



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**SUPERFÍCIES REGULARES E O TEOREMA**  
**EGREGIUM DE GAUSS**

**ADAILSON RIBEIRO DA SILVA**

Campina Grande - PB

Novembro de 2016

ADAILSON RIBEIRO DA SILVA

**SUPERFÍCIES REGULARES E O TEOREMA  
EGREGIUM DE GAUSS**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Dra. Luciana Roze de Freitas

**Campina Grande - PB**

**Novembro de 2016**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S586s Silva, Adailson Ribeiro da.  
Superfícies regulares e o Teorema Egregium de Gauss  
[manuscrito] / Adailson Ribeiro da Silva. - 2016.  
76 p. : il.

Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)  
- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e  
Tecnologia, 2016.  
"Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas,  
Departamento de Matemática".

1. Geometria diferencial. 2. Curvatura Gaussiana. 3.  
Isometria. 4. Superfícies regulares. I. Título.

21. ed. CDD 516.36

ADAILSON RIBEIRO DA SILVA

**SUPERFÍCIES REGULARES E O TEOREMA  
EGREGIUM DE GAUSS**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Aprovado em: 08 / 11 / 2016

COMISSÃO EXAMINADORA

*Luciana Roze de Freitas*

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

ORIENTADORA

*Thiciany Matsudo Iwano*

Profa. Ms. Thiciany Matsudo Iwano

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADORA

*Maxwell Aires da Silva*

Prof. Maxwell Aires da Silva

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

# Dedicatória

Aos meus pais, Ana Maria e Adalgizo.

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela força concedida durante essa jornada.

Agradeço aos meus pais, Ana Maria Ribeiro da Silva e Adalgizo Guilherme da Silva, e a minha esposa Ana Paula Nóbrega Dantas, pelo incentivo e por estarem sempre ao meu lado.

Aos meus irmãos pelo incentivo nesta jornada.

A minha orientadora, professora Luciana Roze de Freitas pela dedicação, competência e amizade durante a realização desta pesquisa.

Agradeço aos professores Maxwell e Thiciany por aceitarem participar da banca examinadora.

Aos professores do departamento de matemática da UEPB, em especial aos professores: Fernando Luiz, José Elias, Ginaldo e Pedro Lúcio.

Aos professores do departamento de matemática da UFCG: Rosana, Brandão, Braulio, Diogo Diniz, Diogo Germano, Henrique, Jefferson, Lindomberg, Luiz Antônio e Severino Horácio.

A todos os meus colegas do curso de matemática da UFCG e da UEPB, que de alguma maneira contribuíram na minha vida acadêmica. Especialmente aos colegas: Erica, Poliana, Matheus, Raylla, Kesia, Hélio, Naelson, Cícero e Rhamon. Foi bom conviver com vocês, Muito obrigado!

*“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta ”.*

(Carl Friedrich Gauss)

# Resumo

Neste trabalho apresentaremos um estudo introdutório sobre Geometria Diferencial, com ênfase no estudo de superfícies regulares, na qual iremos estabelecer vários resultados e propriedades geométricas a respeito dessas superfícies. Tendo como objetivo central demonstrar o Teorema Egregium de Gauss que teve grande consequência no desenvolvimento da Geometria Diferencial, na qual afirma que a curvatura gaussiana de uma superfície é invariante por isometrias locais.

**Palavras chave:** Geometria Diferencial. Curvatura Gaussiana. Isometria.

# Abstract

In this paper we present an introductory study of Differential Geometry, with emphasis on the study of regular surfaces, in which we will establish several results and geometric properties on these surfaces. With the central objective demonstrate the Gauss Theorem Egregium Eminent had great consequence in the development of Differential Geometry, which states that Gaussian curvature of a surface is invariant local isometry.

**Key words:** Differential Geometry. Gaussian Curvature. Isometries.

# Lista de Figuras

1.1	Derivada direcional . . . . .	15
1.2	Traço da curva $\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ . . . . .	18
1.3	Traços das curvas $\alpha$ e $\beta = \alpha \circ h$ . . . . .	19
1.4	Hélice circular . . . . .	20
1.5	Planos gerados pelo Triedro de Frenet . . . . .	21
2.1	Vizinhança coordenada do ponto $p \in S$ . . . . .	24
2.2	Vetores tangentes às curvas $u \rightarrow (u, v_0)$ e $v \rightarrow (u_0, v)$ . . . . .	25
2.3	Parametrizações da esfera $S^2$ . . . . .	26
2.4	Helicóide . . . . .	27
2.5	Parabolóide Hiperbólico . . . . .	29
2.6	Superfície de revolução . . . . .	31
2.7	Toro de Revolução . . . . .	32
2.8	Hiperbolóide de duas folhas . . . . .	34
2.9	Mudanças de Parâmetros . . . . .	38
2.10	Vetor tangente a $S$ . . . . .	40
2.11	A faixa de Möbius . . . . .	49
2.12	Aplicação de Gauss . . . . .	50
3.1	Isometria entre o cilindro e o plano . . . . .	63
3.2	Transformação do Helicóide no Catenóide . . . . .	66

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Teoria Preliminar</b>	<b>11</b>
1.1 Cálculo Vetorial e Diferencial no Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$	11
1.2 Curvas no Espaço	17
<b>2 Teoria Local das Superfícies</b>	<b>23</b>
2.1 Superfícies Regulares	23
2.2 Mudanças de Parâmetro e Funções Diferenciáveis em Superfícies	37
2.3 Plano Tangente e Diferencial de uma Aplicação	39
2.4 Primeira Forma Fundamental	42
2.5 Orientação de Superfícies e a Aplicação de Gauss	48
2.6 Segunda Forma Fundamental e Curvatura Gaussiana	52
<b>3 Geometria Intrínseca das Superfícies</b>	<b>61</b>
3.1 Isometria	61
3.2 Símbolos de Christoffel	66
3.3 O Teorema Egregium de Gauss	69
<b>Considerações Finais</b>	<b>73</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>75</b>

# Introdução

A Geometria Diferencial estuda as propriedades relativas a medição de curvas e superfícies através do cálculo diferencial e integral. Tendo a sua origem no estudo de curvas planas iniciado por Leibniz (1646-1716) e Newton (1643-1727), que posteriormente Leonard Euler (1707-1783) e Gaspard Monge (1746-1818) estenderam para o estudo a curvas e superfícies no espaço.

Carl Freidrich Gauss (1777-1855) contribuiu para diversas áreas da ciência, devido o seu trabalho realizado em superfícies no espaço Euclidiano, iniciou assim um novo ramo da geometria que ficou conhecido como a Geometria Diferencial. Em 1827 Gauss publicou o seu famoso trabalho "Disquisitiones generales circa superfície curva". Nesta obra o autor define a curvatura de uma superfície e o famoso Teorema Egregium de Grauss.

O presente trabalho se encontra organizado em três capítulos da seguinte maneira: No capítulo 1 introduziremos conceitos e resultados fundamentais de álgebra linear e cálculo diferencial de várias variáveis que serão utilizados nos demais capítulos. Além disso, definiremos curvas no espaço euclidiano tridimensional e estudaremos seu comportamento neste espaço. No capítulo 2 apresentaremos a definição de superfície regular no  $\mathbb{R}^3$ , bem como estudaremos várias propriedades geométricas relacionadas a estas, dentre as quais destacamos a primeira e a segunda forma fundamental. No terceiro capítulo demonstraremos o Teorema Egregium de Gauss, para isto, estudaremos o conceito de isometria entre superfícies regulares e estabeleceremos relações entre os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental. Por fim, apresentaremos as considerações finais do trabalho.

# Capítulo 1

## Teoria Preliminar

Neste capítulo realizaremos uma revisão de alguns conceitos e resultados que usaremos nos demais capítulos. Para mais detalhes veja [4], [6] e [17].

### 1.1 Cálculo Vetorial e Diferencial no Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$

Seja  $\mathbb{R}^3$  o espaço vetorial<sup>1</sup> de dimensão três com as operações de soma e produtor por escalar.

**Definição 1.1.** *Dados dois vetores  $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$  de  $\mathbb{R}^3$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definimos:*

1. *Soma  $w_1 + w_2$  como sendo o vetor*

$$w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

2. *O produto  $\lambda w_1$  como sendo o vetor*

$$\lambda w_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

**Definição 1.2.** *A distância entre dois pontos  $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$  é dada por*

$$d(p_1, p_2) = \|p_2 - p_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

---

<sup>1</sup>Para mais detalhes sobre espaço vetorial, sugerimos a referência [4] e [9].

**Definição 1.3.** Seja  $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . O módulo (ou norma) de  $w$  é dado por

$$\|w\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Um vetor  $w$  é dito unitário quando  $\|w\| = 1$ .

**Definição 1.4.** Os vetores  $w_1, w_2, \dots, w_n$  são linearmente dependentes quando existem números reais  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  nem todos não nulos, tais que

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n = 0.$$

Os vetores  $w_1, w_2, \dots, w_n$  são linearmente independentes se não são linearmente dependentes.

**Definição 1.5.** Sejam  $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$  vetores de  $\mathbb{R}^3$ . O produto interno de  $w_1$  por  $w_2$  é definido como sendo o número real dado por

$$\langle w_1, w_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Tem-se que  $\langle w, w \rangle = \|w\|^2$ , para todo vetor  $w$ .

Como consequência da definição de produto interno podemos enunciar a seguinte proposição.

**Proposição 1.1.** Sejam  $w_1, w_2, w_3$  vetores de  $\mathbb{R}^3$  e  $\lambda$  um número real, então

1.  $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_2, w_1 \rangle$ ;
2.  $\langle \lambda w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, \lambda w_2 \rangle$ ;
3.  $\langle w_1, w_2 + w_3 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_1, w_3 \rangle$ ;
4.  $\langle w_1, w_1 \rangle \geq 0$ ;
5.  $\langle w_1, w_1 \rangle = 0$  se, e só se,  $w_1 = 0$ .

**Definição 1.6.** Se  $w_1$  e  $w_2$  são vetores não nulos, o ângulo  $\theta$  entre  $w_1$  e  $w_2$  é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{\|w_1\| \|w_2\|},$$

onde  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Dois vetores  $w_1$  e  $w_2$  são ditos ortogonais se, e somente se,  $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$ .

**Definição 1.7.** Um conjunto  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  de vetores de um espaço vetorial  $W$  será uma base se:

1.  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  é linearmente independente;
2. Todo vetor de  $W$  pode ser escrito como combinação linear de  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ , isto é, dado o vetor  $w \in W$ , então

$$w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n,$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são escalares reais.

**Definição 1.8.** Uma base formada por vetores unitários e dois a dois ortogonais é dita uma base ortonormal (ou referencial ortonormal).

**Definição 1.9.** Sejam  $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$  dois vetores. O produto vetorial de  $w_1$  por  $w_2$ , denotado por  $w_1 \times w_2$ , é dado como sendo o vetor de componentes

$$w_1 \times w_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

**Proposição 1.2.** Dados os vetores  $w_1, w_2, w_3$  de  $\mathbb{R}^3$  e  $\lambda$  um escalar real, o produto vetorial possui as seguintes propriedades:

1.  $\|w_1 \times w_2\| = \|w_1\| \|w_2\| \sin\theta$ , onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  é o ângulo entre  $w_1$  e  $w_2$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ );
2.  $\langle w_1 \times w_2, w_1 \rangle = \langle w_1 \times w_2, w_2 \rangle = 0$ ;
3.  $w_1 \times w_2 = 0$  se, e só se,  $w_1$  e  $w_2$  são linearmente dependentes;
4.  $w_1 \times w_2 = -(w_2 \times w_1)$ ;
5.  $w_1 \times (w_2 + w_3) = w_1 \times w_2 + w_1 \times w_3$ ;
6.  $(\lambda w_1) \times w_2 = \lambda(w_1 \times w_2)$ ;
7.  $w_1 \times (w_2 \times w_3) = \langle w_1, w_3 \rangle w_2 - \langle w_1, w_2 \rangle w_3$ .

**Definição 1.10.** Dados três vetores  $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $w_3 = (x_3, y_3, z_3)$ , o número real

$$\langle w_1, w_2 \times w_3 \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

é denominado produto misto de  $w_1, w_2, w_3$ .

**Definição 1.11.** Sejam  $\{u_1, u_2, u_3\}$  e  $\{w_1, w_2, w_3\}$  duas bases ordenadas de  $\mathbb{R}^3$ , e

$$w_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3,$$

$$w_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3,$$

$$w_3 = a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3,$$

onde  $a_{ij}$  com  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  são números reais. Dizemos que as bases  $\{u_1, u_2, u_3\}$  e  $\{w_1, w_2, w_3\}$  tem a mesma orientação se o determinante de mudança de base é positivo, isto é,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0. \quad (1.1)$$

Duas bases ordenadas têm orientação oposta quando o determinante de mudança de base é negativo.

**Definição 1.12.** Uma aplicação  $F$  de um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^3$ , denotada por  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , é uma correspondência que, para cada  $p \in A$ , associa um único ponto  $F(p) \in \mathbb{R}^3$ . Tal aplicação pode ser representada por

$$F(p) = (F_1(p), F_2(p), F_3(p)).$$

As funções  $F_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  com  $i = 1, 2, 3$ , são ditas funções coordenadas de  $F$ .

**Definição 1.13.** Uma bola aberta em  $\mathbb{R}^3$  de centro  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  e raio  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , com  $\varepsilon > 0$  é o conjunto, denotado por  $B_\varepsilon(p_0)$ , dos pontos  $p \in \mathbb{R}^3$  que distam de  $p_0$  menos que  $\varepsilon$ , isto é,

$$B_\varepsilon(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^3; |p - p_0| < \varepsilon\}.$$

**Definição 1.14.** Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^3$  é dito aberto em  $\mathbb{R}^3$  se para todo  $p_0 \in A$ , existe  $B_\varepsilon(p_0)$  tal que  $B_\varepsilon(p_0) \subset A$ .

De agora em diante  $A$  denotará um conjunto aberto.

**Definição 1.15.** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é dito conexo se não existem dois abertos  $A_1$  e  $A_2$  em  $\mathbb{R}^3$ , tais que  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ,  $A_1 \cap S$ ,  $A_2 \cap S$  são não vazios e  $S \subset A_1 \cup A_2$ .

**Definição 1.16.** *Seja a aplicação  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Diz-se que  $F(x)$  tem limite  $L$  quando  $x$  tende para  $p \in A$ , representando por*

$$\lim_{x \rightarrow p} F(x) = L,$$

*quando para todo  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , com  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < \|x - p\| < \delta$  implique  $\|F(x) - L\| < \varepsilon$ .*

**Definição 1.17.** *Seja a aplicação  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Diz-se que  $F$  é contínua em  $p \in A$  se dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , com  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $\|x - p\| < \delta$  então  $\|F(x) - F(p)\| < \varepsilon$ .*

*Assim, em termo de limites, diz-se que  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é contínua em  $p \in A$ , se*

$$\lim_{x \rightarrow p} F(x) = F(p).$$

*Se  $F$  é contínua para todo ponto  $p \in A$ , então  $F$  é contínua em  $A$ .*

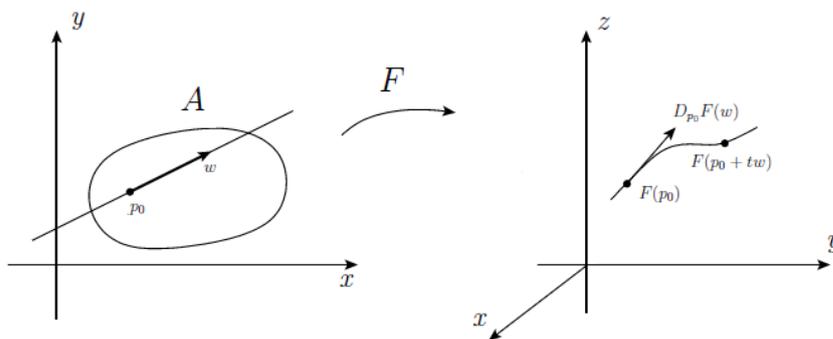
**Definição 1.18.** *Uma aplicação contínua  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um homeomorfismo sobre  $F(A)$  se  $F$  é injetora e a inversa  $F^{-1} : F(A) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é contínua. Neste caso,  $A$  e  $F(A)$  são conjuntos homeomorfos.*

**Definição 1.19.** *Seja  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma função definida em um aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Fixemos  $p_0 \in A$  e  $w$  um vetor não-nulo de  $\mathbb{R}^2$ . A derivada direcional de  $F$  em  $p_0$  na direção de  $w$  é o vetor*

$$D_{p_0} F(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(p_0 + tw) - F(p_0)}{t},$$

*quando o limite existe.*

Figura 1.1: Derivada direcional



Considerando a base canônica  $\{e_1, e_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ , as derivadas direcionais de  $F$  em  $p_0$  nas direções dos vetores da base são denominadas derivadas parciais de  $F$  em  $p_0$ . Se  $F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2), F_3(x_1, x_2))$ , então a derivada parcial de  $F$  em  $p_0$  na direção de  $e_i$  é denotada por  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p_0)$  ou  $F_{x_i}(p_0)$  e é igual a

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p_0) = \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(p_0), \frac{\partial F_2}{\partial x_i}(p_0), \frac{\partial F_3}{\partial x_i}(p_0) \right).$$

**Definição 1.20.** Dizemos que uma função  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é diferenciável em  $p_0$  se existe uma aplicação linear<sup>2</sup>  $dF_{p_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que é chamada a diferencial de  $F$  em  $p_0$  e é definida da seguinte maneira. Sejam  $w \in \mathbb{R}^2$  e  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow A$  uma curva diferenciável tal que  $\alpha(0) = p_0$  e  $\alpha'(0) = w$ . Então, a curva  $\beta = F \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  também é diferenciável e

$$dF_{p_0}(w) = \beta'(0).$$

**Definição 1.21.** Uma aplicação diferenciável  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow B \subset \mathbb{R}^3$  é um difeomorfismo se possui inversa  $F^{-1} : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  diferenciável. Neste caso, diz-se que  $A$  e  $B$  são difeomorfos.

