UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CAMPUS VI – POETA PINTO DO MONTEIRO
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

IIZAILMA NUNES DE LIMA

PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA ATRAVÉS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Monteiro
2016

Izailma Nunes de Lima

PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA ATRAVÉS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas – CCHE da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campus Monteiro, em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca

Monteiro
2016

L732p Lima, Izailma Nunes de.

Proposta de ensino-aprendizagem da trigonometria através de resolução de problemas [manuscrito] / Izailma Nunes de Lima. - 2016.

63 p. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em MATEMÁTICA) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2016.

"Orientação: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca, Departamento de Matemática".

1. Resolução de problemas. 2. Trigonometria. 3. Ensino de matemática. I. Título.

21. ed. CDD 516.24

Izailma Nunes de Lima

PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA ATRAVÉS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas – CCHE da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campus Monteiro, em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca

Resultado: Aprovado

Monteiro, 30 de Maio de 2016.

COMISSÃO EXAMINADORA

Dr. Roger Ruben Huaman Huanca
Orientador

Ms. José Luiz Cavalcante
Examinador

Rônero Márcio C. Domingos

Ms. Rônero Márcio Cordeiro Domingos
Examinador

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais João e Ivete pelo apoio e compreensão dedicados a mim durante este trabalho. E aos meus irmãos Izaildo e Izanete por todo o incentivo que deram e a coragem para continuar.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por ter me dado força, coragem e determinação para chegar até aqui.

Agradeço aos meus pais João e Ivete que sempre me ajudaram nessa longa caminhada, e pelos bons exemplos de coragem e superação que sempre me mostraram.

Aos meus irmãos Izaildo e Izanete que sempre me incentivaram, e principalmente, ao meu irmão que não me deixou desistir do curso.

A Rodrigo Leite, que me deu a primeira oportunidade de emprego e me estendeu a mão sempre que precisei.

Ao Prof. Dr. Roger Huanca por ter me aceitado como sua orientanda, pela confiança, apoio, compreensão e dedicação. Um orientador e educador que não mede esforços para fazer de nós verdadeiros professores de Matemática. Sou muito grata por tudo, e principalmente, pela sua amizade.

Aos professores e funcionários da Universidade Estadual da Paraíba, campus Monteiro.

A todos que fazem parte do PIBID coordenador, supervisor, escola e colegas.

Ao meu afilhado David, que nas horas em que eu estava mais triste ele sabia como me fazer sorrir novamente me ajudou a superar a imensa saudade que sinto do meu irmão.

A Carlos, que hoje se tornou muito mais que um amigo que nas horas que mais precisei sempre esteve ao meu lado lhe agradeço por tudo principalmente pelos melhores abraços e suas palavras de carinho.

A resolução de problemas está no âmago de toda
a Matemática.

LESTER JR.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta para o Ensino-Aprendizagem de Trigonometria através de Resolução de Problemas, buscando analisar possibilidades para aplicação futura em sala de aula. Além disso, a proposta apresentada poderá contribuir para o debate teórico de futuras pesquisas sobre o ensino de trigonometria através de Resolução de Problemas. Esta pesquisa é de caráter bibliográfico, pois visa apresentar um texto muito mais narrativo que descritivo e foram utilizados, como procedimentos metodológicos, leituras sobre Resolução de Problemas (ONUCHIC, 1999; ONUCHIC & ALLEVATO, 2005; VAN DE WALLE, 2009; ONUCHIC & ALLEVATO, 2011; ONUCHIC & HUANCA, 2013; ALLEVATO & ONUCHIC, 2014). Em relação a Trigonometria discutimos, brevemente a história da Trigonometria e como os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentam o ensino da Trigonometria. Analisamos dois livros didáticos, além de termos verificado como os conhecimentos trigonométricos estão sendo avaliados no Exame Nacional do Ensino Médio. As atividades propostas foram desenvolvidas para sala de aula, por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que tem o problema como ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, e aqui levamos em consideração o nosso entendimento sobre a aprendizagem da trigonometria, tratado no primeiro momento do trabalho. Com essa pesquisa esperamos que professores possam utilizar essa metodologia nas suas aulas.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Trigonometria. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This study aims to present a proposal for Trigonometry of Teaching and Learning through Problem Solving, trying to analyze possibilities for future application in the classroom. In addition, the proposal presented may contribute to the theoretical discussion of future research on Trigonometry teaching through Troubleshooting. This research is bibliographical, it aims to present a more narrative text descriptive and were used as methodological procedures, readings on Troubleshooting (Onuchic, 1999; Onuchic & ALLEVATO, 2005; Van de Walle, 2009; Onuchic & ALLEVATO 2011; Onuchic & HUANCA, 2013; ALLEVATO & Onuchic, 2014). Regarding Trigonometry discussed briefly the history of trigonometry and how the National Curriculum Parameters present teaching trigonometry. We analyzed two textbooks as well as see how the trigonometric knowledge are being evaluated at the National High School Exam. The activities proposed were developed for classroom through the Mathematics Teaching and Learning Assessment methodology through the Problem Solving, that has the problem as a starting point and guidance for learning new concepts and new mathematical content, and here we take into account our understanding of learning trigonometry, treated the first moment of the work. With this research we hope that teachers can use this methodology in their classes.

Keywords: Troubleshooting. Trigonometry. Mathematics Teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Com o presente trabalho pretendemos aprofundar um pouco mais os conhecimentos na área da Educação Matemática, pois acreditamos que o Ensino da Trigonometria através da Resolução de Problemas poderá suprir uma deficiência da formação inicial que, muitas vezes, não dá ênfase à Trigonometria, além da Geometria e nem à Resolução de Problemas como metodologia de ensino. Ao mesmo tempo, esta pesquisa bibliográfica poderá propiciar melhor compreensão de como ensinar Matemática sem enfatizar a repetição e a mecanização, estimulando atitudes de pensar, refletir, analisar e, efetivamente, compreender os conteúdos e saber usá-los.

A pesquisa que realizamos sobre Resolução de Problemas mostra que, embora este seja um tema muito frequente na Educação Matemática, ainda há muitas questões sobre ele a serem discutidas e analisadas. (ONUCHIC, 1999; ONUCHIC & ALLEVATO, 2005; VAN DE WALLE, 2009; ONUCHIC & ALLEVATO, 2011; ONUCHIC & HUANCA, 2013; ALLEVATO & ONUCHIC, 2014).

Nossa pesquisa trata de um estudo sobre Resolução de Problemas no ensino da Trigonometria. Já há vários trabalhos referindo-se à Resolução de Problemas e ao ensino da Trigonometria. O que ocorre é que, considerando a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, não há muitos estudos no Brasil.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) dizem que:

> Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.
> Todavia, tradicionalmente, os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos.
> A prática mais frequente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações (BRASIL, 1998, p. 39).

Nesse sentido, consideramos que esta citação é importante, pois destaca o papel da Resolução de Problemas na implementação de um ensino que possibilite que o aluno construa seu próprio conhecimento e não, simplesmente, reproduza e o mesmo que foi aplicado pelo professor.

Infelizmente, grande número de futuros professores não leem esses documentos oficiais e, entre aqueles que têm contato com esse material, muitos não entendem ou optam por não o seguirem nas suas profissões, principalmente para não terem que mudar o método. Essas orientações oficiais sugerem que a Resolução de Problemas deve ser utilizada como metodologia e trabalhada em sala de aula, mas para isso precisa, também, ser melhor compreendida.

Apoiados nessas ideias é que consideramos relevante apresentar uma proposta do TCC, de modo mais fundamentada, as experiências de ensino e, em nosso caso, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, particularmente em Trigonometria.

No que se refere à trigonometria, é uma das inquietações que tenho como futura professora. Durante as minhas experiências como estudante no Ensino Básico e no Curso Superior, tive muitas dificuldades na aprendizagem em relação a esse tema, muitas vezes não compreendia os conteúdos trigonométricos que eram desenvolvidos, nem a linguagem simbólica utilizada nesse conteúdo. Além disso, não conseguia entender a Trigonometria como uma ferramenta matemática capaz de resolver problemas contextualizados.

As minhas vivências com o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência - PIBID evidenciaram também que as dificuldades de aprendizagem dos alunos do Ensino Básico eram iguais as minhas. Ao participar do PIBID percebi que a Trigonometria é vista tanto por alunos do Ensino Médio quanto por alunos integrantes no Ensino Superior como um conteúdo difícil, sem sentido ou com poucas aplicações práticas e que requer o conhecimento de um extenso formulário para a utilização na resolução dos exercícios. Nas minhas experiências com o PIBID ouvi diversas vezes dos alunos que nas provas as questões de Trigonometria eram as mais difíceis e, muitas vezes, eles as deixavam em branco.

Ao longo das minhas intervenções com o PIBID e Estágio Supervisionado no Ensino Médio pude perceber diversas dificuldades apresentadas por muitos alunos, por exemplo: a) frequentemente muitos não conseguiam aplicar as razões trigonométricas na resolução de problemas, ou seja, em uma situação simples como calcular a altura de um prédio, sabendo a distância até um certo ponto no solo e o ângulo sob o qual se avista o topo de um prédio, a partir desse ponto, os alunos utilizavam seno ou cosseno ao invés da tangente, ou ainda, substituíam a tangente pelo valor do ângulo ($tg\ 30^o = 30$); b) decoravam os sinais de seno e de cosseno nos quadrantes do círculo trigonométrico, sem conseguir entender porque o seno é positivo no 2º quadrante, negativo no 3º, e assim por diante; c) não compreendiam o que era radiano, frequentemente escreviam igualdades parecidas com $sen\ 1 = 1$ ou $sen\ 0,5 = 30^o$; d) tentavam decorar as fórmulas de redução ao 1º quadrante para cada razão, ou seja, um total de nove fórmulas diferentes; e) não conseguiam estabelecer as principais diferenças ou semelhanças entre os gráficos de seno e cosseno; f) na resolução de equações trigonométricas, na maioria das vezes, esqueciam os valores de arcos simétricos que também eram soluções da equação.

Desse modo, optei por desenvolver um estudo sobre o ensino da Trigonometria, pois considero a Trigonometria um conteúdo rico e importante por abranger conhecimentos relativos à Álgebra e à Geometria, unindo esses dois ramos da Matemática: por exemplo, uma equação trigonométrica pode ser resolvida através da representação de suas possíveis soluções no círculo trigonométrico. Também é importante quanto às suas aplicações.

Ainda em relação a utilização da trigonometria, está o cálculo de distâncias inacessíveis, como altura de prédios, de montanhas, de satélites e de aviões, largura de rios e comprimentos de pontes. Na Física, algumas aplicações estão no cálculo do trabalho de uma força atuante no deslocamento de um corpo e no estudo de fenômenos ondulatórios. Na Medicina, o estudo da respiração humana, que é um fenômeno cíclico, pode ser feito através da modelagem com funções trigonométricas, assim como o estudo da pressão sanguínea e do ciclo menstrual. Pode-se citar ainda outros fenômenos cíclicos que podem ser estudados através de funções trigonométricas, como a oscilação periódica das marés e a variação das temperaturas anuais em determinada região.

Tendo como referência essas percepções e convicções, fizemos uma pesquisa bibliográfica e apresentamos uma proposta alternativa de ensino da Trigonometria com o objetivo de promover uma aprendizagem que envolvesse a compreensão dos conteúdos e a utilização correta do simbolismo matemático envolvido na questão, promovendo assim o raciocínio e a autonomia dos alunos na realização de tarefas e desenvolvendo sua capacidade de resolver situações-problema.

Assim, desenvolvemos um conjunto de atividades que compõem a proposta do Trabalho de Conclusão de Curso - TCC, a opção pela elaboração desta proposta, será embasada pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, tendo dois objetivos principais: testar uma alternativa didática que contribua para a melhoria do ensino, e auxilie futuras pesquisas referentes a este tema. Portanto, não foi nossa intenção elaborar apenas problemas relativos à aprendizagem e ao ensino, mas construir uma alternativa didática como uma sugestão de material para outros professores utilizarem com seus alunos, adaptando e alterando o que for preciso de acordo com suas necessidades.

