



Universidade
Estadual da
Paraíba

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS - CCT
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

ÂNGELO FERNANDES DA SILVA FRANÇA

SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD NO ESPAÇO-TEMPO
NÃO-COMUTATIVO

CAMPINA GRANDE - PB
2016

ÂNGELO FERNANDES DA SILVA FRANÇA

SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD NO ESPAÇO TEMPO
NÃO-COMUTATIVO

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação
em Licenciatura Plena em Física da
Universidade Estadual da Paraíba, em
cumprimento à exigência para obtenção
do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo
Spinelly da Silva

Área de Concentração: Física

CAMPINA GRANDE - PB
2016

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

F814s França, Ângelo Fernandes da Silva.
Solução de Schwarzschild no espaço-tempo não-comutativo
[manuscrito] / Ângelo Fernandes da Silva França. - 2016.
30 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e
Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva,
Departamento de Física".

1. Buracos negros. 2. Solução de Schwarzschild. 3. Métrica
não-comutativa. 4. Equações Geodésicas. I. Título.

21. ed. CDD 523.887 5

ÂNGELO FERNANDES DA SILVA FRANÇA

SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD NO ESPAÇO-TEMPO
NÃO-COMUTATIVO

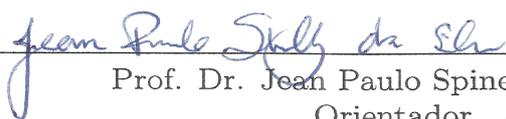
Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação
em Licenciatura Plena em Física da
Universidade Estadual da Paraíba, em
cumprimento à exigência para obtenção
do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo
Spinelly da Silva

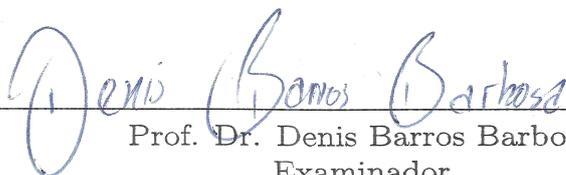
Área de Concentração: Física

Aprovado em 24 de Outubro de 2016

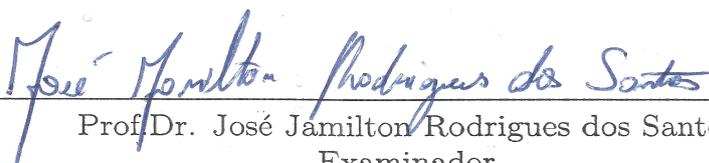
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Orientador



Prof. Dr. Denis Barros Barbosa
Examinador



Prof. Dr. José Jamilton Rodrigues dos Santos
Examinador

Aos Meus Pais.

[...]De curvas é feito todo o universo,
O universo curvo de Einstein.

Oscar Niemeyer

AGRADECIMENTOS

À Deus, pois sem Ele eu nada seria, pela Sua bondade e pelas imerecidas bênçãos derramadas sobre minha vida .

À minha família, meus pais José Carlos e Aurilene e meus irmãos José Carlos Filho e Adrielly, por todo o apoio e incentivo durante todos estes anos. Amo vocês.

Ao meu orientador, Jean Spinelly, pelo exemplo de profissional e por toda dedicação ao longo desses últimos anos. Valeu mesmo “Kaxxa”.

Aos meus avós, porque sempre me ajudaram em meus estudos e aos meus familiares, de um modo geral, por todo incentivo e por sempre torcerem por mim. Muito obrigado!

Aos meus amigos Almir Dantas, Ronaldo Felix e tantos outros, pelas tardes de estudos e pelos momentos divertidos que vivemos juntos. Em especial à Angela Rayanne por todo o apoio e incentivo durante esta jornada. Meu sincero Obrigado!

Enfim à todos que direta ou indiretamente contribuíram para que eu chegasse até aqui. Muito Obrigado!

SUMÁRIO

1	Introdução	8
2	Fundamentação Teórica	9
2.1	Solução de Schwarzschild	9
2.2	Buracos Negros: Histórico, Formação e Classificação	12
2.3	Não-Comutatividade	15
3	Solução de Schwarzschild Não-Comutativa	16
3.1	Métrica Não-comutativa	17
3.2	Equações Geodésicas	23
4	Conclusões	26
5	Referências	28
6	Apêndice A	30

SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD NO ESPAÇO-TEMPO NÃO-COMUTATIVO

Ângelo Fernandes da Silva França¹

RESUMO

Buracos Negros são regiões no universo em que a gravidade é tão forte que uma vez “dentro” dele, nem mesmo a luz conseguiria escapar para o infinito. De forma geral os buracos negros são formados pelo colapso de estrelas com massa de ao menos dezenas de vezes a massa do nosso Sol. Matematicamente os buracos negros são descritos pela métrica de Schwarzschild, métrica esta que é solução das equações de campo da Teoria da Relatividade Geral de Einstein; tal solução representa a deformação do espaço-tempo devido uma distribuição de massa com simetria esférica. Em regiões de ordem da escala de Planck a ideia de ponto é perdida, sendo impossível assim determinar o local exato de uma partícula. Levando em conta a perda da localidade, implica um Princípio da Incerteza de Heisenberg para as coordenadas, o que acarreta a necessidade de uma correção da solução usual para uma solução que comporte agora não-comutatividade através do termo Θ ; A solução de Schwarzschild Não-Comutativa.

PALAVRAS-CHAVE: Buracos Negros, Solução de Schwarzschild, Não-Comutatividade.

¹Graduando em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

1 Introdução

As Teorias da Relatividade Restrita (TRR) e Geral (TRG) publicadas por Albert Einstein em 1905 e 1915, respectivamente, tratam das relações entre observadores inerciais no caso da primeira e não-inerciais na segunda. Além disso, na TRG, a gravidade é compreendida como um efeito da curvatura o do espaço-tempo devido à presença de matéria.