**Definição 1.22.** Seja  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma função diferenciável em  $p_0$ . Como  $dF_{p_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação linear, temos a matriz associada a  $dF_{p_0}$ , relativamente às bases canônicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , dada por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(p_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(p_0) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(p_0) \end{bmatrix},$$

onde  $F_1, F_2, F_3$  são as funções coordenadas de  $F$ . A matriz acima é denominada matriz Jacobiana de  $F$  em  $p_0$ .

**Proposição 1.3.** Sejam  $F, G : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  funções diferenciáveis em  $p_0$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então as funções  $F + G$ ,  $\lambda G$ ,  $\langle F, G \rangle$  e  $F \times G$  são diferenciáveis em  $p_0$  com

---

<sup>2</sup>Entende-se por uma transformação linear (ou aplicação linear)  $A : E \rightarrow F$ , onde  $E, F$  são espaços vetoriais, uma correspondência que associa a cada vetor  $v \in E$  um vetor  $A(v) = A \cdot v = Av \in F$  de modo que para quaisquer  $u, v \in E$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tenhamos:

$$\begin{aligned} A(u + v) &= Au + Av, \\ A(\alpha u) &= \alpha Au. \end{aligned}$$

1.  $d(F + G)_{p_0} = dF_{p_0} + dG_{p_0}$ ;
2.  $d(\lambda G)_{p_0} = \lambda dG_{p_0}$ ;
3.  $d(\langle F, G \rangle)_{p_0} = \langle dF_{p_0}, G \rangle + \langle F, dG_{p_0} \rangle$ ;
4.  $d(F \times G)_{p_0} = dF_{p_0} \times G + F \times dG_{p_0}$ .

**Definição 1.23.** Dizemos que uma aplicação  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é diferenciável de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  (respectivamente  $C^\infty$ ) se as derivadas parciais de  $F$  até a ordem  $k$  (respectivamente todas as ordens) existem e são contínuas.

A seguir vamos enunciar dois resultados para casos gerais, mas podem ser facilmente adaptados para  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposição 1.4** (Regra da Cadeia). Sejam  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $G : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  aplicações diferenciáveis, onde  $U$  e  $V$  são conjuntos abertos tais que  $F(U) \subset V$ . Então  $G \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  é uma aplicação diferenciável, e

$$d(G \circ F)_p = d(G)_{F(p)} \circ dF_p, \quad p \in U.$$

*Demonstração.* Consultar [6], página 153. □

**Proposição 1.5** (Teorema da Função Inversa). Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável e suponha que em  $p \in U$  a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo<sup>3</sup>. Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $U$  e uma vizinhança  $W$  de  $F(p)$  em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $F : V \rightarrow W$  tem inversa diferenciável  $F^{-1} : W \rightarrow V$ .

*Demonstração.* Consultar [10], página 96. □

## 1.2 Curvas no Espaço

**Definição 1.24.** Uma curva parametrizada diferenciável em  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $\alpha$ , de classe  $C^\infty$ , de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$ . A variável  $t \in I$  é o parâmetro da curva, e o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  formado pelos pontos  $\alpha(t)$ ,  $t \in I$ , é o traço da curva.

---

<sup>3</sup>Entende-se por isomorfismo uma transformação linear  $A : E \rightarrow F$ , na qual  $A$  é uma bijeção linear entre os espaços vetoriais  $E$  e  $F$ .

Observe que uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

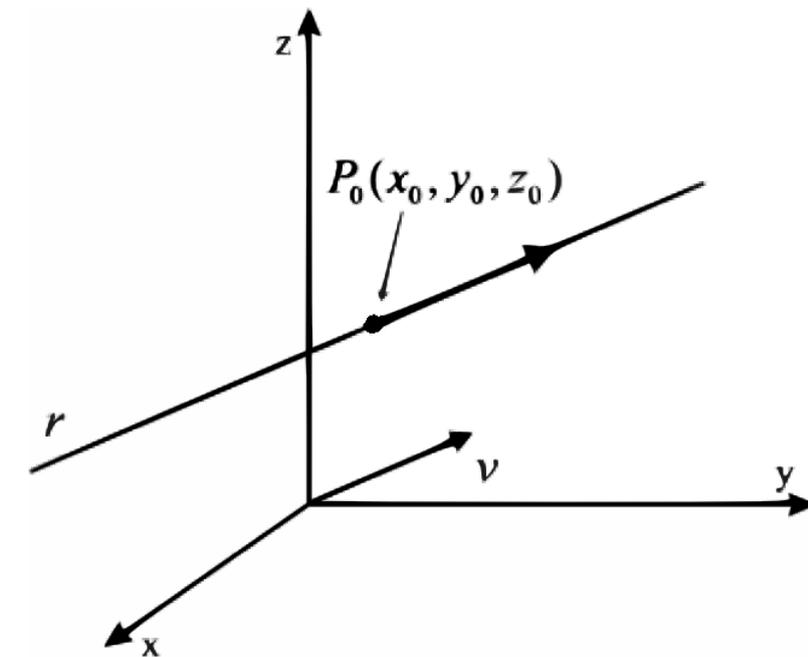
onde  $x(t), y(t)$  e  $z(t)$  são funções diferenciáveis de classe  $C^\infty$ .

**Exemplo 1.1.** A aplicação

$$\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$  é uma curva parametrizada diferenciável, cujo traço é uma reta passando pelo ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e paralela ao vetor  $v$  de componentes  $(a, b, c)$ .

Figura 1.2: Traço da curva  $\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$



**Definição 1.25.** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada diferenciável, que a cada  $t \in I$  associa  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . O vetor

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

é chamado vetor tangente a  $\alpha$  em  $t$ .

**Definição 1.26.** Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita regular quando  $\alpha'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in I$ .

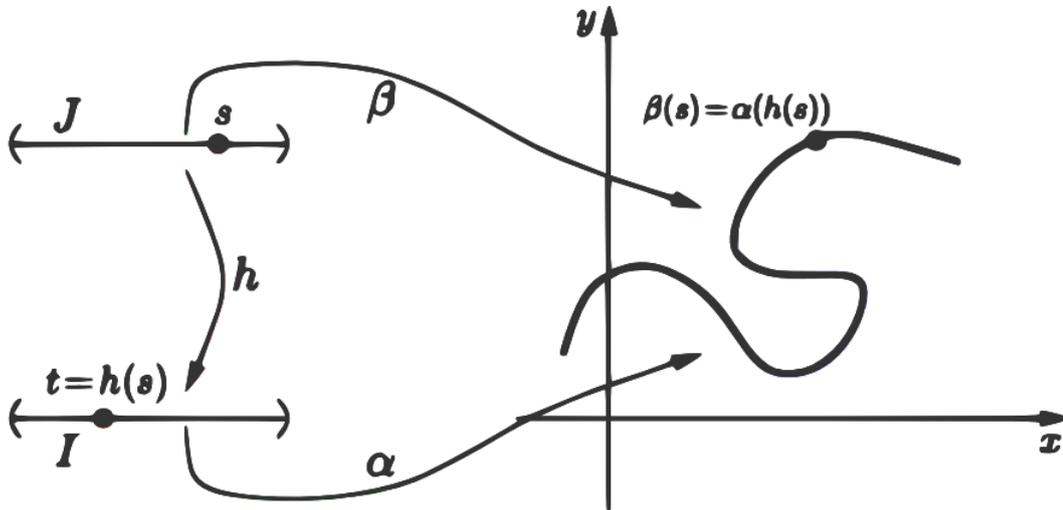
**Exemplo 1.2.** A curva no Exemplo 1.1 é uma curva parametrizada regular, pois  $\alpha'(t) = (a, b, c)$  e  $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ , para todo  $t \in I$ .

**Definição 1.27.** Sejam  $I$  e  $J$  intervalos abertos de  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular e  $h : J \rightarrow I$  uma função diferenciável de classe  $C^\infty$ , cuja derivada de primeira ordem é não nula em todos os pontos de  $J$  e tal que  $h(J) = I$ . Então, a função composta

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

é uma curva regular, que tem o mesmo traço que  $\alpha$ , chamada reparametrização de  $\alpha$  por  $h$ . A função  $h$  é dita mudança de parâmetro.

Figura 1.3: Traços das curvas  $\alpha$  e  $\beta = \alpha \circ h$ .



**Definição 1.28.** A parametrização de uma curva regular  $\alpha$  é o sentido de percurso do traço de  $\alpha$ .

**Exemplo 1.3.** A curva

$$\alpha(t) = \left( \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right), \quad s \in \mathbb{R},$$

é reparametrização da hélice circular

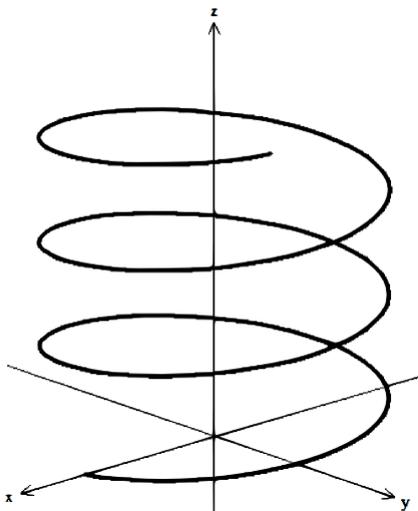
$$\beta(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

pela mudança de parâmetro  $h(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

**Definição 1.29.** Seja  $\alpha(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , uma curva regular de  $\mathbb{R}^3$ . O comprimento do arco da curva  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$  é dada por

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt.$$

Figura 1.4: Hélice circular



**Definição 1.30.** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita parametrizada pelo comprimento de arco se para cada  $t_0, t_1 \in I$ , com  $t_0 \leq t_1$ ,

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0.$$

**Proposição 1.6.** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, para todo  $t \in I$ ,  $\|\alpha'(t)\| = 1$ .

Consideremos uma curva regular  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ ,  $s \in I$  parametrizada pelo comprimento do arco  $s$ . Para cada  $s \in I$ , o vetor tangente  $\alpha'(s)$ , que denotaremos por  $t(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$  é unitário.

**Definição 1.31.** Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então a curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$  é o número real

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

O módulo  $\|\alpha''(s)\|$  da derivada segunda mede a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente em  $s$ , ou seja, dá uma medida do quão rapidamente a curva se afasta, em uma vizinhança de  $s$ , da reta tangente a  $\alpha$  em  $s$ .

**Definição 1.32.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $k(s) > 0$ . O vetor

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)},$$

é denominado vetor normal de  $\alpha$  em  $s$ .

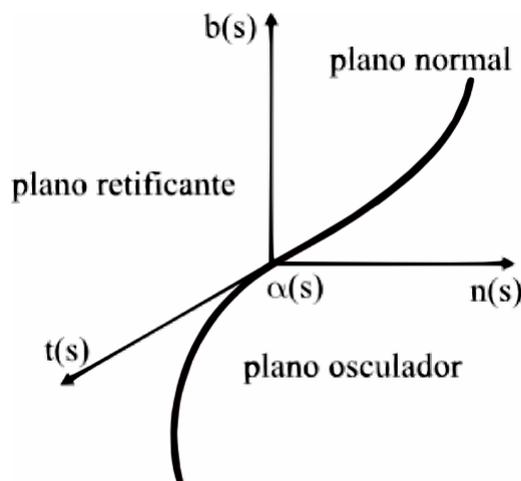
**Definição 1.33.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $k(s) > 0$ . O vetor binormal a  $\alpha$  em  $s$  é*

$$b(s) = t(s) \times n(s).$$

O referencial ortonormal  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  é dito triedro de Frenet da curva  $\alpha$  em  $s$ .

Cada par de vetores do triedro de Frenet determina um plano. O plano de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $\alpha(s)$  e é normal ao vetor  $t(s)$  é o plano normal à curva  $\alpha$  em  $s$ . O plano que contém  $\alpha(s)$  e é normal a  $b(s)$  é denominado plano osculador, e o plano que contém  $\alpha(s)$  e é normal a  $n(s)$  é o plano retificante da curva  $\alpha$  em  $s$ .

Figura 1.5: Planos gerados pelo Triedro de Frenet



Como  $t(s)$  e  $n(s)$  são unitários, pela propriedade 1 da Proposição 1.11,  $b(s)$  é unitário, e o módulo  $\|b'(s)\|$  mede o grau de variação do ângulo do plano osculador em  $s$  com os planos osculadores vizinhos. Portanto,  $\|b'(s)\|$  indica o quão rapidamente a curva se afasta, em uma vizinhança de  $s$  do plano osculador em  $s$ . Para calcular  $b'(s)$  observamos que por um lado,  $b'(s)$  é normal a  $b(s)$  e, por outro lado,

$$b'(s) = t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) = t(s) \times n'(s),$$

isto é,  $b'(s)$  é normal a  $t(s)$ . Decorre daí que  $b'(s)$  é paralelo a  $n(s)$ , e podemos escrever

$$\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle.$$

**Definição 1.34.** *O número real  $\tau(s)$  definido por  $b'(s) = \tau(s)n(s)$  é denominado torção da curva em  $s$ .*

**Exemplo 1.4.** Vamos obter o triedro de Frenet, a curvatura e torção da hélice circular parametrizada pelo comprimento de arco

$$\alpha(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \quad s \in \mathbb{R},$$

onde  $a > 0$  é uma constante.

Observe que

$$\begin{aligned} t(s) &= \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( -a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \right), \\ \alpha''(s) &= \frac{-a}{a^2 + b^2} \left( \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right), \\ k(s) &= \|\alpha''(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} n(s) &= \frac{\alpha''(s)}{k(s)} = \left( -\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right), \\ b(s) &= t(s) \times n(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( b \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -b \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \right), \\ b'(s) &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right), \\ \tau(s) &= \langle b'(s), n(s) \rangle = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Observe que, se  $\alpha(s)$  é uma curva regular de  $\mathbb{R}^3$ , então  $k(s) \geq 0$ , enquanto a torção pode ser negativa ou positiva.

# Capítulo 2

## Teoria Local das Superfícies

### 2.1 Superfícies Regulares

De maneira intuitiva uma superfície pode ser definida como um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  obtida tomando pedaços do plano que se dobrando e colando entre si, de tal forma que a figura formada não apresente pontos, arestas ou auto-interseção. No que segue nos baseamos em [6].

**Definição 2.1.** *Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $X : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que*

1.  *$X$  é diferenciável. Isto significa que se escrevemos*

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

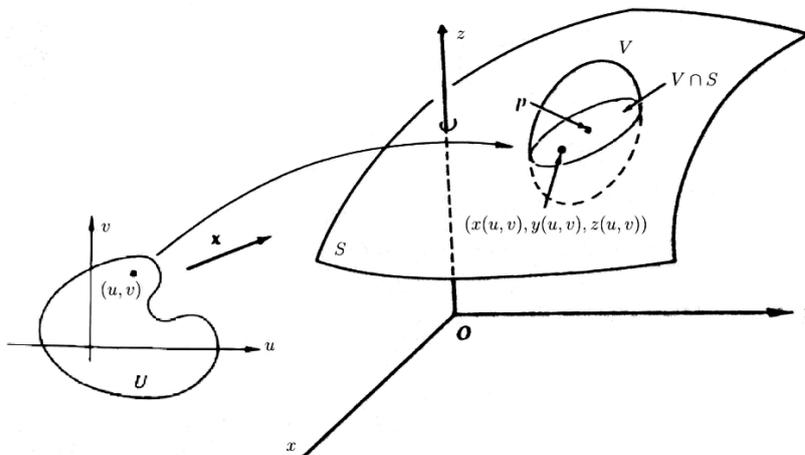
*as funções  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  e  $z(u, v)$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em  $U$ .*

2.  *$X$  é um homeomorfismo. Como  $X$  é contínua pela condição 1, isto significa que  $X$  tem inversa  $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  que é contínua.*

3. *(condição de regularidade) Para todo  $q \in U$ , a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetora.*

A aplicação  $X$  é chamada uma parametrização ou um sistema de coordenadas (locais) em (uma vizinhança de)  $p$ , e  $V \cap S$  é chamada uma vizinhança coordenada de  $S$  em  $p$ .

