UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS - CCHE
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Izaias de Farias Ramos

O Teorema de Baire

Monteiro - PB
2012

IZAIAS DE FARIAS RAMOS

O Teorema de Baire

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Orientação da Professora Me. Thiciany Matsudo Iwano.

Monteiro - PB
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA SETORIAL – CAMPUS VI

R175t Ramos, Izaias de Farias

O teorema de Baire [manuscrito] / Izaias de Farias Ramos. – 2012.

51 f. : il. color.

Digitado.

TAO (Licenciatura Plena em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2012.

"Orientação: Profa. Ma. Thiciany Matsudo Iwano, Departamento de Matemática".

1. Teorema de Baire. 2. Espaços métricos. 3. Convergência. I. Título.

21.ed. CDD 510

Izaias de Farias Ramos

O Teorema de Baire

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Aprovado pela banca examinadora em 14 de novembro de 2012.

Banca Examinadora

Prof[a]. Me. Thiciany Matsudo Iwano
Departamento de Matemática - Campus VI/UEPB
Orientadora

Prof[o]. Me. Luiz Lima de Oliveira Junior
Departamento de Matemática - Campus VI/UEPB
Examinador

Luciano dos Santos Ferreira

Prof[o]. Me. Luciano dos Santos Ferreira
Departamento de Matemática - Campus VI/UEPB
Examinador

Aos meus pais, Inácio Ramos de Amorim
e Maria do Carmo Farias de Amorim.

Agradecimentos

À minha família que é base de tudo na minha vida, especialmente, aos meus pais e meus irmãos, com os quais divido esta conquista.
Um agradecimento especial a minha noiva **Larícia Pinheiro Silva** pelo apoio e companherismo.
Agradeço muito a minha professora e orientadora **Ms. Thiciany Matsudo Iwano** por sua competência, colaboração e empenho, mesmo diante de alguns obstáculos.
Em nome de **Getúlio** e **Valtencil** quero agradecer a todos os meus colega de curso, pelos momentos de estudo, descontração e aprendizagem.
Aos membros da banca, **Luciano Santos** e **Luiz Lima** e, a todos os professores do curso de matemática que contribuiram de forma eficaz para minha formação acadêmica e profissional.
Aos funcionários da UEPB/Monteiro, os quais são importantissímos para o bom funcionamento da instituição.
Enfim, a todos aqueles que me ajudaram das mais diversas formas para concretização deste trabalho, o meu **MUITO OBRIGADO!**

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.”
(Albert Einstein)

Resumo

Neste trabalho, fazemos um estudo sobre os espaços métricos, teoria que generaliza alguns conceitos estudados no Cálculo e na Análise Real, especialmente aqueles que tratam acerca da noção de distância. O Teorema de Baire é um dos resultados relevantes nesta pesquisa. Para demonstrarmos, usaremos como suporte alguns resultados preliminares que serão apresentados nos dois capítulos iniciais. No primeiro, abordaremos sobre espaços métricos e noções de topologia, já no segundo trabalharemos com sequências e espaços métricos completos. Por fim, no terceiro capítulo será apresentado o Teorema de Baire. Para o desenvolvimento do trabalho adotamos como metodologia a pesquisa bibliográfica, somada a pesquisas em documentos eletrônicos disponíveis na internet.

Palavras-Chave: Teorema de Baire, Espaços Métricos, Convergência.

Abstract

In this work, we make a study of metric spaces, a theory that generalizes some concepts studied in Calculus and Real Analysis, especially those that deal with the notion of distance. Baire's theorem is one of the relevant results in this research. To demonstrate it, we will use as support some preliminary results that will be presented in the two opening chapters. In the first one, we discuss about metric spaces and notions of topology, in the second one we will work with sequences and complete metric spaces. Finally, the third chapter will present the theorem of Baire. For the development of the study we adopt as a methodology the bibliographic research, combined with researches in electronic documents available on the internet.

Key-words: Baire's Theorem, Metric Spaces, Convergence.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

Introdução

Na teoria dos espaços métricos busca-se a generalização de alguns dos conceitos estudados no Cálculo e na Análise Real, especialmente aqueles onde intervêm a noção de distância (conceitos topológicos). Nossos estudos acerca desta teoria conduziram-nos até o Teorema de Baire, um resultado importante no estudo dos espaços métricos.

O presente trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro, abordaremos resultados acerca dos espaços métricos e de algumas noções topológicas, necessárias para demonstrarmos o Teorema de Baire. No segundo capítulo, discutiremos sobre as sequências e os espaços métricos completos. Por fim, no terceiro capítulo, trataremos a respeito do Teorema de Baire.

Em todo o texto procuramos trabalhar os conteúdos de maneira detalhada, sempre colocando exemplo(s) de fácil entendimento após cada definição ou resultado, possibilitando uma leitura mais agradável, sem perder o rigor da matemática.

Para o desenvolvimento deste trabalho, adotamos como metodologia a pesquisa bibliográfica e a pesquisa em documentos eletrônicos, disponíveis na internet. A fundamentação teórica está pautada, principalmente, em: (LIMA, 2007), (KÜHLKAMP, 2002), textos que têm como conteúdos os espaços métricos e suas propriedades. O único pré-requisito a leitura desde material é um curso de Análise Real, o que tornaria os resultados e demonstrações aqui trabalhadas mais familiares.

1 Espaços Métricos e Noções de Topologia

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados importantes para o desenvolvimento deste trabalho, os quais servirão de base para compreendermos e demonstrarmos o Teorema de Baire. Os conteúdos aqui abordados poderam ser encontrados pelo leitor nas referências (LIMA, 2007) e (KÜHLKAMP, 2002), ou em qualquer outro livro de introdução aos espaços métricos e a topologia geral. Assim sendo, procuramos trabalhar estes conteúdos detalhadamente, sempre colocando exemplo(s) de fácil entendimento após cada definição ou resultado.

1.1. Definição de espaço métrico

Antes de apresentarmos a definicão formal de espaço métrico, faremos uma exposição informal acerca deste conceito. Para isso, observemos que a própria palavra métrica, na sua forma escrita, nos sugere o significado de distância. Dessa forma, é intuitivo percebermos que um espaço métrico é um conjunto no qual nós podemos medir a distância entre seus elementos, de alguma maneira.

Um dos exemplos mais intuitivos que usaremos para motivar a definição de métrica é certamente o plano $\mathbb{R}^2$, onde a distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta que os une. Seja A e B pontos distintos de $\mathbb{R}^2$ e d a distância entre estes pontos. Essa distância satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ (a distância entre um ponto e ele mesmo é nula);
2. $d(A,B) > 0$ (a distância entre dois pontos distintos é maior que zero);
3. $d(A,B) = d(B,A)$ (a distância é simétrica);
4. $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$ (a distância satisfaz a desigualdade triangular).

O nome desta última propriedade se deve ao fato que, na geometria euclidiana, o comprimento de um lado de um triângulo é sempre menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados do triângulo. Para entendermos melhor a desigualdade triangular observemos a figura na página seguinte.

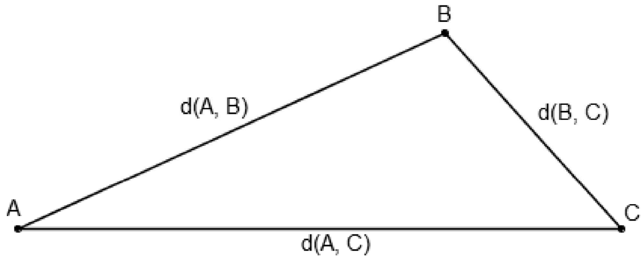

Figura 1.1.: A desigualdade triangular

Até aqui trabalhamos o conceito de espaço métrico de forma intuitiva, no entanto, tal conceito se torna geral através da definição que segue.

Definição 1.1 *Seja M um conjunto não vazio. Uma métrica num conjunto M é uma aplicação* $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *que associa a cada par ordenado de elementos* $x, y \in M$ *um número real* $d(x,y)$*, chamado de distância de x a y, de modo que para quaisquer* $x, y, z \in M$*, sejam satisfeitas as seguintes condições:*
1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*;*
2. Se $x \neq y$ *então* $d(x,y) > 0$*;*
3. $d(x,y) = d(y,x)$*;*
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$*.*

Definição 1.2 *Denomina-se espaço métrico o par* (M,d)*, onde M é o conjunto e d é a métrica em M. Quando a métrica for facilmente subtendida, escreveremos simplesmente M, para indicar o espaço métrico* (M,d)*.*

Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza diversas, como: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc. Estes elementos seram sempre chamados de pontos de M.

É importante notar que espaço métrico é uma estrutura e não um conjunto. Percebe-se isto ao verificar que o mesmo conjunto munido com métricas distintas dá origem a espaços métricos distintos.