A estrutura deste Trabalho de Conclusão de Curso compreende quatro capítulos. No capítulo 1 (Introdução), escrevemos a respeito das inquietações da pesquisadora, do interesse e da justificativa pelo documento oficial, além de apresentar brevemente a Resolução de Problemas e a Trigonometria.

No capítulo 2, desenvolvemos algumas considerações teóricas mais aprofundadas sobre Resolução de Problemas, sua importância e algumas concepções sobre seu ensino.

No capítulo 3, apresentamos um estudo do tema: o ensino da Trigonometria. São discutidas questões relativas ao ensino da Trigonometria no Ensino Básico, com o foco na abordagem do tema seguindo-os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN - EM) e a maneira como a Trigonometria é abordada no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Em seguida, apresentamos a análise de dois livros didáticos do Ensino Médio.

Apresentamos no capítulo 4 uma proposta do TCC utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em sala de aula, visando a Trigonometria. Esperamos que esta proposta apresente reflexões sobre a experiência de ensino: os benefícios que consideramos que a experiência pode trazer para a aprendizagem dos alunos, as dificuldades que podem surgir e o que poderia ser melhorado, tendo em vista a aplicação das atividades planejadas para 11 encontros.

Finalmente, elaboramos as considerações, esboçando algumas conclusões que construímos a partir da pesquisa bibliográfica e indicamos novos estudos que podem ser realizados para ampliar e aprofundar o que obtivemos com a investigação que relatamos no presente TCC.

CAPÍTULO 2

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo apresentamos um estudo sobre Resolução de Problemas focando sua importância para o ensino de Matemática, em especial para o ensino de Trigonometria e algumas concepções que evidenciam o ensino de Matemática sobre, para e através da Resolução de Problemas.

2.1. Definições sobre o que é Problema

Procurando a palavra problema, no dicionário (HOUAISS, 2009) vimos que algumas definições para problemas são: assunto controverso, que pode ser objeto de pesquisas científicas ou discussões acadêmicas; questão social que traz transtornos e que exige grande esforço e determinação para ser solucionado; obstáculo, dificuldade que desafia a capacidade de solucionar de alguém, entre outros.

Vianna (2002) diz que, alguém está diante de um problema quando defronta-se com uma questão para a qual não sabe dar resposta ou quando está diante de uma situação que não sabe resolver usando os conhecimentos de que já dispõe; quando tem uma questão para resolver; quando quer ter uma resposta para essa questão, mas não tem, previamente, essa resposta. Nesse sentido, o autor considera que um problema é uma situação em que um sujeito é solicitado a realizar uma tarefa para a qual não possui um método de resolução determinado. Vianna diz, ainda, que se a realização da tarefa não for desejada pelo sujeito a situação não pode ser considerada um problema e que é problema tudo o que, de uma maneira ou de outra, implica da parte do sujeito a construção de uma resposta ou de uma ação que produza certo efeito.

Também o autor diferencia problema de exercício, considerando que:

> [...] questões rotineiras não podem ser consideradas como problemas... tais questões são meros exercícios, como os que proliferam na maioria dos livros didáticos. Há um aspecto muito importante que é comum a todas as "definições", e que nada tem a ver com o conteúdo de uma determinada disciplina; trata-se do "desejo": o sujeito precisa ter interesse, precisa estar seduzido pela questão, precisa ter necessidade de chegar a uma resposta (VIANNA, 2002, p. 403).

Nesse mesmo sentido, Vale e Pimentel (2004, p. 12) definem problema "como uma situação para a qual não se dispõe, à partida, de um procedimento que nos permita determinar a solução e coloca a Resolução de Problemas como um conjunto de ações tomadas para resolver essa situação". Assim compreendemos, que só temos problemas se não sabemos como chegar até a solução, pois um exercício resolve-se por processos mecanizados e repetitivos, mas que essa classificação problema/exercício depende de quem a resolve, pois problema para um pode ser exercício para outro.

Concordando com os autores, consideramos que um exercício nem sempre é um problema. Para que uma tarefa se constitua de fato, num problema é necessário que o aluno busque informações e meios de que ainda não dispõem para chegar ao objetivo pretendido e responder ao problema. Por outro lado, no exercício, ele apenas aplica o que já aprendeu, fixa um conhecimento ou treina algum procedimento. Também, percebemos que o que essencialmente precisa acontecer para que uma atividade possa ser qualificada como um problema é que o aluno tenha que buscar elementos para resolvê-lo e que tenha interesse em fazer isso.

Já Onuchic (1999, p. 215) explicita sua compreensão sobre o que é um problema: "[...] é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver".

Embora usualmente se faça relação entre um problema e uma situação prática do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, a Resolução de Problemas é vista como uma atividade realizada a partir de uma situação desafiadora, não necessariamente ligada a problemas ou a questões do mundo real. Nesse sentido, esse tipo de questão pode ser eficiente para despertar o interesse e dotar de sentido os conteúdos a serem aprendidos pelos alunos.

Ressaltando que os jovens e adultos reconhecem que a Matemática é importante, mas poucos a compreendem, Van de Walle (2009) disse que, normalmente, o ensino se dá de uma maneira tradicional onde o professor começa com uma explicação de um tema que esteja em um livro didático e, logo após, propõe os exercícios referentes àquele conteúdo, oferecendo um ensino de Matemática que recompensa a aprendizagem de regras e favorece poucas oportunidades para a construção do conhecimento dos alunos.

Esse autor, contrapondo-se a esse processo tradicional de ensinar Matemática, analisa que o papel do professor é criar um ambiente onde haja um espírito de investigação, de confiança e de expectativa para que os alunos sejam apresentados a problemas de fato, ou seja, a questões que não se constituam em meras aplicações de conhecimentos previamente determinados, mas situações que exijam a busca de soluções por eles mesmos, para que possam testar suas ideias, fazer conjecturas, desenvolver raciocínios e apresentar explicações. Nesse sentido, os alunos devem resolver problemas não para aplicar Matemática, mas para aprender Matemática.

Vila e Callejo (2006), destacando o papel da Resolução de Problemas na Matemática escolar e considerando-a como um meio de auxiliar os alunos a aprender a pensar, consideram três elementos essenciais envolvidos na resolução de problemas: a tarefa, o destinatário (aluno) e o professor. (1) A tarefa não pode ser, simplesmente, uma atividade que exige a identificação de uma estrutura Matemática supostamente aprendida; (2) Quanto ao aluno, pode-se perceber a diferença de dificuldade que tal tarefa pode representar para um ou outro resolvedor, de modo que uma tarefa pode ser um problema para um aluno e não ser para outro; e (3) Finalmente a configuração da tarefa como problema, depende do objetivo que o professor tem com a sua proposição, levando-a a ser inserida numa escala exercício-problema.

2.2. A Resolução de Problemas no contexto da Educação Matemática

No Brasil, vários estudos voltados à Resolução de Problemas no contexto da Educação Matemática, em todos os níveis de ensino, vêm sendo desenvolvidos e orientados há vários anos pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic. Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2005), Onuchic e Allevato (2011), Onuchic e Huanca (2013), Onuchic e Huanca (2014), Allevato e Onuchic (2014) assim como outros trabalhos publicados pelos autores, destacam que a necessidade e a forma de trabalhar com Resolução de Problemas modificaram-se de modo que, para caracterizá-la, é preciso situá-la historicamente. Em uma publicação mais recente, Onuchic e Huanca dizem que:

> [...] discussões na Educação Matemática mostram necessidade de adequar o trabalho escolar a novas tendências que levem a uma melhor maneira de ensinar [...] Investigações sistemáticas sobre Resolução de Problemas e suas implicações curriculares tiveram início na década de 1970. Esses anos marcaram uma preocupação com um currículo de matemática projetado, inicialmente, para produzir um aumento no escore de testes de habilidades básicas. No fim dessa década, a Resolução de Problemas na Educação Matemática emerge, ganhando espaço no mundo inteiro, refletindo uma tendência de reação a caracterizações anteriores que a viam como um conjunto de fatos, um domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade de resolução de problemas como uma coordenação complexa e simultânea de vários níveis (ONUCHIC; HUANCA, 2014, p.11).

Por outro lado, os PCN (BRASIL,1998) indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade Matemática e discutem caminhos para fazer Matemática na sala de aula. Também tornam claro o papel da Matemática no Ensino Básico pela sugestão de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumento para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.

O mesmo documento destaca que, mesmo no ensino atual, a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva de Resolução de Problemas, quando é incorporada no programa, aparece como um item isolado. Costuma ser desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos e que tradicionalmente.

> A prática mais frequente no ensino de Matemática tem sido aquela em que o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupõe que o aluno aprenda pela reprodução. Assim, considera-se que uma reprodução correta é evidência de que ocorreu a aprendizagem. Essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos (BRASIL, 1998, p. 37).

Deste modo, este documento rejeita a reprodução de procedimentos e o acúmulo de informações e aponta, como fazem alguns pesquisadores (ONUCHIC, 1999; ALLEVATO e ONUCHIC, 2011; VAN de WALLE, 2009; ONUCHIC e HUANCA, 2014), a resolução de problemas como ponto de partida da atividade Matemática. Essas ideias apoiam-se na convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos deparam-se com situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução e construção de um novo conhecimento matemático.

As orientações curriculares, Brasil (2006), considera que é necessário aperfeiçoar o uso da Resolução de Problemas e das investigações nas aulas de Matemática, como eixos metodológicos que possibilitam envolvimento efetivo dos estudantes na construção de conceitos, inserção equilibrada de momentos de contextualização e descontextualização. Nessa perspectiva, é inegável a importância da intervenção e mediação do professor e a troca entre os estudantes, para que cada um vá realizando tarefas e resolvendo problemas, que criem condições para desenvolverem suas capacidades e seus conhecimentos.

Como a Resolução de Problemas é o tema central deste Trabalho de Conclusão de Curso, faz-se necessário que analisemos diferentes concepções sobre esse tema, pois, segundo Huanca (2014) essa abordagem conduz a reflexões sobre o que é um problema e qual é a função da Resolução de Problemas na Educação Matemática. O autor analisou a literatura relativa à Resolução de Problemas e indica que, além de analisar as diferentes concepções sobre o que é um problema, também é preciso refletir sobre o objetivo da Resolução de Problemas no ensino de Matemática.

2.3. Concepções de ensino da Matemática baseadas em Resolução de Problemas

Em síntese, tendo discutido algumas definições de problema e a Resolução de Problemas no contexto da Educação Matemática, passamos, então, a enfocar algumas concepções de pesquisadores matemáticos sobre a Resolução de Problemas. Considerando a história da Resolução de Problemas, encontramos denominações diferenciadas por preposições que determinam as características de três tipos de concepções de ensino baseadas em Resolução de Problemas: (1) ensinar sobre Resolução de Problemas, (2) ensinar para a Resolução de Problemas e (3) ensinar através da Resolução de Problemas.

2.3.1. Ensinar sobre Resolução de Problemas

O principal representante dessa concepção é George Polya (1994) que, em agosto de 1944, apresentou uma série de orientações para o trabalho com Resolução de Problemas no ensino de Matemática. Segundo ele, a resolução de um problema exige uma compreensão da tarefa, uma concepção de um plano que leve a uma meta pretendida, à execução desse plano e a uma análise para determinar se alcançamos nossa meta, ou seja, nosso objetivo.