A TRG é representada pelas Equações de Campo de Einstein que relacionam a curvatura do espaço-tempo através dos Tensor e Escalar de curvatura de Ricci ($R_{\mu\nu}$ e R), além do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, com a distribuição de matéria e energia representada pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$. A primeira solução exata dessas equações, a qual representa a curvatura do espaço-tempo devido uma distribuição massiva com simetria esférica, sem carga e sem rotação, foi obtida por Karl Schwarzschild em 1915. Além de ser uma das soluções mais simples, a solução de Schwarzschild aponta para uma previsão interessante: os buracos negros (CARMELI, 1982; FERRARO, 2007).

Proposta em 1947 por Snyder, a não-comutatividade buscava regularizar as divergências na teoria quântica de campos. Para isso, era necessário substituir as interações pontuais por interações em regiões do espaço-tempo. Tal substituição acarreta um Princípio de Incerteza para as coordenadas, ou seja, a partir de uma escala, chamada de célula de Plank, as coordenadas passariam a não-comutar o que implicaria a perda da noção de ponto. A teoria Não-Comutativa é utilizada no estudo do efeito Hall Quântico como também na Teoria de Cordas (TEDESCO, 2010).

Este trabalho de revisão bibliográfica tem como objetivo estudar as modificações na Solução de Schwarzschild quando imersa em um espaço-tempo não-comutativo, ou seja, encontrar a métrica devido uma distribuição esférica de massa sem rotação em um espaço-tempo não-comutativo chamada de Solução de Schwarzschild Não-Comutativa.

A organização deste trabalho segue da seguinte forma: Inicialmente será abordado os aspectos gerais da Teoria da Relatividade Geral, bem como os entes matemáticos

englobados pelas equações de Einstein. Após isto será abordado de forma conceitual um pouco da história, formação e classificação dos buracos negros, além disso será apresentada a Solução de Schwarzschild usual. Em seguida estudaremos alguns aspectos importantes da não-comutatividade. Por fim, buscaremos obter a Solução de Schwarzschild Não-Comutativa e analisaremos o movimento geodésico. Neste trabalho usaremos um sistema de unidades naturais onde $G = c = \hbar = 1$.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Solução de Schwarzschild

A TRG baseia-se em dois princípios: o princípio da covariância e o princípio da equivalência. O primeiro estabelece que as leis físicas devem manter as mesmas formas independentemente do sistema de referência; enquanto que o segundo afirma que, localmente, o movimento de uma partícula em um campo gravitacional é equivalente ao movimento de uma partícula em um referencial não-inercial, isto é, em uma pequena região do espaço, o campo gravitacional é equivalente a um sistema de referência não-inercial (LANDAU e LIFCHITZ, 1974, CARMELI, 1982)

Uma consequência imediata do princípio da equivalência é que, na TRG, o campo gravitacional é visto como uma curvatura do espaço-tempo. Para entendermos como isso acontece, vamos analisar a forma do intervalo entre dois eventos em um referencial não inercial.

Em um sistema de referência inercial, o intervalo ds^2 , em coordenadas Cartesianas, é dado por:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2-1)$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é a métrica de Minkowski e $x^\mu = (t, x, y, z)$. Quando passamos de um sistema de referência inercial para outro, através das transformações de Lorentz, a forma de ds^2 não se altera. Contudo, se a transição for realizada para um

referencial não-inercial, o intervalo não será mais uma soma dos quadrados das diferenças das quatro coordenadas, ele assumirá a forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (2-2)$$

onde $g_{\mu\nu}$, denominado tensor métrico, representa um conjunto de 10 funções² das coordenadas espaciais e da temporal.

O sistema de coordenadas descrito por (??) é chamado curvilíneo e o tensor métrico contém todas as propriedades geométricas do espaço-tempo. Com isso, podemos afirmar que os campos, que são equivalentes a referenciais não-inerciais, são determinados pela tensor métrico de um espaço-tempo curvo. A TRG estende este aspecto para campos gravitacionais reais, assumindo que os efeitos gravitacionais também são descritos por um tensor métrico. Neste caso, a gravitação é entendida como um desvio na métrica do espaço-tempo plano (métrica de Minkowski). Porém, vale salientar que esta métrica não é fixada arbitrariamente, como acontece na relatividade restrita, mas depende da distribuição de matéria local (CARMELI, 1982).

Segundo a teoria da gravitação de Newton, o campo gravitacional é descrito pelo campo escalar real $\Phi(\vec{r})$, que é função das coordenadas. Tal função deve satisfazer a seguinte equação diferencial parcial de segunda ordem, conhecida como equação de Poisson (MARION e THORNTON, 2003):

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) , \quad (2-3)$$

onde ρ é densidade de massa da matéria responsável pelo campo gravitacional. Por sua vez, conforme argumentamos, a relatividade geral estabelece que o campo é descrito por 10 potenciais, que são as 10 componentes do tensor métrico. Assim, na TRG, devemos ter 10 equações diferenciais envolvendo o tensor $g_{\mu\nu}$ que, no limite de campo fraco, devem recair na equação de Poisson.

Como a TRG assume que uma quantidade de massa/energia deforma a geometria do espaço-tempo, as equações de campo devem ter, de um lado, a distribuição de

²Em um espaço quadridimensional e simétrico

massa/energia, fonte do campo gravitacional, e, do outro, derivadas de segunda ordem do tensor métrico associado à geometria que descreve o espaço-tempo deformado.

Na relatividade, a densidade de energia relativística, que substitui a densidade de massa nas leis de conservação, é apenas um dos componentes do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$. Com base nisso, para construir as equações que governam o tensor métrico, Einstein assumiu que esse tensor faz o papel de fonte em um dos lados da equações. Além disso, admitiu que o outro lado dessas equações deve ser construído a partir do tensor de Ricci, uma vez que este é um tensor do mesmo tipo que $T_{\mu\nu}$ e que contém derivadas de segunda ordem do tensor métrico (FERRARO, 2007).