Exemplo 1.1 *Seja* $\mathbb{R}$ *o conjunto dos números reais e* $d(x,y) = |x-y|$ *a distância entre elementos de* $\mathbb{R}$*. Mostraremos que d é uma métrica em* $\mathbb{R}$ *e concluiremos que* $(\mathbb{R},d)$ *é um espaço métrico. Para tanto, utilizemos das propriedades de números reais e verifiquemos as condições enunciadas na definição de métrica.*
1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$*;*
2. $d(x,y) = |x-y| > 0$*;*
3. $d(x,y) = |x-y| = |-y+x| = |(-1)(y-x)| = |(-1)||(y-x)| = |y-x| = d(y,x)$*;*

4. *Como para todo $a, b \in \mathbb{R}$ vale*

$$|a+b| \leq |a| + |b|,^{1}$$

temos

$$|x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z|.$$

Logo,

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Portanto, d é uma métrica e $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico. Esta métrica é chamada métrica usual em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.2 ***(A métrica zero-um)*** *Mostraremos neste exemplo que podemos obter um espaço métrico a partir de um conjunto arbitrário M, não vazio. Para isso basta definir a métrica $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, onde*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & se \quad x = y \\ 1, & se \quad x \neq y \end{cases}$$

Dados $x, y \in M$, vejamos se d é uma métrica:

1. *Se $x = y$, temos*

$$d(x,y) = d(x,x) = 0;$$

2. *Se $x \neq y$*

$$d(x,y) = 1 > 0;$$

3. *Para $x = y$, teremos*

$$d(x,y) = d(x,x) = d(y,x).$$

Por outro lado, se $x \neq y$

$$d(x,y) = 1 \text{ e } d(y,x) = 1.$$

Logo, $d(x,y) = d(y,x)$;

4. *Quando $x = z$, então*

$$d(x,z) = 0 \leq d(x,y) + d(y,z).$$

A desigualdade acima é válida pois, $d(x,y) + d(y,z)$ não pode ser menor que zero.
Se porém $x \neq z$, caso em que

$$d(x,z) = 1,$$

[1] Se $a, b \in \mathbb{R}$ então $|a+b| \leq |a| + |b|$.
De fato, se $a + b \geq 0$ então $|a+b| = a + b \leq |a| + |b|$;
Por outro lado, se $a + b < 0$ temos $|a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|$.

então não pode ocorrer $x = y$ *e* $y = z$*, ou seja,* $x \neq y$ *ou* $y \neq z$*.*

Assim

$$d(x,y) + d(y,z) \geq 1 = d(x,z).$$

Ou seja,

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Como as quatro condições acima foram satisfeitas, podemos concluir que d é uma métrica em M e (M,d) *um espaço métrico.*

Exemplo 1.3 ***(Métrica do máximo)*** *Sejam* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *elementos de* $\mathbb{R}^n$*. Mostremos que*

$$d(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

é uma métrica em $\mathbb{R}^n$*.*

1. Para $x = y$*, temos:*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\} \\ &= \max\{|x_1 - x_1|, |x_2 - x_2|, \ldots, |x_n - x_n|\} \\ &= \max\{|0|, |0|, \ldots, |0|\} \\ &= \max\{0, 0, \ldots, 0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Se $x \neq y$*,*

$$d(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

Como $|x_1 - y_1| > 0, |x_2 - y_2| > 0, \ldots, |x_n - y_n| > 0$*,*

$$\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\} > 0.$$

Logo $d(x,y) > 0$*, quando* $x \neq y$*.*

3. Temos:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\} \\ &= \max\{|(-1)(y_1 - x_1)|, |(-1)(y_2 - x_2)|, \ldots, |(-1)(y_n - x_n)|\} \\ &= \max\{|(-1)||y_1 - x_1|, |(-1)||y_2 - x_2|, \ldots, |(-1)||y_n - x_n|\} \\ &= \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|, \ldots, |y_n - x_n|\} \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

4. *Queremos mostrar que*
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}\max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|, \ldots, |x_n - z_n|\} &\leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\} \\ &+ \max\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|, \ldots, |y_n - z_n|\}.\end{aligned}$$

Para isso, observemos que:

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|, \ldots, |x_n - z_n|\} = |x_i - z_i| \textit{ para algum } 1 \leq i \leq n; \\ d(x,y) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\} = \left|x_j - y_j\right| \textit{ para algum } 1 \leq j \leq n; \quad (1.1) \\ d(y,z) &= \max\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|, \ldots, |y_n - z_n|\} = |y_k - z_k| \textit{ para algum } 1 \leq k \leq n. \quad (1.2)\end{aligned}$$

Sendo assim, devemos mostrar que:

$$|x_i - z_i| \leq \left|x_j - y_j\right| + |y_k - z_k|.$$

De 1.1 e 1.2 temos, respectivamente:

$$\begin{aligned} |x_i - y_i| &\leq \left|x_j - y_j\right| \textit{ para todo } 1 \leq i \leq n; \\ |y_i - z_i| &\leq |y_k - z_k| \textit{ para todo } 1 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

Daí,

$$|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \leq \left|x_j - y_j\right| + |y_k - z_k|.$$

Logo,
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Portanto, para quaisquer $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ do $\mathbb{R}^n$,

$$d(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

é uma métrica e $(\mathbb{R}^n, d)$ é um espaço métrico.

Para o próximo exemplo introduziremos a seguinte definição:

Definição 1.3 *Seja X um conjunto não vazio. Diremos que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada se existir um número real $k > 0$, onde k depende de f, tal que*

$$|f(x)| \leq k, \textit{ para todo } x \in X.$$

Denotaremos por $B(X;\mathbb{R})$ o conjunto formado por todas as funções $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que são limitadas, isto é,

$$B(X;\mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ é limitada}\}.$$

Exemplo 1.4 ***(Métrica da convergência uniforme ou métrica do sup[2])*** *Mostraremos neste exemplo que $d : B(X;\mathbb{R}) \times B(X;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

é uma métrica em $B(X;\mathbb{R})$.
De fato,

1. *Se $f,g \in B(X;\mathbb{R})$,*

$$d(f,g) = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

2. *Se $f,g \in B(X;\mathbb{R})$ e $f \neq g$, então existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$.*
Assim,

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \geq |f(x_0) - g(x_0)| > 0.$$

3. *Se $f,g \in B(X;\mathbb{R})$, então*

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in X} |(-1)[g(x) - f(x)]| = \sup_{x\in X} |g(x) - f(x)| = d(g,f).$$

4. *Se $f,g,h \in B(X;\mathbb{R})$, então para cada $x \in X$ temos que*

$$|f(x) - g(x)| = |[f(x) - h(x)] + [h(x) - g(x)]|.$$

Pela desigualdade triangular dos números reais, tem-se

$$|f(x) - g(x)| = |[f(x) - h(x)] + [h(x) - g(x)]| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|.$$

Logo,

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \leq \sup_{x\in X}\{|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\}. \qquad (*)$$

Pelas propriedades do supremo, se A e B são conjuntos limitados superiormente em $\mathbb{R}$, então $A + B$ é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ e

$$\sup[A + B] \leq \sup A + \sup B.\text{[3]}$$

---

[2] Ver a definição de supremo em (LIMA, 2004) ou na seção 1.3 deste trabalho.

[3] Para maiores informações acerca das propriedades do supremo consultar (OSMUNDO E ALDO, 2008) ou (LIMA, 2004).

Aplicando este resultado ao lado direito de (*), teremos

$$\begin{aligned} d(f,g) &\leq \sup_{x\in X}\{|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|\} \\ &\leq \sup_{x\in X}\{|f(x)-h(x)|\}+\sup_{x\in X}|h(x)-g(x)|\} \\ &\leq d(f,h)+d(h,g). \end{aligned}$$

Portanto d é uma métrica em $B(X;\mathbb{R})$ e $(B(X;\mathbb{R}),d)$ é um espaço métrico.
Para ilustrarmos a métrica do sup, considemos $X=[0,1]$ e $f,g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, definidas da seguinte forma:

$$f(x)=x \text{ e } g(x)=x^2, \text{ com } x\in[0,1].$$

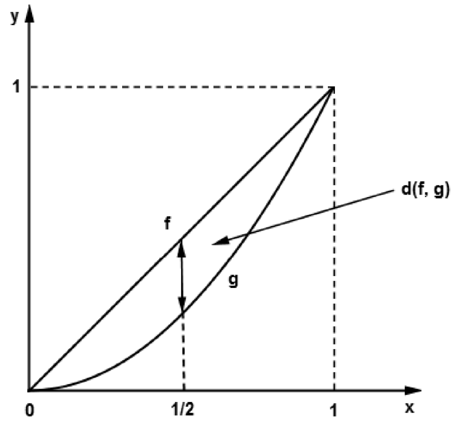

Figura 1.2.: Métrica da convergência uniforme ou métrica do sup

Vejamos na figura acima que a distância $d(f,g)$ é o comprimento da maior corda vertical que une os pontos dos gráficos das funções f e g. Assim,

$$d(f,g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|=\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Definição 1.4 *Se (M,d) é um espaço métrico e $X\subset M$, então (X,d) é chamado subespaço de (M,d).*

A métrica do subespaço (X,d) é chamada métrica induzida por (M,d).

Exemplo 1.5 *Pelo exemplo 1.1 $\mathbb{R}$ munido de sua métrica usual é um espaço métrico. Como $\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$, segue pela definição 1.4 que $(\mathbb{Z},d)$ é um subespaço de $(\mathbb{R},d)$. Da mesma forma $(\mathbb{N},d)$ e $(\mathbb{Q},d)$ são subespaços de $(\mathbb{R},d)$.*

1.2. Bolas abertas, bolas fechadas e esferas

A noção de bolas e esferas é importante no estudo dos espaços métricos, haja vista que boa parte das definições e resultados apresentados posteriormente dependem da definição destes objetos matemáticos.

Definição 1.5 *Sejam* (M,d) *um espaço métrico, a um ponto de M e* $r > 0$ *um número real.*

1. *A bola aberta de centro a e raio r é o conjunto* $B(a;r)$*, formado pelos pontos x de M, que estão a uma distância menor do que r do ponto a. Ou seja,*

$$B(a;r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}.$$

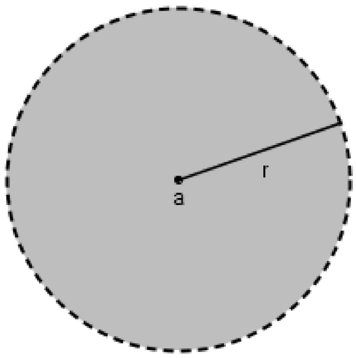

Figura 1.3.: Bola aberta

2. *A bola fechada de centro a e raio r é o conjunto* $B[a;r]$*, dos pontos x de M, cuja distância ao ponto a é menor do que ou igual a r. Isto é,*

$$B[a;r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}.$$

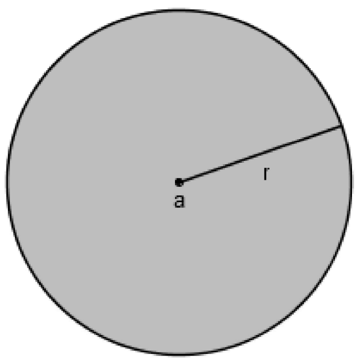

Figura 1.4.: Bola fechada

3. *A esfera de centro a e raio r é o conjunto $S(a;r)$, constituído pelos pontos x de M, cuja distância ao ponto a é igual a r. Ou seja,*

$$S(a;r) = \{x \in M; d(x,a) = r\}.$$

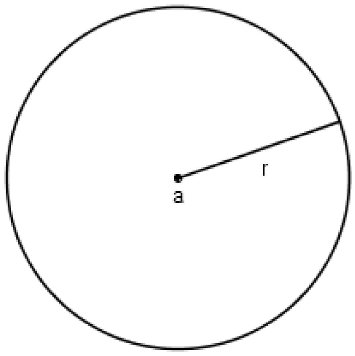

Figura 1.5.: Esfera

Exemplo 1.6 *Seja $\mathbb{R}$ um espaço métrico, a um ponto de $\mathbb{R}$ e $r > 0$ um número real. Mostremos que, em $\mathbb{R}$, bolas e esferas equivalem, respectivamente, a intervalos e pontos.*