Figura 2.1: Vizinhança coordenada do ponto  $p \in S$



Fonte: DO CARMO, 2005.

A condição 3 da definição garante a existência de plano tangente em cada ponto da superfície. Vejamos algumas formas equivalentes de expressar essa condição. Vamos calcular a matriz da aplicação linear  $dX_q$  nas bases canônicas  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$  com coordenadas  $(u, v)$  e  $f_1 = (1, 0, 0)$ ,  $f_2 = (0, 1, 0)$ ,  $f_3 = (0, 0, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas  $(x, y, z)$ .

Seja  $q = (u_0, v_0)$ . O vetor  $e_1$  é tangente à curva  $u \rightarrow (u, v_0)$  cuja imagem por  $X$  é a curva

$$u \rightarrow (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)).$$

Esta última curva (chamada curva coordenada  $v = v_0$ ) está em  $S$  e tem em  $X(q)$  o vetor tangente

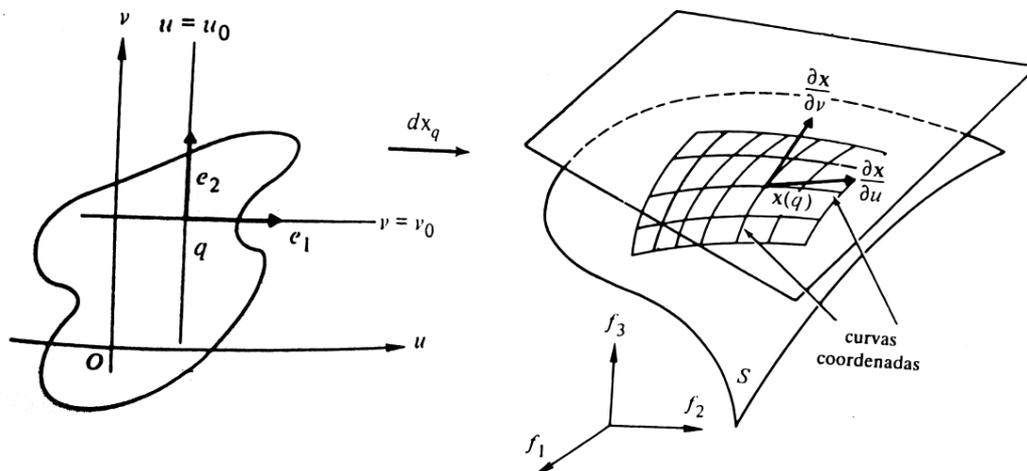
$$dX_q(e_1) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial X}{\partial u},$$

onde as derivadas são calculadas em  $(u_0, v_0)$  e um vetor é indicado pelas suas componentes na base  $\{f_1, f_2, f_3\}$ .

Analogamente, usando a curva coordenada  $u = u_0$  (imagem por  $X$  da curva  $v \rightarrow (u_0, v)$ ), obtemos

$$dX_q(e_2) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial X}{\partial v}$$

Figura 2.2: Vetores tangentes às curvas  $u \rightarrow (u, v_0)$  e  $v \rightarrow (u_0, v)$



Fonte: DO CARMO, 2005.

Assim, a matriz da aplicação linear  $dX_q$  nas bases consideradas é,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Portanto, a condição 3 da definição pode ser expressa exigindo-se que uma das condições seja satisfeita:

1. Os dois vetores coluna da matriz (2.1) sejam linearmente independentes;
2. O produto vetorial  $\partial X / \partial u \times \partial X / \partial v \neq 0$ ;
3. A matriz de aplicação linear  $dX_q$  tem posto 2, isto é, um dos determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

seja diferente de zero em  $q$ .

**Exemplo 2.1.** Vamos mostrar que a esfera unitária  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma superfície regular.

Observe que a aplicação  $X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$X_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), \quad (x, y) \in U,$$

onde  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ , é uma parametrização para a parte superior de  $S^2$  menos o equador. De fato,  $X_1(U)$  é a parte (aberta) de  $S^2$  acima do plano  $xy$ .

Como  $x^2 + y^2 < 1$ , então as funções coordenadas de  $X_1$  possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Logo, a condição 1 está satisfeita.

A condição 3 também é verificada, pois

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Para verificar a condição 2, observe que  $X_1$  é bijetora e que  $X_1^{-1}$  é a restrição da projeção estereográfica  $\pi : S^2 - \{(0,0,1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ , ao conjunto  $X_1(U)$ . Assim,  $X_1^{-1}$  é contínua em  $X_1(U)$ .

De forma análoga ao que foi feito para a parametrização  $X_1$ , podemos provar que

$$X_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}),$$

$$X_3(x, z) = (x, \sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z),$$

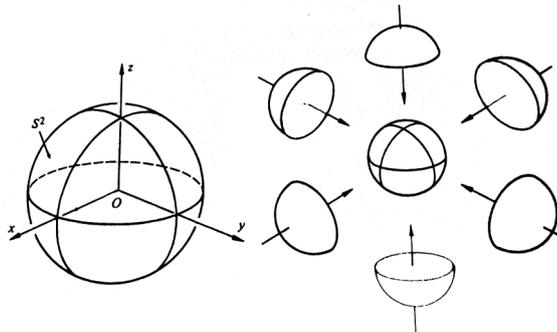
$$X_4(x, z) = (x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z),$$

$$X_5(y, z) = (\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z),$$

$$X_6(y, z) = (-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z),$$

são parametrizações para  $S^2$  e  $S^2 = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5 \cup X_6$ . Mostrando assim que  $S^2$  é uma superfície regular.

Figura 2.3: Parametrizações da esfera  $S^2$



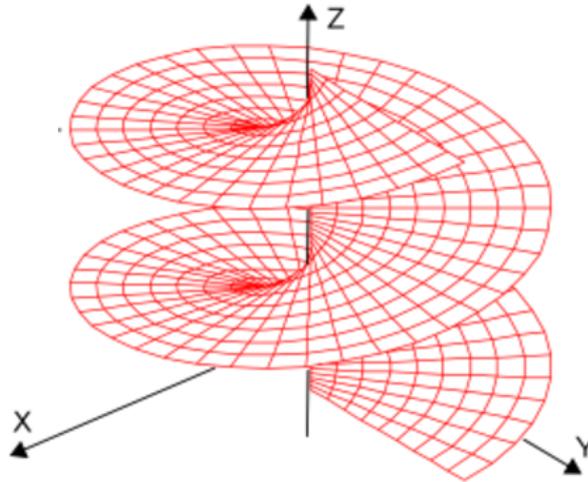
Fonte: DO CARMO, 2005.

**Exemplo 2.2** (Helicóide). Considere a hélice circular  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\alpha(u) = (\cos u, \operatorname{senu}, au), \quad a \neq 0.$$

Por cada ponto da hélice, trace uma reta paralela ao plano  $xy$  e que intersecta o eixo  $Oz$ . A superfície  $H$  gerada por essas retas é chamada um helicóide.

Figura 2.4: Helicóide



Fonte: Disponível em: [http://www.mspc.eng.br/matm/curv\\_sup02.shtml](http://www.mspc.eng.br/matm/curv_sup02.shtml).

Vamos mostrar que a aplicação  $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow H$  dada por

$$X(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{senu}, au),$$

é uma parametrização para o helicóide. De fato, como as funções coordenadas  $v \cos u$ ,  $v \operatorname{senu}$  e  $au$  possui derivadas de todas as ordens a condição 1 da definição é satisfeita. Além disso,

$$X_u = (-v \operatorname{senu}, v \cos u, a),$$

$$X_v = (\cos u, \operatorname{senu}, 0).$$

Daí,

$$X_u \times X_v = (-a \operatorname{senu}, a \cos u, -v).$$

Implicando

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 u + a^2 \cos^2 u + v^2} = \sqrt{a^2 + v^2} \neq 0,$$

pois  $v^2 \geq 0$  e  $a \neq 0$ . Logo, a condição 3 da definição é satisfeita.

Para mostrar a condição 2 da definição, observe que pela Definição 1.18 devemos mostrar que  $X$  é injetora e sua inversa é contínua. Seja  $(x, y, z) = (v \cos u, v \operatorname{senu}, au)$ , então  $u = \frac{z}{a}$  e  $v = \sqrt{x^2 + y^2}$ , implicando que  $u$  e  $v$  podem ser determinados de maneira única. Além disso,

$$\begin{aligned}\cos u &= \frac{x}{v} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \operatorname{senu} &= \frac{y}{v} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\end{aligned}$$

com  $u \in (0, 2\pi)$ . Assim,  $X$  é injetora.

Para mostrar que  $X^{-1}$  é contínua, primeiramente observe que  $v$  é uma função contínua de  $x$  e  $y$ , conseqüentemente, uma função contínua de  $(x, y, z)$ . Além disso,

$$\operatorname{cotan} \frac{u}{2} = \frac{\cos \frac{u}{2}}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} = \frac{2 \cos \frac{u}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2}} = \frac{\operatorname{senu}}{1 - \cos u} = \frac{\frac{y}{v}}{1 - \frac{x}{v}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}.$$

Implicando que

$$u = 2 \operatorname{arccotan} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x},$$

é uma função contínua de  $(x, y, z)$ . Portanto,  $X^{-1}$  é contínua.

Como visto nos exemplos acima nem sempre é fácil verificar que uma determinada superfície é regular utilizando a Definição 2.1, sendo assim, a partir de agora vamos determinar alguns resultados que facilitarão essa verificação.

**Proposição 2.1.** *Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , então o gráfico de  $f$ , isto é, o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $(x, y, f(x, y))$  para  $(x, y) \in U$ , é uma superfície regular.*

*Demonstração.* Observe que a aplicação  $X : U\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

é uma parametrização do gráfico, cuja vizinhança coordenada cobre todos os pontos do gráfico. A condição 1 e 3 da Definição 2.1 são verificadas, pois as funções coordenadas de  $X$  são diferenciáveis em  $U$  e

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Além disso, cada ponto  $(x, y, z)$  do gráfico é a imagem por  $X$  de um único ponto  $(u, v) \in U$ . Logo,  $X$  é bijetora, e como  $X^{-1}$  é a restrição ao gráfico de  $f$  da projeção de  $\mathbb{R}^3$  sobre o plano  $xy$ , é contínua. Portanto, o gráfico de  $f$  é uma superfície regular.  $\square$

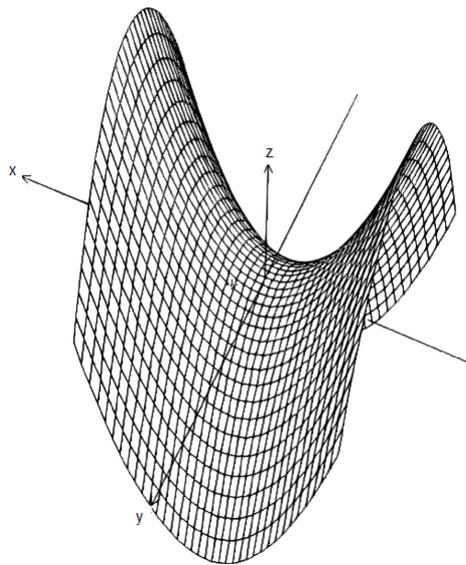
**Exemplo 2.3.** *A aplicação*

$$X(u, v) = \left( u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes não-nulas, é uma superfície parametrizada regular, cujo traço é o parabolóide hiperbólico

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}.$$

Figura 2.5: Parabolóide Hiperbólico



**Definição 2.2** (Superfície de Revolução). *Uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  gerada pela rotação de uma curva plana  $C$  em torno de um eixo no plano que não encontra a curva, é chamada de Superfície de Revolução.*

O eixo é chamado de eixo de revolução da curva  $C$  e a curva  $C$  é dita uma geratriz da superfície de revolução  $S$ .

**Proposição 2.2.** *Seja  $\alpha(v) = (f(v), 0, g(v))$  com  $a < v < b$  e  $f(v) > 0$ , uma curva parametrizada  $C$ . Então,*

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{senu}, g(v)),$$

do conjunto aberto  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$  é uma parametrização para a superfície de revolução gerada por  $\alpha$ .

*Demonstração.* Como as funções  $f(v)$  e  $g(v)$  são diferenciáveis em  $U$ , segue que a condição 1 da Definição 2.1 é satisfeita. Além disso,

$$\begin{aligned} X_u &= (-f(v) \operatorname{senu}, f(v) \cos u, 0), \\ X_v &= (f'(v) \cos u, f'(v) \operatorname{senu}, g'(v)). \end{aligned}$$

Daí,

$$X_u \times X_v = (f(v)g'(v) \cos u, f(v)g'(v) \operatorname{senu}, -f(v)f'(v)).$$

Implicando

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\| &= \sqrt{f(v)^2 g'(v)^2 \cos^2 u + f(v)^2 g'(v)^2 \operatorname{sen}^2 u + f(v)^2 f'(v)^2} \\ &= \sqrt{f(v)^2 g'(v)^2 + f(v)^2 f'(v)^2} \\ &= f(v) \sqrt{g'(v)^2 + f'(v)^2} > 0, \end{aligned}$$

para todo  $(u, v) \in U$ , pois  $f(v) > 0$ . Logo, a condição 2 da Definição 2.1 é verificada.

Para mostrar que  $X$  é um homeomorfismo, pela Definição 1.18 devemos mostrar que  $X$  é injetora e a sua inversa  $X^{-1}$  é contínua. Primeiramente mostraremos que  $X$  é injetora. De fato, seja  $(x, y, z) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{senu}, g(v))$ , então  $z = g(v)$  e  $f(v) = \sqrt{x^2 + y^2}$  e como  $(f(v), 0, g(v))$  é uma parametrização de  $C$ , podemos determinar  $v$  de maneira única. Além disso, o parâmetro  $u$  fica determinado de modo único, pois

$$\begin{aligned} \cos u &= \frac{x}{f(v)} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \operatorname{senu} &= \frac{y}{f(v)} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

com  $u \in (0, 2\pi)$ . Assim,  $X$  é injetora.

Agora mostraremos que  $X^{-1}$  é contínua, observe que pelo fato de  $v$  ser uma função contínua de  $z$  e  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , conseqüentemente, é uma função contínua de  $(x, y, z)$ . Agora mostraremos que  $u$  é uma função contínua de  $(x, y, z)$ . Como  $u \in (0, 2\pi)$  então  $\cotan \frac{u}{2}$  está definida para todo  $u \in (0, 2\pi)$ . Daí,

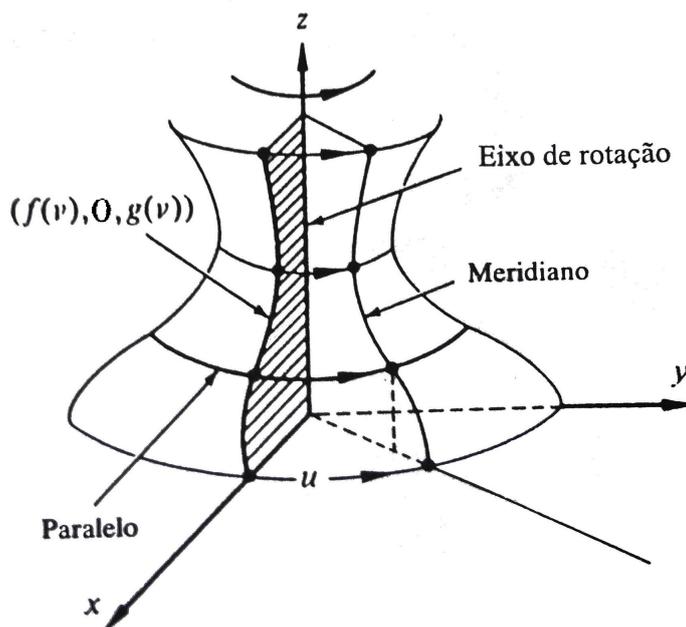
$$\cotan \frac{u}{2} = \frac{\cos \frac{u}{2}}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} = \frac{2 \cos \frac{u}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2}} = \frac{\operatorname{senu}}{1 - \cos u} = \frac{\frac{y}{f(v)}}{1 - \frac{x}{f(v)}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}.$$

Observe que  $\sqrt{x^2 + y^2} - x \neq 0$ , pois  $X(U) \subset \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0 \text{ e } x \geq 0\}$ .  
 Implicando que

$$u = 2 \operatorname{arccotan} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x},$$

que é uma função contínua de  $(x, y, z)$ . Assim,  $X^{-1}$  é contínua, e portanto  $X$  é uma parametrização para  $S$ .  $\square$

Figura 2.6: Superfície de revolução



Fonte: DO CARMO, 2005.