Esses procedimentos foram organizados por Polya em quatro etapas que deveriam ser seguidas na resolução de qualquer problema. Essas etapas são muito conhecidas e, ainda hoje, citadas na literatura e nos trabalhos sobre Resolução de Problemas. Essas etapas citadas serão um pouco mais detalhadas a seguir:

- 1ª etapa - Compreensão do problema - O primeiro passo é entender o problema. É importante fazer perguntas. Qual é a incógnita? Quais são os dados? Construir figuras para esquematizar a situação proposta no exercício pode ser muito útil, sobretudo introduzindo-se notação adequada.
- 2ª etapa - Estabelecimento de um plano - É preciso encontrar conexões entre os dados e a incógnita. Talvez seja conveniente considerar problemas auxiliares ou particulares caso uma conexão não seja encontrada em tempo razoável. É importante fazer perguntas como por exemplo, se já encontrou este problema ou um parecido, se conhece um problema semelhante, se conhece teoremas ou fórmulas que possam ajudar.
- 3ª etapa - execução do plano - Ao executar o plano, deve-se verificar cada passo e se é possível mostrar que cada um deles está correto.
- 4ª etapa - Retrospecto - Nesta etapa deve-se revisar e examinar a solução obtida, verificando os resultados e os argumentos utilizados. Verificar se há solução a ser obtida

de algum outro modo e qual é a essência do problema e do método de resolução aplicado. É importante pensar se é possível usar o resultado - ou o método - em algum outro problema e qual é a utilidade deste resultado.

O trabalho de George Polya, não somente no contexto de Resolução de Problemas mas no âmbito mais amplo da Educação Matemática, foi e ainda é muito importante e ainda hoje bastante considerado. Entretanto a concepção de ensinar sobre Resolução de Problemas, em que se insere seu trabalho e que foi apresentada nessa seção é limitada e não é a que melhor se aplica ao que acreditamos, pois essas etapas para resolução de problemas visam procurar dados expostos no problema apresentado e empregar procedimentos previamente escolhidos para a resolução de um problema, ou seja, a Resolução de um Problema envolve aspectos relacionados ao conteúdo matemático específico envolvido, exigindo fazer conjecturas, testar procedimentos, aprender conteúdos, desenvolver raciocínios e apresentar explicações, que nem sempre podem ser previstas.

2.3.2. Ensinar Matemática para a Resolução de Problemas

Nesta concepção os professores costumam utilizar os problemas para apresentar aplicações de certos conteúdos matemáticos. Primeiro apresentam uma parte teórica dos conteúdos matemáticos e depois propõem problemas sobre aquele conteúdo. Embora, usualmente, a expressão "ensinar para" não seja conhecida pelos professores como uma concepção de trabalho com Resolução de Problemas, essa é a forma como a grande maioria dos professores realiza seu ensino nas aulas de Matemática.

Encontramos este tipo de abordagem, também, na maioria dos livros didáticos utilizados nas escolas, com alguns exercícios de fixação e problemas contextualizados, devendo ser resolvidos com o tópico estudado.

É importante enfatizar que, certamente pode-se conceber a Matemática como instrumento para a resolução de problemas práticos, entretanto a Matemática se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de ideias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas.

Onuchic (1999) diz que, essa é a visão que considera a Matemática como utilitária de modo que, embora a aquisição de conhecimento matemático seja de primordial importância, o propósito principal do ensino é ser capaz de utilizá-lo. Nessa concepção o professor concentra-se no modo como a Matemática que está sendo ensinada pode ser aplicada na resolução de problemas. A autora, ainda diz que, o professor se preocupa com a habilidade dos alunos de transferirem o que aprenderam num contexto para problemas em outros contextos, ou seja, ele ensina para a resolução de problemas.

Concordamos com essa autora quando considera que esse tipo de ensino pode dar a impressão de que a Matemática tem aplicação imediata, ou seja, que é utilitária e também que as limitações desta visão podem limitar a atividade do aluno à resolução de problemas rotineiros. Além disso, ignora o potencial formador da Matemática, no tocante ao desenvolvimento do raciocínio, da capacidade de abstrair, relacionar, representar, tomar decisões e criar.

Uma das dificuldades com esse tipo de ensino é que,

> [...] a resolução de problemas está separada do processo de aprendizagem. É improvável que as crianças que ficam esperando que o professor lhes apresente as regras, resolvam problemas para os quais não foram fornecidos os métodos de solução. Ao separar o ensino da resolução de problemas e do confronto com as ideias, a aprendizagem matemática fica separada do fazer matemática. Isso simplesmente não faz sentido algum (VAN DE WALLE, 2009, p. 58).

Nossa vivência na formação inicial e as de outros professores indicam que essa metodologia ainda é a mais utilizada em sala de aula, algumas vezes por acreditarmos ser o modo mais fácil para a aprendizagem do aluno e outras por nos possibilitar seguirmos o ensino como "cópia fiel" do livro didático. Percebemos que o aluno tem tomado como exemplo esse método de ensino, o que não é mais condizente com o seu papel de construir seu próprio conhecimento.

Essa metodologia, no nosso modo de ver, é deficiente por não levar à construção de um novo conhecimento matemático pelos alunos, que podem resolver problemas não apenas para aplicar Matemática, mas sim para aprender Matemática. No presente trabalho nos dedicaremos à concepção de ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, uma vez que um dos objetivos desta pesquisa foi esse.

2.3.3. Ensinar Matemática através da Resolução de Problemas

Uma concepção que surgiu posteriormente às duas concepções que já discutimos, e que apresenta maior sintonia com as orientações oficiais atuais é a que considera o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas.

Onuchic e Allevato (2005) dizem que, os conceitos matemáticos que os alunos criam, num processo de construção, não são as ideias bem formadas concebidas pelos adultos. Novas ideias são formadas pouco a pouco, ao longo do tempo, quando os alunos refletem ativamente sobre elas e as testam através dos muitos diferentes caminhos que o professor pode lhes oferecer. Aí está o mérito das discussões entre os estudantes em grupos de trabalho. Quanto mais condições se deem aos alunos para pensar e testar uma ideia emergente, maior é a chance de essa ideia ser formada corretamente e integrada numa rica teia de ideias e de compreensão relacional.

Nesse sentido, Huanca (2006) disse que, a metodologia de "Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas" se constitui num caminho para se ensinar Matemática através da Resolução de Problemas e não apenas para se ensinar a resolver problemas.

Assim, essa é uma forma de ensinar Matemática onde habilidades e conceitos devem ser aprendidos no contexto da resolução de problemas, ou seja, o problema é o ponto de partida. Vale ressaltar que ensinar matemática através da Resolução de Problemas engloba as outras duas concepções, que podem ocorrer em conjunto.

É importante enfatizar que, segundo Onuchic e Allevato (2011), o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é diferente daquele em que regras de "como fazer" são privilegiadas. As autoras, ainda dizem que, trata-se de um trabalho onde um problema é o ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula.

Nesse sentido, o ensino de Matemática deva ocorrer em um ambiente caracterizado pela investigação, e que essa deve ser orientada pela resolução de problemas. Segundo esse enfoque, o ponto de partida das atividades matemáticas deixa de ser a definição e passa a ser o problema, de forma que "a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem" (ONUCHIC, 1999, p. 215).

Em nossa proposta de investigações trigonométricas, em particular, irão contribuir para que os alunos possam perceber aspectos essenciais da atividade Matemática, tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações. Abordando os conteúdos a partir de problemas de interesse do aluno, a atividade irá despertar a vontade de aprender a Trigonometria. Esse tipo de aprendizagem tem a intenção de levar ao aluno uma forma diferente de trabalho, deixando-o usar o seu raciocínio lógico, os conhecimentos prévios de que dispõe e estimulando a sua criatividade.

Assim, acreditamos que conhecimentos prévios sejam concepções, representações e conhecimentos adquiridos em suas experiências anteriores, que aconteceram dentro e fora da escola. Esses conhecimentos prévios determinam boa parte das informações que ele selecionará, organizará e as relações que estabelecerá entre elas.

Sem dúvida, acreditamos pelos nossos estudos bibliográficos e a nossa vivência na prática que o ensino através da Resolução de Problemas atende a uma condição fundamental para o ensino e aprendizagem da Matemática, que é o de desenvolver a capacidade de aprender, oferecendo um conjunto mais rico de materiais, técnicas e sistemas que visem a contribuir significativamente para a incorporação de habilidades, para aprendizagem de conteúdos e para a compreensão de conceitos.

Portanto, dentro dessa concepção de Resolução de Problemas, para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área, e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como uma ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

Transformar o saber matemático em saberes escolares passíveis de serem ensinados e aprendidos exige que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático abstrato geralmente são difíceis de serem comunicados diretamente aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia, que persiste na escola, de ver os objetos de ensino como cópias fiéis dos objetos da ciência. O significado da atividade Matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos e também entre estes e as demais áreas do conhecimento e as situações do cotidiano (BRASIL, 1998).

De acordo com Van de Walle (2009), o professor deve selecionar problemas e tarefas cuidadosamente, pois elas só são eficazes se ajudam os alunos a aprenderem os conteúdos propostos. Tarefa, aqui, é entendida como qualquer trabalho proposto pelo professor aos alunos, a qual pode constituir-se, ou não, em um problema. Ele sugere que o professor siga algumas etapas para desenvolver o trabalho com resolução de problemas com seus alunos:

- Fase antes - preparar os alunos para verificar se o enunciado do problema foi compreendido; ativar os conhecimentos, ou seja, criar oportunidades para que o aluno relembre e recorra aos conhecimentos que já possui a fim de resolver os problemas e construir novos conhecimentos; estabelecer expectativas claras para o que se espera deles (como os alunos vão trabalhar e qual é o material que eles vão preparar para a discussão na terceira fase);
- Fase durante - deixar os alunos trabalharem, de modo a construírem seu conhecimento evitando antecipações desnecessárias. Escutar cuidadosamente, fornecer sugestões adequadas, observar e avaliar;

- Fase depois - é a fase do debate, onde se deve encorajar a formação de uma comunidade de alunos, escutar e aceitar as sugestões dos alunos sem julgá-las e sintetizar as principais ideias identificando futuros problemas.

Por outro lado, também essas autoras sugerem etapas que possibilitam colocar em prática a metodologia de ensinar através da resolução de problemas em sala de aula:

- *Preparação do problema* - Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.

- *Leitura individual* - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

- *Leitura em conjunto* - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

  - Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.
  - Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

- *Resolução do problema* - A partir da compreensão do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da *matemática nova* que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

- *Observar e incentivar* - Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor, como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

  - O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e as ajuda, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

- *Registro das resoluções na lousa* - Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

- *Plenária* - Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

- *Busca do consenso* - Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

- *Formalização do conteúdo* - Neste momento, denominado *formalização*, o professor registra na lousa uma apresentação *formal* – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Consideramos que esse roteiro é importante porque organiza as atividades em sala de aula, orienta o professor sobre como proceder com os alunos, e viabiliza a aplicação dessa metodologia de ensino na sala de aula. Destaca nas primeiras etapas o papel do aluno, deixando-o no centro das atividades de ensino, diferenciando-se do ensino tradicional em que o professor é o único responsável por possibilitar a aprendizagem dos conteúdos.

Vários estudiosos têm apresentado sugestões de como preparar e encaminhar o ensino através da Resolução de Problemas nas aulas de Matemática. Em uma delas Vale e Pimentel (2004) dizem que muitas vezes o aluno tem o conhecimento, mas não consegue mobilizá-lo para solucionar os problemas. Para que isso ocorra, os problemas devem ser elaborados a partir de algo que faz sentido para o aluno, mesmo que o conhecimento para resolvê-lo não esteja completamente visível. Devem ser desafiadores a partir de uma perspectiva Matemática e devem ser, também, adequados, de modo a respeitar os conhecimentos e a capacidade dos alunos.

De um modo geral, Vale e Pimentel (2004) apresentam uma lista de estratégias eficientes que podem ser utilizadas na resolução de problemas:

- Descobrir um padrão ou regra de formação;

- Fazer tentativas ou levantar conjecturas;
- Trabalhar do fim para o começo (o que se quer provar);
- Usar dedução lógica;
- Reduzir a um problema mais simples;
- Fazer uma experimentação (modelo);
- Fazer um desenho ou diagrama;
- Fazer uma lista organizada ou uma tabela (representar, organizar e guardar informação).