1. *A bola aberta $B(a;r) = \{x \in \mathbb{R}; d(x,a) < r\}$ é o intervalo aberto $(a-r, a+r)$, pois como $d(x,a) = |x-a| < r$ segue que $-r < x-a < r$, ou seja: $a-r < x < a+r$;*

Figura 1.6.: A bola aberta de centro a e raio r

2. *De forma semelhante, a bola fechada $B[a;r] = \{x \in \mathbb{R}; d(x,a) \le r\}$ é o intervalo fechado $[a-r, a+r]$, pois se $d(x,a) = |x-a| \le r$ então $-r \le x-a \le r$. Logo, $a-r \le x \le a+r$;*

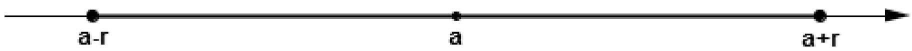

Figura 1.7.: A bola fechada de centro a e raio r

3. *A esfera $S(a;r) = \{x \in \mathbb{R}; d(x,a) = r\}$ é o par de pontos $\{a-r, a+r\}$, pois a igualdade $d(x,a) = |x-a| = r$ implica dizer que $-x+a = r$ ou $x-a = r$. Logo, $x = a-r$ ou $x = a+r$.*

Figura 1.8.: A esfera de centro a e raio r

Exemplo 1.7 *Consideremos o plano $\mathbb{R}^2$ e as seguites métricas:*

$$
\begin{aligned}
d_1(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}, \\
d_2(x,y) &= |x_1-y_1|+|x_2-y_2| \ e \\
d_3(x,y) &= max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\},
\end{aligned}
$$

onde $x=(x_1,x_2)$ e $y=(y_1,y_2)$.
As bolas abertas $B(a,r)$ relativamente às métricas d_1,d_2 e d_3 são respectivamente: o interior de um círculo de centro a e raio r, o interior de um quadrado de centro a e lados de comprimento $2r$, paralelos aos eixos, e o interior de um quadrado de centro a e diagonais paralelas aos eixos, ambas de comprimento $2r$.

Ao utilizarmos métricas diferentes, as bolas podem assumir formas interessantes. As figuras abaixo representam as bolas fechadas $B[0,1]$ referentes às métrica d_1,d_2 e d_3, respectivamente.

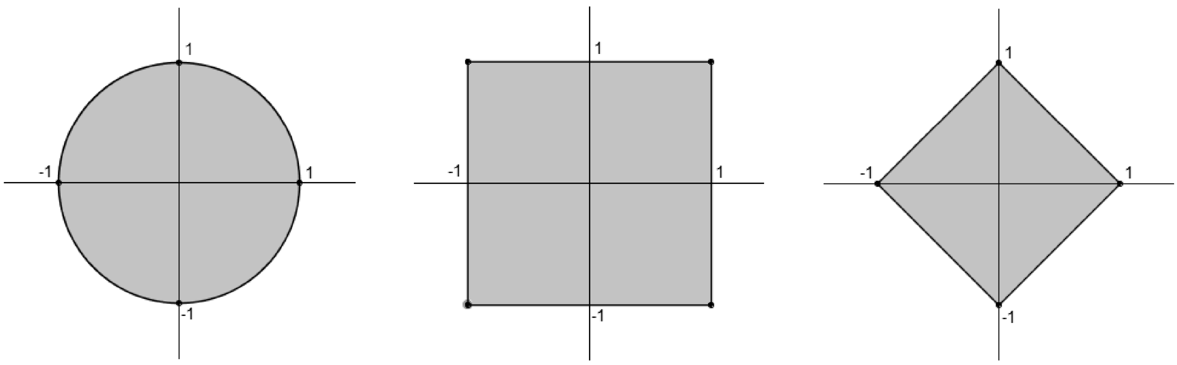

Figura 1.9.: Bolas fechadas relativas as métricas d_1, d_2 e d_3

1.3. Subconjuntos limitados de um espaço métrico

A ideia de conjunto limitado está intimamnete ligado ao conceito de distância. Aqui, veremos alguns resultados relevantes para nosso estudo.

Definição 1.6 *Um subconjunto X de um espaço métrico (M,d) é dito limitado quando existe um número real $c>0$ tal que $d(x,y)\leq c$ para quaisquer $x,y\in X$.*

Exemplo 1.8 *O subconjunto $[0,1]$ é limitado em $\mathbb{R}$ com sua métrica usual. De fato, dado $c=1$ temos que $d(x,y)=|x-y|\leq 1$, para todo $x,y\in[0,1]$.*

Definição 1.7 *Diremos que o espaço métrico M é limitado, ou que a métrica d é limitada, se existe um número real $c>0$ tal que $d(x,y)\leq c$ para quaisquer $x,y\in M$.*

Proposição 1.1 *Um conjunto $X \subset M$ é limitado se, e somente se, $X \subset B[a;r]$ para alguma bola $B[a;r]$ de M.*

Demonstração: Mostremos inicialmente a volta. Se $X \subset B[a;r]$ para algum $a \in M$ e $r > 0$, então dados $x, y \in X$, pela propriedade da desigualdade triangular temos que:

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) \leq r + r = 2r.$$

Logo, se $X \subset B[a;r]$, então X é limitado. Por outro lado, se X é limitado, isto é, se existe $c > 0$ tal que

$$d(x,y) \leq c$$

para todo $x, y \in X$, então dado $a \in X$, tome $r = c$ e teremos que

$$d(x,a) \leq c = r$$

para qualquer $x \in X$, ou seja, $X \subset B[a;r]$. ∎

Proposição 1.2 *Sejam M um espaço métrico e $X, Y \subset M$ conjuntos limitados. Então $X \cup Y$ é um subconjunto limitado de M.*

Demonstração: Com efeito, fixemos um ponto $a \in X$ e um ponto $b \in Y$. Se $X = \varnothing$ ou $Y = \varnothing$, segue que $X \cup Y = Y$ ou $X \cup Y = X$, respectivamente. Daí, $X \cup Y$ é limitado, por hipótese. Podemos agora supor, sem perda de generalidade, que $X, Y \neq \varnothing$. Como X e Y são limitados em M existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$d(x,a) \leq c_1 \text{ e } d(y,b) \leq c_2$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Considere

$$k = c_1 + c_2 + d(a,b) > 0.$$

Logo, se $x \in X$ e $y \in Y$ temos que

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) \leq c_1 + d(a,b) + c_2 = k.$$

Portanto, para todo $x, y \in X \cup Y$ temos:
1. se $x, y \in X$, então $d(x,y) \leq c_1 < k$;
2. se $x, y \in Y$, então $d(x,y) \leq c_2 < k$;
3. se $x \in X$ e $y \in Y$, então $d(x,y) \leq k$.

Ou seja, $d(x,y) \leq k$ para todo $x, y \in X \cup Y$, mostrando que $X \cup Y$ é limitado em M. ∎

Definição 1.8 *Seja X um subconjunto dos números reais. Dizemos que X é limitado superiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq a$ para todo $x \in X$. Denominemos a por cota superior de X.*

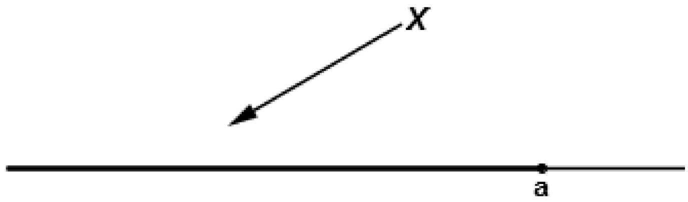

Figura 1.10.: Conjunto limitado superiormente em $\mathbb{R}$

Exemplo 1.9 *Seja $S = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 1\}$ um subconjunto de $\mathbb{R}$. Temos que S é limitado superiormente, pois dado $2 \in \mathbb{R}$, $x \leq 2$ para todo $x \in S$. Note que qualquer número real maior ou igual a 1 é cota superior para S, ou seja, $1, \sqrt{2}, \pi$ são cotas superiores para S.*

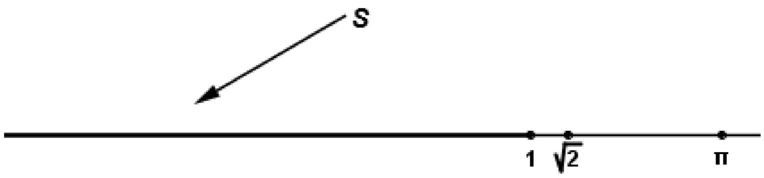

Figura 1.11.: O conjunto S é limitado superiormente

Exemplo 1.10 *O conjunto $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\}$ é limitado superiormente. De fato, qualquer número real a não negativo é cota superior de $\mathbb{R}_-$, pois se $a \geq 0$ então $x < 0 \leq a$ para todo $x \in \mathbb{R}_-$.*

Definição 1.9 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente. Um número b é dito supremo de X, quando é a menor das cotas superiores. Chamaremos o supremo de X por* $\sup X$.

Exemplo 1.11 *Consideremos $S = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 1\}$ um subconjunto limitado superiormente em $\mathbb{R}$. O supremo de S é o número real 1, pois é a menor das cotas superiores de S. Note que* $\sup S = 1 \in S$.

Proposição 1.3 *Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, para que $b \in \mathbb{R}$ seja o supremo de X é necessário e suficiente que se tenha:*
1. $x \leq b$ para todo $x \in X$;
2. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $x \in X$ tal que $b - \varepsilon < x$.

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em (OSMUNDO E ALDO, 2008).