**Exemplo 2.4.** O catenóide é uma superfície de revolução, obtida girando a catenária,

$$\alpha(v) = (a \cosh v, 0, av), \quad -\infty < v < \infty,$$

em torno do eixo  $Oz$ , onde  $a > 0$ . Então, pela Proposição 2.2

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \operatorname{senu}, av),$$

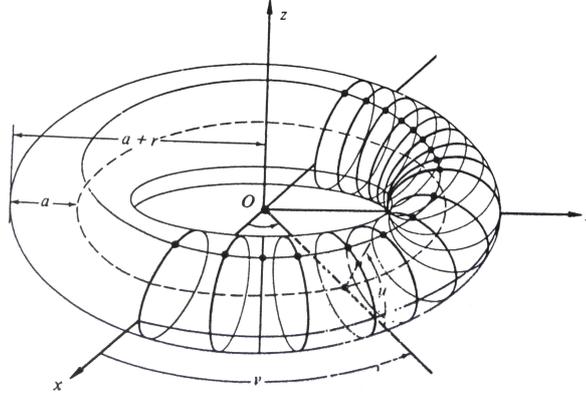
onde  $0 < u < 2\pi$ , e  $-\infty < v < \infty$ , é uma parametrização para o catenóide.

**Exemplo 2.5** (Toro de Revolução). O Toro é a superfície obtida pela rotação do círculo  $C^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (y - a)^2 + z^2 = r^2, x = 0\}$  de centro  $(0, a, 0)$  e raio  $r > 0$  com  $a > r$ , em torno do eixo  $Oz$ . Então,  $\alpha(v) = (0, a + r \cos v, r \operatorname{senv})$  é uma parametrização para  $C^1$  e pela Proposição 2.2 a aplicação  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \operatorname{cos} u, (a + r \cos u) \operatorname{senu}, r \operatorname{senu}),$$

onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } 0 < v < 2\pi\}$  é uma parametrização para o Toro.

Figura 2.7: Toro de Revolução



Fonte: DO CARMO, 2005.

**Definição 2.3.** Dada uma aplicação diferenciável  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , dizemos que  $p \in U$  é um ponto crítico de  $F$  se a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  não é uma aplicação sobrejetora. A imagem  $F(p) \in \mathbb{R}^m$  de um ponto crítico é chamado um valor crítico de  $F$ .

**Definição 2.4.** Um ponto de  $a \in \mathbb{R}^m$  é chamado um valor regular de uma aplicação diferenciável  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , se a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é sobrejetora para todo ponto  $p \in f^{-1}(a)$ .

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável, então  $df_p(1, 0, 0) = f_x$ ,  $df_p(0, 1, 0) = f_y$  e  $df_p(0, 0, 1) = f_z$ . Portanto, afirmar que  $df_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  não é sobrejetora é equivalente a dizer que  $f_x(p) = f_y(p) = f_z(p) = 0$ . Portanto,  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  se, e somente se,  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_z$  não se anulam simultaneamente em qualquer ponto da imagem inversa

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U; f(x, y, z) = a\}.$$

**Proposição 2.3.** Se  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U; f(x, y, z) = a\}$  é uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ .

*Demonstração.* Como  $a$  é um valor regular de  $f$ , então pela Definição 2.4  $df_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é sobrejetora para todo ponto  $p = (x_0, y_0, z_0)$  em  $f^{-1}(a)$ . Logo, as derivadas parciais  $f_x, f_y, f_z$  não se anulam simultaneamente em  $p$ . Suponha que  $f_z(p) \neq 0$  e considere a aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)).$$

Como a diferencial de  $F$  em  $p$  é dada por

$$dF_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix},$$

temos que

$$\det(dF_p) = f_z \neq 0.$$

Implicando que  $dF_p$  é um isomorfismo, então pelo Teorema da Função Inversa (ver Proposição 1.5), existem vizinhanças  $V \subset U$  de  $p$  e  $W = F(V)$  tais que  $F : V \rightarrow W$  é inversível e a sua inversa  $F^{-1} : W \rightarrow V$  é diferenciável.

As funções coordenadas  $x = u, y = v, z = g(u, v, t)$ , com  $(u, v, t) \in W$  de  $F^{-1}(u, v, g(u, v, t))$  são diferenciáveis. Em particular,  $z = g(u, v, a) = h(x, y)$  é uma função diferenciável definida na projeção de  $V$  sobre o plano  $xy$ . Como

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t) \in \mathbb{R}^3; t = a\},$$

então o gráfico de  $h$  é  $f^{-1}(a) \cap V$ , e pela Proposição 2.1,  $f^{-1}(a) \cap V$  é uma vizinhança coordenada de  $p$ . Consequentemente, todo  $p \in f^{-1}(a)$  pode ser coberta por uma vizinhança coordenada, e podemos concluir que  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular.  $\square$

**Exemplo 2.6.** *Seja o elipsóide dado por*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

*Vamos definir uma função diferenciável*

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

*Podemos notar que 0 é um valor regular de  $f$ , já que as derivadas parciais  $f_x, f_y, f_z$  se anulam simultaneamente somente no ponto  $(0, 0, 0)$ , que não pertence a  $f^{-1}(0)$ . Então, o elipsóide dado por  $S = f^{-1}(0)$  é uma superfície regular.*

**Definição 2.5.** Diremos que uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  é conexa se quaisquer dois pontos podem ser ligados por uma curva contínua contida em  $S$ .

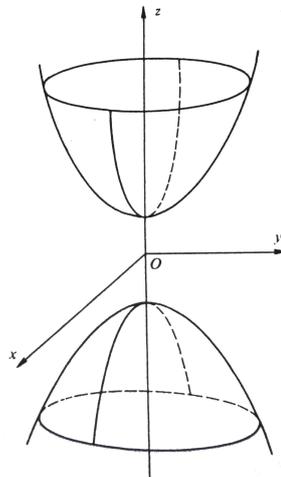
O próximo exemplo mostra que superfícies regulares podem não ser conexas.

**Exemplo 2.7.** Vamos mostrar que o hiperbolóide de duas folhas dado por  $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$  é uma superfície regular não conexa. De fato, defina uma função diferenciável  $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 1$ . Podemos notar que 0 é um valor regular de  $f$ , já que as derivadas parciais se anulam simultaneamente somente no ponto  $(0, 0, 0)$ , que não pertence a  $f^{-1}(0)$ .

Note que a superfície  $f^{-1}(0)$  não é conexa. De fato, dado dois pontos em duas folhas distintas ( $z > 0$  e  $z < 0$ ) e uma curva contínua  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  contida na superfície e ligando esses dois pontos, temos que  $z(t)$  muda de sinal para algum  $t_0$ , isto é,  $z(t_0) = 0$ . Assim,  $\alpha(t_0)$  não pertence a  $f^{-1}(0)$ , pois

$$f(\alpha(t_0)) = -x(t_0)^2 - y(t_0)^2 - 1 \neq 0.$$

Figura 2.8: Hiperbolóide de duas folhas



Fonte: DO CARMO, 2005.

A proposição à seguir fornece recíproca local da Proposição 2.1, isto é, qualquer superfície regular é localmente o gráfico de uma função diferenciável.

**Proposição 2.4.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular e  $p \in S$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $S$  tal que  $V$  é o gráfico de uma função diferenciável que tem uma das seguintes formas:

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z)$$

*Demonstração.* Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  em  $p$ , dada por  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in U$ . Então, pela condição 3 da Definição 2.1 um dos determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)},$$

não se anula em  $X^{-1}(p) = q$ .

Suponha que  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$ , e considere a aplicação diferenciável  $\pi \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$(\pi \circ X)(u, v) = (x(u, v), y(u, v)).$$

Como  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$ , logo  $d_q(\pi \circ X) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um isomorfismo. Então pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças  $V_1$  de  $q$  e  $V_2$  de  $\pi \circ X(q)$  tal que  $\pi \circ X : V_1 \rightarrow V_2$  é um difeomorfismo, implicando que  $\pi$  restrita a  $X(V_1) = V$  é bijetora e a sua inversa  $(\pi \circ X)^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$  é diferenciável. Agora considere a composição  $\psi : X \circ (\pi \circ X)^{-1} : V_2 \rightarrow X(V_1) = V$  tal que

$$\psi(x, y) = (x, y, z(x(u, v), y(u, v))),$$

podemos notar que  $V$  é o gráfico de uma função diferenciável  $z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$ . Os casos que restam podem ser tratados da mesma maneira, considerando  $x = h(y, z)$  e  $y = g(x, z)$  □

**Exemplo 2.8.** *Vamos mostrar que o cone de uma folha  $C$ , dado por*

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

*não é uma superfície regular. De fato, supondo que  $C$  é uma superfície regular, então pela proposição anterior existiria uma vizinhança  $V$  de  $(0, 0, 0) \in C$  que seria o gráfico de uma função diferenciável que tem uma das seguintes formas*

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z).$$

*A função não pode ser da forma  $x = h(y, z)$  nem da forma  $y = g(x, z)$ , pois em uma vizinhança da origem  $(0, 0, 0)$  as projeções de  $C$  sobre os planos  $yz$  e  $xz$  não são injetoras, e a forma  $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  não é diferenciável numa vizinhança de  $(0, 0, 0)$ .*

*Porém se removemos a sua origem  $(0, 0, 0)$  obteremos que  $C$  é uma superfície regular. De fato, observe que a parametrização*

$$X(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\},$$

cobre todo o cone menos o ponto  $(0, 0, 0)$  e como  $X$  é uma aplicação diferenciável podemos concluir pela Proposição 2.1, que o cone menos a sua origem é uma superfície regular.

**Proposição 2.5.** *Seja  $p \in S$  um ponto de uma superfície regular  $S$  e seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação com  $p \in X(U)$  tal que as condições 1 e 3 da definição 2.1 sejam satisfeitas. Suponha que  $X$  seja bijetora. Então  $X^{-1}$  é contínua.*

*Demonstração.* Seja  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  com  $(u, v) \in U$  e  $q \in U$  arbitrário. Podemos supor que  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$ , já que  $X$  satisfaz as condições 1 e 3 da Definição 2.1. Vamos considerar a projeção  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ .

Pelo Teorema da Função Inversa (ver Proposição 1.5), existem  $V_1$  vizinhança de  $q$  em  $U$  e  $V_2$  de  $\pi \circ X(q)$  em  $\mathbb{R}^2$  tais que  $\pi \circ X : V_1 \rightarrow V_2$  é um difeomorfismo. Agora supondo que  $X$  seja bijetora. Então,

$$X^{-1} = (\pi \circ X)^{-1} \circ \pi,$$

é uma composição de aplicações contínuas, e portanto  $X^{-1}$  é contínua.  $\square$

**Exemplo 2.9.** *Vamos mostrar que a aplicação  $X : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por*

$$X(\theta, \varphi) = (\text{sen}\theta \cos \varphi, \text{sen}\theta \text{sen}\varphi, \cos \theta),$$

onde  $V = \{(\theta, \varphi); 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ , é uma parametrização para a esfera unitária  $S^2$  do Exemplo 2.2.

*De fato, observe que  $X(V)$  cobre toda a esfera menos o semi-círculo  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0 \text{ e } x \geq 0\}$ . Como as funções coordenadas  $\text{sen}\theta \cos \varphi$ ,  $\text{sen}\theta \text{sen}\varphi$  e  $\cos \theta$  têm derivadas parciais de todas as ordens, então  $X$  é diferenciável. Além disso,*

$$X_\theta(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \text{sen}\varphi, -\text{sen}\theta),$$

e

$$X_\varphi(\theta, \varphi) = (\text{sen}\theta \text{sen}\varphi, \text{sen}\theta \cos \varphi, 0).$$

*Implicando*

$$X_\theta \times X_\varphi = (\text{sen}^2\theta \cos \varphi, -\text{sen}^2\theta \text{sen}\varphi, \cos \theta \text{sen}\theta)$$

e

$$\begin{aligned} \|X_\theta \times X_\varphi\| &= \sqrt{\text{sen}^4\theta \cos^2 \varphi + \text{sen}^4\theta \text{sen}^2\varphi + \cos^2 \theta \text{sen}^2\theta} \\ &= \sqrt{\text{sen}^4\theta + \cos^2 \theta \text{sen}^2\theta} \\ &= |\text{sen}\theta| \neq 0, \end{aligned}$$

pois  $0 < \theta < \pi$ . Logo,  $X$  satisfaz as condições 1 e 3 da Definição 2.1.

Para mostrar que  $X$  é bijetora, observe que dado  $(x, y, z) \in S^2 - C$ ,  $\theta$  fica determinado de maneira única por  $\theta = \cos^{-1} z$ , uma vez que  $0 < \theta < \pi$ . Logo, conhecendo o valor de  $\theta$ , temos que  $\cos \varphi = \frac{x}{\operatorname{sen} \theta}$  e  $\operatorname{sen} \varphi = \frac{y}{\operatorname{sen} \theta}$  são determinados de maneira única. Assim,  $X$  tem uma inversa  $X^{-1}$ , e portanto  $X$  é bijetora.

Como  $S^2$  é uma superfície regular podemos concluir pela proposição anterior que  $X(V)$  é uma parametrização de  $S^2$ .

## 2.2 Mudanças de Parâmetro e Funções Diferenciáveis em Superfícies

Como vimos no Exemplo 2.2 um ponto  $p \in S$  pode pertencer a mais de uma parametrização. Para que a Definição 2.1 faça sentido, é necessário que ela não dependa do sistema de coordenadas escolhido. Neste sentido podemos enunciar o seguinte resultado.

**Proposição 2.6** (Mudanças de Parâmetros). *Seja  $p$  um ponto de uma superfície regular  $S$ , e sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  duas parametrizações de  $S$ , tais que  $p \in X(U) \cap Y(V) = W$ . Então a mudança de coordenadas  $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$  é um difeomorfismo, isto é,  $h$  é diferenciável e tem uma inversa diferenciável  $h^{-1}$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $h$  é um difeomorfismo. Observe que a aplicação  $h = X^{-1} \circ Y$  é um homeomorfismo, pois  $X^{-1}$  e  $Y$  são homeomorfismo. Agora mostraremos que  $h$  é diferenciável. De fato, seja  $r \in Y^{-1}(W)$  arbitrário e defina  $q = h(r)$ . Como  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  é uma parametrização, pela condição 3 da Definição 2.1, temos que um dos determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q), \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}(q), \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(q),$$

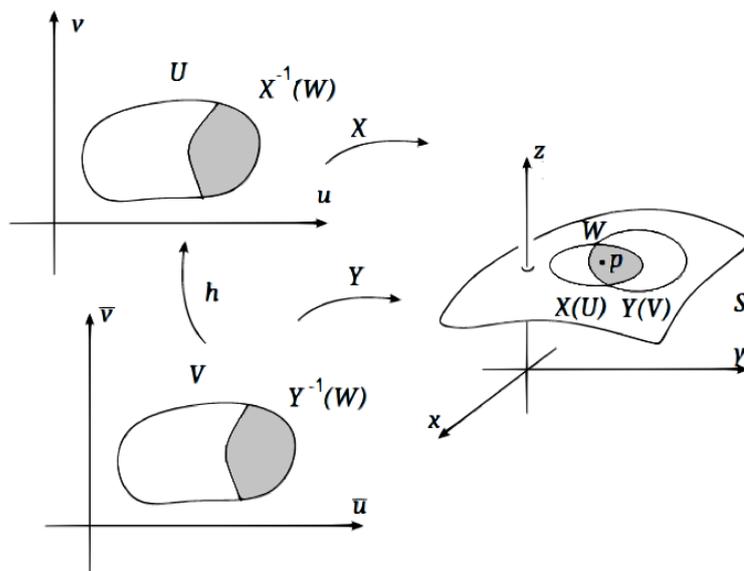
não se anula em  $q$ . Suponha que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Estendendo  $X$  a uma aplicação  $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad (u, v) \in U, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Figura 2.9: Mudanças de Parâmetros



Então,  $F$  é diferenciável e a restrição  $F|_{U \times \{0\}} = X(u, v)$ . Logo, o determinante da diferencial  $dF_q$ , é

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Daí, pelo Teorema da Função Inversa existe uma vizinhança  $M$  de  $X(q)$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $F^{-1}$  existe e é diferenciável em  $M$ , pela continuidade de  $Y$  existe uma vizinhança  $N$  de  $r$  em  $V$  tal que  $Y(N) \subset M$ . Observe que,  $h|_N = F^{-1} \circ Y|_N$  é a composição de aplicações diferenciáveis. Assim, aplicando a regra da cadeia (ver Proposição 1.4) podemos concluir que  $h$  é diferenciável em  $r$ . Como  $r$  é arbitrário,  $h$  é diferenciável em  $Y^{-1}(W)$ .