Depois de anos de tentativas, no final de 1915, Einstein propôs, após as correções de David Hilbert, que as equações de campo³ são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} , \quad (2-4)$$

em que $R_{\mu\nu}$ e R são, respectivamente, os tensor e escalar de Ricci, definidos por

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} . \quad (2-5)$$

e

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} , \quad (2-6)$$

sendo

$$\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right) \quad (2-7)$$

os chamados símbolos de Christoffel.

Apenas um ano após Einstein publicar a versão final da TRG, o alemão Karl Schwarzschild em meio ao front de guerra, obteve uma das soluções exatas das equações de Einstein. Mesmo sendo a solução mais simples, a Solução de Schwarzschild é uma das mais importantes e descreve a deformação do espaço-tempo fora de uma distribuição de

³Esse conjunto de equações é conhecido com equações de Einstein

matéria de simetria esférica. A métrica obtida por Schwarzschild é dada por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2-8)$$

onde $r_s = 2M$ é chamado raio de Schwarzschild (CARMELI, 1982; FERRARO, 2007).

Fazendo uma análise da métrica de Schwarzschild, podemos observar um fato bastante interessante. Quando $r = r_s$, temos que o coeficiente da componente dr tende ao infinito. Isso significa que a deformação do espaço-tempo, a partir da fronteira $r = r_s$ (*horizonte de eventos*), é tão grande, que nem mesmo a luz conseguiria escapar para o infinito. Desta forma, seria impossível se observar o que acontece além dessa fronteira. Por essa razão, a métrica ficou conhecida como a solução para *Buraco Negro*. Contudo, é importante destacar que tal comportamento só ocorreria se o raio da distribuição fosse menor que o de Schwarzschild.

2.2 Buracos Negros: Histórico, Formação e Classificação

A ideia de “buraco negro” surgiu antes mesmo do desenvolvimento da própria TRG. No século XVII, o astrônomo dinamarquês Ole Christensen Romer demonstrou que a luz teria uma velocidade finita, o que possibilitou alguns fenômenos interessantes. Um destes fenômenos pressupõe que, se um corpo celeste no Universo fosse denso o suficiente para produzir uma velocidade de escape (velocidade mínima necessária para “escapar” do campo gravitacional de um corpo) maior que a velocidade da luz, qualquer luz gerada por esse corpo voltaria para ele devido seu campo gravitacional (DAMÁSIO e PACHECO, 2009).

Contudo, foi com a TRR, e a TRG, publicadas por Einstein, e a Mecânica Quântica de Born (1925) que a visão de mundo da humanidade foi mudada completamente. No entanto, foi com a solução das equações de Einstein, obtida pelo alemão Karl Schwarzschild, que os buracos negros foram matematicamente previstos pela primeira vez (HAWKING, 1977).

A nomenclatura Buraco Negro só seria finalmente adotada em 1969 pelo norte-

americano John Wheeler. O termo “buraco” refere-se à matéria e a radiação que podem “cair” dentro dele, já “negro” é devido nem mesmo a luz, que segundo a TRR seria o valor de velocidade mais alto que se pode alcançar, “sair” de dentro dele. Com os avanços teóricos e tecnológicos, os buracos negros vem sendo amplamente estudados.

Para compreendermos a formação de um buraco negro, precisamos primeiramente entender o funcionamento de uma estrela. Durante maior a parte de sua vida, uma estrela gera calor no seu centro pela conversão de Hidrogênio em Hélio através do processo de fusão nuclear. A energia liberada por essa conversão irá criar uma pressão que sustentará a estrela de um colapso devido seu próprio campo gravitacional. (HAWKING, 1977)

Agora, imaginemos uma estrela 10 de vezes a massa do nosso Sol, durante sua vida, cerca de 1 bilhão de anos, a energia liberada por ela será a responsável por manter o equilíbrio da estrela. Neste estágio, a velocidade de escape dessa estrela será de aproximadamente 1.000 Quilômetros por segundo.

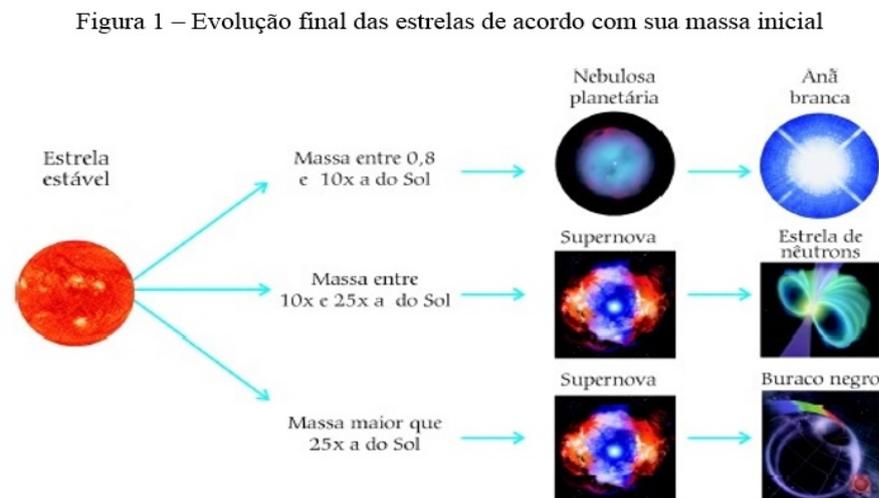
À medida que a estrela vai “envelhecendo” seu combustível irá se esgotando, e o equilíbrio entre a pressão devido à energia liberada e a gravidade da estrela é quebrado, assim essa estrela começará a entrar em colapso. Com esse colapso, a estrela diminuirá de tamanho, o que provocaria um aumento da sua velocidade de escape até o momento que esta ultrapassaria os 300.000 quilômetros por segundo (velocidade da luz no vácuo), isto significa que nem mesmo a luz produzida pela própria estrela conseguiria fugir de seu campo gravitacional. Se nem mesmo a luz poderia escapar, e como nada pode viajar mais rápido que a luz (de acordo com a TRR), nada poderia escapar deste campo.