Definição 1.10 *Seja X um subconjunto dos números reais. Dizemos que X é limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. Denominemos a por cota inferior de X.*

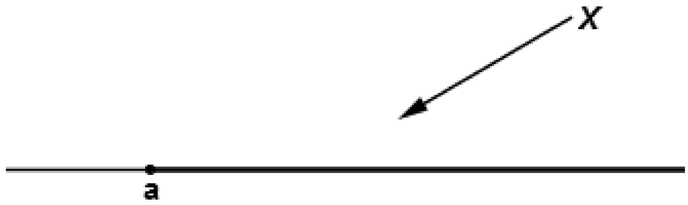

Figura 1.12.: Conjunto limitado inferiormente em $\mathbb{R}$

Exemplo 1.12 *O subconjunto $T = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ de $\mathbb{R}$ é limitado inferiormente, pois $0 < x$ para todo $x \in T$. Note que qualquer número real menor ou igual a 0 é cota inferior de $\mathbb{N}$, ou seja, $-\pi, -\sqrt{2}, 0$ são cotas inferiores de $\mathbb{N}$.*

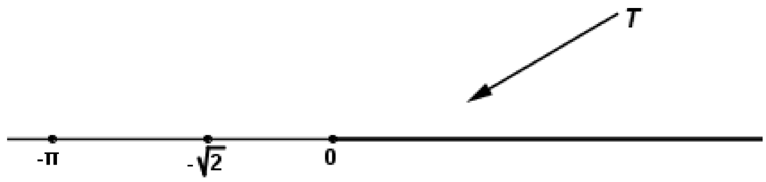

Figura 1.13.: O conjunto T é limitado inferiormente

Exemplo 1.13 *Consideremos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais. $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente, pois $0 < x$ para todo $x \in \mathbb{N}$.*

Definição 1.11 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente. Um número b é dito ínfimo de X, quando é a maior das cotas inferiores. Denotemos o ínfimo de X por $\inf X$.*

Exemplo 1.14 *Seja $S = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ um subconjunto limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. O ínfimo de S é 0, pois é a maior das cotas inferiores de S. Observe que o $\inf S = 0 \in S$.*

Proposição 1.4 *Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente, para que $b \in \mathbb{R}$ seja o ínfimo de X é necessário e suficiente que se tenha:*
1. $b \leq x$ para todo $x \in X$;
2. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $x \in X$ tal que $x < b + \varepsilon$.

A demonstração desta proposição segue de forma análoga a da proposição 1.3.

Definição 1.12 *Seja X um subconjunto limitado de um espaço métrico M. Chamamos de diâmetro de X ao supremo dos números $d(x,y)$ com $x, y \in X$. Em notação matemática:*

$$diam\, X = \; sup\{d(x,y); x, y \in X\}.$$

1.4. Conjuntos abertos e fechados

Algumas noções de topologia serão relevantes para o estudo do Teorema de Baire, pois em tal resultado há uma relação entre conjuntos abertos, conjuntos fechados e interior. Nesta seção, trabalharemos duas classes de conjuntos, os abertos e os fechados.

Definição 1.13 *Seja A um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $a \in A$ é chamado ponto interior de A quando é centro de uma bola aberta contida em A, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que*

$$B(a;r) \subset A.$$

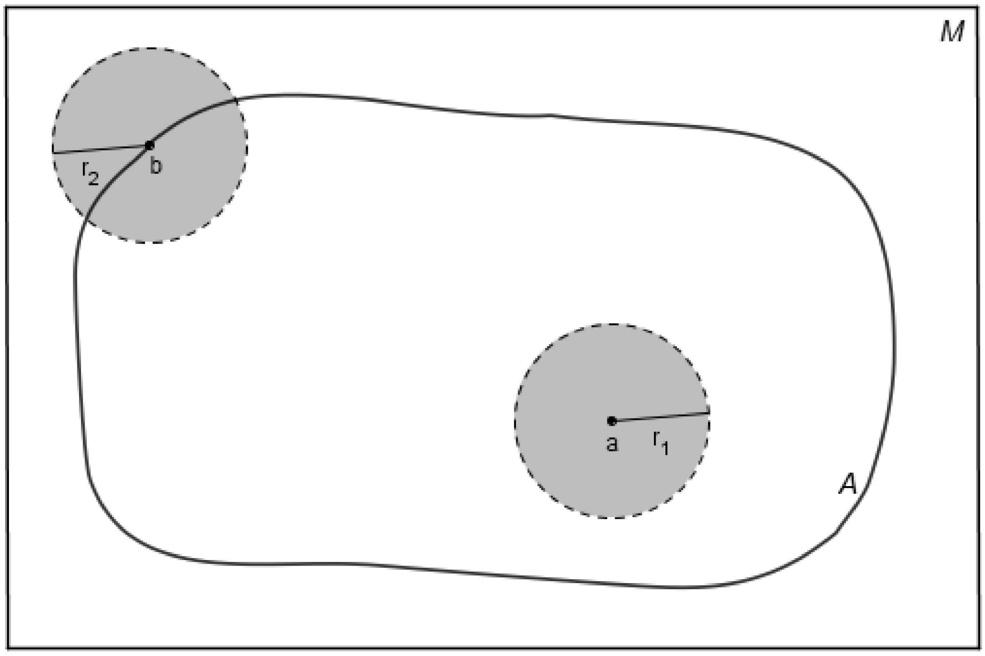

Figura 1.14.: Ponto interior

Exemplo 1.15 *Consideremos o espaço métrico $\mathbb{R}$ e $[0,1)$ um subconjunto de $\mathbb{R}$. Mostremos que o interior do intervalo $[0,1)$ na reta é o intervalo aberto $(0,1)$.*
De fato, dado $a \in (0,1)$ segue que

$$0 < a < 1.$$

Tomando-se $r = min\{a, 1-a\} > 0$, temos

$$(a-r, a+r) \subset [0,1). \qquad (*)$$

A inclusão (*) é verdadeira, pois se $x \in (a-r, a+r)$, então

$$a-r < x < a+r.$$

Como $r \leq a(-a \leq -r)$ *e* $r \leq 1-a$, *tem-se*

$$a-a \leq a-r < x < a+r \leq a+(1-a).$$

Daí,

$$0 = a-a \leq a-r < x < a+r \leq a+(1-a) = 1.$$

Ou seja, $0 < x < 1 \Rightarrow x \in [0,1)$.
Logo, $a \in [0,1)$. *Por outro lado, se* $a = 0$ *então*

$$B(0;r) \not\subset [0,1).$$

O que implica que 0 *não é ponto interior de* $[0,1)$. *Portanto, int* $[0,1) = (0,1)$.

Exemplo 1.16 *Seja* $\mathbb{Q}$ *o conjunto dos números racionais. O interior de* $\mathbb{Q}$ *em* $\mathbb{R}$ *é vazio pois nenhum intervalo aberto pode ser formado apenas por números racionais.*[4]

Definição 1.14 *Dizemos que A é um conjunto aberto em M quando todo ponto de A for ponto interior de A, ou seja, quando todo ponto* $a \in A$ *é centro de uma bola aberta inteiramente contida em A.*

Exemplo 1.17 *Seja* $A = (-1,0) \cup (0,1)$. *Então A é um subconjunto aberto da reta. Com efeito, para todo* $x \in A$ *tem-se* $x \in (-1,0)$ *ou* $x \in (0,1)$. *Em qualquer caso, existe uma bola aberta (neste exemplo um intervalo) que contém x e está contido em A.*

O conjunto de todos os pontos interiores de A será chamado interior de A e denotado por int A. Segue que A é aberto quando $A = \text{int}\, A$.

Proposição 1.5 *Toda bola aberta* $B(a;r)$ *num espaço métrico M é um conjunto aberto.*

Demonstração: Queremos mostrar que $B(a;r)$ é um conjunto aberto em M, ou seja, que todo ponto $x \in B(a;r)$ é centro de uma bola aberta inteiramente contida em $B(a;r)$. Para cada ponto $x \in B(a;r)$, temos

$$d(x,a) < r,$$

daí,

$$s = r - d(x,a)$$

é um número positivo. Consideremos então a bola $B(x;s)$ e afirmamos que

$$B(x;s) \subset B(a;r).$$

[4] Ver em (LIMA, 2007)

De fato, se $y \in B(x;s)$, então

$$d(y,x) < s$$

e, consequentemente, pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} d(y,a) &\leq d(y,x) + d(x,a) \\ &< s + d(x,a) \\ &= r. \end{aligned}$$

Como $d(y,a) < r$ segue que $y \in B(a;r)$, e portanto, $B(x;s) \subset B(a;r)$ como queríamos. ■

A figura abaixo nos traz a ideia geométrica deste Teorema e de sua demonstração.

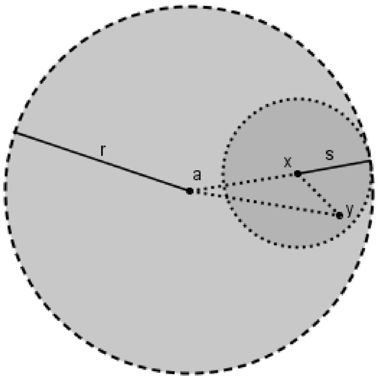

Figura 1.15.: Toda bola aberta é um conjunto aberto

Exemplo 1.18 *Os intervalos abertos (a,b) são subconjuntos abertos da reta, pois são bolas abertas de centro no seu ponto médio $\frac{a+b}{2}$ e raio $\frac{b-a}{2}$.*

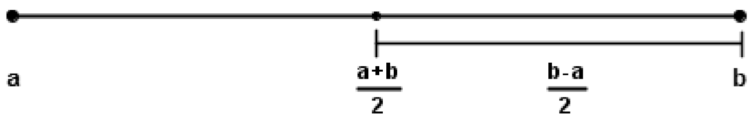

Figura 1.16.: Os intervalos abertos são subconjuntos abertos da reta

Definição 1.15 *Seja M um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ chama-se ponto isolado de M quando existe $r > 0$ tal que $B(a;r) = \{a\}$.*

Definição 1.16 *Um espaço métrico M é dito discreto quando todo ponto de M for ponto isolado.*

Exemplo 1.19 *O conjunto dos números reais inteiros $\mathbb{Z}$, com a métrica usual induzida de $\mathbb{R}$ é um espaço métrico discreto.*
De fato, se $a \in \mathbb{Z}$ e $0 < r \leq 1$ então

$$B(a;r) \cap \mathbb{Z} = \{a\}.$$

A afirmação acima é verdadeira, pois

$$B(a;r) = \{x \in \mathbb{Z}; |x-a| < r \leq 1\} = \{a\}.$$

Assim, mostramos que $a \in \mathbb{Z}$ é ponto isolado de $\mathbb{Z}$. Como a é qualquer, $\mathbb{Z}$ é discreto.