Aplicando o mesmo argumento, podemos mostrar que a aplicação  $h^{-1}$  é diferenciável, e portanto  $h$  é um difeomorfismo.  $\square$

A seguir definiremos função diferenciável em uma superfície regular.

**Definição 2.6.** *Seja  $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, definida em um subconjunto aberto  $V$  de uma superfície regular  $S$ . Então  $f$  é diferenciável em  $p \in V$  se, para alguma parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , com  $p \in X(U) \subset V$ , a composição  $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $X^{-1}(p)$ . A função  $f$  é diferenciável em  $V$  se é diferenciável em todos os pontos de  $V$ .*

Como consequência da Proposição 2.6 segue que a definição dada acima não depende da escolha da parametrização  $X$ . De fato, seja  $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma outra parametrização de  $S$  em  $p$ , com  $p \in Y(V)$ , se  $h = X^{-1} \circ Y : V \rightarrow U$ , então  $f \circ Y = f \circ X \circ h$  também é diferenciável em  $V$ .

A proposição seguinte diz que podemos estender os conceitos e propriedades locais da Geometria Diferencial à superfícies parametrizadas regulares.

**Proposição 2.7.** *Sejam  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  e  $q \in U$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $q$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que  $X(V) \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular.*

*Demonstração.* Seja  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , como  $X$  é uma parametrização de  $S$ , então pela condição 3 da definição 2.1, podemos supor que  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$ . Considere a aplicação  $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\det(dF_q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

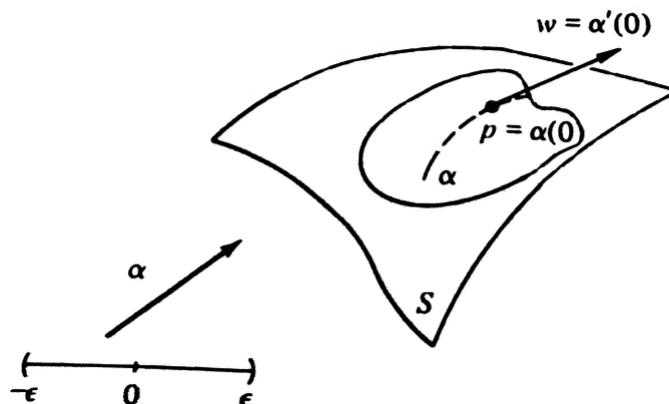
Daí, pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças  $W_1$  de  $q$  e  $W_2$  de  $F(q)$  tal que  $F : W_1 \rightarrow W_2$  é um difeomorfismo. Seja  $V = W_1 \cap U$ , então  $F|_V = X|_V$ . Assim,  $X(U)$  é um difeomorfismo em  $V$  e, portanto, uma superfície regular.  $\square$

## 2.3 Plano Tangente e Diferencial de uma Aplicação

Nesta seção mostraremos que, para cada  $p \in S$ , o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de  $S$ , passando por  $p$ , constituem um plano, que denotaremos por  $T_p S$  (condição 3 da Definição 2.1).

**Definição 2.7.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$ , dizemos que um vetor  $w$  de  $\mathbb{R}^3$  é um vetor tangente a  $S$  em  $p$  se  $w = \alpha'(0)$ , onde  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  é uma curva parametrizada diferenciável em 0 e  $\alpha(0) = p$ .*

Figura 2.10: Vetor tangente a  $S$



Fonte: DO CARMO, 2005.

Os vetores  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$  são vetores tangentes a  $S$  em  $(u_0, v_0)$ , já que são tangentes às curvas coordenadas.

**Proposição 2.8.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  e seja  $q \in U$ . O subespaço vetorial de dimensão 2,*

$$dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

*coincide com o conjunto de vetores tangentes a  $S$  em  $X(q)$ .*

*Demonstração.* Seja  $w = \alpha'(0)$  um vetor tangente em  $X(q)$  e  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(U) \subset S$  uma curva parametrizada diferenciável com  $\alpha(0) = X(q)$ . Logo, a curva  $\beta = X^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  é diferenciável. Pela Definição 1.20

$$dX_q(\beta'(0)) = \alpha'(0) = w,$$

implicando que  $w \in dX_q(\mathbb{R}^2)$ .

Por outro lado, se  $w = dX_q(v)$ , com  $v \in \mathbb{R}^2$ . Observe que  $v$  é o vetor velocidade da curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  dada por

$$\gamma(t) = tv + q, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Assim, pela definição de diferencial,  $w = \alpha'(0)$ , onde  $\alpha = X \circ \gamma$ . Portanto,  $w$  é um vetor tangente.  $\square$

Pela Proposição 2.8, o plano  $dX_q(\mathbb{R}^2)$ , que passa por  $X(q) = p$ , não depende da parametrização  $X$ .

**Definição 2.8.** O plano tangente a  $S$  em  $(u_0, v_0)$  é o conjunto de todos os vetores tangentes a  $S$  em  $(u_0, v_0)$ , que denotamos por  $T_p S$ , onde  $p = (u_0, v_0)$ .

Um vetor  $w$  em  $T_p S$ , pode ser obtido como combinação linear da base associada a  $X$ , isto é, na base  $\{X_u, X_v\}$  de  $T_p S$ . De fato, como  $w = \alpha'(0)$  e  $\alpha = X \circ \beta$ ; onde  $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  é dada por  $\beta(t) = (u(t), v(t))$  e  $\beta(0) = q = X^{-1}(p)$ . Então,

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(X \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}X(u(t), v(t))(0) \\ &= X_u(q)u'(0) + X_v(q)v'(0) = w.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Assim, na base  $\{X_u(q), X_v(q)\}$ ,  $w$  tem coordenadas  $(u'(0), v'(0))$ , onde  $(u(t), v(t))$  é a expressão de uma curva cujo vetor velocidade é  $w$  na parametrização  $X$ .

Por definição de superfície parametrizada regular,  $X_u$  e  $X_v$  são vetores linearmente independentes. Portanto  $T_p S$  é um plano de  $\mathbb{R}^3$ , gerado por  $X_u$  e  $X_v$ . Observamos que, em geral,  $X_u$  e  $X_v$  não são ortogonais, nem unitários.

**Exemplo 2.10.** Seja  $X(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$ ,  $(u, v) \in U$ , onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < 1\}$ , uma das parametrizações de  $S^2$ . Tomando um ponto  $p = (u_0, v_0) = (0, 0)$ , então os vetores  $X_u(0, 0) = (1, 0, 0)$  e  $X_v(0, 0) = (0, 1, 0)$  formam uma base do plano tangente  $T_p S$ . Portanto, todo vetor tangente a  $X$  em  $q$  é da forma  $(a, b, 0)$ , onde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Como já definimos plano tangente, podemos falar de uma aplicação diferenciável entre superfícies regulares.

**Definição 2.9.** Sejam  $S_1$  e  $S_2$  duas superfícies regulares e  $\varphi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$  uma aplicação diferenciável de um conjunto aberto  $V$  de  $S_1$  em  $S_2$ , a cada  $p \in V$  definimos a aplicação linear

$$d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2,$$

atuando em um vetor  $w \in T_p S_1$  da seguinte forma:

Seja  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$  diferenciável, com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = w$ , então

$$d\varphi_p(w) = \beta'(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)(0),$$

com  $\beta = \varphi \circ \alpha$ ,  $\beta(0) = \varphi(p)$ .

**Proposição 2.9.** A aplicação  $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$  definida por  $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$  é linear e não depende da escolha da curva que passa por  $p$  com vetor tangente  $w$ .

*Demonstração.* Como  $\varphi$  é diferenciável em  $p$ , então existem  $X(u, v)$  e  $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})$  parametrizações em vizinhanças de  $p$  e  $\varphi(p)$ , respectivamente. Suponha que  $\varphi$  seja expressa nestas coordenadas por

$$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)),$$

e supondo que  $\alpha$  seja expressa por

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Então,  $\beta(t) = (\varphi \circ \alpha)(t) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t)))$ , e a expressão de  $\beta'(0)$  na base  $\{\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}\}$  é dada por

$$\beta'(0) = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} v'(0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} v'(0) \right).$$

Assim,  $\beta'(0)$  só depende das coordenadas  $(u'(0), v'(0))$  de  $w = \alpha'(0)$  na base  $\{X_u, X_v\}$ , ou seja,  $\beta'(0)$  é independente de  $\alpha$ . Além disso,  $d\varphi_p$  é uma aplicação linear de  $T_p S_1$  em  $T_{\varphi(p)} S_2$ , cuja matriz nas bases  $\{X_u, X_v\}$  de  $T_p S_1$  e  $\{\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}\}$  de  $T_{\varphi(p)} S_2$  é dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

□

## 2.4 Primeira Forma Fundamental

Nesta seção estudaremos o instrumento que permite calcular o comprimento entre curvas, ângulo entre vetores tangentes e área de uma região da superfície sem fazer menção ao espaço ambiente onde a superfície se encontra.

**Definição 2.10.** *Seja  $S$  uma superfície regular e  $T_p S$  o plano tangente a  $S$  no ponto  $p$ . A forma quadrática  $I_p$  definida por:*

$$\begin{aligned} I_p : T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\rightarrow I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|_p^2 \geq 0, \end{aligned}$$

*é chamada de primeira forma fundamental.*

Como podemos observar, a primeira forma fundamental é basicamente o produto interno usual de  $\mathbb{R}^3$  restrito aos vetores tangentes a  $S$ .

Vamos agora expressar a primeira forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$  associada a parametrização  $X(u, v)$  em  $p$ . Como um vetor tangente  $w \in T_p S$  é o vetor tangente a uma curva parametrizada  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , com  $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$ . Então, usando (2.2) obtemos

$$\begin{aligned}
 I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\
 &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p \\
 &= \langle X_u, X_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle_p u'v' + \langle X_v, X_v \rangle_p (v')^2 \\
 &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde os valores das funções envolvidas são calculados em  $t = 0$  e

$$\begin{aligned}
 E(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_u \rangle_p, \\
 F(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_v \rangle_p, \\
 G(u_0, v_0) &= \langle X_v, X_v \rangle_p,
 \end{aligned}$$

são chamados de coeficientes da primeira forma fundamental e satisfazem as seguintes propriedades:

1.  $E(u, v) > 0$  e  $G(u, v) > 0$  para todo  $(u, v)$ , pois os vetores  $X_u$  e  $X_v$  são não-nulos;
2.  $E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) > 0$ . De fato, se  $\theta$  é o ângulo entre  $X_u$  e  $X_v$ , temos que

$$\langle X_u, X_v \rangle_p^2 = \|X_u\|_p^2 \|X_v\|_p^2 \cos^2 \theta,$$

e

$$\|X_u \times X_v\|_p^2 = \|X_u\|_p^2 \|X_v\|_p^2 \sin^2 \theta.$$

Logo,

$$\|X_u \times X_v\|_p^2 + \langle X_u, X_v \rangle_p^2 = \|X_u\|_p^2 \|X_v\|_p^2.$$

Daí,

$$EG - F^2 = \|X_u\|_p^2 \|X_v\|_p^2 - \langle X_u, X_v \rangle_p^2 = \|X_u \times X_v\|_p^2 > 0. \tag{2.4}$$

De agora em diante, omitiremos o índice  $p$  na indicação do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Exemplo 2.11.** Um sistema de coordenadas para um plano  $P \subset \mathbb{R}^3$  passando por  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e contendo os vetores ortonormais  $w_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ,  $w_2 = (a_2, b_2, c_2)$  é parametrizado por  $X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^3$ . Logo,  $X_u = w_1$  e  $X_v = w_2$ . Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental são as funções constantes:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = 1, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = 1. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.12.** Seja  $X(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ ,  $0 < u < 2\pi$ ,  $-\infty < v < \infty$ , uma parametrização para o cilindro reto  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ . Então,

$$\begin{aligned} X_u &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \\ X_v &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental são as funções constantes:

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1, \\ F &= 0, \\ G &= 1. \end{aligned}$$

Agora que conhecemos a primeira forma fundamental podemos estudar questões geométricas sobre uma superfície regular, tais como o comprimento de arco, ângulo entre curvas e áreas de regiões na superfície. Assim, o comprimento de arco  $s$  de uma curva parametrizada  $\alpha : J \rightarrow S$  é dado por

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^t \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} dt.$$

Em particular, se  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  está contida em uma vizinhança coordenada correspondente à parametrização  $X(u, v)$ , segue de (2.3) que o comprimento de arco de  $\alpha$ , entre 0 e  $t$  é dada da seguinte forma

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt = \int_0^t \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} dt \\ &= \int_0^t \sqrt{E(u'(t))^2 + 2F u'(t)v'(t) + G(v'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Se  $w_1$  e  $w_2$  são vetores não-nulos tangentes a  $S$  em  $p$ , então o ângulo  $0 \leq \theta \leq \pi$  formado por  $w_1$  e  $w_2$  é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{\|w_1\| \|w_2\|}.$$

Para expressar  $\cos \theta$  em termos da primeira forma fundamental, observamos que  $w_1 + w_2$  é um vetor tangente a  $S$  em  $p$  e

$$I_p(w_1 + w_2) = \langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle = \|w_1\|^2 + 2\langle w_1, w_2 \rangle + \|w_2\|^2 = I_p(w_1) + 2\langle w_1, w_2 \rangle + I_p(w_2).$$

Portanto,

$$\cos \theta = \frac{I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2)}{2\sqrt{I_p(w_1)I_p(w_2)}}.$$

Se duas curvas parametrizadas regulares  $\alpha : I \rightarrow S$ ,  $\beta : I \rightarrow S$  se intersectam em  $t = t_0$ , então o ângulo  $\theta$  com que as curvas se intersectam é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}.$$

Em particular, o ângulo  $\varphi$  das curvas coordenadas de uma parametrização  $X(u, v)$  é

$$\cos \varphi = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Portanto, podemos concluir que as curvas coordenadas de uma superfície se intersectam ortogonalmente se, e só se,  $F(u, v) = 0$  para todo  $(u, v)$ .

**Exemplo 2.13.** *Seja  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  a esfera unitária do Exemplo 2.2, parametrizada por*

$$X(\theta, \varphi) = (\text{sen}\theta \cos \varphi, \text{sen}\theta \text{sen}\varphi, \cos \theta), \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

*Logo,*

$$X_\theta = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \text{sen}\varphi, -\text{sen}\theta),$$

$$X_\varphi = (-\text{sen}\theta \text{sen}\varphi, \text{sen}\theta \cos \varphi, 0).$$

*Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental são as funções:*

$$E = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = 1.$$

$$F = \langle X_\theta, X_\varphi \rangle = 0.$$

$$G = \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle = \text{sen}^2\theta.$$

Então, o comprimento de arco de uma curva  $\alpha : I \rightarrow S$  contida na esfera, cujo o vetor tangente à esfera é  $\alpha'(t) = aX_\theta + bX_\varphi$ , é dada por

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} dt = \int_0^t \sqrt{\langle aX_\theta + bX_\varphi, aX_\theta + bX_\varphi \rangle} dt \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2 \langle X_\theta, X_\theta \rangle + 2ab \langle X_\theta, X_\varphi \rangle + b^2 \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle} dt \\ &= \int_0^t \sqrt{Ea^2 + 2Fab + Gb^2} dt = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2 \sin^2 \theta} dt. \end{aligned}$$

E o ângulo  $\varphi$  das curvas coordenadas da parametrização  $X(u, v)$  é dada por

$$\varphi = \arccos \frac{F}{\sqrt{EG}} = \arccos 0.$$

Assim,  $\varphi \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$ .

A seguir vamos definir a noção de área de uma região limitada de uma superfície regular, usando a primeira forma fundamental.

**Definição 2.11.** Um domínio (regular) de  $S$  é um subconjunto aberto e conexo de  $S$ , cuja fronteira é a imagem de um círculo por um homeomorfismo diferenciável (isto é, sua diferencial não se anula) que é regular exceto em um número finito de pontos.

Uma região de  $S$  é a união de um domínio com a sua fronteira.

**Definição 2.12.** Seja  $R \subset S$  uma região limitada de uma superfície regular, contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ . A área da região  $R$  é dada por

$$A(R) = \int \int_D \sqrt{EG - F^2} dudv = \int \int_D \|X_u \times X_v\| dudv,$$

onde  $E, F, G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental e a igualdade é consequência de (2.4).

A seguir enunciaremos o Teorema de Mudança de Variáveis para Integrais Duplas, que usaremos para mostrar que as áreas de regiões contidas em uma superfície regular independe da parametrização.

