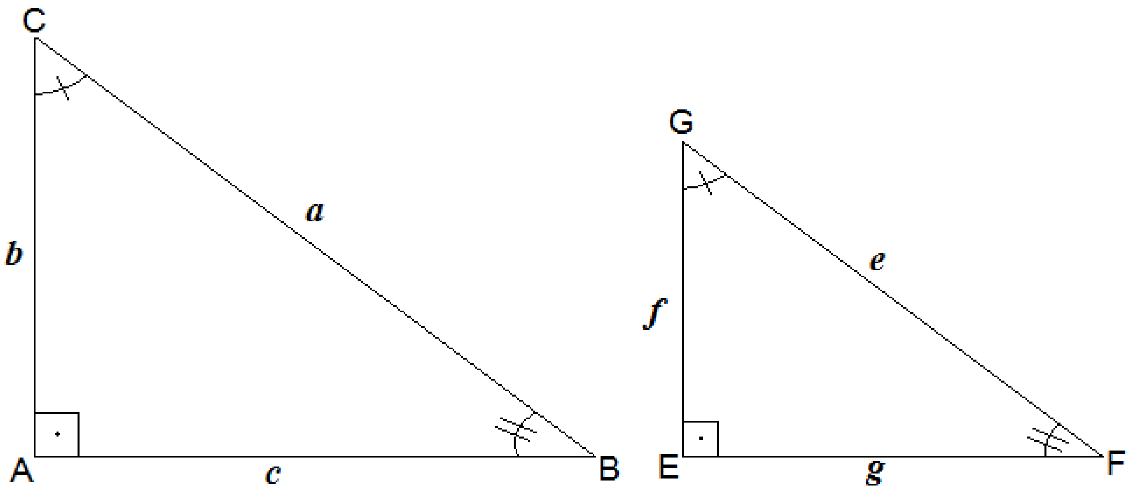

Figura 16 – Semelhança de Triângulos

Nos triângulos acima $\frac{a}{e} = \frac{b}{f} = \frac{c}{g}$.

Analisando estes triângulos vemos que se um triângulo satisfaz uma condição acima, automaticamente, satisfaz a outra. Ou seja, se os lados forem proporcionais, automaticamente, os ângulos são congruentes.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, basta termos a medida de dois ângulos para sabermos a medida do terceiro. Logo, se em dois tiverem as medidas de dois ângulos congruentes, sabemos logo que são semelhantes.

Por fim, se dois triângulos possuem dois lados proporcionais e um ângulo congruente, automaticamente possuem os outros ângulos congruentes e os outros lados proporcionais.

4 CAPÍTULO III – RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

4.1 O Triângulo Retângulo

O Triângulo Retângulo é uma figura bastante usada desde a antiguidade até os dias atuais. Está muito presente no nosso cotidiano, principalmente em construções, no cálculo de volumes e áreas. Como já foi dito anteriormente, o triângulo retângulo é um triângulo que possui um ângulo reto. Este triângulo é considerado a base da Trigonometria.

Os lados do triângulo retângulo têm nomes específicos. Como mostra a figura abaixo:

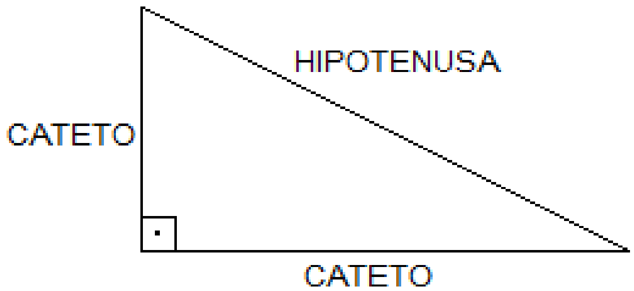

Figura 17 – Nomenclatura dos lados de um triângulo retângulo

O lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa, é o maior lado do triângulo. Os outros dois lados são chamados de catetos. Como a altura de um triângulo é o seguimento de reta perpendicular a um dos lados com o outro extremo no vértice oposto a este lado, em um triângulo retângulo, duas das alturas são os catetos e a outra é obtida tomando a hipotenusa como base.