Exemplo 1.20 *O conjunto dos números naturais, com a métrica usual induzida de $\mathbb{R}$ também é um espaço métrico discreto.*

Definição 1.17 *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $b \in M$ é dito ponto de fronteira de X se para todo $r > 0$, a bola $B(b;r)$ contiver pelo menos um ponto de X e um ponto de $M - X$. O conjunto dos pontos de fronteira de X em M é denotada por ∂X.*

Exemplo 1.21 *Consideremos o subconjunto $A = (0,1)$ de $\mathbb{R}$. Temos que $\partial X = \{0,1\}$, pois dado qualquer real $r > 0$, as bolas abertas $B(0;r)$ e $B(1;r)$ contém pontos de A e de $\mathbb{R} - A$.*

Exemplo 1.22 *Seja $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y \leq 1\}$ um subconjunto do $\mathbb{R}^2$. A fronteira de X é $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y = 1\}$, pois para todo $r > 0$, as bolas centradas em um ponto qualquer de F contém pontos de X e de $\mathbb{R}^2 - X$.*

Definição 1.18 *Um subconjunto F de um espaço métrico M é dito fechado em M se, e somente se, seu complementar $M - F$ for aberto.*

Exemplo 1.23 *Consideremos $F = (-\infty,-1] \cup \{0\} \cup [1,+\infty)$ um subconjunto de $\mathbb{R}$. Podemos afirmar que F é fechado, pois seu complementar $\mathbb{R} - F = (-1,0) \cup (0,1)$ é aberto. Veja o exemplo 1.17.*

Seja (M,d) um espaço métrico qualquer. Podemos afirmar M e $\varnothing$ são abertos e fechados simultaneamente. Isto nos mostra, que ao contrário do que podem sugerir as palavras “aberto” e “fechado”, estes dois conceitos não são excludentes. Além disso, um conjunto pode não ser aberto nem fechado.

Teorema 1.1 *Seja M um espaço métrico.*

1. *O espaço métrico M e o conjunto vazio $\varnothing$ são abertos;*
2. *Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são abertos, então $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ é aberto, ou seja, a interseção finita de abertos é aberta;*

3. *Se* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ *é uma família arbitrária de abertos, então* $A = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ *é aberto, isto é, a reunião arbitrária de abertos é aberta.*

Demonstração:

1. De fato, M é aberto, pois se $a \in M$ então para $r > 0$ temos $B(a;r) \subset M$, ou seja, todo ponto de M é ponto interior de M. Para mostrar que $\varnothing$ é aberto basta notar que um subconjunto $X \subset M$ só deixa de ser aberto quando existe $x \in X$ tal que nenhuma bola de centro x está contida em X. Como não existe $x \in \varnothing$, não existe nenhuma bola de centro x que não esteja no vazio.
2. Seja
$$B = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$
Pode ocorrer
$$B = \varnothing \text{ ou } B \neq \varnothing.$$
No caso de $B = \varnothing$ basta aplicar o item 1. Por outro lado, se $B \neq \varnothing$ consideremos $a \in B$, e mostraremos que $a \in intB$, ou seja, que existe $r > 0$ talque $B(a;r) \subset B$.
De $a \in B$, temos
$$a \in A_1, a \in A_2, \ldots, a \in A_n.$$
Como $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são abertos existem números positivos $r_1, r_2, \ldots, r_n$, tais que
$$B(a;r_1) \subset A_1, B(a;r_2) \subset A_2, \ldots, B(a;r_n) \subset A_n.$$
Tomando $r = min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ temos
$$B(a;r) \subset B(a;r_1), B(a;r) \subset B(a;r_2), \ldots, B(a;r) \subset B(a;r_n).$$
Portanto,
$$B(a;r) \subset A_1, B(a;r) \subset A_2, \ldots, B(a;r) \subset A_n,$$
ou seja,
$$B(a;r) \subset A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = B,$$
mostrando que $a \in intB$.
3. Queremos mostrar que A é aberto. Seja $a \in A$. Então $a \in A_\lambda$ para algum $\lambda \in L$. Como este A_λ é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset A_\lambda$. Logo
$$B(a;r) \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda = A,$$
o que implica em $a \in intA$. Portanto, A é aberto.

$\blacksquare$

Exemplo 1.24 *A Interseção de uma família infinita de abertos pode não ser um conjunto aberto. Por exemplo,* $G_n = \left(0, 1+\frac{1}{n}\right)$ *é aberto em* $\mathbb{R}$*, ao contrário de* $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = (0,1]$.

Exemplo 1.25 *No espaço métrico* $\mathbb{R}$ *o intervalo* $I_n = \left(0, 1-\frac{1}{n}\right)$ *é aberto para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (0,1)$ *também é aberto.*

Lema 1.1 *(Leis de Morgan) Sejam* M *e* L *dois conjuntos arbitrários. Para cada* $\lambda \in L$ *seja* B_λ *um subconjunto de* M*. Então*
1. $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in L} B_\lambda = M - \bigcap_{\lambda \in L} (M - B_\lambda)$*;*
2. $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in L} B_\lambda = M - \bigcup_{\lambda \in L} (M - B_\lambda)$*.*

Teorema 1.2 *Seja* M *um espaço métrico.*
1. M *e* $\varnothing$ *são fechados;*
2. Se $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *são fechados, então* $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$ *é fechado;*
3. Se $\{F_\lambda\}_{\lambda \in L}$ *é uma família arbitrária de fechados, então* $F = \displaystyle\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ *é fechado.*

Demonstração:

1. Os complementos de M e $\varnothing$ são, respectivamente, $\varnothing$ e M que são conjuntos abertos. Logo, M e $\varnothing$ são fechados.
2. Pelas Leis de Morgan, temos:

$$F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n = M - [(M - F_1) \cap (M - F_2) \cap \ldots \cap (M - F_n)].$$

Como $F_1, F_2, \ldots, F_n$ são fechados, segue que $M - F_1, M - F_2, \ldots, M - F_n$ são abertos e pelo teorema 1.1,

$$A = (M - F_1) \cap (M - F_2) \cap \ldots \cap (M - F_n)$$

é aberto. Logo, o conjunto

$$F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$$

é fechado por ser complementar do aberto A.

3. Pelas Leis de Morgan,

$$\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = M - \bigcup_{\lambda \in L} (M - F_\lambda),$$

Sendo os F_λ fechados, os $M - F_\lambda$ são abertos e assim, pelo teorema 1.1

$$\bigcup_{\lambda \in L} (M - F_\lambda)$$

é aberto. Logo, seu complementar

$$M - \bigcup_{\lambda \in L} (M - F_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$$

é fechado.

■

Exemplo 1.26 *Seja $B_n\left[0;\frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$ um subconjunto fechado do espaço métrico $\mathbb{R}$. A interseção infinita dos fechados $B_n\left[0;\frac{1}{n}\right]$ é um conjunto fechado, pois $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\left[0;\dfrac{1}{n}\right] = \{0\}$.*

Exemplo 1.27 *Consideremos o espaço métrico $\mathbb{R}$ e o intervalo $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ fechado em $\mathbb{R}$. Temos que a união infinita dos fechados F_n não é fechada, ou seja, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0,1]$.*

1.5. Ponto de acumulação e fecho

Definição 1.19 *Seja X um subconjunto de M. Um ponto $a \in M$ é chamado ponto de acumulação de X se para todo $r > 0$ a bola $B(a;r)$ contiver algum ponto de X diferente de a. O conjunto de todos os pontos de acumulação de X é chamado derivado de X e é denotado por X'.*

Exemplo 1.28 *No espaço métrico $\mathbb{R}$ com sua métrica usual, se $X = \mathbb{Z}$, temos $X' = \varnothing$.*
De fato, dado $p \in \mathbb{R}$, ou p é inteiro ou está entre dois inteiros consecutivos, digamos n e $n+1$.
Se p for inteiro, tomemos $r = \frac{1}{2}$ e teremos

$$\left(B\left(p;\frac{1}{2}\right) - \{p\}\right) \cap \mathbb{Z} = \varnothing.$$

Por outro lado, se p não for interiro tomemos $r = \min\{p - r, (n+1) - p\}$. Daí,

$$(B(p;r) - \{p\}) \cap \mathbb{Z} = \varnothing.$$

Portanto, em ambos os casos $\mathbb{Z}' = \varnothing$.

Exemplo 1.29 *Seja $M = \mathbb{R}$ e $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$. Então*

$$X' = \{0\}.$$

De fato, dado $r > 0$ temos

$$B(0;r) = (-r,r).$$

Pela propriedade arquimediana dos números reais, podemos escolher $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$, então

$$d\left(0, \frac{1}{n}\right) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < r.$$

Daí,

$$\frac{1}{n} \in B(0;r)$$

Logo,

$$B(0;r) \cap X \neq \varnothing,$$

isto é, $0 \in X'$.

Definição 1.20 *Dado um subconjunto X de um espaço métrico M, chamaremos fecho de X ao conjunto obtido pela união de X aos seus pontos de acumulação. Denotemos o fecho de X por $\overline{X}$.*
Resumidamente, $\overline{X} = X \cup X'$.