**Teorema 2.1** (Teorema de Mudança de Variáveis para Integrais Duplas). *Sejam  $f$  uma aplicação integrável sobre uma região fechada e limitada  $Q$  do plano  $uv$  e  $\bar{Q}$  uma região*

fechada e limitada do plano  $\bar{u}\bar{v}$ . Se  $h : \bar{Q} \rightarrow Q$  for uma aplicação bijetora com derivadas parciais contínuas em  $\bar{Q}$  e o Jacobiano  $J(h)$  de mudança de variável não se anula em  $\bar{Q}$ , então

$$\int \int_Q f(u, v) \, dudv = \int \int_{\bar{Q}} f(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})) |det J(h)| \, d\bar{u}d\bar{v}.$$

*Demonstração.* Consultar [15], página 252. □

**Proposição 2.10.** *A área de uma região independe da parametrização escolhida.*

*Demonstração.* Sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  e  $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = X \circ h(\bar{u}, \bar{v})$  uma reparametrização de  $X$  por  $h$ , onde  $h : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$  é uma mudança de coordenada, dada por  $h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$ . Sejam  $\bar{D} \subset \bar{U}$  e  $D \subset U$  regiões do plano tais que  $h$  é um difeomorfismo com  $h(\bar{D}) = D$ . Então, pelo Teorema de Mudança de Variáveis para Integrais Duplas, temos que

$$\int \int_{\bar{D}} \|\bar{X}_{\bar{u}} \times \bar{X}_{\bar{v}}\| \, d\bar{u}d\bar{v} = \int \int_D \|X_u \times X_v\| |det J(h)| \, dudv = \int \int_D \|X_u \times X_v\| \, dudv.$$

□

**Exemplo 2.14** (Área do Toro). *Seja  $T$  o toro de revolução do Exemplo 2.9, obtido girando círculo*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - a)^2 + z^2 = r^2, y = 0\}, \quad a > r > 0,$$

*em torno do eixo  $z$ .*

*Seja  $X : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow T$  uma parametrização de  $T$  dada por*

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

*que cobre o toro, exceto por um meridiano ( $v = 0$ ) e um paralelo ( $u = 0$ ). Então,*

$$X_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$$

e

$$X_v = (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0),$$

*Daí, os coeficientes da primeira forma fundamental são*

$$E(u, v) = r^2, \quad G(u, v) = (a + r \cos u)^2, \quad F(u, v) = 0$$

Portanto, considerando a região  $D_\varepsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0+\varepsilon \leq u \leq 2\pi-\varepsilon, 0+\varepsilon \leq v \leq 2\pi-\varepsilon\}$ , onde  $\varepsilon > 0$  é pequeno, temos que

$$\begin{aligned} A(X(D_\varepsilon)) &= \iint_{D_\varepsilon} \sqrt{EG - F^2} \, dudv \\ &= \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} r(r \cos u + a) \, dudv \\ &= r^2(2\pi - 2\varepsilon)(\text{sen}(2\pi - \varepsilon) - \text{sen}\varepsilon) + ra(2\pi - 2\varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(X(D_\varepsilon)) = 4\pi^2 ra.$$

## 2.5 Orientação de Superfícies e a Aplicação de Gauss

Nesta seção vamos discutir em que sentido e quando é possível orientar uma superfície regular e estudaremos a aplicação normal de Gauss, cuja variação desta dá origem ao conceito de curvatura que estudaremos na próxima seção.

**Definição 2.13.** *Sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  e  $p \in S$ , dizemos que um vetor de  $\mathbb{R}^3$  é normal a  $S$  em  $p$  se é ortogonal a  $T_p S$ , isto é, é ortogonal a todos os vetores tangentes a  $S$  em  $p$ .*

Como vimos na seção 2.3, fixada uma parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de uma superfície regular  $S$  em um ponto  $p \in S$ ,  $T_p S$  é um plano gerado pelos vetores  $X_u$  e  $X_v$ , logo existem exatamente dois vetores unitários normais a  $S$  em  $p$ . Assim, vamos escolher um vetor normal unitário a  $X(U)$  como sendo o vetor

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, \quad q \in X(U).$$

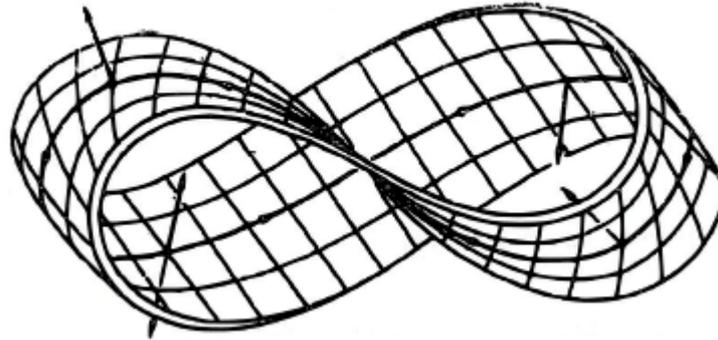
Assim, temos uma aplicação diferenciável  $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa a cada  $q \in X(U)$  um vetor normal e unitário  $N(q)$ .

**Definição 2.14.** *Sejam  $S$  uma superfície regular e  $V \subset S$  um conjunto aberto em  $S$ . Chamamos  $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  de campo diferenciável de vetores normais unitários em  $V$ .*

É importante salientar que nem toda superfície admite um campo diferenciável de vetores unitários definidos sobre toda a superfície. Por exemplo, sobre a faixa de Möbius

obtida quando colamos as duas extremidades de um retângulo alongado de papel de modo a fazer coincidir os vértices opostos.

Figura 2.11: A faixa de Möbius



Fonte: DO CARMO, 2005.

De maneira intuitiva, podemos percorrer uma vez o círculo médio (ver Figura 2.5): depois de uma volta, o campo normal unitário  $N$  retornaria como  $-N$ , mostrando que é possível passar de cima para baixo caminhando sobre a faixa de Möbius. Portanto, contradizendo a continuidade do campo.

**Definição 2.15.** *Uma superfície regular é orientável se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda a superfície. A escolha de  $N$  é chamada uma orientação de  $S$ .*

Uma orientação  $N$  em  $S$  induz uma orientação em cada plano tangente  $T_pS$ ,  $p \in S$ , da seguinte maneira: Defina a base  $v, w \in T_pS$  como sendo positiva se  $\langle v \times w, N \rangle$  é positivo. Então, o conjunto de todas as bases positivas de  $T_pS$  é uma orientação para  $T_pS$ . De fato, seja  $\{v, w\}$  uma base positiva de  $T_pS$  e  $\{v_1, w_1\}$  uma base de  $T_pS$ . Então, se

$$v_1 = a_1v + b_1w,$$

$$w_1 = a_2v + b_2w.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \langle v_1 \times w_1, N(p) \rangle &= \langle (a_1v + b_1w) \times (a_2v + b_2w), N(p) \rangle \\
 &= \langle a_1v \times a_2v + a_1v \times b_2w + b_1w \times a_2v + b_1w \times b_2w, N(p) \rangle \\
 &= \langle a_1v \times b_2w + b_1w \times a_2v, N(p) \rangle \\
 &= (a_1b_2 - b_1a_2) \langle v \times w, N(p) \rangle.
 \end{aligned}$$

Portanto, por (1.1) temos que  $\{v_1, w_1\}$  é uma base positiva de  $T_pS$  se  $a_1b_2 - b_1a_2 > 0$ , isto é, se  $\{v_1, w_1\}$  tem a mesma orientação de  $\{v, w\}$ .

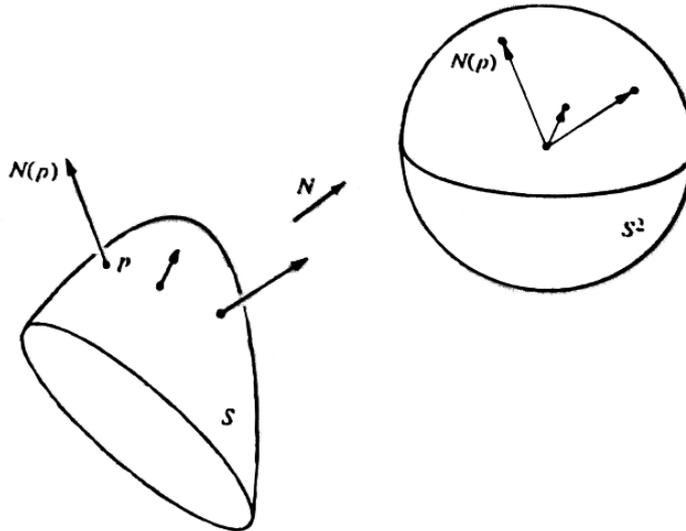
A partir de agora  $S$  denotará uma superfície regular orientável, onde foi escolhido uma orientação, diremos simplesmente que  $S$  é uma superfície com uma orientação  $N$ .

**Definição 2.16.** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  toma seus valores na esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação  $N : S \rightarrow S^2$ , assim definida é chamada a aplicação de Gauss de  $S$ .

Figura 2.12: Aplicação de Gauss



Fonte: DO CARMO, 2005.

A aplicação de Gauss é diferenciável, pois  $N$  exprime-se como funções diferenciáveis dos parâmetros  $\{X_u, X_v\}$ , e a diferencial  $dN_p$  de  $N$  em  $p \in S$  é uma aplicação linear de  $T_pS$  em  $T_{N(p)}S^2$ .

**Exemplo 2.15.** Considere a esfera unitária  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Se  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  é uma curva parametrizada em  $S^2$ , então  $2xx' + 2yy' + 2zz' = 0$ . Logo, o vetor  $(x, y, z)$  é normal à esfera no ponto  $(x, y, z)$ . Assim,  $\bar{N} = (x, y, z)$  e  $N = (-x, -y, -z)$  são campos de vetores normais unitários em  $S^2$ . Tomando  $N = (-x, -y, -z)$  como uma orientação para  $S^2$ , tem-se que  $N$  aponta para o centro da esfera.

Restrito à curva  $\alpha(t)$ , o vetor normal  $N(t) = (-x(t), -y(t), -z(t))$  é uma função vetorial de  $t$ , e portanto

$$dN((x'(t), y'(t), z'(t))) = N'(t) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t));$$

implicando que  $dN_p(v) = -v$  para todo  $p \in S^2$  e todo  $v \in T_p S^2$ . Observe que se escolhêssemos  $\bar{N}$  como um campo normal teríamos  $d\bar{N}_p = v$ .

**Proposição 2.11.** A diferencial  $dN : T_p S \rightarrow T_p S$  da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta<sup>1</sup>.

*Demonstração.* Como sabemos que  $dN_p$  é linear, basta verificar que  $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$  para base  $\{w_1, w_2\}$  de  $T_p S$ . De fato, seja  $X(u, v)$  uma parametrização de  $S$  em  $p$  e  $\{X_u, X_v\}$  a base associada de  $T_p S$ . Se  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ , temos

$$dN_p(\alpha'(0)) = dN_p(X_u u'(0) + X_v v'(0)) = \left. \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \right|_{t=0} = N_u u'(0) + N_v v'(0)$$

em particular,  $dN_p(X_u) = N_u$  e  $dN_p(X_v) = N_v$ . Como  $N$  é ortogonal a  $X_u$  e  $X_v$ , então  $\langle N, X_u \rangle = 0$  e  $\langle N, X_v \rangle = 0$ . Derivando com relação a  $v$  e  $u$ , obtemos

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0$$

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0.$$

Implicando,

$$\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N_v, X_u \rangle.$$

Assim,

$$\langle dN_p(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, dN_p(X_v) \rangle.$$

□

---

<sup>1</sup>Lembramos que uma aplicação linear  $A : E \rightarrow E$ , num espaço vetorial munido de produto interno, chama-se auto-adjunto quando  $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ , para quaisquer  $u, v \in E$ . Para mais detalhe recomendamos a referência [9].

O fato de  $dN : T_pS \rightarrow T_pS$  ser uma aplicação auto-adjunta nos permite associar a  $dN_p$  uma forma quadrática  $Q$  em  $T_pS$ , dada por  $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle, v \in T_pS$ . Usaremos a forma quadrática como sendo  $-Q$ .

## 2.6 Segunda Forma Fundamental e Curvatura Gaussiana

Nesta seção estenderemos a ideia de curvatura de uma curva (estudada na seção 1.2), para superfícies regulares, isto é, tentaremos medir o quão rapidamente uma superfície  $S$  se afasta do seu plano tangente  $T_pS$  em uma vizinhança de  $p$ .

**Definição 2.17.** A forma quadrática  $II_p$ , definida em  $T_pS$  por  $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ , é chamada a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ .

**Definição 2.18.** Seja  $C$  uma curva regular em  $S$  passando por  $p \in S$ ,  $k$  a curvatura de  $C$  em  $p$ , e  $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ , onde  $n$  é o vetor normal a  $C$  e  $N$  é o vetor normal a  $S$  em  $p$ . O número  $k_n = k \cos \theta$  é chamado a curvatura normal de  $C \subset S$  em  $p$ .

Agora daremos uma interpretação geométrica da Segunda Forma Fundamental  $II_p$ . Seja  $C$  uma curva regular em  $S$ , com  $p \in S$  e  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $\alpha(0) = p$ . Indicando por  $N(s)$  a restrição do vetor normal  $N$  a curva  $\alpha(s)$  temos que

$$\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0, \forall s \in I.$$

Derivando a equação com relação a  $s$ , obtemos

$$\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle N(s), \alpha''(s) \rangle = 0,$$

implicando

$$\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle = -\langle N(s), \alpha''(s) \rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\
 &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\
 &= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\
 &= \langle N(0), k(0)n(0) \rangle \\
 &= k(0)\langle N(0), n(0) \rangle \\
 &= k_n(p).
 \end{aligned}$$

Assim, o valor da segunda forma fundamental  $II_p$  em um vetor unitário  $v \in T_pS$  é igual a curvatura normal de uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco passando em  $p$  e tangente a  $v$ . Como  $k_n$  só depende do vetor tangente, segue o seguinte resultado.

**Proposição 2.12** (Meusnier). *Todas as curvas de uma superfície  $S$  que têm, em um ponto  $p \in S$ , a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal.*

A proposição acima nos permite falar em curvatura normal ao longo de uma direção em  $p$ .

**Definição 2.19.** *Seja  $v \in T_pS$  um vetor unitário, a interseção de  $S$  com o plano contendo  $v$  e  $N(p)$  é chamada seção normal de  $S$  em  $p$  ao longo de  $v$ .*

Observe que em uma vizinhança de  $p$ , uma seção normal de  $S$  em  $p$  é uma curva regular plana em  $S$ , cujo o vetor normal  $n(p)$  é  $\pm N(p)$  ou zero, no caso em que  $k(p) = 0$ . Então,  $k(p)$  é o valor absoluto da curvatura normal segundo  $v$  em  $p$ . Assim, o valor absoluto da curvatura normal em  $p$  de uma curva  $\alpha(s)$  é igual à curvatura da seção normal de  $S$  em  $p$ , segundo  $\alpha'(0)$ .

**Exemplo 2.16.** *No plano  $P$  dado por  $ax + by + cz + d = 0$ , todas as seções normais são retas, implicando que as curvaturas normais são nulas. O vetor normal unitário é dado por*

$$N = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Portanto, a segunda forma fundamental é identicamente nula em todos os pontos, o que confirma o fato de  $dN \equiv 0$ .

Como  $dN_p$  é uma aplicação linear auto-adjunta, então pelo Teorema Espectral<sup>2</sup> existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de autovetores de  $dN_p$  para  $T_pS$  tal que

$$\begin{aligned}dN_p(e_1) &= -k_1e_1; \\dN_p(e_2) &= -k_2e_2.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Além disso,  $k_1$  e  $k_2$  ( $k_1 \geq k_2$ ) são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental.

**Definição 2.20.** *As curvaturas principais em  $p$  são a curvatura normal máximo  $k_1$  e a curvatura normal mínima  $k_2$ ; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos autovetores  $e_1$  e  $e_2$  são chamadas direções principais em  $p$ .*

Vamos obter uma maneira para calcular a curvatura normal, conhecendo as curvaturas principais de  $S$  em  $p$ . Seja  $v \in T_pS$ , com  $\|v\| = 1$ , como  $\{e_1, e_2\}$  é uma base ortonormal positiva de  $T_pS$ , temos que  $dN_p(e_1) = -k_1e_1$  e  $dN_p(e_2) = -k_2e_2$ . Daí,

$$v = e_1 \cos \theta + e_2 \operatorname{sen} \theta,$$

onde  $\theta$  é o ângulo de  $e_1$  a  $v$  na orientação de  $T_pS$ . Logo,

$$\begin{aligned}k_n = II_p(v) &= -\langle dN_p(v), v \rangle \\&= -\langle dN_p(e_1 \cos \theta + e_2 \operatorname{sen} \theta), e_1 \cos \theta + e_2 \operatorname{sen} \theta \rangle \\&= \langle dN_p(e_1 \cos \theta) + dN_p(e_2 \operatorname{sen} \theta), e_1 \cos \theta + e_2 \operatorname{sen} \theta \rangle \\&= \langle e_1 k_1 \cos \theta + e_2 k_2 \operatorname{sen} \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \operatorname{sen} \theta \rangle \\&= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \operatorname{sen}^2 \theta,\end{aligned}$$

que é conhecida sob o nome de fórmula de Euler.