Entretanto nem todas as estrelas se transformam em buracos negros, ao entrar em colapso, dependendo de sua massa inicial, as estrelas podem dar origem à anãs brancas, estrelas de nêutrons ou à buracos negros.

Se massa inicial de uma estrela for menor que 1,4 vezes a massa solar, a pressão devido à degenerescência dos elétrons pode interromper o colapso formando assim as anãs brancas que podem ao longo do tempo ir esfriando e deixando de irradiar energia

por completo, passando a ser chamada de anã negra. Quando uma estrela tem massa superior a 1,4 vezes a massa solar a pressão interna é insuficiente para balancear com a gravidade, então a estrela começa a se colapsar e os elétrons são espremidos com os prótons se tornando em nêutrons, após isso os núcleos se fundem formando um núcleo gigante chamado estrela de nêutrons. Se a estrela de nêutrons tiver uma massa inferior a uma massa crítica, a pressão e as forças das interações nucleares são suficientes para parar o colapso. Entretanto, quando uma estrela tem uma massa maior que a massa crítica, ela continuará à colapsar até um ponto, o resultado deste colapso é chamado buraco negro (ISLAM, 2001)

Esses buracos negros formados a partir do colapso de estrelas são chamados buracos negros estelares ou buracos negros gravitacionais. Entretanto, ainda existem outros tipos de buracos negros: os supermassivos, formados a partir do colapso de grandes quantidades de matéria ou pela fusão de galáxias e os buracos negros primordiais, em geral muito pequenos que foram formados instantes após o big bang. A figura 1 mostra a evolução final das estrelas de acordo com sua massa inicial.



Fonte: Física na Escola. Buracos Nem tão Negros assim. 2009

Figura 1: Evolução final das Estelas de acordo com sua massa inicial

A classificação desses objetos tão misteriosos é dada de duas formas: através da

sua massa, como mostra a Tabela 1, ou através das suas propriedades (massa, rotação e carga elétrica), tabela 2.

Tabela 1 – Classificação de Buracos Negros de acordo com sua massa inicial

CLASSES	FAIXA DE MASSA
Mini buraco negro	0 à $0.1M_{\odot}$
Buraco negro de massa estelar	0.1 à $300M_{\odot}$
Buraco negro de massa intermediária	300 à 10^5M_{\odot}
Buraco negro supermassivo	10^5 à $10^{10}M_{\odot}$

Fonte: Radiação Hawking de um Buraco Negro BTZ Não-Comutativo. Dissertação. 2016

Tabela 2 – Classificação de Buracos Negros de acordo com suas propriedades

PROPRIEDADES	MÉTRICA
Somente massa	Schwarzschild
Massa e momento angular	Kerr
Massa e carga elétrica	Reissner-Nordstrom
Massa, momento angular e carga elétrica	Kerr-Newman

Fonte: Radiação Hawking de um Buraco Negro BTZ Não-Comutativo. Dissertação. 2016

2.3 Não-Comutatividade

A não-comutatividade entre coordenadas foi sugerida por Heisenberg, com a finalidade de eliminar alguns problemas de divergências ultravioleta que aparecem na teoria quântica de campos. No entanto, essa ideia só foi formalizada por Snyder, em um artigo publicado em 1947. Acontece que, devido ao grande sucesso da teoria de renormalização⁴, o uso da não-comutatividade foi deixado de lado, por alguns anos.

⁴Técnicas em teoria de campos para tornar funções de correlações finitas

Somente na década de 80, com o desenvolvimento da geometria não-comutativa elaborada por Connes, ela voltou a ser estudada (TEDESCO, 2010; BEMFICA, 2009). Outro fato que também impulsionou o estudo da teoria não-comutativa, foi o interesse em formular uma teoria quântica da gravitação, pois em regiões da escala de Planck ($l_p = 10^{-33}\text{cm}$), onde a efeitos quânticos dessa teoria se tornam relevantes, a comutatividade perde o sentido.

Formalmente, para incluirmos a não-comutatividade, devemos promover as coordenadas x^μ e x^ν ao nível de operadores hermitianos \hat{x}^μ e \hat{x}^ν , de tal forma que

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}, \quad (2-9)$$

onde $\Theta^{\mu\nu}$ é uma matriz real anti-simétrica constante com dimensão de área e $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, D-1$, onde D é a dimensão do espaço-tempo (FRESNEDA, 2008).

A não-comutatividade das coordenadas implica diretamente em uma relação de incerteza dada por:

$$\Delta x^{\mu 2} \Delta x^{\nu 2} \geq \left(\frac{1}{2i} [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] \right)^2 \quad (2-10)$$

ou

$$\Delta x^{\mu 2} \Delta x^{\nu 2} \geq \left(\frac{1}{2} |\Theta^{\mu\nu}| \right)^2 \quad (2-11)$$

Então, como consequência, nos deparamos com a impossibilidade de medir com precisão a posição de uma partícula. Logo, devido o fator de não-comutatividade, $\Theta^{\mu\nu}$, na relação acima, a ideia de ponto não faz sentido, pois, se medirmos precisamente uma coordenada as outras se tornam cada vez mais imprecisas.

3 Solução de Schwarzschild Não-Comutativa

Nesta seção, admitindo que as coordenadas são não-comutativas, determinaremos a geometria do espaço-tempo gerado por uma massa puntiforme. Em outras palavras, obteremos a solução de Schwarzschild não-comutativa, conforme Nicolini et al. (2005). Além disso, analisaremos o movimento geodésico nesse espaço-tempo.