Exemplo 1.30 *Seja $\mathbb{Z}$ um subconjunto do espaço métrico $\mathbb{R}$. O fecho de $\mathbb{Z}$ é o próprio conjunto $\mathbb{Z}$, ou seja, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.*
De fato, como $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}'$ e $\mathbb{Z}' = \varnothing$, segue que

$$\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}.$$

Exemplo 1.31 *O fecho do subconjunto $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ de $\mathbb{R}$ é o conjunto $\overline{X} = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$.*
Obviamente,

$$\overline{X} = X \cup X'.$$

Como $X' = \{0\}$, temos que

$$\overline{X} = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}.$$

1.6. Densidade

Definição 1.21 *Dizemos que um subconjunto X de um espaço métrico M é denso em M quando $\overline{X} = M$, ou seja, quando para cada bola aberta não-vazia A em M tem-se $A \cap X \neq \varnothing$.*

Exemplo 1.32 *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$.*
De fato, sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Mostremos que $(a,b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$. Se $0 \in (a,b)$, então não há mais nada a ser demonstrado. Se $0 \notin (a,b)$, então $0 \leq a$ ou $b \leq 0$. Consideremos o caso $a \geq 0$ (o caso $b \leq 0$ é análogo).
Para $a = 0$ temos, pela Propriedade arquimediana, que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n(b-a) > 1 \Rightarrow n(b-0) > 1 \Rightarrow nb > 1 \Rightarrow \frac{1}{n} < b.$$

Daí,

$$a < \frac{1}{n} < b.$$

Logo,

$$\frac{1}{n} \in (a,b) \cap \mathbb{Q}.$$

Por outro lado, se $a > 0$ pela propriedade arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n(b-a) > 1 \Rightarrow n > \frac{1}{b-a}.$$

Seja $m \in \mathbb{N}$ o menor natural tal que $m > na$. Dessa forma,

$$m-1 \leq an < m,$$

ou seja,

$$\frac{m-1}{n} \leq a < \frac{m}{n}.$$

Para concluir que $\frac{m}{n} \in (a,b) \cap \mathbb{Q}$ basta mostrar que $\frac{m}{n} < b$. Suponhamos, por absurdo, que $\frac{m}{n} \geq b$. Neste caso,

$$\frac{m-1}{n} \leq a < b \leq \frac{m}{n} \Rightarrow b-a < \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n} \Rightarrow b-a < \frac{1}{n} \Rightarrow n < \frac{1}{b-a},$$

contradizendo $n > \frac{1}{b-a}$. Logo,

$$\frac{m}{n} \in (a,b) \cap \mathbb{Q}.$$

Portanto, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

2 Espaços métricos completos

Apresentaremos neste capítulo alguns resultados preliminares, utilizados no capítulo seguinte, na demonstração do Teorema de Baire. Aqui trataremos acerca das sequências em espaços métricos e dos espaços métricos completos.

2.1. Sequências

Em matemática, desde o ensino médio passamos a lidar com sequências, por exemplo, as progressões aritméticas e geométricas. Neste estudo, a definição de sequências estará inserida no contexto dos espaços métricos.

Definição 2.1 *Seja M um conjunto não vazio. Uma sequência num espaço métrico M é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow M$ tal que $x(n) = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A imagem do natural n pela função x será chamada de n-ésimo termo da sequência.*

Representaremos uma sequência $x : \mathbb{N} \longrightarrow M$ por $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ ou x_n. Por outro lado, a notação $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ indica o conjunto $x(\mathbb{N})$ dos pontos da sequência.

Exemplo 2.1 *Se definirmos $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $x_n = (-1)^n$. Então teremos a sequência $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$, cujo conjunto de termos é $\{-1, 1\}$.*

Definição 2.2 *Sejam (x_n) uma sequência num espaço métrico M. Dizemos que (x_n) converge para $a \in M$ quando para todo número $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pudermos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo*

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Para indicarmos que x_n converge para a, escrervemos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Quando $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ para algum $a \in M$, dizemos que a sequência de pontos x_n é convergente em M e tem limite a. Se não existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ em M, dizemos que a sequência é divergente em M.

Exemplo 2.2 *Seja o espaço métrico $\mathbb{R}$ com sua métrica usual. A sequência $x_n = \frac{1}{n}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.*
De fato, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, a propriedade arquimediana dos números reais garante que existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_o\varepsilon > 1 \Rightarrow \frac{1}{n_o} < \varepsilon.$$

Então, para todo $n \geq n_o$ temos

$$d(x_n, 0) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_o} < \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Exemplo 2.3 *Consideremos o $\mathbb{R}^2$, com sua métrica usual e (z_n) uma sequência de pontos do plano, dada por:*

$$z_n = (x_n, y_n) = \left(1 - \frac{1}{n}, 2 - \frac{2}{n}\right).$$

Mostremos que (x_n) converge para o ponto $(1,2)$.
De fato, para n arbitrário, tem-se que

$$\begin{aligned}
d((x_n,y_n),(1,2)) &= \left|\left(1-\frac{1}{n}, 2-\frac{2}{n}\right) - (1,2)\right| \\
&= \sqrt{\left(1-\frac{1}{n}-1\right)^2 + \left(2-\frac{2}{n}-2\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(-\frac{1}{n}\right)^2 + \left(-\frac{2}{n}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{4}{n^2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{n}.
\end{aligned}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, pela propriedade arquimediana dos números reais existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_o\varepsilon > \sqrt{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{n_o} < \varepsilon.$$

Então, para todo $n \geq n_0$ temos

$$d((x_n,y_n),(1,2)) = \frac{\sqrt{5}}{n} \leq \frac{\sqrt{5}}{n_0} < \varepsilon.$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (1,2)$.

Teorema 2.1 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M com $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dado $\varepsilon = 1 > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{para todo } n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < 1,$$

ou seja,

$$x_n \in B(a;1), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Logo, o conjunto

$$\{x_{n_o}, x_{n_o+1}, x_{n_o+2}, \ldots\}$$

dos elementos da sequência pertencentes a $B(a;1)$ é limitado.
Como

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_o-1}\}$$

é limitado por ser finito, concluímos que

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_o-1}\} \cup \{x_{n_o}, x_{n_o+1}, x_{n_o+2}, \ldots\}$$

é limitado, ou seja, (x_n) é limitada. ■

Exemplo 2.4 *A recíproca do teorema 2.1 é falsa. A sequência $x_n = (-1)^n$ é limitada, pois $x_n \in B(0;2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mas não é convergente. De fato, suponha $x_n = (-1)^n$ convergindo para um número real a então, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existiria $n_o \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\text{para todo } n \geq n_o \text{ teríamos } d(x_n, a) = |(-1)^n - a| < \frac{1}{2},$$

isto é,

$$|a+1| < \frac{1}{2}, \text{ para } n \text{ ímpar e } |a-1| < \frac{1}{2} \text{ para } n \text{ par.}$$

Em outras palavras,

$$-\frac{1}{2} - 1 < a < \frac{1}{2} - 1 \text{ e } -\frac{1}{2} + 1 < a < \frac{1}{2} + 1.$$

daí,

$$a \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ e } a \in \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right),$$

ou seja,

$$a \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cap \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right) = \varnothing,$$

o que é um absurdo. Portanto (x_n) não converge.

2.2. Sequências de Cauchy

Nesta seção trataremos acerca de uma propriedade conhecida como “propriedade de Cauchy”. Intuitivamente, este resultado nos mostra que se uma sequência (x_n) é convergente então, para índices suficientemente grandes, seus termos aproximam-se arbitrariamente uns dos outros. Abaixo segue a definição formal.

Definição 2.3 *Sejam (x_n) uma sequência num espaço métrico M. Dizemos que (x_n) é uma sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\textit{para todo } m,n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon.$$

Teorema 2.2 *Se (x_n) é uma sequência convergente num espaço métrico M, então (x_n) é de Cauchy.*

Demonstração: Consideremos (x_n) convergindo para $a \in M$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ no espaço métrico M. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n,a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Usando a desigualdade triangular no espaço métrico M, temos que para $m,n \geq n_0$

$$\begin{array}{rcl} d(x_n,x_m) & \leq & d(x_n,a)+d(a,x_n) \\ & < & \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ & = & \varepsilon. \end{array}$$

Portanto, (x_n) é de Cauchy. ■

Podemos afirmar que a recíproca do teorema anterior é verdadeira, ou seja, que toda sequência de Cauchy é convergente? Para respodermos esta pergunta, consideremos $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais, com sua métrica usual $d(x,y) = |x-y|$. Seja (x_n) sequência de números racionais convergindo para um número irracional a. Por exemplo,

$$x_1 = 1; x_2 = 1,4; x_3 = 1,41; x_4 = 1,414; \ldots,$$

onde $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.
A sequência (x_n) é convergente em $\mathbb{R}$ e, portanto é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, pelo teorema 2.2. Os termos x_n pertencem todos a $\mathbb{Q}$, cuja métrica é induzida de $\mathbb{R}$, logo, (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$. Como $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ temos que (x_n) não é convergente neste espaço. Logo, nem toda sequência de Cauchy é convergente, o que responde a pergunta inicial.

Teorema 2.3 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço métrico M. Dado $\varepsilon = 1 > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m,n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x_m) < 1.$$

Em particular para $n \geq n_0$, temos

$$d(x_n,x_{n_o}) < 1,$$

ou seja,

$$x_n \in B(x_{n_o};1).$$

Logo, o conjunto

$$\{x_{n_o},x_{n_o+1},x_{n_o+2},\ldots\}$$

dos elementos da sequência pertencentes a $B(x_{n_o};1)$ é limitado e tem diâmetro menor ou igual a 1. Como

$$\{x_1,x_2,\ldots,x_{n_o-1}\}$$

é limitado por ser finito, concluímos que

$$\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots\} = \{x_1,x_2,\ldots,x_{n_o-1}\} \cup \{x_{n_o},x_{n_o+1},x_{n_o+2},\ldots\}$$

é limitado, ou seja, (x_n) é limitada. ∎

Teorema 2.4 *Toda sequência monótona limitada em $\mathbb{R}$ é convergente.*

A demonstração deste teorema está disponível em (OSMUNDO E ALDO, 2008).

2.3. Espaços métricos completos

Definição 2.4 *Diremos que um espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M for convergente em M.*

Exemplo 2.5 *O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ com sua métrica usual é um espaço métrico completo, ou seja, toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente.*
De fato, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Pelo teorema 2.3, toda sequência de Cauchy é limitada. Logo (x_n) é limitada. Se (x_n) for monótona, o teorema 2.4 garante que (x_n) converge.