**Definição 2.21.** *Seja  $p \in S$  e seja  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de  $dN_p$  é chamado a curvatura Gaussiana  $K$  de  $S$  em  $p$ . O negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamado a curvatura média de  $S$  em  $p$ .*

De (2.5), podemos escrever

$$dN_p = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}.$$

---

<sup>2</sup>O Teorema Espectral é um dos resultados mais relevantes da Álgebra Linear e assegura que se  $A : E \rightarrow E$  e um operador auto-adjunto num espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, então existe uma base ortonormal em  $E$ , relativamente a qual a matriz de  $A$  e uma matriz diagonal  $\mathbf{a} = [a_{ij}]$ , isto é,  $a_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ . A demonstração do Teorema Espectral, encontra-se na referência [9].

Então,

$$K = \det(dN_p) = (-k_1)(-k_2) = k_1k_2,$$

e

$$H = -\frac{1}{2} \text{traço}(dN_p) = -\frac{1}{2}(-k_1 - k_2) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

A partir de agora vamos considerar que todas as parametrizações  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  são compatíveis com a orientação  $N$  de  $S$ , isto é,

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|},$$

e vamos obter fórmulas explícitas para o cálculo da curvatura gaussiana, primeiramente vamos calcular a segunda forma fundamental em um vetor  $\alpha'(t)$  em  $T_pS$ . Sejam  $X(u, v)$  uma parametrização em um ponto  $p \in S$  de uma superfície  $S$ , com  $X(q) = p$ , e  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ .

O vetor tangente a  $\alpha(t)$  em  $p$  é  $\alpha'(t) = X_u(q)u'(t) + X_v(q)v'(t)$  e

$$dN_p(\alpha'(t)) = N'_p(u(t), v(t)) = N_u(q)u'(t) + N_v(q)v'(t).$$

Para simplificar a notação, todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto  $p$ . Como  $N_u$  e  $N_v$  pertencem a  $T_pS$ , então

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v, \\ N_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Daí,

$$\begin{aligned} dN(\alpha') &= (a_{11}X_u + a_{21}X_v)u' + (a_{12}X_u + a_{22}X_v)v' \\ &= (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v, \end{aligned}$$

isto é,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

Mostrando que, na base  $\{X_u, X_v\}$ ,  $dN$  é dada pela matriz  $(a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ . Note que esta matriz não é necessariamente simétrica, a não ser que  $\{X_u, X_v\}$  seja uma base

ortonormal, pois neste caso

$$\begin{aligned}
a_{21} &= \langle a_{21}X_v, X_v \rangle \\
&= \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle \\
&= \langle N_u, X_v \rangle \\
&= \langle dN(X_u), X_v \rangle \\
&= \langle X_u, dN(X_v) \rangle \\
&= \langle X_u, N_v \rangle \\
&= \langle X_u, a_{12}X_u + a_{22}X_v \rangle \\
&= a_{12}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

A expressão da segunda forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$  é dada por

$$\begin{aligned}
II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\
&= -(\langle N_u, X_u \rangle (u')^2 + \langle N_u, X_v \rangle (u')(v') + \langle N_v, X_u \rangle (u')(v') + \langle N_v, X_v \rangle (v')^2).
\end{aligned}$$

De (2.6) temos que  $\langle N_v, X_u \rangle = \langle N_u, X_v \rangle$ , então

$$II_p(\alpha') = -(\langle N_u, X_u \rangle (u')^2 + 2\langle N_u, X_v \rangle (u')(v') + \langle N_v, X_v \rangle (v')^2),$$

Vamos denotar por

$$\begin{aligned}
e &= -\langle N_u, X_u \rangle; \\
f &= -\langle N_v, X_u \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle; \\
g &= -\langle N_v, X_v \rangle.
\end{aligned}$$

Que chamaremos de coeficientes da segunda forma fundamental. Portanto,

$$II_p(\alpha') = e(u')^2 + 2f(u')(v') + g(v')^2.$$

Agora vamos obter os valores de  $a_{ij}$  em termos dos coeficientes  $e, f, g$ . A partir de (2.6)

$$\begin{aligned}
-e &= \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\
-f &= \langle N_v, X_u \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\
-f &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\
-g &= \langle N_v, X_v \rangle = \langle a_{21}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$ .

As relações em (2.8) podem ser expressas na forma matricial por

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

Como

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & -eF + fE \\ fG - gF & -fF + gE \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Portanto, a expressão para os coeficientes  $(a_{ij})$  da matriz de  $dN$  na base  $\{X_u, X_v\}$  são dados por

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2},$$

$$a_{12} = \frac{eF - fE}{EG - F^2},$$

$$a_{21} = \frac{gF - fG}{EG - F^2},$$

$$a_{22} = \frac{fF - gG}{EG - F^2}.$$

As equações em (2.6) com os valores obtidos acima são conhecidas como as equações de Weingarten.

D (2.9), obtemos que

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (2.10)$$

Para calcular a curvatura média, lembramos que o traço de uma matriz quadrática é dada pela soma dos elementos da diagonal principal, então

$$H = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (2.11)$$

Como  $k_1 + k_2 = 2H$  e  $k_1 k_2 = K$ , tem-se que  $k_1$  e  $k_2$  são as soluções para a equação

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

donde segue que  $k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$  e  $k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$ .

**Exemplo 2.17.** *Vamos calcular a curvatura Gaussiana dos pontos do toro, cobertos pela parametrização*

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \operatorname{senu}, r \operatorname{senu}), \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Observe que

$$\begin{aligned} X_u &= (-r \operatorname{senu} \cos v, -r \operatorname{senu} \operatorname{senu}, r \cos u), \\ X_v &= (-(a + r \cos u) \operatorname{senu}, (a + r \cos u) \cos v, 0), \\ X_{uu} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \operatorname{senu}, -r \operatorname{senu}), \\ X_{uv} &= (r \operatorname{senu} \operatorname{senu}, -r \operatorname{senu} \cos v, 0), \\ X_{vv} &= (-(a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \operatorname{senu}, 0). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = r^2, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = (a + r \cos u)^2. \end{aligned}$$

Como  $\|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG - F^2}$ , temos

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_{uu} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{r^2(a + r \cos u)}{r(a + r \cos u)} = r$$

$$f = \langle N, X_{uv} \rangle = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uv})}{r(a + r \cos u)} = 0$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{\det(X_u, X_v, X_{vv})}{r(a + r \cos u)} = \cos u(a + r \cos u).$$

Assim,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}.$$

**Exemplo 2.18.** Vamos determinar a curvatura de uma superfície dada como o gráfico de uma função diferenciável  $z = h(x, y)$ , onde  $(x, y)$  pertence a um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Para obter tais fórmulas, primeiramente parametrizamos a superfície por

$$X(u, v) = (u, v, h(u, v)) \quad (u, v) \in U,$$

onde  $u = x, v = y$ . Logo,

$$X_u = (1, 0, h_u),$$

$$X_v = (0, 1, h_v),$$

$$X_{uu} = (0, 0, h_{uu}),$$

$$X_{uv} = (0, 0, h_{uv}),$$

$$X_{vv} = (0, 0, h_{vv}).$$

Assim,

$$N(x, y) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}},$$

é um campo normal unitário sobre a superfície, e os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental nessa orientação são dados por

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + h_u^2,$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + h_v^2,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = h_u h_v,$$

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$f = \langle N, X_{uv} \rangle = \frac{h_{xy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{h_{yy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

*A partir das expressões acima, podemos obter a curvatura Gaussiana e a curvatura média:*

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)},$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{(1 + h_x^2)h_{yy} - 2h_xh_yh_{xy} + (1 + h_y^2)h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)}$$

# Capítulo 3

## Geometria Intrínseca das Superfícies

Entende-se por geometria intrínseca, cálculos métricos (comprimento, ângulo e área) sem sair da superfície, isto é, conhecendo apenas a primeira forma fundamental. Neste capítulo veremos que a curvatura Gaussiana é um conceito intrínseco, ou seja, é possível expressá-la em função da primeira forma fundamental.

### 3.1 Isometria

Como visto nos Exemplos 2.11 e 2.12, a primeira forma fundamental do plano e do cilindro são iguais, isto é, em termos da geometria intrínseca o plano e o cilindro se comportam localmente da mesma maneira. Intuitivamente, é possível cortar um cilindro ao longo de sua geratriz e desenrolá-lo até torna-se um plano. Nesta seção estabeleceremos de maneira precisa o que significa dizer que duas superfícies apresentam a mesma primeira forma fundamental.

**Definição 3.1.** *Duas superfícies regulares  $S$  e  $\bar{S}$  são difeomorfas se existe uma aplicação diferenciável  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  com uma inversa diferenciável  $\varphi^{-1} : \bar{S} \rightarrow S$ . Uma tal  $\varphi$  é chamada um difeomorfismo de  $S$  em  $\bar{S}$ .*

De agora em diante  $S$  e  $\bar{S}$  denotaram superfícies regulares.

**Definição 3.2.** *Uma aplicação  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  é uma isometria se  $\varphi$  é um difeomorfismo e para todo  $p \in S$  e todos os pares  $w_1, w_2 \in T_p S$ , temos*

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d_{\varphi_p}(w_1), d_{\varphi_p}(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Diz-se então que as superfícies  $S$  e  $\bar{S}$  são isométricas.

**Proposição 3.1.** *Um difeomorfismo  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  é uma isometria se, e somente se, a diferencial  $d\varphi$  preserva a primeira forma fundamental.*

*Demonstração.* Supondo que  $\varphi$  é uma isometria, então

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)),$$

para todo  $w \in T_pS$ . Reciprocamente, supondo que  $\varphi$  preserva a primeira forma fundamental. Logo, para todo  $w \in T_pS$ , tem-se

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)).$$

Daí,

$$\begin{aligned} I_p(w_1 + w_2) = \|w_1 + w_2\|_p^2 &= \|w_1\|_p^2 + 2\langle w_1, w_2 \rangle_p + \|w_2\|_p^2 \\ &= I_p(w_1) + 2\langle w_1, w_2 \rangle_p + I_p(w_2) \\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) + 2\langle w_1, w_2 \rangle_p + I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I_p(w_1 + w_2) &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1 + w_2)) = \|d\varphi_p(w_1 + w_2)\|_{\varphi(p)}^2 = \|d\varphi_p(w_1) + d\varphi_p(w_2)\|_{\varphi(p)}^2 \\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) + 2\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)} + I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)). \end{aligned}$$

Implicando que  $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$ , e portanto,  $\varphi$  é uma isometria.  $\square$

**Definição 3.3.** *Uma aplicação  $\varphi : V \rightarrow \bar{S}$  de uma vizinhança  $V$  de  $p \in S$  é uma isometria local em  $p$  se existe uma vizinhança  $\bar{V}$  de  $\varphi(p) \in \bar{S}$  tal que  $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$  é uma isometria. Se existe uma isometria local em  $\bar{S}$  para todo ponto  $p \in S$ , diz-se que a superfície  $S$  é localmente isométrica a  $\bar{S}$ .  $S$  e  $\bar{S}$  são localmente isométricas se  $S$  é localmente isométrica a  $\bar{S}$  e  $\bar{S}$  é localmente isométrica a  $S$ .*

É claro que se  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  é um difeomorfismo e uma isometria localmente para todo ponto  $p \in S$ , então  $\varphi$  é uma isometria globalmente.

No exemplo a seguir, mostraremos que pode acontecer de duas superfícies serem localmente isométricas sem serem globalmente isométricas.

**Exemplo 3.1.** Sejam  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2$  uma parametrização para o plano  $xy$  e  $\bar{X} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\bar{X}(u, v) = (\cos u, \text{senu}, v)$ , uma parametrização do cilindro  $C : x^2 + y^2 = 1$ . Logo, os coeficientes da primeira forma são:  $E = G = 1$ ,  $F = 0$ ,  $\bar{E} = \bar{G} = 1$  e  $\bar{F} = 0$ , respectivamente.

Vamos mostrar que  $\varphi : \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{X}(U)$  é uma isometria local, onde  $U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ . De fato, cada vetor  $w$  tangente ao cilindro em um ponto  $p \in \bar{X}(U)$  é tangente a uma curva  $\bar{X}(u(t), v(t))$ , onde  $(u(t), v(t))$  é uma curva em  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Assim,  $w$  pode ser escrito como

$$w = \bar{X}_u u' + \bar{X}_v v'.$$

Por outro lado,  $d\varphi(w)$  é tangente à curva

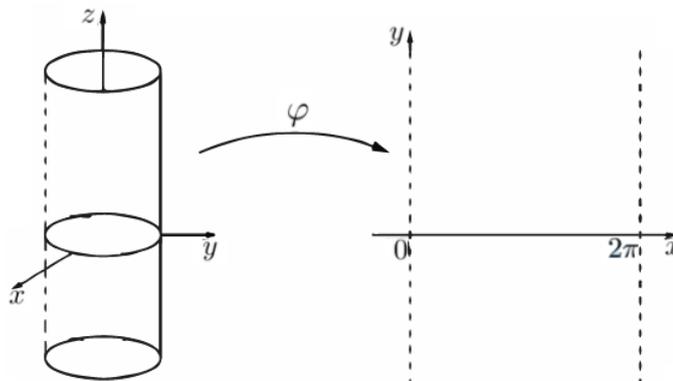
$$\varphi(\bar{X}(u(t), v(t))) = X(u(t), v(t)).$$

Implicando que,  $d\varphi = X_u u' + X_v v'$ . Como  $E = \bar{E}$ ,  $F = \bar{F}$ ,  $G = \bar{G}$ , obtemos

$$\begin{aligned} I_p(w) = \langle w, w \rangle &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2 \\ &= \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F} u' v' + \bar{G}(v')^2 \\ &= \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle \\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)). \end{aligned}$$

Portanto, o plano e o cilindro são localmente isométricos.

Figura 3.1: Isometria entre o cilindro e o plano



Observe que o plano não é globalmente isométrico ao cilindro, pois qualquer curva simples fechada no plano pode ser encolhida continuamente até tornar-se um ponto sem

deixar o plano. Tal propriedade é preservada por homeomorfismos. No entanto, o cilindro não possui essa propriedade, o que contradiz a existência de um homeomorfismo entre o plano e o cilindro.

A proposição a seguir generaliza o argumento dado acima para obter um critério para isometrias locais em termos de coordenadas locais.

**Proposição 3.2.** *Suponha a existência de parametrizações  $X : U \rightarrow S$  e  $\bar{X} : U \rightarrow \bar{S}$  tais que  $E = \bar{E}$ ,  $F = \bar{F}$ ,  $G = \bar{G}$  em  $U$ . Então a aplicação  $\varphi = \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{S}$  é uma isometria local.*

*Demonstração.* Observe que  $\varphi$  é um difeomorfismo, pois é uma composição de difeomorfismos, logo basta mostrar que  $\varphi$  preserva a primeira forma fundamental. Sejam  $p \in X(U)$  e  $w \in T_p S$ , então  $w$  é tangente a uma curva diferencial  $X(\alpha(t))$  em  $t = 0$ , onde  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  é uma curva em  $U$ , tal que  $\alpha(0) = p$ . Assim,  $w$  pode ser escrito como

$$\alpha'(0) = w = X_u u' + X_v v'.$$

Por definição, o vetor  $d\varphi_p(w)$  é tangente à curva  $\bar{X}(\alpha(t))$  em  $t = 0$ . Logo,

$$d\varphi(w) = \bar{X}_u u' + \bar{X}_v v'.$$

Daí,

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle = E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2, \\ &= \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F} u' v' + \bar{G}(v')^2 \\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)). \end{aligned}$$

Assim,  $\varphi$  é uma isometria local. □

A seguir vamos mostrar que o catenóide e o helicóide são localmente isométricos.