A partir de qualquer triângulo podemos obter dois triângulos retângulos, basta separarmos por uma de suas alturas. Veja a figura abaixo:

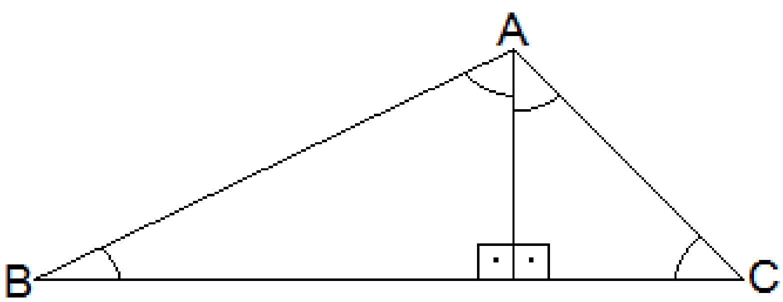

Figura 18 – Divisão de um triângulo retângulo pela altura

4.2 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Dado o triângulo retângulo abaixo:

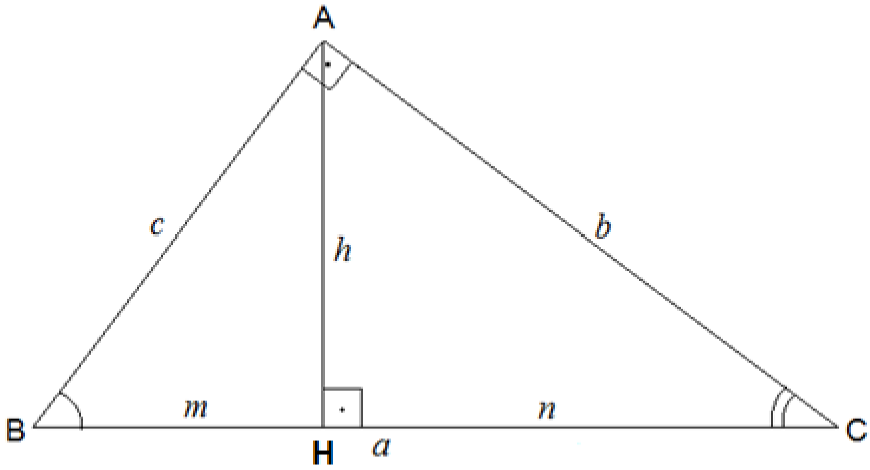

Figura 19 – Triângulo retângulo (relações métricas)

Podemos obter mais dois triângulos semelhantes a esse. Que são:

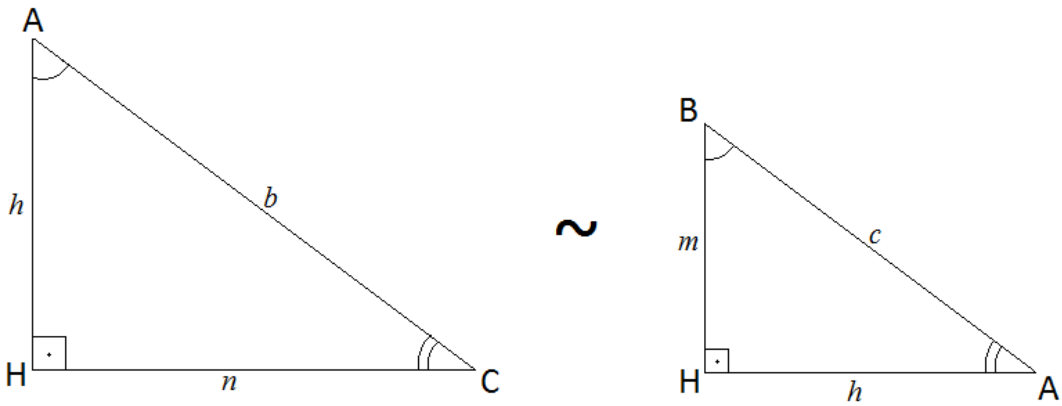

Figura 20 – Semelhança de triângulos (relações métricas)