Se porém, (x_n) não for monótona, poderemos garantir sua covergencia pelo que segue. Tomamos:

$$\begin{aligned} y_1 &= \inf\{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \\ y_2 &= \inf\{x_2, x_3, x_4, \ldots\} \\ y_3 &= \inf\{x_3, x_4, x_5, \ldots\} \\ \vdots & \quad \vdots \\ y_n &= \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} \end{aligned}$$

Observe que todos os números da construção acima estão bem definidos. Assim, por exemplo, se $\{x_2, x_3, x_4, \ldots\} \subset \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, então [1]

$$\inf\{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \leq \inf\{x_2, x_3, x_4, \ldots\} \Rightarrow y_1 \leq y_2.$$

Daí, temos que a sequência (y_n) está em ordem crescente, ou seja,

$$y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \ldots.$$

Logo, (y_n) é monótona. Como (x_n) é limitada, digamos

$$a \leq x_n \leq b$$

para todo n e, por definição, (y_n) depende de (x_n), então

$$a \leq y_n \leq b$$

para todo n. Logo, o teorema 2.4 garante a convergência de (y_n). Seja então

$$\lim_{n \to \infty} y_n = p.$$

Mostremos que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = p$.
Pelo fato de (y_n) ser convergente, dado $\varepsilon > 0$ existe um índice n_1 tal que

$$n \geq n_1 \Rightarrow |y_n - p| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por outro lado, sendo (x_n) de Cauchy existe n_2 tal que

$$m, n \geq n_2 \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como

$$y_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$$

[1] Se $A \subset B \subset \mathbb{R}$, $\inf A$ e $\inf B$ existem, então $\inf B \leq \inf A$.

segue que y_n é a maior cota inferior do conjunto $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ o que implica em $y_n + \frac{\varepsilon}{3}$ não ser cota inferior deste conjunto. Por conseguinte, existe um índice $i_n \geq n$ de modo que

$$y_n \leq x_{i_n} < y_n + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Somando $-y_n$ em todos os membros da desigualdade acima, teremos

$$0 \leq x_{i_n} - y_n < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x_{i_n} - y_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e usando o seguinte artifício

$$x_n - p = (x_n - x_{i_n}) + (x_{i_n} - y_n) + (y_n - p)$$

temos que

$$\begin{aligned} |x_n - p| &= |(x_n - x_{i_n}) + (x_{i_n} - y_n) + (y_n - p)| \\ &\leq |x_n - x_{i_n}| + |x_{i_n} - y_n| + |y_n - p| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p.$$

Isto é, (x_n) é convergente e, $\mathbb{R}$ é completo.

3 O Teorema de Baire

Neste capítulo será apresentado o Teorema de Baire, um dos mais importantes resultados dentro da teoria dos espaços métricos. Na sua demosntração faremos uso da teoria exposta nos capítulos anteriores.

3.1. Uma breve biografia de René-Louis Baire

René-Louis Baire, nasceu em 21 de janeiro de 1874 na cidade de Paris e faleceu no dia 5 de julho de 1932 em Chambery na França. Filho de um alfaiate, era um dos três irmãos desta família pobre que teve de lutar sob difíceis circunstâncias financeiras. Mesmo nestas condições, em 1886, quando tinha 12 anos, Baire ganhou uma bolsa no Liceu Lakanal que lhe permitia ter uma boa educação. Nesta instituição tornou-se um aluno excepcional, vindo a receber duas menções honrosas no Concours Général, competição entre os alunos de todos os liceus da França.

Ao final de 1890, Baire concluiu as aulas avançadas no Liceu Lakanal e entrou na seção especial de matemática do Lycée Henri IV. Enquanto estava lá, preparou-se para o exame da École Normale Supérieure e da École Polytechnique, tendo passado nos dois em 1892. Porém, decidiu estudar na École Normale Supérieure, onde atraiu a atenção por sua maturidade intelectual, durante os três anos da graduação.

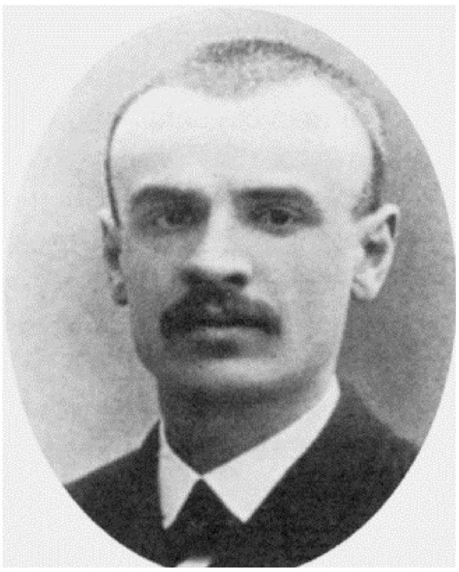

Figura 3.1.: René-Louis Baire

Depois de receber seu diploma, Baire seguiu para sua agregação[1] em 1895. Ele fez melhor que todos os outros alunos na parte escrita do teste, mas ficou apenas em terceiro lugar geral, devido a um erro em sua apresentação oral sobre a continuidade da função exponencial. No decorrer da exposição, Baire perce-

[1] Espécie de exame oficial de alto padrão acadêmico para cargos na educação pública.

beu que sua demonstração de continuidade, a qual havia aprendido no Lycée Henri IV, foi puramente um artifício, uma vez que não se referia o suficiente para a definição da função. Essa decepção fez com que o jovem professor revisasse completamente a base de seu curso de análise e direcionasse suas pesquisas para a continuidade e a ideia geral de funções.

Mesmo tendo acontecido este fato inesperado, Baire foi convidado a ser professor de Liceu em Bar-le-Duc e, posteriormente, foi concedida uma bolsa que lhe permitiu estudar na Itália, onde foi fortalecido por seu orientador Vito Volterra, com quem logo se viu em acordo e que reconheceu a originalidade e a força da sua mente. Em 24 de março de 1899, Baire defendeu sua tese de doutorado sobre as funções descontínuas, diante de uma banca examinadora composta por Appell, Darboux e Picard.

Em 1901 Baire foi nomeado para a Universidade de Montpellier, como "Maître de conférences". Em 1904 ele foi premiado com um Peccot Foundation Fellowship para passar um semestre numa universidade e desenvolver suas habilidades como professor, Baire escolheu o Collège de France, onde lecionou a cadeira de Análise. Ele foi nomeado para um cargo universitário, em 1905, quando ingressou na Faculdade de Ciências de Dijon. No ano de 1907 foi promovido a professor de Análise em Dijon, onde continuou suas investigações em Análise. Baire aposentou-se em 1925 e passou seus últimos anos de vida em vários hotéis que ele poderia pagar com a sua pequena pensão.

Apesar de ser incapaz de trabalhar por longos períodos, Baire escreveu alguns trabalhos importantes. Entre eles estão: Théorie des nombres irrationels, des limites et de la continuité (Teoria dos números irracionais, limites e continuidade) publicado em 1905 e os dois volumes de Leçons sur les teorias generales de l'analyse (Lições sobre a geral teoria da análise), publicado em 1907-1908. Baire deu um passo decisivo no abandono da ideia intuitiva do funcionamento e da continuidade e viu claramente que a teoria dos conjuntos infinitos, foi fundamental para uma verdadeira análise rigorosa.

3.2. Teorema de Baire

O teorema seguinte é a generalização do "princípio dos intervalos encaixados", um relevante fato sobre números reais. Este resultado é chamado Teorema de Cantor.

Teorema 3.1 *Sejam M um espaço métrico e $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ uma sequência decrescente de subconjuntos fechados não-vazios de M com $\lim\limits_{n\to\infty} diam\, F_n = 0$. Então*

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

contém exatamente um ponto.

Demonstração: Como os conjuntos F_1, F_2, F_3, ..., F_n, ... são não-vazios, para cada $n \in \mathbb{N}$ escolhemos arbitrariamente um ponto $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$, $x_3 \in F_3$, ..., $x_n \in F_n$, ... A sequência $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ assim obtida é de Cauchy.
De fato, dado $\varepsilon > 0$, como

$$\lim_{n\to\infty} \text{diam } F_n = 0,$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\text{ diam } F_n - 0| < \varepsilon.$$

Assim,

$$n \geq n_0 \Rightarrow \text{ diam } F_n < \varepsilon.$$

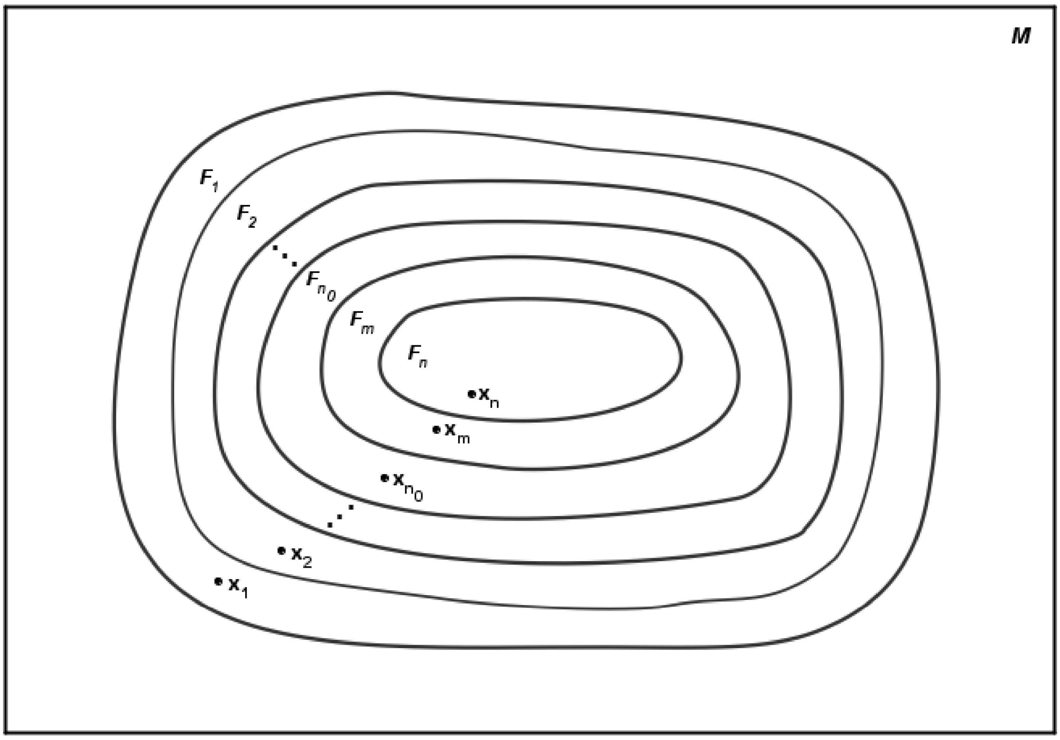

Figura 3.2.: Generalização do princípio dos intervalos encaixados

Sabendo que $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$, temos

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow F_m \subset F_{n_0} \text{ e } F_n \subset F_{n_0}.$$