Acreditando que o ensino através da Resolução de Problemas inclui as demais concepções e que os alunos podem também aprender estratégias por meio dessa metodologia. Portanto, assumimos, a partir dessas leituras realizadas, que a Resolução de Problemas é de muita importância para o ensino de Matemática. Esse estudo muito contribuiu para a formação da futura professora que optou, assim, por propor situações de aprendizagem aos alunos com a Trigonometria. Esse será o tema desenvolvido no próximo capítulo.

CAPÍTULO 3

TRIGONOMETRIA

Neste capítulo apresentaremos um estudo realizado sobre a Trigonometria. A seção 3.1 aborda questões referentes a história da trigonometria. A seção 3.2 trata das Relações entre as fases históricas da trigonometria e o ensino. A seção 3.3 é dedicado a Trigonometria no Ensino Básico. Considerou-se nesse estudo o que os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN - EM) apresentam sobre o tema; como os conhecimentos trigonométricos estão sendo avaliados no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM); e à análise de dois livros didáticos.

3.1. Uma Breve História da Trigonometria

A trigonometria, como a maioria dos conteúdos da matemática, são estudadas na educação básica e foi das necessidades práticas que surgiu a trigonometria. Como os outros ramos da matemática não foi obra de um só homem ou nação.

É na Grécia que vamos situar o nascimento desse campo da matemática, principalmente com os trabalhos de Hiparco de Niceia (190-120 a.C.) foi quem empregou pela primeira vez relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo. Com suas observações do céu feitas pelos babilônios elaborou um catálogo de estrelas e construiu suas tabelas trigonométricas.

Ptolomeu (100-178 d.C.) escreveu no Museu de Alexandria uma das mais influentes obra sobre a trigonometria da antiguidade, uma coleção de treze livros que foram chamados de *Síntese Matemática.* Essa coleção contém uma descrição matemática do modelo grego.

Um pouco mais tarde, os árabes passaram a chamar os livros de Ptolomeu de Almagesto, que significa "o maior". Ptolomeu tinha como objetivo determinar as estações, prever eclipses e o estabelecimento do mês lunar. Os gregos, os hindus e os árabes usaram linhas trigonométricas em forma de cordas num círculo, ou seja, precisava apenas associar valores numéricos às cordas.

Os matemáticos da Índia escolheram um caminho diferente para a trigonometria. Apesar do amplo domínio do Almagesto, no final do século IV começaram a utilizar um conjunto de textos matemáticos surgidos na Índia e tinha como título Siddantha, que significa *Sistema de Astronomia.*

Siddantha usava uma trigonometria baseada na relação entre metade da corda e metade do ângulo central de uma circunferência.

O período histórico que vai dos trabalhos de Hiparco até Euler (1707-1783) durou mais de 1.500 anos e nesse intervalo de tempo a trigonometria estudava as relações entre os lados e os ângulos de triângulos e suas aplicações para cálculos de distâncias, construções, navegação e astronomia, etc. A palavra trigonometria derivada dos termos gregos *trigonom* (triângulo) e *metria* (medida), considerada como a área da matemática que trabalha as relações entre as medidas de ângulos.

Leonhard Euler escreveu mais de quinhentos livros e artigos sobre vários assuntos da matemática. Em 1748 passou a usar a trigonometria como circunferência de raio unitário.

Com a astronomia, agrimensura e a geodesia, a trigonometria passa a ter uma maior gama de aplicações, ampliando-se também para o estudo de outros campos matemáticos e científicos. Atualmente, desempenha um papel importante em áreas como Cálculo e Matemática Aplicada (PEREIRA, 2012, p.32).

Hoje, a trigonometria é pensada como o estudo das funções que apresentam gráficos com comportamentos periódicos e que representem fenômenos de padrões repetitivos.

Este estudo das funções é feito no Ensino Médio e avança para os estudos dos fenômenos que apresentam natureza ondulatória, que envolve os estudos de vibrações, calor, corrente elétrica, entre outras que podem ser estudadas nas séries infinitas que são chamadas de séries de Fourier desenvolvidas por ele em 1807, mas Euler foi o primeiro a expandir algumas funções especiais em uma série infinita de senos e cossenos.

No trabalho de Fourier foi sugerido que qualquer função periódica possa ser representada pelas séries de Fourier e foi muito aceito pela comunidade matemática e No século XIX representou uma importante ferramenta para o desenvolvimento da matemática e suas aplicações. A partir desse fato, a trigonometria é considerada como sendo o estudo dos fenômenos que apresentem padrões periódicos.

Na contramão desse desenvolvimento está o ensino de trigonometria baseado em fórmulas e regras, feito de forma estática com a utilização de um exagerado algebrismo, sem levar em conta a sua contextualização e o desenvolvimento histórico vivenciado por este campo, nem tendo a preocupação de associá-lo na forma contemporânea aos fenômenos periódicos, conforme a tendência atual (PEREIRA, 2012, p.33).

3.1.1. Seno e Cosseno

Segundo Lima (2006), o segmento de reta que une dois pontos extremos de um arco de círculo foi estudado por alguns gregos antes da era Cristã. Essa corda (do latim chorda.) “corda de arco", por sua vez vem do grego chorde, que significa intestino de um animal. Deste modo, corda de um arco pode também ser associada ao ângulo central que intercepta a corda. Embora a corda de um arco não seja um seno, metade da corda dividida pelo raio do círculo é o seno da metade do arco (ou da metade do ângulo central correspondente a todo o arco).

O autor afirma que, por volta do ano 500 d.C., o matemático hindu Arybhata já calculava semicordas. Algum tempo depois, matemáticos hindus calculavam tábuas de seno e seno reverso (isto é, $1 - \cos \theta$). O seno era chamado jya, uma das várias grafias das palavras "corda" em hindu. Posteriormente os árabes a transliteraram para jyb, que depois foi incorretamente lida como jayb (que em árabe significa "bolso", "golfo" ou "seio"), pelo tradutor Gerardo de Cremona. Traduzindo do árabe para o latim ele usou o equipamento latino sinus, o que hoje usamos como seno.

Já o termo cosseno para seno do comprimento de um ângulo. Edmund Gunter sugeriu combinar os termos "complemento" e "sinus" em "co-sinus", que logo foi modificado para "cosinus", em português "cosseno".

3.1.2. Tangente e Cotangente

Enquanto os conceitos de seno e cosseno tiveram sua origem no contexto da astronomia, tangente e cotangente emergiram das necessidades mais modestas da medição de alturas e distâncias.

Embora os termos tangente e cotangente só tenham sido conhecidos mais tarde, em 1551 o matemático europeu Rheticus definiu explicitamente cada uma dessas duas funções como sendo uma razão. Thomes Fincke contribuiu com o nome "tangente", talvez porque a sombra vertical V seja situada ao longo da tangente ao círculo de raio G.

Em 1620 Edmund Gunter estabeleceu o equivalente latino "cotangente de A" para "complement tangent of A", que significa "tangente do complementar de A". Em 1674 Jonas Moore criou a abreviação "cot" para cotangente.

3.2. Relações entre as fases históricas da trigonometria e o ensino

A trigonometria surge desde a antiguidade para suprir necessidades práticas, principalmente relacionadas com a demarcação de terra, construção de prédios e monumentos, traçado de mapas e de rotas, tanto terrestres como marítimas e para a elaboração de calendário na astronomia. Atualmente, é utilizada para o estudo de todos os fenômenos que envolvem padrões periódicos. Nesse sentido, utilizando as funções trigonométricas e outras funções, como por exemplo, séries de Fourier nos fenômenos da natureza.

Segundo Lima (2006), em uma determinada fase do desenvolvimento matemático em um grupo social:

> os conceitos matemáticos são introduzidos mediante percepções intuitivas de fatos que apresentam características próprias e possuem íntima relação com objetos materiais e com suas à criação dos padrões e assim todos os objetos que tinham que as possuem passam a ser classificados em uma determinada categoria. Por exemplo, todos os objetos que tinham a característica de ter como lado três segmentos de retas, tendo como ponto comum às extremidades e contendo uma certa região de um plano passou a ser denominado de triângulo. O triângulo é então um padrão que permite classificar as figuras que satisfazem suas características. Veja o triângulo matemático é um objeto abstrato, usado não somente para classificar os triângulos da natureza, como também permitindo efetuar determinadas operações matemáticas (LIMA, 2006, p. 12).

Nesse sentido, o autor diz que, à medida que o pensamento matemático foi caminhando no sentido da abstração, cada vez mais temos um afastamento das figuras concretas. Dessa maneira, as ideias que apareciam vagas e confusas foram adquirindo precisão e os métodos da análise matemática, livres de qualquer intuição geométrica que permitiram o gradativo refinamento dos conceitos básicos e uma concatenação mais rigorosa entre as proposições fundamentais.

Em nosso entendimento, esta busca de rigor que caracteriza a matemática é muito negativa quando aplicada inadequadamente no ensino. Dependendo do objetivo de cada atividade a ser executada e dos alunos a quem se destina, o professor deve utilizar como ponto de partida os conhecimentos prévios dos alunos e como ponto de chegada os objetivos a serem atingidos.

Assim, é errôneo pensar que temos que cumprir apenas os conteúdos previstos. É dever da escola fazer com que os alunos aprendam e não cumprir apenas os conteúdos previstos. Nesse sentido, a escola deve complementar inclusive as aulas disponíveis para o professor trabalhar nesta perspectiva: o mais importante para a aprendizagem é aquilo que o aluno traz de conhecimentos prévios. E neste ponto, as representações geométricas e o uso de materiais concretos são importantes para auxiliar os alunos que ainda não desenvolveram a capacidade de abstração e de domínio da representação algébrica.

A palavra Matemática originou-se na Grécia derivada do grego “mathematike” onde “mathema” significa compreensão e “tike” arte. Assim, no início a palavra matemática significava a arte da compreensão. Para completar esta ideia, é atribuído aos pitagóricos, que procuravam uma maneira de explicar todos os fenômenos utilizando uma justificativa racional. Desta forma, queriam contrapor a razão, a visão mítica e a visão religiosa predominante. A visão mítica procurava explicar o mundo por meio de mitos e a visão religiosa atribuía o conhecimento as divindades consideradas oniscientes “tudo sabem”, onipresentes “sem limitação de tempo e espaço” e onipotentes “tudo podem” (LIMA, 2006, p. 13).

Nesse caso, a Matemática foi então desenvolvida pelos gregos como a primeira tentativa de explicar racionalmente o universo e podemos defini-la em nível do Ensino Básico como sendo a ciência que estuda por meio de padrões abstratos fenômenos como: contagem (aritmética); espaço (topologia); formas e medidas (geometria); fenômenos periódicos (trigonometria); variação entre grandezas (cálculo diferencial); áreas e volumes (cálculo integral); estruturas abstratas (álgebra); validade de argumentos (lógica); levantamento, organização e interpretação de dados, e fenômenos aleatórios (estatística).

Desde a antiguidade até hoje, o mundo em que vivemos depende fundamentalmente da Matemática, embora não nos apercebamos. Por exemplos, as ondas eletromagnéticas, que são responsáveis pela informação que chega ao nosso televisor, a informação telefônica que via satélite ligam pontos distantes do nosso planeta etc., tiveram a sua existência primeiramente descoberta na Matemática, sendo ela essencial para o desenvolvimento das ciências.

Neste ponto, até o século XVII a trigonometria era basicamente o estudo das relações nos triângulos retângulos, das razões trigonométricas e de suas tabelas. Seria equivalente ao que era coberto nas nossas escolas no 9º ano do Ensino Fundamental como primeira fase.