3.1 Métrica Não-comutativa

No espaço-tempo de Minkowski a métrica de uma simetria esférica é dada por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) . \quad (3-12)$$

Quando uma distribuição esférica de matéria é colocada na origem do sistema de coordenadas, o elemento de linha ds precisa ser modificado. Porém, esta modificação deve acontecer de tal forma que as propriedades da simetria esférica mantenham-se. Desta forma, a expressão mais geral para esta simetria é:

$$ds^2 = a(r, t)dt^2 + b(r, t)dr^2 + 2c(r, t)dtdr + d(r, t)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) . \quad (3-13)$$

onde $a(r, t)$, $b(r, t)$, $c(r, t)$ e $d(r, t)$ são funções arbitrárias das coordenadas r e t (CARMELI, 1982).

Devido à arbitrariedade da escolha do sistema de referência na TRG ser ampla, podemos, sem violar a simetria, utilizar a seguinte transformações de coordenadas: $r^2 = -d(r, t)$. Então, fazendo tal mudança na equação (??) e retirando as “linhas”, obtemos

$$ds^2 = a(r, t)dt^2 + b(r, t)dr^2 + 2c(r, t)dtdr - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) . \quad (3-14)$$

Para tornar a expressão do elemento de linha ainda mais simples, precisamos eliminar o termo cruzado $dtdr$. Para tanto, consideremos uma nova coordenada temporal $t' = t'(r, t)$. Assim, sendo $m(r, t')$ uma função arbitrária de r e t' , segue que:

$$m(r, t')dt'^2 = m(r, t') \left[\left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right)^2 dr^2 + 2 \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) drdt + \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 dt^2 \right] \quad (3-15)$$

Escolhamos, arbitrariamente, que a função $m(r, t')$ satisfaz às relações

$$m(r, t') \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 = a(r, t) \quad (3-16)$$

e

$$m(r, t') \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) = c(r, t) \quad (3-17)$$

ou seja, que t' obedeça à equação diferencial

$$a(r, t) \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right) - c(r, t) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) = 0 . \quad (3-18)$$

Logo, substituindo (??) - (??) em (??), obtemos:

$$m(r, t') dt'^2 - m(r, t') \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 dr^2 = a(r, t) dt^2 + 2c(r, t) dr dt . \quad (3-19)$$

Agora, substituindo (??) em (??) e retirando as linhas, ficamos com

$$ds^2 = m(r, t) dt^2 - n(r, t) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) , \quad (3-20)$$

onde

$$n(r, t) = - \left[b(r, t) - m(r, t) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 \right] . \quad (3-21)$$

Adotamos $n(r, t)$ negativo no elemento de linha (??), pois, à uma distância infinita, esse elemento deve reproduzir o do espaço-tempo plano de Minkowski ?? (CARROLL, 2004).

Por questão de conveniência, devemos expressar os coeficientes de dt^2 e dr^2 em termos das exponenciais da forma e^ν e e^λ , respectivamente, onde $\nu = \nu(r, t)$ e $\lambda = \lambda(r, t)$ (CARMELI, 1982). Assim, o elemento de linha (??) toma a forma:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) . \quad (3-22)$$

Podemos agora montar o tensor métrico covariante $g_{\mu\nu}$ e o tensor métrico contravariante $g^{\mu\nu}$, dados respectivamente por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^\nu & & & 0 \\ & -e^\lambda & & \\ & & -r^2 & \\ 0 & & & -r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3-23)$$

e

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & & & 0 \\ & -e^{-\lambda} & & \\ & & -r^{-2} & \\ 0 & & & -r^{-2} \text{sen}^{-2} \theta \end{pmatrix} \quad (3-24)$$

A partir de agora iremos denotar as coordenadas t , r , θ e ϕ como x^0 , x^1 , x^2 e x^3 respectivamente. Além disso iremos representar as derivadas com respeito à t por pontos ($\dot{}$) e as derivadas com respeito à r por linhas (\prime).

Usando $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$, dados por (??) e (??), temos que as componentes não-nulas dos símbolos de Christoffel são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{\nu}}{2}, & \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{01}^0 = \frac{\nu'}{2}, & \Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}, & \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{\lambda}}{2}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2} \\ \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\lambda}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^1 &= -r\text{sen}^2\theta e^{-\lambda}, & \Gamma_{33}^2 &= -\text{sen}\theta \cos\theta, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot\theta \end{aligned} \quad (3-25)$$

Com os símbolos de Christoffel, utilizando as equações (??) e (??) podemos calcular as componentes do tensor e o escalar de curvatura de Ricci respectivamente. Fazendo isso e substituindo os resultados nas equações de Einstein [Eq. (??)], chegamos às seguintes equações

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T_0^0, \quad (3-26)$$

$$-\frac{1}{2}e^{\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} = 8\pi T_0^1, \quad (3-27)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T_1^1 \quad (3-28)$$

e

$$-\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{r} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2}e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2} \right) = 8\pi T_2^2 \quad (3-29)$$

Diferentemente do caso usual (comutativo), o Tensor Energia-Momento T_ν^μ , fora da fonte geradora do campo gravitacional, é diferente de zero. Assim, das equações acima temos:

$$\frac{e^{-\lambda}}{r}(\nu' + \lambda') = 8\pi(T_0^0 - T_1^1). \quad (3-30)$$

Mas, para que a forma da métrica de Schwarzschild seja mantida, devemos fazer $T_0^0 = T_1^1$.

Desta forma, ficamos com:

$$\nu' + \lambda' = 0 . \quad (3-31)$$

E conseqüentemente:

$$\nu + \lambda = f(x^0) , \quad (3-32)$$

onde $f(x^0)$ é uma função dependente exclusivamente de x^0 .