**Exemplo 3.2.** *Vimos no Exemplo 2.4 que uma parametrização para o catenóide é dada por*

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av),$$

onde  $0 < u < 2\pi$ , e  $-\infty < v < \infty$ . Daí, os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$E = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = (a^2(1 + \sinh^2 v)) = a^2 \cosh^2 v.$$

Pelo Exemplo 2.2 uma parametrização para o helicóide é dada por

$$\bar{X}(u, v) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \operatorname{sen} \bar{u}, a\bar{u}), \quad 0 < \bar{u} < 2\pi, \quad -\infty < \bar{v} < \infty.$$

Fazendo a seguinte mudança de parâmetro:

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = a \operatorname{senh} v, \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

que é possível, pois  $\bar{X}$  é bijetora e o Jacobiano

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \cosh v \end{vmatrix} = a \cosh v,$$

nunca se anula. Assim, a nova parametrização do helicóide é

$$\bar{X}(u, v) = (a \operatorname{senh} v \cos u, a \operatorname{senh} v \operatorname{sen} u, au).$$

Daí,

$$\bar{X}_u = (-a \operatorname{senh} v \operatorname{sen} u, a \operatorname{senh} v \cosh u, a),$$

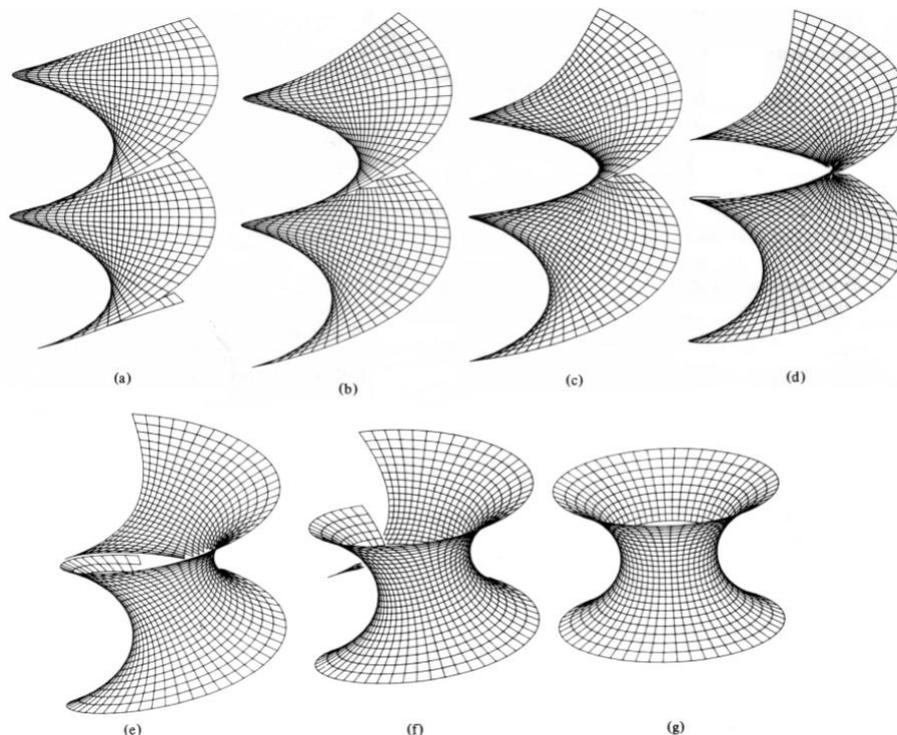
$$\bar{X}_v = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \operatorname{sen} u, 0).$$

Então os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$\bar{E} = a^2 \cosh^2 v, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = a^2 \cosh^2 v.$$

Assim, pela proposição anterior temos que o catenóide e o helicóide são localmente isométricos.

Figura 3.2: Transformação do Helicóide no Catenóide



Fonte: DO CARMO, 2005.

## 3.2 Símbolos de Christoffel

Denotaremos por  $S$ , uma superfície regular orientável e orientada. Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização na orientação de  $S$ . Como no estudo de curvas para cada ponto associamos o triedro de Frenet  $\{t, n, b\}$ . No caso de superfícies é possível associar a cada ponto de  $X(U)$  um triedro natural dado pelos vetores  $X_u, X_v$  e  $N$ .

Expressando as derivadas dos vetores  $X_u, X_v$  e  $N$  na base  $\{X_u, X_v, N\}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N; \\
 X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N; \\
 X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \bar{L}_2 N; \\
 X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N; \\
 N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v; \\
 N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Onde os  $a_{ij}, i, j = 1, 2$  foram obtidos na Seção 2.6 e os outros coeficientes serão determinados. Os coeficientes  $\Gamma_{i,j}^k, i, j, k = 1, 2$  são chamados símbolos de Christoffel de  $S$  na

parametrização  $X$ . Como  $X_{uv} = X_{vu}$ , concluímos que  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$  e  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ , isto é, os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices inferiores.

Tomando o produto interno das quatro primeiras relações de (3.1) com  $N$ , obtemos que:

$$L_1 = \langle N, X_{uu} \rangle = e, \quad L_2 = \langle N, X_{uv} \rangle = f, \quad \bar{L}_2 = \langle N, X_{vu} \rangle = f, \quad L_3 = \langle N, X_{vv} \rangle = g,$$

onde  $e, f, g$  são os coeficientes da segunda forma fundamental de  $S$ .

Para determinar os símbolos de Christoffel em termos da primeira forma fundamental, tomamos o produto interno nas quatro primeiras relações em (3.1) com  $X_u$  e  $X_v$ , e obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u; \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v. \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_v; \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u. \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u; \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_v. \end{cases} \quad (3.4)$$

Observe que para cada par de equações o determinante é diferente de zero, pois  $EG - F^2 > 0$ . Assim, os três sistemas acima são possíveis e determinados. Vamos resolver o sistema (3.2). Como

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 EG + \Gamma_{11}^2 FG = \frac{1}{2} E_u G; \\ \Gamma_{11}^1 F^2 + \Gamma_{11}^2 GF = F_u F - \frac{1}{2} E_v F. \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 EF + \Gamma_{11}^2 F^2 = \frac{1}{2} E_u F; \\ \Gamma_{11}^1 EF + \Gamma_{11}^2 EG = EF_u - \frac{1}{2} EE_v. \end{cases}$$

Então,

$$(EG - F^2)\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} E_u G - F_u F + \frac{1}{2} E_v F,$$

e

$$(EG - F^2)\Gamma_{11}^2 = EF_u - \frac{1}{2}E_uF - \frac{1}{2}EE_v.$$

Implicando que

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{E_uG - 2F_uF - E_vF}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_v}{2(EG - F^2)}.\end{aligned}$$

Resolvendo os demais sistemas obtemos:

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}; \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}; \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}; \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que os símbolos de Christoffel são invariantes por isometrias, pois depende apenas dos coeficientes da primeira forma fundamental.

**Exemplo 3.3.** *Vamos calcular os símbolos de Christoffel para uma superfície de revolução parametrizada por  $X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{senu}, g(v))$ ,  $f(v) \neq 0$ .*

*Os coeficientes da primeira forma fundamental são:*

$$E = (f(v))^2, \quad F = 0, \quad G = (f'(v))^2 + (g'(v))^2,$$

*donde*

$$\begin{aligned}E_u &= 0, & E_v &= 2ff', \\ F_u &= F_v = 0, \\ G_u &= 0, & G_v &= 2(f'f'' + g'g''),\end{aligned}$$

Utilizando as equações obtidas anteriormente, obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u G - 2F_u F - E_v F}{2(EG - F^2)} = 0; \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} = \frac{ff'}{f^2} = \frac{f'}{f}; \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} = 0; \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_v}{2(EG - F^2)} = -\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}; \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} = 0; \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} = \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}.
\end{aligned}$$

### 3.3 O Teorema Egregium de Gauss

Antes de demonstrar o Teorema Egregium de Gauss, um dos teoremas mais importantes da Geometria Diferencial, vamos obter as relações entre os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais, para isto vamos derivar as relações obtidas em (3.1). Observe que

$$\begin{aligned}
(X_{uu})_v &= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + (L_1)_v N + L_1 N_v, \\
(X_{uv})_u &= (\Gamma_{12}^1)_u X_u + \Gamma_{12}^1 X_{uv} + (\Gamma_{12}^2)_u X_v + \Gamma_{12}^2 X_{vu} + (L_2)_u N + L_2 N_u. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.1) em (3.5) temos

$$\begin{aligned}
(X_{uu})_v &= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N) + (\Gamma_{11}^2)_v X_v \\
&+ \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N) + (L_1)_v N + L_1 (a_{12} X_u + a_{22} X_v) \\
&= X_u ((\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + L_1 a_{12}) + X_v ((\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + L_1 a_{22}) \\
&+ N (L_2 \Gamma_{11}^1 + L_3 \Gamma_{11}^2 + (L_1)_v),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(X_{uv})_u &= (\Gamma_{12}^1)_u X_u + \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N) + (\Gamma_{12}^2)_u X_v \\
&+ \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + L_2 N) + (L_2)_u N + L_2 (a_{11} X_u + a_{21} X_v) \\
&= X_u ((\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + L_2 a_{11}) + X_v ((\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + L_2 a_{21}) \\
&+ N (L_1 \Gamma_{12}^1 + L_2 \Gamma_{12}^2 + (L_2)_u).
\end{aligned}$$

Como  $(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$ , então igualando os coeficientes de  $X_v$ , e usado o fato que  $e = L_1$  e  $f = L_2$ , obtemos

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + fa_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u. \quad (3.6)$$

Implicando

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 &= ea_{22} - fa_{21} \\ &= e \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - f \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\ &= -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= -EK, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde  $K$  é a curvatura Gaussiana.

De forma análoga igualando  $X_u$  obtemos

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{11}^1 &= ea_{12} - fa_{11} \\ &= e \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) - f \left( \frac{fF - eg}{EG - F^2} \right) \\ &= F \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= FK. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Agora considerando  $(X_{vv})_u = (X_{vu})_v$  e aplicando o mesmo método utilizado em (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{22}^1)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 - (\Gamma_{21}^1)_v - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 &= fa_{12} - ga_{11} \\ &= f \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) - g \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \\ &= G \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= GK, \end{aligned} \quad (3.9)$$

e

$$\begin{aligned} (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^2 - (\Gamma_{21}^2)_v - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^2 &= fa_{22} - ga_{21} \\ &= f \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - g \left( \frac{ef - fE}{EG - F^2} \right) \\ &= -F \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= -FK, \end{aligned} \quad (3.10)$$

As expressões obtidas em (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10) são conhecidas como fórmulas de Gauss. Diante destes resultados podemos demonstrar o Teorema Egregium de Gauss.

**Teorema 3.1** (Egregium de Gauss). *A curvatura Gaussiana  $K$  de uma superfície é invariante por isometrias locais.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que dada uma isometria  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ , então  $K(p) = K(\varphi(p))$  para todo  $p \in S$ .

Sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  em  $p$  e  $\varphi : V \subset S \rightarrow \bar{S}$  uma isometria local (onde  $V \subset X(U)$  é uma vizinhança de  $p$ ), então,  $\bar{X} = \varphi \circ X$  é uma parametrização de  $\bar{S}$  em  $\varphi(p)$ . Daí,

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = \langle d\varphi(p)(X_u), d\varphi(p)(X_u) \rangle = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle = \bar{E}, \\ G &= \langle X_u, X_v \rangle = \langle d\varphi(p)(X_u), d\varphi(p)(X_v) \rangle = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_v \rangle = \bar{G}, \\ F &= \langle X_v, X_v \rangle = \langle d\varphi(p)(X_v), d\varphi(p)(X_v) \rangle = \langle \bar{X}_v, \bar{X}_v \rangle = \bar{F}. \end{aligned}$$

Assim, os respectivos símbolos de Christoffel coincidem, isto é,  $\Gamma_{ij}^k(u, v) = \bar{\Gamma}_{ij}^k(u, v)$  para todo  $(u, v) \in U$ . Assim, pelas fórmulas de Gauss,

$$K(p) = K(X(u, v)) = \bar{K}(\bar{X}(u, v)) = \bar{K}(\varphi(p))$$

Portanto, a curvatura Gaussiana é invariante por isometrias locais. □

É um importante fato que a curvatura Gaussiana, como foi definida na seção 2.6 a partir da segunda forma fundamental, acaba dependendo apenas da primeira forma fundamental.

A seguir estabeleceremos algumas consequências do Teorema Egregium de Gauss.

**Exemplo 3.4.** *Como foi demonstrado no exemplo 3.7, o catenoide é localmente isométrico ao helicóide. Logo pelo Teorema Egregium Gauss as curvaturas gaussianas são iguais em pontos correspondentes.*

**Exemplo 3.5.** *Como visto no exemplo 3.1, o plano e o cilindro são localmente isométricos. Segue do Teorema Egregium Gauss, que as curvaturas gaussianas são iguais em pontos correspondentes.*

**Exemplo 3.6.** *É impossível a existência de uma isometria local entre o plano e a esfera, pois a curvatura gaussiana do plano é nula, enquanto a da esfera é constante não nula. Este fato é de grande importância para a cartografia, ele implica que é impossível descrever com precisão um mapa da terra no papel.*

**Exemplo 3.7.** *O Teorema Egreguim só pode ser usado quando existe uma isometria (local) entre duas superfícies, de modo que a recíproca do Teorema não é verdadeira. De fato, sejam  $X(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, \log u)$ , com  $u > 0$  uma parametrização para o funil e  $Y(u, v) = (u \cos u, u \operatorname{sen} u, u)$  uma parametrização para o Helicóide dado no Exemplo 2.2. Então,*

$$\begin{aligned} X_u &= \left( \cos v, \operatorname{sen} v, \frac{1}{u} \right), \\ X_v &= (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0), \\ X_{uu} &= \left( 0, 0, -\frac{1}{u^2} \right), \\ X_{uv} &= (-\operatorname{sen} v, \cos v, 0), \\ X_{vv} &= (-u \cos v, -u \operatorname{sen} v, 0) \\ Y_u &= (\cos v, \operatorname{sen} v, 0), \\ Y_v &= (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 1), \\ Y_{uu} &= (0, 0, 0), \\ Y_{uv} &= (-\operatorname{sen} v, -\cos v, 0), \\ Y_{vv} &= (-u \cos v, -u \operatorname{sen} v, 0). \end{aligned}$$

*Implicando,*

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= (-\cos v, -\operatorname{sen} v, 0), \\ Y_u \times Y_v &= (\operatorname{sen} v, -\cos v, u). \end{aligned}$$

*Daí,*

$$\begin{aligned} N_X &= \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}(-\cos v, -\operatorname{sen} v, u), \\ N_Y &= \frac{Y_u \times Y_v}{\|Y_u \times Y_v\|} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}(\operatorname{sen} v, -\cos v, u). \end{aligned}$$

*Assim, os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental para a parametrização*

$X$  são:

$$\begin{aligned}E_X &= \frac{u^2 + 1}{u^2}, \\F_X &= 0, \\G_X &= u^2, \\e_X &= -\frac{1}{u\sqrt{u^2 + 1}}, \\f_X &= 0, \\g_X &= \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}}.\end{aligned}$$

E os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental para a parametrização  $Y$  são:

$$\begin{aligned}E_Y &= 1, \\F_Y &= 0, \\G_Y &= 1 + u^2, \\e_Y &= 0, \\f_Y &= -\frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}, \\g_Y &= 0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$K_X = \frac{e_X g_X - f_X^2}{E_X G_X - F_X^2} = -\frac{1}{(u^2 + 1)^2} = \frac{e_Y g_Y - f_Y^2}{E_Y G_Y - F_Y^2} = K_Y.$$

Por outro lado, não existe uma isometria local entre  $X$  e  $Y$ , pois os termos da primeira forma fundamental são diferentes.

# Considerações Finais

O trabalho apresentou um estudo dos conteúdos que são abordados em um curso introdutório de Geometria Diferencial, possibilitando um amadurecimento de alguns temas estudados durante o curso de graduação, em particular nas disciplinas de Análise, Álgebra Linear e Cálculo Diferencial. Além disso, contribui para despertar o interesse pela continuidade no estudo e na pesquisa nesta área.

# Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, Paulo Ventura. **Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária - IMPA, 2004.
- [2] BIEZUNER, Rodney Josué. **Geometria Diferencial**, 22 de dez. De 2015. 150 f. Notas de Aula.
- [3] BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. ed. 3. reimpr. São Paulo: Blucher, 2015.
- [4] BOLDRINI, Jose Luiz. **Álgebra Linear**. 3 ed. São Paulo: HARBRA, 1986.
- [5] DO CARMO, Manfredo Perdigão. **Elementos de Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro: Coleção Elementos de Matemática - UNB, 1971.
- [6] DO CARMO, Manfredo Perdigão. **Geometria das Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: Textos Universitários - Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [7] EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. Campinas: UNICAMP, 2008
- [8] KÜHNEL, Wolfgang. **Differential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds**. 2th ed. USA: American mathematical Society, 2005.
- [9] LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 9 ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária do IMPA, 2007.
- [10] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. vol. 2. 1 ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária do IMPA, 2004.
- [11] LIMA, Elon Lages. **Variedades Diferenciáveis**. Rio de Janeiro: Publicações Matemáticas do IMPA, 2007.

- [12] NUNES, Bruna. **Geometria Diferencial de Superfícies e o Teorema de Gauss-Bonnet**. 122 f.. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.
- [13] O'NEILL, Barrett. **Elementary Differential Geometry**. Rev. 2nd ed. USA: Academic Press, 2006.
- [14] REIS, Genésio Lima dos. **Geometria analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [15] RUDIN, Walter. **Principles of Mathematical Analysis**. 3. ed. New York: McGraw-Hill Book, 1976.
- [16] STEWART, James. **Cálculo**. Vol. 2. 5. ed. São Paulo: Thomson Pioneira, 2007.
- [17] TENENBLAT, Keti. **Introdução à geometria diferencial**. 2 ed. São Paulo: Blucher, 2008.
- [18] VALLADARES, Renato José Costa. **Introdução à geometria diferencial**. Niterói: UFF, 1979.