Na segunda fase, a época contemporânea caracterizou-se principalmente na França – centro de cultura da matemática – pelo desenvolvimento da Teoria das Funções e particularmente das Funções da Variável Complexa, da Geometria Projetiva e do Cálculo das Probabilidades, empreendendo-se um exaustivo trabalho de crítica que terminou promovendo uma completa reconstrução da geometria e da aritmética. Foi nesta época que surgiram as funções trigonométricas, suas tabelas e os gráficos. Esta fase vai até o período de Euler e seus conteúdos são abordados em nível de Ensino Médio.

A terceira fase da trigonometria surge com os estudos realizados por Fourier sobre a transmissão de calor, utilizando para isto as séries infinitas de senos e de cossenos, denominadas de séries de Fourier. Este trabalho foi um dos que tiveram um grande impacto no mundo atual e deu origem ao desenvolvimento de vários campos do conhecimento, entre eles o eletromagnetismo, os movimentos ondulatórios, o movimento pendular e outros.

3.3. A Trigonometria no Ensino Básico

A Trigonometria é abordada no Brasil no Ensino Básico, usualmente, em dois momentos principais: no final do Ensino Fundamental, quando se introduzem os conceitos de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo; e no Ensino Médio, quando são abordados os conceitos de arcos, ângulos e suas unidades de medida (graus e radianos), a caracterização do círculo trigonométrico, a identificação das razões trigonométricas no círculo trigonométrico, a resolução de equações trigonométricas, as funções trigonométricas, a representação gráfica das funções e a Resolução de Problemas que envolvem a Trigonometria.

Nesse sentido, os conceitos trigonométricos são abordados ou retomados em outros momentos na disciplina Matemática, como por exemplo, no estudo do coeficiente angular de uma reta, com a construção de gráficos de funções lineares afins ou no estudo da Geometria Analítica. A Trigonometria também pode aparecer no estudo dos números complexos, de sua representação na forma trigonométrica e das operações com esses números nessa forma. A Trigonometria também pode ser abordada na disciplina de Física, por exemplo, com o estudo das ondas que envolve classificação, comprimento, período, frequência, fase e velocidade.

3.3.1. A Trigonometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (Brasil, 2000) destacam a importância do ensino da Trigonometria e a utilização de recursos pedagógicos com vistas ao aprimoramento do aprendizado matemático e das outras disciplinas. É necessário destacar que um dos objetivos principais dos PCNEM é orientar as instituições de Ensino Básico quanto às competências, às habilidades e aos conhecimentos fundamentais que se espera que os alunos desenvolvam durante a vida escolar.

Sendo assim, consideramos que esse é um dos documentos oficiais mais importantes que devem ser considerados na construção dos currículos das instituições de Ensino Básico do país. Especificamente sobre o ensino da Trigonometria, o documento ressalta a importância de,

> outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que se deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos (BRASIL, 2000, p.44).

Nesse sentido, o trecho citado acima embasa a ideia de que os estudantes devem estudar os conhecimentos trigonométricos necessários para que desenvolvam habilidades e competências voltadas para a Resolução de Problemas aplicados. Destaca-se ainda o comentário de que os cálculos algébricos das identidades e as resoluções de equações continuam sendo importantes, o que não se recomenda é unicamente focar no ensino neste aspecto da Trigonometria.

Assim, as habilidades e competências que os PCN - EM consideram necessárias serem desenvolvidas no estudo da Matemática, estão em:

> **Representação e comunicação**
> - Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc).
>
> **Investigação e compreensão**
> - Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
> - Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
> - Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.
>
> **Contextualização sócio-cultural**
> - Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
> - Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
> - Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades (BRASIL, 2000, p.46).

3.3.2. A Trigonometria no Exame Nacional do Ensino Médio

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é um instrumento que deve ser considerado, pois pode influenciar na organização e planejamento do currículo escolar: O (ENEM) é promovido pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP, desde 2009 o exame passou a ser não só uma ferramenta de avaliação da qualidade do ensino das escolas de Ensino Médio brasileiras, mas uma alternativa de ingresso em uma instituição de Ensino Superior.

Com o objetivo de conhecer a forma como os conteúdos trigonométricos são avaliados no ENEM, consultou-se a Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias[1], um dos quatro grandes eixos do exame, e as provas que encontramos no site foi a dos anos de 2009 e 2010. A matriz de referência não está organizada por conteúdos, mas sim por competências que se considera que os alunos devem ter desenvolvido em 7 áreas da Matemática. Essas áreas são:

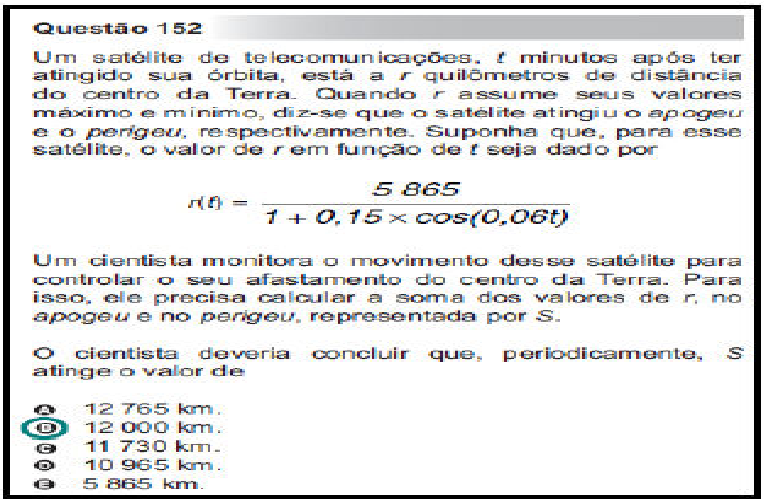
- Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais;

[1] Disponível em:http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/edital/2011/edital_n07_18_05_2011_2.pdf.

- Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela;
- Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano;
- Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano;
- Modelar e Resolver Problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas;
- Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsões de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação;
- Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Ao analisarmos uma das questões da prova realizada em 2010, ver na figura 1 abaixo. Esta questão é um exemplo de como a Trigonometria pode ser abordada na prova. O aluno poderá resolver a questão se conhecer uma das características principais da função cosseno: que seus valores máximo e mínimo são 1 e -1, respectivamente.

Figura 1 – Questão 152



Questão 152

Um satélite de telecomunicações, *t* minutos após ter atingido sua órbita, está a *r* quilômetros de distância do centro da Terra. Quando *r* assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o *apogeu* e o *perigeu*, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de *r* em função de *t* seja dado por

$$r(t) = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15 \times \cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de *r*, no *apogeu* e no *perigeu*, representada por *S*.

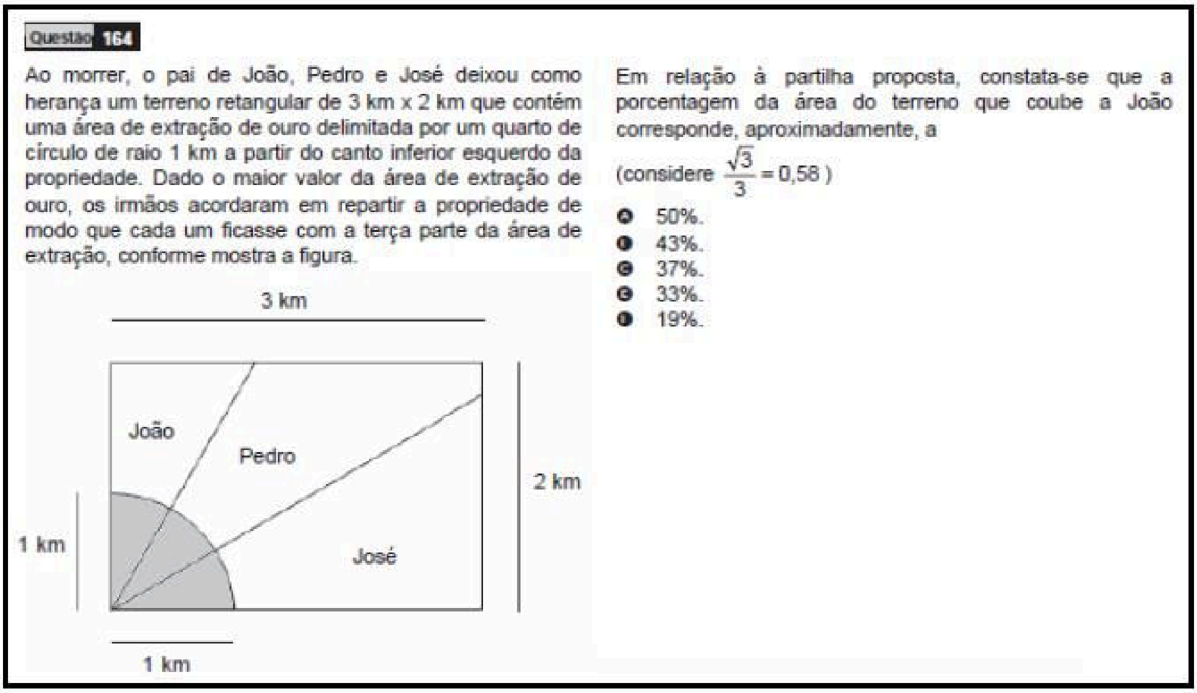
O cientista deveria concluir que, periodicamente, *S* atinge o valor de

A) 12 765 km.
B) 12 000 km.
C) 11 730 km.
D) 10 965 km.
E) 5 865 km.

Fonte: Extraído da prova ENEM 2010

A figura 2 da questão 164 da prova do ENEM 2009, envolve conhecimentos de Trigonometria, especificamente relativos à razão trigonométrica tangente, de Geometria (cálculo de área de triângulo) e cálculo de porcentagem. Nesse sentido, detalhando um pouco mais a parte da Trigonometria, o estudante precisa ser capaz de identificar que deve encontrar a medida do cateto oposto ao ângulo de 30º para calcular a área do triângulo. A figura informa a medida do cateto adjacente, logo o estudante deve ser capaz de identificar e utilizar a razão trigonométrica para solucionar o problema.

Figura 2 – Questão 164



Questão 164

Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.

Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a

(considere $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58$)

- A 50%.
- B 43%.
- C 37%.
- D 33%.
- E 19%.

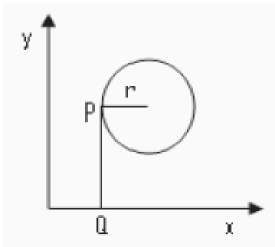
Fonte: Extraído da prova ENEM 2009

Já a figura 3 mostra a questão 174 também da prova do ENEM 2009. Para a resolução da questão, é necessário que o aluno compreenda que a variação horizontal, correspondente ao movimento de *Q* sobre o eixo *x*, informa a variação do cosseno do ângulo e que se a distância *d*, sobre o círculo, deve ser menor ou igual ao raio *r,* isso significa que a distância percorrida pelo ponto *P* deve ser menor do que 1 radiano. Nessa linha, esse raciocínio conduz à informação de que o argumento da função está medido em radianos, que é obtido pela razão *d/r,* logo a distância que *P* percorre sobre o eixo é dada pela expressão do item *b.*

Figura 3 – Questão 174

Questão 174

Considere um ponto P em uma circunferência de raio r no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo x, como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leq r$ sobre a circunferência.



Então, o ponto Q percorrerá, no eixo *x*, uma distância dada por

A $r\left(1 - \operatorname{sen}\dfrac{d}{r}\right)$.

B $r\left(1 - \cos\dfrac{d}{r}\right)$.

C $r\left(1 - \operatorname{tg}\dfrac{d}{r}\right)$.

D $r\operatorname{sen}\left(\dfrac{r}{d}\right)$.

E $r\cos\left(\dfrac{r}{d}\right)$.

Fonte: Extraído da prova ENEM 2009

Entende-se que a partir do que foi observado sobre os conhecimentos citados na matriz de referência do ENEM e pela análise das questões podemos perceber que o ENEM não tende a exigir dos alunos memorizações de fórmulas, de regras e de valores para as razões trigonométricas, ou seja, o ENEM pretende verificar a capacidade de analisar, de relacionar, de interpretar informações matematicamente a partir do domínio de conhecimentos básicos ou fundamentais da Trigonometria.