Podemos agora realizar uma transformação de coordenadas de modo que o elemento de linha mantenha sua forma. Tal transformação é feita da seguinte maneira:

$x^0 = h(x'^0)$ e $x^k = x'^k$ (CARMELI,1982). Assim, segue que:

$$g'_{00} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^0} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^0} g_{\alpha\beta} = \left(\frac{dx^0}{dx'^0} \right)^2 g_{00} = \dot{h}^2 g_{00} \quad (3-33)$$

Logo, escolhendo $h(x'^0)$ de tal forma que:

$$\dot{h} = e^{-f(x^0)/2} , \quad (3-34)$$

obtemos:

$$g'_{00} = e^{-f(x^0)} g_{00} . \quad (3-35)$$

Para que o elemento de linha ds mantenha sua forma, devemos tomar $f(x^0) = 0$. Então, usando essa condição em (??) ficamos com:

$$\nu + \lambda = 0 . \quad (3-36)$$

É importante destacar que, além de estabelecer uma relação simples entre ν e λ , esta escolha nos permite admitir que as ν e λ dependem apenas de r . Isso mostra que a dependência temporal da métrica, de uma distribuição esfericamente simétrica, pode ser eliminada por meio de uma transformação de coordenadas apropriada (Teorema de Birkhoff).

O tensor energia-momento do buraco-negro de Schwarzschild no plano não-comutativo (Ver Apêndice A) é dado por:

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \rho_{\Theta} & & & 0 \\ & \rho_{\Theta} & & \\ & & \rho_{\Theta} + \frac{1}{2}r\partial_r\rho_{\Theta} & \\ 0 & & & \rho_{\Theta} + \frac{1}{2}r\partial_r\rho_{\Theta} \end{pmatrix} \quad (3-37)$$

Desta forma, da equação (??), temos:

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\rho_{\Theta} . \quad (3-38)$$

Organizando a equação acima obtemos:

$$\frac{d}{dr}(re^{-\lambda}) - 1 = -8\pi r^2\rho_{\Theta} . \quad (3-39)$$

Integrando, ficamos com:

$$re^{-\lambda} - r = -2 \int_0^r 4\pi r^2\rho_{\Theta} dr . \quad (3-40)$$

Logo, de (??) e (??), chegamos ao seguinte resultado:

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} , \quad (3-41)$$

onde:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2\rho_{\Theta} dr . \quad (3-42)$$

é a massa envolvida em uma esfera de raio r (WEI, LIU et al., 2011)

Como dito anteriormente, devido à não-comutatividade das coordenadas em regiões de escalas menores que a célula de Plank (l_p), obtemos um princípio de Incerteza o que acarreta a impossibilidade de medição de quaisquer fenômenos físicos localmente (TEDESCO, 2010). Assim, a densidade de matéria-energia ρ_{Θ} é representada não mais por uma delta de Dirac, mas por uma distribuição gaussiana dada por:

$$\rho_{\Theta} = \frac{M}{(4\pi\Theta)^{3/2}} e^{-r^2/4\Theta} . \quad (3-43)$$

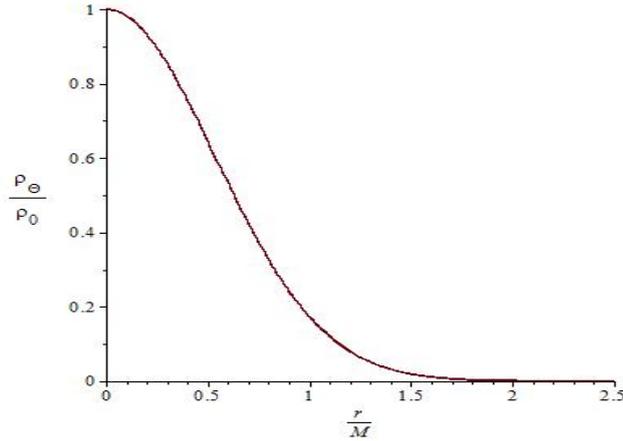


Figura 2: Gráfico de ρ_Θ/ρ_0 em função de $x = r/M$, onde $\rho_0 = M/(4\pi\Theta)^{3/2}$, considerando $\theta = M^2/7$.

De acordo com a figura (2), no caso em que $\theta = M^2/7$, a massa se concentra quase que totalmente na região limitada por $r \cong 1,75M$.

Substituindo (??) em (??) e fazendo $x = r^2/4\Theta$, temos:

$$m(r) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_0^{r^2/4\Theta} x^{1/2} e^{-x} dx \Rightarrow m(r) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta} \right) \quad (3-44)$$

onde:

$$\gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta} \right) \equiv \int_0^{r^2/4\Theta} x^{1/2} e^{-x} dx \quad (3-45)$$

é chamada função *gamma* incompleta.

Portanto, usando (??) e (??), temos que a métrica de Schwarzschild, para o espaço-tempo não-comutativo, será dada por:

$$ds^2 = \left[1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta} \right) \right] dt^2 - \left[1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta} \right) \right]^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) . \quad (3-46)$$

De acordo com Nicolini et al. (2005), o raio do horizonte de eventos, o qual é encontrado quando a componente g_{11} diverge, é dado por

$$r_H = 2M \left[1 - \frac{2M}{\sqrt{\pi\Theta}} e^{-M^2/\Theta} + O \left(\frac{\sqrt{\Theta}}{M} \right) \right] . \quad (3-47)$$

Note que o horizonte de eventos no caso não-comutativo, é deslocado através de um fator que depende do parâmetro Θ . No limite em que $\sqrt{\Theta}/M \rightarrow 0$, a equação acima se reduz ao horizonte de eventos para o caso comutativo, ou seja, $r_H = 2M$.