Assim: $\Delta ABC \sim \Delta HAC \sim \Delta HBA$

De $\Delta ABC \sim \Delta HAC$, temos:

$$\frac{AB}{HA} = \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{n} = \frac{a}{b}$$

Logo:

$cb = ah$, $cn = hb$ e $b^2 = na$

De $\Delta ABC \sim \Delta HBA$, temos:

$$\frac{AB}{HB} = \frac{AC}{HA} = \frac{BC}{BA}$$

$$\frac{c}{m} = \frac{b}{h} = \frac{a}{c}$$

Logo:

$c^2 = am$, $bc = ah$ e $ch = bm$

E de $\Delta HAC \sim \Delta HBA$, temos:

$$\frac{HC}{HA} = \frac{HA}{HB} = \frac{CA}{AB}$$

$$\frac{n}{h} = \frac{h}{m} = \frac{b}{c}$$

Logo: $h^2 = mn$, $nc = hb$ e $hc = bm$

Assim, podemos concluir as seguintes relações métricas:

1) $cb = ah$
2) $cn = hb$
3) $b^2 = na$
4) $c^2 = ma$
5) $ch = bm$
6) $h^2 = mn$

5 CAPÍTULO IV – O TEOREMA DE PITÁGORAS

5.1 O Teorema

Em um triângulo retângulo qualquer o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

5.1.1 Demonstração Clássica

Dado um triângulo retângulo cuja hipotenusa seja a e os catetos sejam b e c:

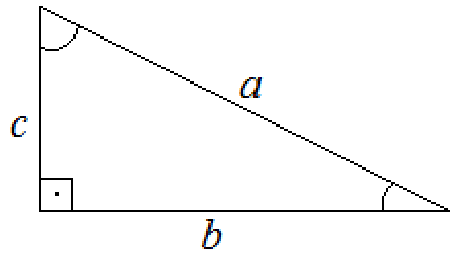

Figura 21 – Triângulo retângulo (demonstração clássica)

E um quadrado cujo lado mede $b + c$

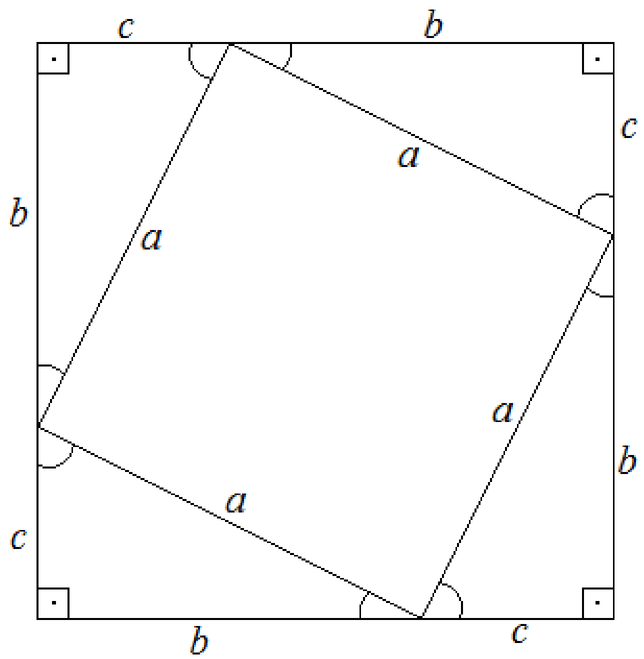

Figura 22 – Quadrado de lado a+b para demonstração clássica do teorema

Vemos que a área do quadrado maior é:

$A_{maior} = b + c = (b + c)^2 = b^2 + 2b + c$

E a área do quadrado menor é:

$A_{menor} = a^2$

Se a área do triângulo é:

$A_{triângulo} = \frac{bc}{2}$

Temos:

$A_{menor} = A_{maior} - 4A_{triângulo}$

Logo:

$a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - \frac{4bc}{2}$

$a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 2bc$

$a^2 = b^2 + c^2$

5.1.2 Demonstração por Semelhança

Das relações métricas vistas no capítulo anterior, temos:

$b^2 = na$ e $c^2 = ma$

Logo:

$b^2 + c^2 = an + am$

$b^2 + c^2 = a(n + m)$

Portanto:

$b^2 + c^2 = a^2$

6 CAPÍTULO V – APLICAÇÕES

Veremos nesse capítulo algumas aplicações básicas do Teorema de Pitágoras.

6.1 Diagonal do quadrado

Dado o quadrado abaixo:

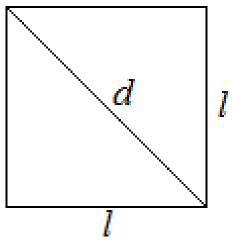

Figura 23 – Diagonal do quadrado

Consideremos o triângulo retângulo de catetos l e l e hipotenusa d.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = 2l^2$$

$$d = \sqrt{2l^2}$$

Logo, a diagonal de um quadrado de lado l é:

$$d = l\sqrt{2}$$

6.2 Diagonal de um bloco retangular

Dado o bloco retangular abaixo:

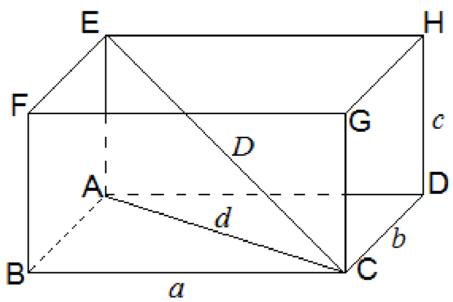

Figura 24 – Diagonal de um bloco retangular

Consideremos o triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa d, como mostra a figura:

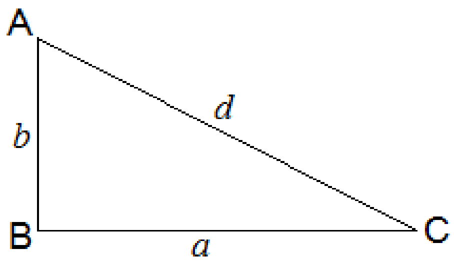

Figura 25 – Triângulo retângulo extraído do bloco retangular (1)

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = a^2 + b^2$$
$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Agora, consideremos o triângulo retângulo de catetos *c* e *d* e hipotenusa *D*:

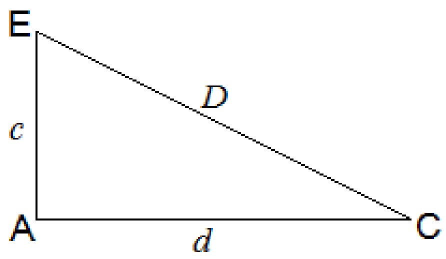

Figura 26 – Triângulo retângulo extraído do bloco retangular (2)

Ainda pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$D^2 = d^2 + c^2$$
$$D^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2$$

Portanto:

$$D = a^2 + b^2 + c^2$$

6.3 Diagonal de um cubo

Dado o cubo abaixo:

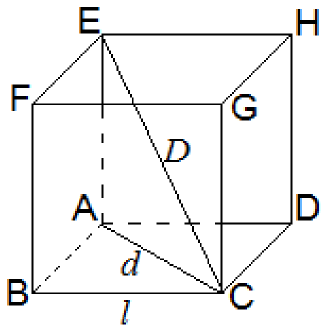

Figura 27 – Diagonal de um cubo

Considerando o triângulo retângulo de catetos *l* e *d* e diagonal *D*, temos:

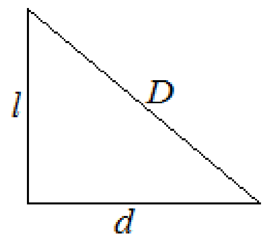

Figura 28 – Triângulo Retângulo extraído da diagonal do cubo

Usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$D^2 = l^2 + d^2$$

Como vimos anteriormente, a diagonal de um quadrado é:

$$d = l\sqrt{2}$$

Logo:

$$D^2 = l^2 + (l\sqrt{2})^2$$
$$D^2 = l^2 + 2l^2$$
$$D = l\sqrt{3}$$

6.4 Altura de um triângulo equilátero

Dado o triângulo equilátero:

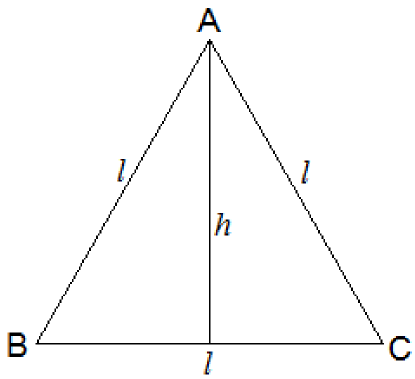

Figura 29 – Altura de um triângulo equilátero

Usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$l^2 = h^2 + (\frac{l}{2})^2$$

$$l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$l^2 = \frac{4h^2 + l^2}{4}$$

$$4l^2 = 4h^2 + l^2$$

$$4h^2 = 3l^2$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$

Portanto, a altura de um triângulo equilátero de lado *l* é:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

CONCLUSÃO

Este trabalho mostra a importância de Pitágoras e o teorema que leva o seu nome. Conhecer as relações métricas no triângulo retângulo e as demonstrações do teorema, assim como um pouco de história, facilitam o nosso entendimento sobre o assunto.

Pitágoras foi um grande matemático, mas a falta de documentos não nos permitiu conhece-lo tão bem. Os poucos relatos que chegaram até os dias atuais nos mostram um grande intelectual que nos deixou, como herança, uma infinidade de conhecimentos.

Os triângulos, figuras que parecem tão simples, mas que nos deixam curiosos é o menor polígono, sem diagonais, talvez seja isso que os façam tão notáveis. Analisá-los e classificá-los nos prendem à caneta e ao papel. Nessa breve passagem que fizemos pelos triângulos neste trabalho exploramos seus os elementos e os classificamos quanto aos lados e aos ângulos.

As demonstrações nos fazem entrar numa matemática mais concreta, não apenas de fórmulas, mas de como é interessante e prazeroso chegar até as mesmas. Analisar antes as relações métricas no triângulo retângulo e a semelhança de triângulos nos permitiu uma maior agilidade nas demonstrações. Já nas aplicações, com as fórmulas prontas e o conhecimento de como se chegou até lá, vemos a praticidade que o teorema nos trouxe.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER. Carl B. História da matemática. Tradução: Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. 2ª ed. São Paulo: Ática, 2013.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

LIVIO, Mario. Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente. Tradução: Marco Shinobu Matsumura. 3ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MELO, José Luiz Pastore; BARROSO, Juliane Matsubara. Matemática: construção e significado. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2015.

PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática: Paiva. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2010.

RIBEIRO, Tiago. Triângulo retângulo. Disponível em: <http://www.infoescola.com/trigonometria/triangulo-retangulo/>. Acesso em: 14/03/2016.

Alfa Virtual School – Matemática. Elementos e nomenclatura dos triângulos. Disponível em: <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/10396/geo0300.htm>. Acesso em: 16/03/2016.

MIRANDA, Danielle de. Relações no triângulo retângulo. Disponível em: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/relacoes-no-triangulo-retangulo.htm>. Acesso em: 17/03/2016.

Santos, Cristiano A.; JR, Leonidas Marchesini; SODRÉ, Ulysses. Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonom/trigon1/mod114.htm>. Acesso em: 31/03/2016.