Na elaboração da nossa proposta do TCC, pretendemos ou gostaríamos que fosse levado em consideração essa característica do ENEM. Assim, quem vai aplicar a proposta buscará o desenvolvimento dos conhecimentos básicos da Trigonometria a partir da compreensão desses conhecimentos e não pela memorização de fórmulas trigonométricas.

3.3.3. Análise dos livros didáticos da Trigonometria

Consideramos importante para o desenvolvimento da nossa proposta do TCC, a análise dos livros didáticos da Trigonometria, pois estes livros são uma importante ferramenta de apoio para os professores em sala de aula e uma fonte alternativa de estudo para os estudantes. Nesse sentido, para a realização deste trabalho optou-se pela análise de dois livros para ter-se uma ideia de como a Trigonometria é abordada.

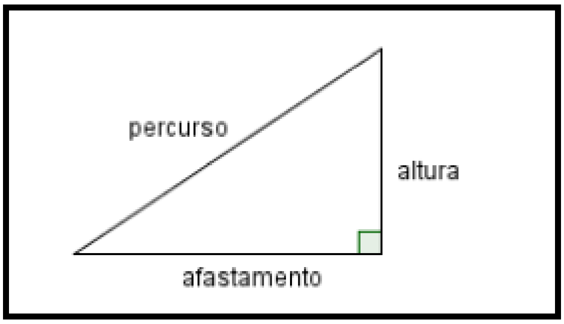
Livro 1: Matemática – Contexto e Aplicações de Luiz Roberto Dante

O capítulo referente à Trigonometria no livro Matemática – Contexto e Aplicações, de Luiz Roberto Dante, 2006 inicia com uma breve introdução que aborda o significado da palavra Trigonometria e, em seguida, passa a comparar rampas que aparecem em figuras, questionando qual é a mais íngreme. Conclui essa introdução dizendo que situações que envolvem ângulos e lados podem ser resolvidas através da Trigonometria.

A segunda parte do capítulo do livro 1 é intitulada "índice de subida". Uma rampa em forma de triângulo retângulo como segue na figura 4, é apresentada com as denominações: percurso, afastamento e altura. Também, com base em alguns triângulos semelhantes ao triângulo dado é feita uma listagem das razões entre altura e afastamento para cada triângulo e conclui-se que essa razão é sempre uma constante para a mesma subida e que essa constante é o índice de subida. Outra figura é apresentada com índice de subida diferente. Pede-se ao estudante, no item "para refletir", como devem ser o afastamento e a altura para se ter um índice de subida igual a 1 (um) e maior do que 1 (um).

Nessa segunda parte, por fim, cinco exercícios são apresentados e neles pede-se para calcular o índice de subida ou é dado o índice e pede-se para calcular o afastamento ou a altura. Uma das questões pede que o estudante desenhe uma rampa com um índice dado. Ainda dentro desse segundo tópico é estabelecida uma comparação entre ângulo de subida e índice de subida.

Figura 4 – Triângulo com lados denominados percurso, afastamento e altura



Fonte: Extraído de Dante (2006, p. 200)

Ainda nesse livro 1, os tópicos três, quatro e cinco abordam, respectivamente, as ideias de tangente, seno e cosseno. A figura da rampa aparece novamente e diz que a palavra tangente irá representar a razão entre a altura e o afastamento: "Usaremos a palavra tangente para associar a medida do ângulo de subida e o índice na mesma subida. A tangente do ângulo de subida é igual ao índice de subida associado e o indicaremos por k_l" (DANTE, 2006, p.200).

Em seguida, Dante (2006) volta ao problema inicial citado na introdução que era saber qual rampa era mais íngreme, sem conhecer as medidas dos ângulos. Nesse caso, comparam-se as tangentes de cada ângulo e responde-se à questão. Os tópicos quatro e cinco são desenvolvidos de maneira semelhante ao da tangente. Em cada um desses tópicos aparece o quadro intitulado "para refletir". As questões envolvem fixar o percurso, pensar em um ângulo α maior do que β e responder qual terá a maior altura, qual valor de seno/cosseno será maior e qual das subidas é mais íngreme.

Já no sexto tópico, intitulado "O triângulo retângulo" são dadas as definições do que é um triângulo retângulo, o que é hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente e também são reescritas as razões trigonométricas utilizando essa nomenclatura. O quadro "para refletir" pede que o estudante justifique a afirmação de que "em todo triângulo retângulo um ângulo é reto e os outros dois são agudos e complementares" (DANTE, 2006, p. 201).

Em seguida, é dado um exercício que pede que o estudante, utilizando um transferidor, construa um triângulo retângulo com um ângulo de 40º e calcule as três razões vistas com uma precisão de três casas decimais, pede ainda que confira suas respostas na tabela de razões trigonométricas dada no final do capítulo do livro 1. Ainda no sexto tópico são feitas simples manipulações algébricas para isolar, nas razões trigonométricas, ora a medida do cateto oposto, ora a da hipotenusa, ora a do cateto adjacente, isso para mostrar que em um triângulo retângulo em que são conhecidos um ângulo e um lado pode-se obter todas as medidas dos lados e dos ângulos consultando na tabela trigonométrica os valores de seno, cosseno ou tangente do ângulo conhecido.

No quadro "para refletir" do livro 1, afirma-se que os valores de seno e cosseno de um ângulo agudo variam entre 0 e 1 e que a tangente desse mesmo ângulo é sempre maior do que 0. Em seguida, mostra-se: que o seno e o cosseno de ângulos complementares são iguais, a relação fundamental da Trigonometria, obtida a partir do Teorema de Pitágoras $(sen^2x + cos^2x = 1)$ e que a tangente de α pode ser escrita em função de seno e cosseno α.

O autor do livro 1 finalizando esse capítulo inicial apresenta um quadro resumo de tudo o que foi visto até o momento. Isto é, são mostradas quatro exercícios resolvidos que envolvem cálculos diretos das razões trigonométricas, ou das medidas dos lados, ou das medidas dos ângulos e são dados exercícios para os estudantes resolverem, parecidos com os exemplificados.

Dante (2006), em um item à parte, apresenta as aplicações que envolvem Resolução de Problemas. Nesse sentido são apresentados como exemplos os contextos: descobrir a altura que uma pessoa atingiu, com relação ao solo, ao subir por uma rampa; descobrir o comprimento de um cabo que liga o pé de uma árvore ao topo de uma encosta reta; calcular a distância de um barco até uma plataforma marítima; calcular a altura de uma montanha utilizando-se duas medições de ângulos e a distância entre os pontos em que foram feitas essas duas medições; calcular a medida do raio da Terra.

O autor ainda referindo-se aos contextos, apresenta alguns problemas propostos como: calcular a altura atingida por um caminhão, em relação ao solo, ao subir uma rampa; calcular a largura de um rio; calcular a altura máxima atingida por uma moeda lançada por um cowboy que a atinge com dois tiros quando seu braço faz determinado ângulo com a horizontal; calcular a distância de uma ilha até a praia, sendo conhecido o ângulo de depressão do topo de uma torre nessa ilha e a altura dessa torre; calcular a altura atingida por um avião no instante em que ele passa por uma torre distante 2km do ponto de levantamento de voo; calcular a altura de um telhado; calcular o módulo dos vetores horizontal e vertical que são a decomposição de um vetor de inclinação igual a 30^{o}; calcular a altura do Pão de Açúcar, quando informadas duas medições de ângulos e a distância entre os pontos de medição; calcular a medida do raio da Terra, sabendo a altura da montanha em que está o Cristo Redentor e o ângulo que um observador obtém com a linha do horizonte; aplicações à Física: cálculo de trabalho, força e mais vetores.

Desses contextos, considero um exemplo de aplicação sem sentido o exercício do *cowboy* atirando em uma moeda. Uma vez que, se o *cowboy* atinge a moeda com um tiro, ela mudará sua trajetória, portanto não se poderá imaginar a representação da situação como um triângulo retângulo. O enunciado do exercício diz para considerar que não há mudança nessa trajetória, ou seja, a moeda continua caindo perpendicularmente ao solo depois do tiro. Nesse caso, não há sentido no contexto. O capítulo termina com três textos sobre a história da Trigonometria que são apenas informativos, ou seja, não é proposta nenhuma atividade a partir dele.

Livro 2: A Série Matemática - FTD de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr.

A Série Matemática, de autoria de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr. do ano de 2007, é composta por três livros, um para cada ano do Ensino Médio. No primeiro livro, é feita uma revisão da Trigonometria no triângulo retângulo. Primeiro explica o que são cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa, depois são dadas as definições das razões. Basicamente os exercícios de aplicações são: calcular altura de prédio, de torres, de árvores, largura de rio, entre outras.

Uma diferença significativa entre esse livro e o outro é que no primeiro há uma pequena explanação sobre o significado da Trigonometria e comenta-se um pouco de sua história, seja no início ou no fim do capítulo. Já nesse, não é citado em nenhum momento o significado da palavra Trigonometria e nem são feitas referências à parte histórica.

O próximo conteúdo desenvolvido é o das relações trigonométricas em um triângulo qualquer. Os autores começam dando a definição de ângulos suplementares e já definem que o seno de um ângulo x é igual ao seno de seu suplemento $180^o - x$ e que o cosseno de um ângulo x é igual ao oposto do cosseno de seu suplemento.

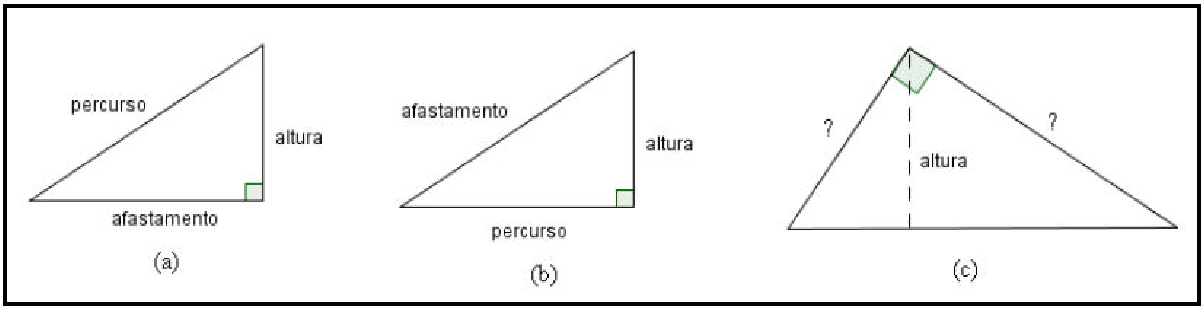
Percebemos aqui uma precipitação no tratamento dessas informações, pois não há justificativa dada aos alunos para essas igualdades, principalmente com relação ao cosseno, pois essas razões foram vistas, até esse momento, como o quociente de duas medidas, portanto com resultados positivos. Agora, como aparece esse resultado negativo? Em seguida, seguem as demonstrações das leis dos cossenos, em triângulos acutângulos e obtusângulos, e dos senos em um triângulo acutângulo. A parte teórica é finalizada com a demonstração da fórmula da área de um triângulo qualquer. Seguem então exercícios resolvidos como exemplos e outros, há um contexto, como calcular a distância de um barco até certo ponto, calcular o comprimento de um túnel e o comprimento de uma ponte sobre um rio.

Comparando os dois livros

Até esta parte da análise, percebemos que em ambos os livros há uma preocupação com a apresentação de exercícios que mostram basicamente uma das aplicações da Trigonometria: cálculo de distâncias inacessíveis. As explicações em geral apresentam informações que alunos do Ensino Médio já devem ter condições de acompanhar, porém percebemos alguns aspectos que poderiam ser modificados.