3.2 Equações Geodésicas

Conforme argumentamos, na TRG o campo gravitacional é entendido como uma curvatura no espaço-tempo. Desta forma, uma partícula (ou a luz) apenas sob a ação do campo gravitacional deve se mover através de uma geodésica, isto é, deve percorrer a curva que representa a menor distância entre dois pontos do espaço-tempo. As equações diferenciais que fornecem essa curva como solução são as chamadas equações geodésicas e são dadas por:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (3-48)$$

onde λ é um parâmetro ao longo da curva

Como a métrica é invariante por translações temporais e rotações espaciais, a energia e o momento angular são conservados (CARROL, 2003). Por consequência da constância do momento angular, o movimento acontece em um plano. Então, escolhendo $\theta = \pi/2$ como sendo o plano de movimento e usando alguns dos símbolos de Christoffel, apresentados em (??), as equações (??) nos fornecem

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{d\nu}{dr} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \quad (3-49)$$

e

$$\frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0. \quad (3-50)$$

Em adição as equações geodésicas, temos a relação

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \varepsilon, \quad (3-51)$$

onde ε é uma constante que pode assumir valores $+1, 0, -1$, para as curvas tipo tempo, luz e tipo espaço respectivamente. Daí segue que:

$$\left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right] \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = \varepsilon . \quad (3-52)$$

Podemos ainda escrever (??) e (??) como:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(e^\nu \frac{dt}{d\lambda} \right) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 . \quad (3-53)$$

O que resulta em:

$$\left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right] \frac{dt}{d\lambda} = E \quad \text{e} \quad r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = L , \quad (3-54)$$

onde E e L são constantes de integração.

Substituindo (??) em (??), chegamos a:

$$E^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right] \frac{L^2}{r^2} = \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right] \varepsilon , \quad (3-55)$$

ou ainda:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{eff} = \frac{E^2}{2} . \quad (3-56)$$

A equação acima pode ser interpretada como a equivalência da conservação da energia da gravitação newtoniana, com um potencial efetivo dado por:

$$V_{eff} = \left[1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right)\right] \left(\frac{L^2}{2r^2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) . \quad (3-57)$$

A expressão do potencial efetivo não nos permite fazer uma análise algébrica dos movimentos. Sendo assim, avaliaremos os movimentos a partir dos gráficos de V_{eff} .⁵

De acordo com a figura (3), para a geodésicas nulas ($\varepsilon = 0$), se a energia for igual ao máximo do potencial, o fóton descreverá uma órbita circular instável. Por outro lado, se a energia for superior ao máximo do potencial, a luz será absorvida pela distribuição

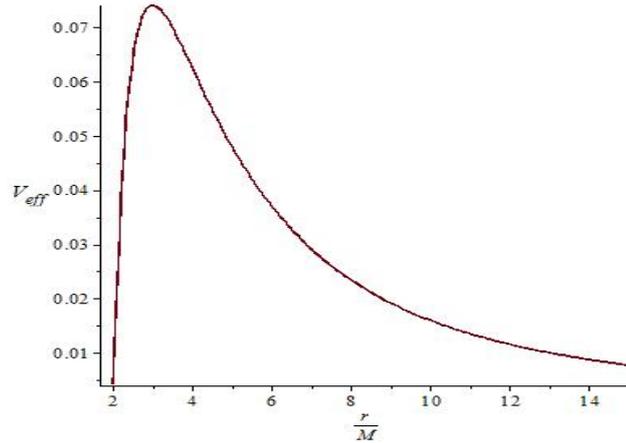


Figura 3: Gráfico do potencial efetivo em função de $x = r/M$, para geodésicas nulas, considerando $\theta = M^2/7$ e $L = \sqrt{(2)}M$. Neste caso, o raio do horizonte é $r_H \cong 1,99M$.

de massa ou seguirá para o infinito. Porém, no caso em que a energia for menor que o máximo, a luz não “escapará” para o infinito.

No caso do movimento de uma partícula ($\varepsilon = 1$) a figura (4) mostra que, para os valores adotados, o potencial efetivo não apresenta ponto de máximo. Na verdade, quando $r = xM \rightarrow \infty$, V_{eff} tenderá a $1/2$. Assim, se a partícula se mover na presença da distribuição, será absorvida.

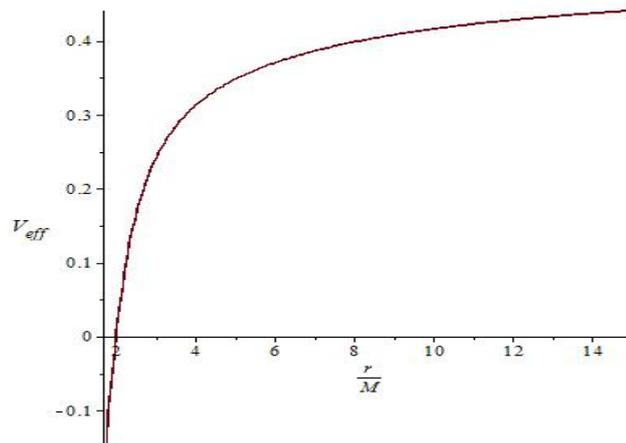


Figura 4: Gráfico do potencial efetivo em função de $x = r/M$, para geodésicas tipo-tempo, considerando $\theta = M^2/7$ e $L = \sqrt{(2)}M$.

⁵Ao traçarmos os gráficos, devemos levar em conta que a massa se concentra em uma determinada região, conforme argumentamos na seção anterior. Por essa razão, assumindo que $\theta = M^2/7$, admitiremos que $x = r/M > 1,75M$.

Esses resultados mostram que o movimento geodésico acontece de forma análoga à solução de Schwarzschild comutativa.

4 Conclusões

A solução de Schwarzschild foi a primeira solução exata das Equações de Campo de Einstein e descreve o comportamento e a deformação do espaço tempo devido uma distribuição de matéria e energia estática, sem carga e com simetria esférica. Tal solução nos aponta matematicamente para a existência de buracos negros.