Como $x_m \in F_m$ e $x_n \in F_n$, segue que

$$x_m, x_n \in F_{n_0}.$$

Logo,

$$m,n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x_m) < \text{ diam } F_{n_0} < \varepsilon.$$

Portanto, a sequência constuída (x_n) é de Cauchy e, como M é completo, (x_n) converge. Seja

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Vamos provar que $a \in F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.
De fato, dado um número natural $n = 1$, temos que

$$x_k \in F_1 \text{ para todo } k \geq 1.$$

Assim,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \in F_1.$$

Generalizando, para n qualquer

$$x_k \in F_n \text{ para todo } k \geq n.$$

Logo,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \in F_n,$$

ou seja,

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = F.$$

Quanto à unicidade observa-se que se existisse um ponto $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ com $a \neq b$, então

$$\text{diam } F_n \geq d(a,b) > 0$$

para todo n, o que contraria a hipótese

$$\lim_{n\to\infty} \text{ diam } F_n = 0.$$

Portanto, não existe $b \neq a$ em F, ou seja, $F = \{a\}$. ∎

Exemplo 3.1 *Consideremos as bolas fechadas* $B_n = B\left[0; \frac{1}{n}\right]$ *no espaço métrico completo* $\mathbb{R}$. *O conjunto* $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ *contém exatamente um ponto.*
De fato, seja

$$B_1 = B[0;1], B_2 = B\left[0; \frac{1}{2}\right], B_3 = B\left[0; \frac{1}{3}\right], \dots, B_n = B\left[0; \frac{1}{n}\right], \dots.$$

Temos que:
1. $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots, \supset B_n, \dots$;
2. B_n *é fechada e não vazia para todo* $n \in \mathbb{N}$;
3. $\lim\limits_{n \to \infty} diam\ B_n = 0$.

Logo, o teorema anterior garante

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

contém exatamente um ponto. Obviamente $0 \in B_n$ *para todo natural n o que implica em*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{0\}.$$

Teorema 3.2 ***(Teorema de Baire)*** *Se* $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ *é uma sequência de subconjuntos abertos e densos de um espaço métrico completo M, então*

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

é denso em M.

Demonstração: Queremos provar que a interseção enumerável de conjuntos abertos e densos de M é densa em M. Seja $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ uma sequência de conjuntos abertos e densos no espaço métrico completo M e

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Dada uma bola aberta qualquer $B(a;r)$, não vazia, em M mostremos que $B(a;r) \cap A \neq \varnothing$, ou seja, que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em M. Como, por hipótese, A_1 é denso em M e $B(a;r) \subset M$, temos que

$$B(a;r) \cap A_1 \neq \varnothing.$$

Considere $a_1 \in B(a;r) \cap A_1$. Como $B(a;r) \cap A_1$ é um conjunto aberto e todo conjunto aberto contém uma bola fechada, existe $r_1 > 0$ tal que

$$B_1 = B[a_1; r_1] \subset A_1 \cap B(a;r).$$

Sem perda de generalidade podemos supor $r_1 \leq 1$. Pelo fato de A_2 ser denso em M temos

$$B(a_1;r_1) \cap A_2 \neq \varnothing.$$

Seja $a_2 \in B(a_1;r_1) \cap A_2$. Como $B(a_1;r_1) \cap A_2$ é um conjunto aberto e todo conjunto aberto contém uma bola fechada, existe $r_2 > 0$ tal que

$$B_2 = B[a_2;r_2] \subset A_2 \cap B(a_1;r_1).$$

Podemos também supor $r_2 \leq \frac{1}{2}$. Notemos que:

$$B_1 \supset B_2 (\text{ ou } B_2 \subset B_1),$$

$$\text{diam } B_1 \leq 2 \cdot 1 = 2$$

e

$$\text{diam } B_2 \leq 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Por construção, obtemos uma sequência de bolas fechadas B_n, tais que:

1. $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$;
2. $B_n \neq \varnothing$ para todo n;
3. $\lim\limits_{n \to \infty} \text{diam } B_n = 0$.

Então, pelo teorema 3.1, temos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{p\}.$$

Mostremos que $p \in B(a;r) \cap A$, ou seja, que $p \in A$ e $p \in B(a;r)$. Como

$$B_1 \subset A_1, B_2 \subset A_2, B_3 \subset A_3, \ldots, B_n \subset A_n, \ldots$$

segue que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

daí,

$$\{p\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

Por outro lado,

$$B_1 \subset B(a;r) \text{ e } B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots \supset B_n,$$

logo,

$$B_n \subset B(a;r),$$

para todo n e assim

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset B(a;r),$$

isto é,

$$\{p\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset B(a;r).$$

Portanto,

$$p \in B(a;r) \cap A$$

e A é denso em M, o que termina a prova. ■

Definição 3.1 *Um subconjunto X de um espaço métrico M é magro em M quando*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \ e \ \ int\,\overline{X_n} = \varnothing$$

para todo n.

Para que o conjunto X seja magro em M é necessário e suficiente que $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n, \ldots$ são fechados com interior vazio em M.

Essa nomenclatura tem por objetivo destacar uma classe de conjuntos que sejam, num certo sentido, insignificantes dentro do espaço métrico que os contém. A noção de conjunto magro desempenha, nos espaços métricos, papel semelhante ao da noção de "conjunto de medida nula" em análise.

Na terminologia antiga, um conjunto magro era chamado de *conjunto de primeira categoria*. Eram chamados, de *conjuntos de segunda categoria*, aqueles que não eram magros.

Exemplo 3.2 *O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é magro em $\mathbb{R}$.*
De fato, basta lembrar que o conjunto dos números racionais é enumerável, ou seja

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}.$$

Daí, $\mathbb{Q}$ é uma reunião enumerável e, int $\overline{\{x\}} = \varnothing$, para qualquer x.

Apresentaremos a seguir duas maneiras equivalentes de enunciar o Teorema de Baire. Para maiores informações consultar (KÜHLKAMP, 2002), (LIMA, 2007).

Teorema 3.3 ***(Teorema de Baire)*** *Todo subconjunto magro de um espaço métrico completo tem interior vazio.*

Teorema 3.4 ***(Teorema de Baire)*** *Seja M um espaço métrico completo e $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n, \ldots$ uma sequência de subconjuntos fechados de M tais que*

$$int F_n = \varnothing$$

para todo n. Então

$$int \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing.$$

Teorema 3.5 *Se um espaço métrico M é completo e $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M, então existe n_0 tal que int $F_{n_0} \neq \varnothing$.*

Demonstração: Se fosse int $F_n = \varnothing$ para todo n, então $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ seria magro em M e assim pelo Teorema de Baire 3.3 teríamos int $M = \varnothing$ em M. Como todo ponto de M pertence ao interior de M e int $M = \varnothing$ em M, segue que $M = \varnothing$, o que é um absurdo. Portanto o interior de M é vazio, isto é, int $F_n \neq \varnothing$. ■

Conclusão

A teoria dos espaços métricos é um importante recurso matemático, a partir do qual pode-se generalizar a ideia de distância. Dessa forma, torna-se possível "medir" distâncias entre elementos de conjuntos que possuem características diversas (funções, matrizes, etc), cuja noção de distância não é visilvemente natural.

Durante a revisão bibliográfica foi possível estudar a generalização de ideias matemáticas que foram trabalhadas nos cursos de Cálculo e Análise Real, a exemplo da definição de conjunto limitado, conjunto aberto, conjunto fechado e densidade. Além disso, pudemos perceber que a ideia de distância está intimamente ligada ao cálculo de limite, derivadas e integrais.

Por fim, resolvemos abordar como tema principal de nosso trabalho o Teorema de Baire, pois ele está relacionado a topologia dos conjuntos, uma vez que refere-se a abertos, fechados, fechos e interiores. Este resultado ainda é válido se a métrica do espaço estudado for substituída por uma métrica equivalente.

Referências

KÜHLKAMP, Nilo **Introdução à Topologia Geral,** 1^o ed. Santa Catarina: Ed. UFSC, 2002.

LIMA, Elon L. **Espaços Métricos,** 4^o ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides/IMPA, 2007.

LIMA, Elon L. **Elementos de Topologia Geral,** 2^o ed. Rio de Janeiro: Textos Universitários/SBM, 2009.

LIMA, Elon L. **Curso de Análise,** v.1. 11^o ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides/IMPA, 2004.

LIMA, O. A. e MACIEL, A.B. **Introdução à Análise Real,** 1^o ed. Campina Grande: Eduepb, 2008.

NUNES, Wagner V. L. **Notas do Curso de SMA-343 - Espaços Métricos**. Disponível em http://www.ebah.com.br/content/ABAAABgGUAD/espacos-metricos. Acessado em: 15 de agosto de 2012.

GENTIL, L. S. **Espaços Métricos (comentado)**. Disponível em http://w3.dmat.ufrr.br/˜gentil/images/stories/livros/livronv.pdf. Acessado em: 20 de setembro de 2012.

O'CONNOR, J. J; ROBERTSON, E. F. **Índices de Biografias**. Disponível em: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Baire.html. Acesso em: 04 de setembro de 2012.

A Apêndice

Proposição A.1 *(Propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$): Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ existe $n \in N$ tal que $na > b$.*

Demonstração: Consideremos o subconjunto S de $\mathbb{R}$ dado por

$$S = \{ma; m \in \mathbb{N}\}.$$

Negar a existência de $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$ significa dizer que $ma \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, S seria limitado superiormente. Sabendo que todo cunjunto limitado superiormente possui supremo, existe $M = \sup S$. Como $a > 0$, pela proposição 1.3 item 2 existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M - a < m_0 a$ donde $M < (m_0 + 1)a$. Mas isso é uma contradição pois $m_0 + 1 \in \mathbb{N}$ e, portanto, $(m_0 + 1)a \in S$, por definição de S. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$. ■