O livro 1 dedica um tempo significativo ao trabalho com os termos: percurso, afastamento, altura, índice de subida como podemos ver na figura 5 (a). Em seguida, define as razões trigonométricas em função desses termos. Somente após esse estudo inicial é apresentada a definição do que são cateto adjacente, cateto oposto e hipotenusa. Por fim, são retomadas as definições das razões com a linguagem formalizada. Acreditamos que esse excesso de informação pode causar mais confusão aos alunos do que ajudá-los. Basta observar o seguinte: a palavra altura, como está colocada no texto é válida como altura de uma rampa, portanto o triângulo retângulo teria que estar em uma posição fixa; as palavras percurso (usada no lugar de hipotenusa) e afastamento (usada no lugar de cateto adjacente) poderiam muito bem ser trocadas, ver figura 5 (b), pois o que impede o aluno de pensar que afastamento é a distância percorrida pela pessoa do ponto inicial até o ponto em que ela subiu na rampa? Por que o percurso não pode ser entendido como a distância do ponto inicial até a posição da pessoa vista na horizontal? E se o triângulo retângulo em um exercício estiver posicionado de uma forma diferente, por exemplo, com a hipotenusa na horizontal, ver na figura 5 (c), e o aluno tiver memorizado as razões trigonométricas utilizando as palavras percurso, altura e afastamento, será que ele conseguirá calcular as razões identificando corretamente a altura, o percurso e o afastamento?

Figura 5 – Possíveis utilizações dos termos percurso, afastamento e altura



Fonte: Extraído de Dante (2006, p. 200)

Também, o livro 1 de Dante (2006), um dos capítulos trata do seno e cosseno de ângulos obtusos e das leis de seno e cosseno para triângulos quaisquer de forma muito semelhante ao que foi feito no livro 2 de Giovanni et al. (2007). Inclusive, o mesmo comentário feito anteriormente sobre o tratamento de $cos\ x = -\ cos\ (180^o - x)$ aplica-se aqui.

Tanto o livro 1 e 2 analisados tratam o estudo sobre arcos e ângulos: estudo de arcos e ângulos e suas unidades de medidas (radiano e grau), círculo trigonométrico, arcos côngruos, simetrias, seno e cosseno no círculo trigonométrico, reduções ao primeiro quadrante, função seno, função cosseno, tangente e função tangente, funções secante, cossecante e cotangente, relações trigonométricas, equações trigonométricas, inequações trigonométricas, fórmulas de adição subtração de arcos, fórmulas de arcos duplo, fórmulas de transformação em produto, fórmulas de divisão de arcos e técnicas para demonstração de identidades.

Algumas considerações devem ser feitas comparando-se os dois livros: em ambos, na parte relativa ao estudo dos gráficos das funções seno e cosseno (com transformações), é enfocada a construção de tabelas com os valores de seno dos chamados ângulos notáveis (0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 180º, 270º e 360º) para a obtenção dos gráficos, ou seja, não se destacam as construções pelas transformações. Por exemplo ao invés de se construir uma tabela de valores para, a partir dela, esboçar o gráfico da função$f(x) = 1 + senx$, poderíamos obtê-lo pensando no deslocamento vertical do gráfico de *sen x*.

O livro 1 sugere apenas uma comparação em um exemplo resolvido através do quadro "para refletir": "Verifique que mudanças ocorreram nos gráficos de $f(x) = 3 \cdot senx$ com relação a $f(x) = senx$ e $f(x) = 1 + cosx$ com relação a $f(x) = cosx$" (DANTE, 2006, p.250). Desse modo, a estratégia de construir gráficos com base em alguns pontos não enfatiza as propriedades das funções seno e cosseno, como crescimento e periodicidade que são conservadas pelas transformações que geram as funções do tipo$y = a + b \cdot sen(cx + d)$.

O livro 2 não aborda exercícios de cálculo de seno, de cosseno e de tangente que não sejam dos ângulos mais comumente utilizados (adotados como referência): 0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 180º, 270º e 360º e de seus simétricos e/ou côngruos. Desse modo, sobre ângulos diferentes desses aparecem alguns exercícios de análise de sinal, nos quais não é necessário a determinação de valores. Já no livro 1 aparecem alguns exercícios em que os alunos devem consultar a tabela com valores de seno, cosseno e tangente para ângulos de 0º a 90º, com variação de 1 em 1 grau.

Nesse sentido, esses tratamentos enfocando os ângulos adotados como referência, passam para o aluno a ideia de ângulos fixos, elementos estáticos sem variação, logo seno, cosseno e tangente também parecem sempre ter os mesmos valores. Assim, até mesmo o modo como são construídos os gráficos, por tabelas, induz os alunos a pensarem sempre os mesmos valores.

Entende-se então, outro aspecto que deve ser considerado é que no início do estudo de arcos e ângulos é feito, em ambos os livros, o estudo da unidade radiano, trabalham exercícios que envolvem comprimento de círculos, comprimento de arcos etc. Porém, no decorrer das seções a unidade radianos torna-se "π radianos", ou seja, nos exercícios e explicações aparecem os arcos de medidas $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$, entre outros, em que os estudantes apenas trocam π por 180º. Assim, esse procedimento os induz a entenderem "π radianos" não como um arco de, aproximadamente, 3,14 radianos, mas unicamente como o ângulo de 180º, que é tomado como referência para a conversão entre graus e radianos. Os alunos não são levados a pensar, por exemplo, no significado de *sen* 2, ou *cos (*- 1).

Entendemos que a quantidade de exercícios propostos aos alunos é grande nos dois livros. O livro 2, além dos diversos blocos com cerca de 10 a 20 exercícios e/ou problemas ao longo das seções, no final do capítulo, apresenta um caderno de atividades com 178 exercícios e/ou problemas extras. Em ambos, aparecem problemas que envolvem funções trigonométricas como: estudo de variação de temperatura e variação de marés, no livro 1, e movimento de roda-gigante, variação de marés, variação do custo de determinado produto, variação da distância atingida por um objeto lançado obliquamente, variação da quantidade mensal de produtos vendidos e variação de ar nos pulmões.

Um dos objetivos da nossa proposta do TCC foi suprir as falhas apresentadas nos livros analisados e reorganizar os conteúdos como acreditamos ser mais coerente para o aprendizado dos alunos: de forma mais dinâmica, mais interessante, com menor quantidade de exercícios, mas com situações-problema significativos, levando os alunos a refletirem, testarem possibilidades, experimentarem e construírem conceitos de forma mais significativa para eles.

CAPÍTULO 4

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA: UMA PROPOSTA DO TCC

Após ter terminado o Ensino Médio e ter ingressado no Curso Superior, sempre tive dificuldade de compreender a importância e aplicação da Trigonometria nas disciplinas como: Matemática Básica II, Cálculo Diferencial e Integral, Física I e II e na Geometria. Nesse sentido, sentimos a necessidade de elaborar esta proposta, que é o objetivo geral do nosso trabalho.

4.1. Os Objetivos e a Organização da Proposta

A Trigonometria é um conteúdo com o qual conseguimos trabalhar com um modo de pensar diferenciado, buscando nos conceitos de geometria a resolução de problemas. Assim, a maneira como propomos as atividades busca compreensão das definições e conceitos de trigonometria e também o desenvolvimento de hábitos de pensamento pelos alunos.

Nesse sentido, nosso objetivo geral é que a partir desta proposta, os professores ou pesquisadores possam trabalhar com a Trigonometria no Ensino Básico ou no Curso Superior, de forma a desenvolver um novo conhecimento de trigonometria através da Resolução de Problemas.

Outro objetivo desta proposta é a aprendizagem de Trigonometria, o foco não está nos conteúdos de Geometria. A abordagem destes tópicos é fundamental para explicar as resoluções dos problemas geradores e motivadores. Nesta proposta é importante que os alunos saibam justificar matematicamente suas soluções, quase que demonstrações sem formalidade. Por trás deste pensamento matemático existirão as ideias de coerência e coesão, mostrando clareza nos argumentos que serão construídos.

4.2. Aplicações para sala de aula por encontros

Nesta seção as atividades serão divididas em encontros, os quais estarão agrupados de acordo com o conteúdo a ser desenvolvido através de problemas. Cada período de aula deverá ter 50 minutos pelo menos. Em todas as aulas o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pelo professor/pesquisador ou professora/pesquisadora deve ser essencial. “Nessa metodologia, o problema é o ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 44).

4.2.1. Proposta para os Encontros 1, 2 e 3

Objetivos: motivar e introduzir o conteúdo de Trigonometria através da Geometria utilizando semelhança de triângulos e a proporcionalidade entre as medidas dos lados.

Metodologia: a abordagem ao conteúdo de Trigonometria será através da resolução de um problema motivador que exige modelagem da situação. As resoluções serão justificadas através de definições e conceitos de Geometria.

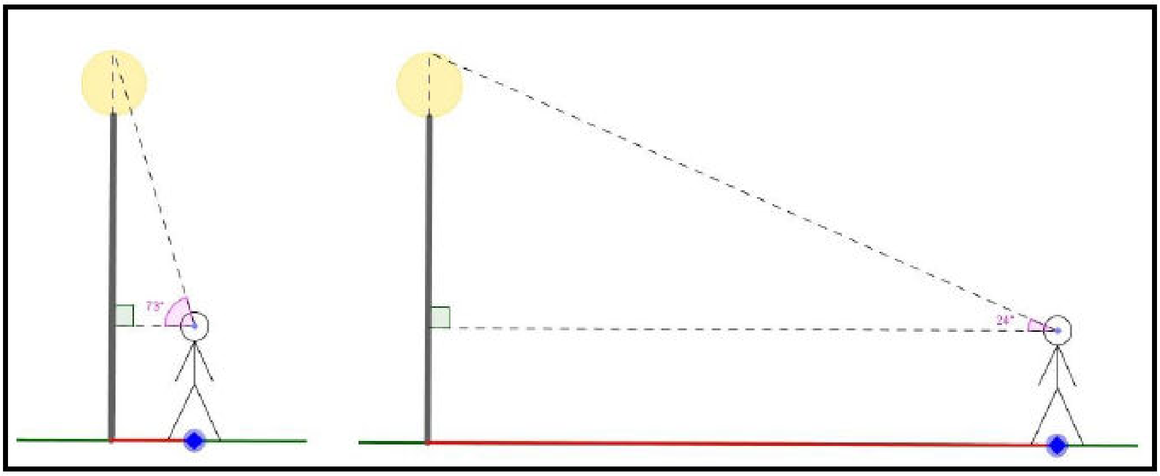
Situação-Problema 1: Como medir a altura de um poste?

Possíveis estratégias para a resolução do problema:

Na solução 1, por exemplo, utilizando um instrumento de medida de distância (teodolito caseiro) e outro de ângulo de visada. Conhecendo a distância do observador ao poste, o qual visualiza a extremidade a um ângulo de visada especial.

Inicialmente, pode-se desenhar o poste em um lugar plano, para visualizar a situação. Observamos que entre o poste e o chão há um ângulo de 90º, ou seja, são perpendiculares.