Entretanto, quando estamos em escalas de dimensões da célula de Planck nos deparamos com a não-comutatividade das coordenadas, ou seja, existe agora um princípio de incerteza de Heisenberg para as coordenadas que nos impossibilita termos de forma determinística as quatro coordenadas, isto nos leva ao abandono da noção de ponto.

Assim, devido a não-comutatividade das coordenadas, a métrica de Schwarzschild precisou ser corrigida, pois a distribuição de matéria e energia estaria localizada não mais em um ponto, mas em um “borrado”.

Ao final, a solução de Schwarzschild não-comutativa obtida foi semelhante à solução do caso usual, sendo modificada basicamente na sua distribuição de matéria e energia onde temos agora o termo Θ representando a não-comutatividade. Além disso, o movimento geodésico se mostra de forma semelhante ao caso em que as coordenadas comutam.

SCHWARZSCHILD SOLUTION IN A NONCOMMUTATIVE ESPACE-TIME

Ângelo Fernandes da Silva França¹

ABSTRACT

Black holes are regions in the universe in which gravity is so strong that once “ inside ” it, not even light could escape to infinity. In general, the black holes are formed by the collapse of stars with mass of at least tens of times the mass of our sun. Mathematically black holes are described by the Schwarzschild metric, this metric is the solution of field equations of Einstein’s General Relativity, this solution represent the deformation of spacetime due to a mass distribution with spherical symmetry. In regions with the order of the Planck scale the idea of point it is lost, so it is impossible to determine the exact location of a particle. Taking into account the loss of locality implies Heisenberg uncertainty principle for the coordinates, which entails the need for a correction of the usual solution for a solution incorporating noncommutativity now by the term Θ ; The Schwarzschild non-commutative solution .

KEYWORDS: Black Holes, Schwarzschild Solution, Non-Commutativity.

¹Undergraduate Degree in Physics from the State University of Paraíba

5 Referências

BARATA, J. C. A. **Teorema de Birkhoff**. 2007. Universidade de São Paulo - SP

BEMFICA, F. S., **Dinâmica Quântica de Sistemas Não-Comutativos**. 2009. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul - RS

CARMELI, M., **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. New York: John Wiley and Sons, 1982.

CARROL, S., **Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity**. San Francisco: Adison Wesley, 2004.

CASTIÑEIRAS, J. et al. O Retrato do Monstrengo. **Scientific American Brasil-Gênios da Ciência**. 2006, v. 11, p. 33-39

CAVALCANTI, A. G., **Radiação Hawking de um Buraco Negro BTZ Não-Comutativo**. 2016. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande - PB

DAMASIO, F. PACHECO, S. M. V. Buracos nem tão Negros Assim. **Física na Escola**. Santa Catarina, v.10, n. 1, 2009

FERRARO, R., **Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity**. Buenos Aires: Springer Science, 2007.

FRENESDA, Rodrigo. **Alguns Problemas de Quantização em Teorias com Fundos Não-Abelianos e em Espaços-Tempo Não-Comutativos**. 2008. Tese (Doutorado em Física) - Universidade de São Paulo - SP

HAWKING, S. W. The Quantum Mechanics of Black Holes. **Scientific American**, v.

236,p. 34-41 jan. 1977

ISLAM, J.N. **An Introduction to Mathematical Cosmology**. Cambridge University, 2001.

LANDAU, L. e LIFCHITZ, E., **Teoria de Campo**. São Paulo: HEMUS - Livraria Editora Ltda, 1974.

MARION, J.B., THORNTON S .T. **Classical Dynamics of Particles and Systems**, 5th Edition Brooks/ Cole - Thomson Learning, 2003

NICOLINI, P. Noncummutative Black Holes, The Final Appeal to Quantum Gravity: A Review. **International Journal of Modern Physics A**, v. 24, ed. 07, mar. 2009

NICOLINI, P.; SMAILAGIC, A.; SPALLUCCI, E. Noncommutative Geometry Inspired Schwarzschild Black Hole. **Physics Letter B**, v. 632, p. 547-551, jan. 2006

TEDESCO, D. G, **Um Estudo Sobre a Teoria de Campos no Espaço-Tempo não-Comutativo**. 2010. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual do Rio de Janeiro - RJ

ZHOU, S.W.; ZENG, X.X.; LIU, W.B. **Hawking Radiation from a BTZ Black Hole Viewed as Landauer Transport**, 2011. Disponível em: <http://arxiv.org/pdf/1106.0559.pdf>.

6 Apêndice A

Para encontrarmos as componentes do Tensor Energia-Momento utilizado na solução de Schwarzschild Não-Comutativa, devemos levar em conta a conservação da energia e do momento expressa por:

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0 \quad (6-58)$$

Obtemos assim:

$$\partial_\nu T_\mu^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha^\nu + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu T_\mu^\alpha = 0 \quad (6-59)$$

As componentes dos Símbolos de Christoffel não nulas são dadas por:

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2}g^{00}\partial_1 g_{00}, \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta}, \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta} \quad (6-60)$$

Devido à simetria esférica temos que $T_2^2 = T_3^3$. Além disso para preservarmos a propriedade tipo Schwarzschild ($g_{00} = -1/g_{11}$) devemos ter $T_0^0 = T_1^1 = \rho_\Theta$. Ficamos assim com:

$$\partial_r T_r^r + g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta}(T_r^r - T_\theta^\theta) = 0 \quad (6-61)$$

Desta forma:

$$T_\theta^\theta = \rho_\Theta + \frac{1}{2}r\partial_r\rho_\Theta \quad (6-62)$$

Finalmente temos que o Tensor Energia-Momento é dado por:

$$T_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \rho_\Theta & & & 0 \\ & \rho_\Theta & & \\ & & \rho_\Theta + \frac{1}{2}r\partial_r\rho_\Theta & \\ 0 & & & \rho_\Theta + \frac{1}{2}r\partial_r\rho_\Theta \end{pmatrix} \quad (6-63)$$