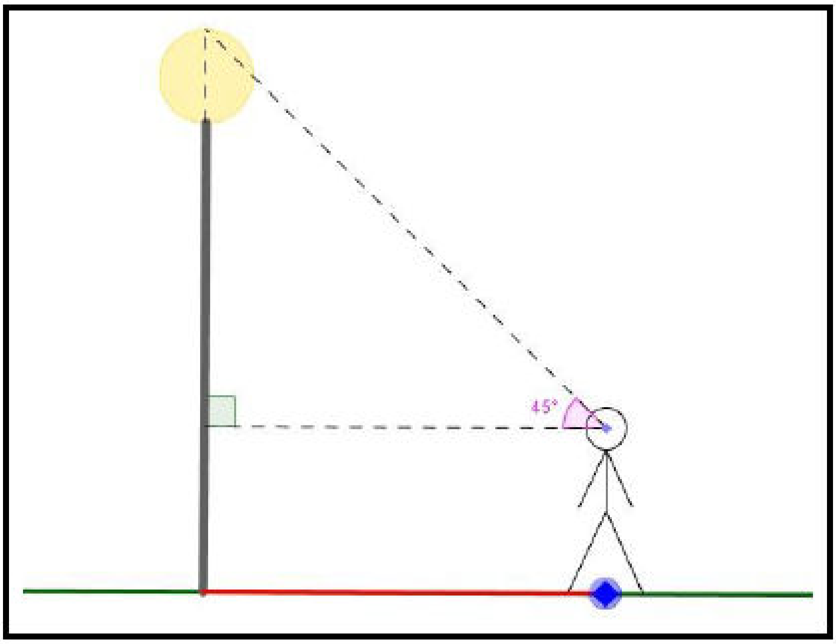
Figura 6 – Variação do ângulo de visada



Fonte: Elaborada pela autora

Partindo do poste, caminhamos contando os passos até encontrar um ângulo de visada de 45º em relação à extremidade do poste. Assim, obtemos um triângulo retângulo e isósceles. Somando a distância caminhada e a altura da pessoa, temos a altura do poste. Deste modo, ao encontrarmos um ângulo de visada de 45º conseguiremos a primeira versão da solução.

Figura 7 – Modelagem ângulo de visada de 45º



Fonte: Elaborada pela autora

Os conhecimentos necessários nesta solução são:

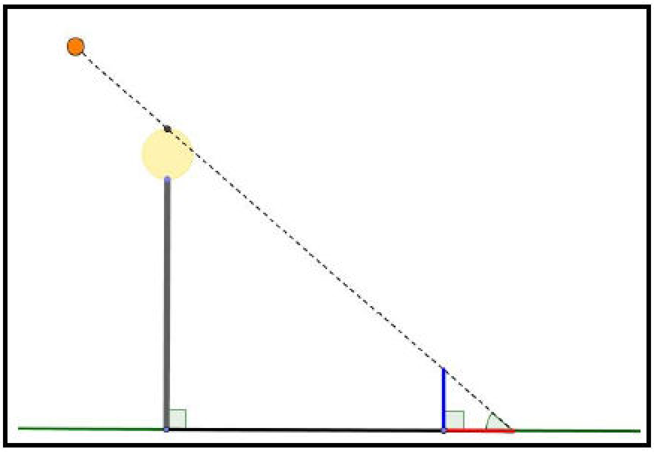
- A definição de ângulo: duas semi-retas com mesma origem;
- Perpendicularidade entre retas ou segmentos;
- Medida de ângulo em graus, utilizando um transferidor ou um teodolito: é a abertura entre duas semi-retas;
- Ângulo de visada;
- Quadrado: polígono de 4 lados que possui os ângulos internos retos e os lados congruentes;
- Triângulo isósceles: possui dois lados congruentes, e consequentemente, os ângulos opostos a estes lados têm a mesma medida;
- Soma dos ângulos internos de um triângulo: é um ângulo raso (180º).

Esta atividade será conduzida pelo(a) professor(a)/pesquisador(a) de acordo com a metodologia proposta por Allevato e Onuchic (2014), a maior intervenção do(a) professor(a)/pesquisador(a) será acerca dos conteúdos de geometria tomados como pré-requisitos.

A solução seguinte também está enquadrada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, criado para a sala de aula visando um ambiente de investigação. Outra possível solução 2 seria utilizando apenas um instrumento de medida de comprimento (trena). Do mesmo modo, com a medida da sombra constrói-se uma maquete. Assim, teríamos dois triângulos semelhantes conhecendo a razão de semelhança obtida através da medida dos comprimentos dos lados.

Para a segunda solução, a Situação-Problema 1 traz, além da precisão na identificação dos triângulos semelhantes, a análise de acordo com diferentes posições do sol, por exemplo, criando diferentes tamanhos de sombra. Isto mostraria que o tamanho do poste não depende dos tamanhos dos triângulos identificados, e sim da razão de semelhança escolhida. Na figura 8, o observador não seria construído propositalmente, pois assim enfatizamos que o observador estaria fazendo as medições.

Figura 8 – Maquete



Fonte: Elaborada pela autora

Os conhecimentos necessários exigidos nesta resolução são:

- Triângulo retângulo;
- Semelhança de triângulos (dois triângulos são semelhantes se seus lados estão em proporção ou se os ângulos internos têm a mesma amplitude);
- Teorema de Tales (versão para triângulos): uma reta *r* é paralela a um dos lados de um triângulo qualquer se, e somente se, *r* divide os outros dois lados em partes proporcionais.

Observamos que, em triângulos retângulos semelhantes, as razões entre os lados não mudam. Já em triângulos retângulos com ângulos diferentes as razões se alteram, dependendo dos ângulos.

Os exercícios para os encontros 2 e 3 destina-se à problemas secundários. Problemas que exijam raciocínio semelhante serão propostos aos alunos pelo(a) professor(a)/pesquisador(a).

Problema Secundário 1: Você está na margem de um rio e quer calcular a largura deste. Crie duas versões de resolução inspiradas nas anteriores. Considere um rio com as margens paralelas. Faça as escolhas convenientes e escreva seus raciocínios detalhadamente.

Problema Secundário 2: Uma rampa A provoca um deslocamento horizontal de 4 metros e deslocamento vertical de 3 metros. Outra rampa B provoca deslocamento horizontal e vertical de 7 metros e 5 metros, respectivamente.

Como saber qual das duas rampas é a mais íngreme? Escreva seu raciocínio.

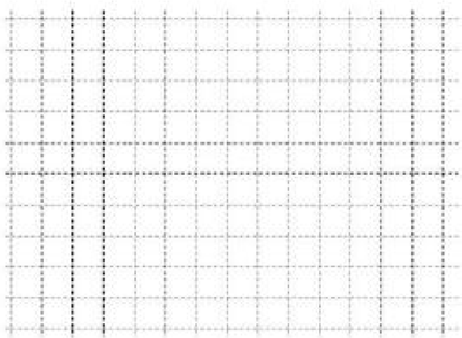
Problema Secundário 3: Você tem as seguintes informações sobre uma determinada rampa:

a) Como você entende a tabela?

b) Complete a tabela.

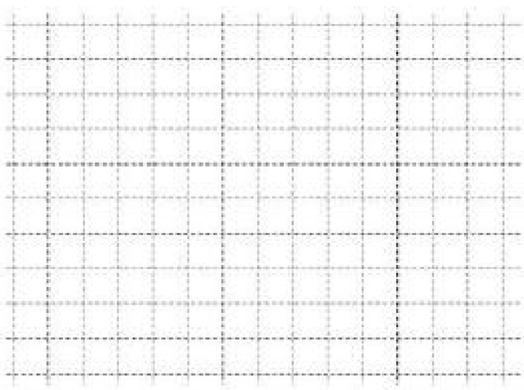
Ponto	Deslocamento Horizontal	Deslocamento Vertical
A	8 m	4 m
B	4 m	
C		1 m
D	6 m	
E		5 m
F		10 m

c) Desenhe a rampa e faça as demarcações das posições dos pontos.



d) Observe o comportamento da razão entre o deslocamento vertical e o deslocamento horizontal. Esta razão é chamada de inclinação da rampa. Usando transferidor estime o ângulo de inclinação da rama. Calcule a inclinação da rampa.

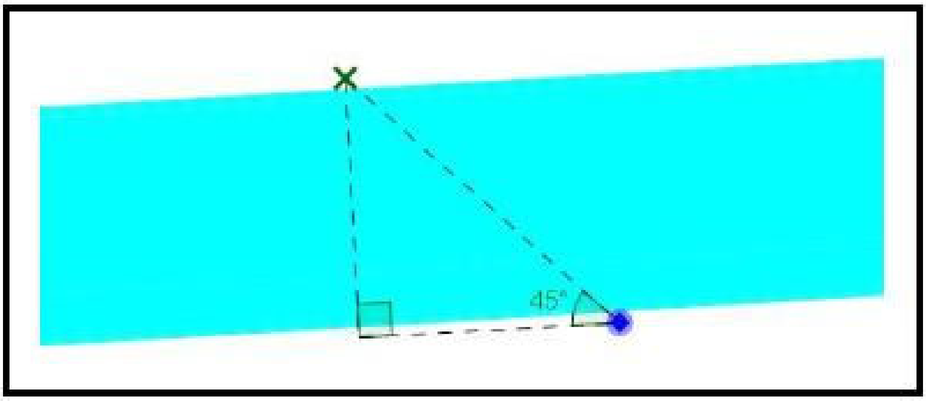
Problema Secundário 4: Desenhe uma rampa de inclinação $\frac{3}{4}$. Descreva os deslocamentos horizontais e verticais desta rampa.



Problema Secundário 5: Segundo as normas da ABNT para acessibilidade de cadeirantes, rampas curvas devem ter inclinação máxima de 8,33%. Dê um exemplo de medidas possíveis para uma rampa destas.

O Problema 1 dos Problemas Secundários: “Como medir a largura de um rio?” Pede-se aos alunos que realizem duas versões de solução inspirados no Encontro 1, um desenho é necessário para que eles identifiquem a mesma estratégia de solução nos diferentes contextos. O problema traz hipótese das margens serem paralelas e algumas escolhas de como deveriam ser feitas, como por exemplo, um ponto fixo para construção do triângulo retângulo.

Figura 9 – Modelagem largura do rio



Fonte: Elaborada pela autora

Já no Problema 5, vários exemplos podem aparecer já que encontramos várias rampas de acessibilidade para cadeirantes no nosso cotidiano. Podemos também discutir a necessidade de curvas na rampa devido ao espaço disponível para construção.

4.2.2. Proposta para os Encontros 4 e 5

Objetivos: definir as razões seno, cosseno e tangente.

Metodologia: os encontros 4 e 5 dedicam-se às formalizações do conteúdo, uma vez que foram trabalhadas a Situação-Problema 1 “Como medir a altura de um poste?”. Uma terceira resolução do problema utilizando a tangente servirá de motivação para a definição das razões especiais. O objetivo principal é que os alunos entendam que as razões no triângulo retângulo estão relacionadas com o ângulo.

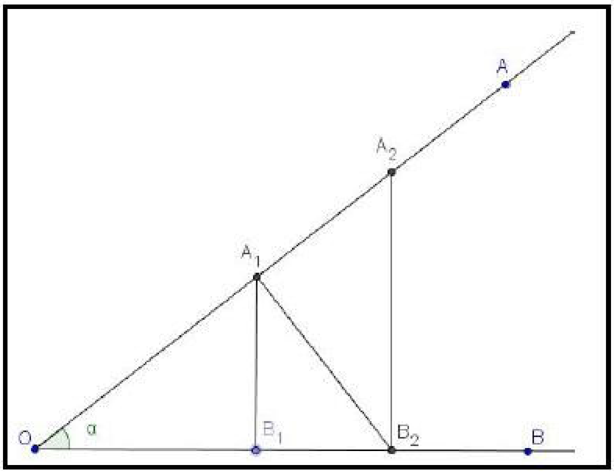
<u>Possíveis estratégias para a resolução do problema</u>:

Solução 3: Conhecendo a distância do observador ao poste e um ângulo de visada qualquer? Para resolução deste problema, precisamos definir algumas razões importantes.

<u>Razões importantes</u>:

Consideremos um ângulo agudo α, formado a partir das semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, com origem em O. Sejam os pontos A_1, A_2 pertencentes *à* semi-reta $\overrightarrow{OA}$ e os pontos B_1, B_2 pertencentes à semi-reta $\overrightarrow{OB}$ tais que os segmentos A_1B_1, A_2B_2 sejam perpendiculares à $\overrightarrow{OB}$ e o segmento A_1B_2 perpendicular a $\overrightarrow{OA}$. Observamos que os triângulos retângulos formados, OA_1B_1, OB_2A_1 e OA_2B_2 são semelhantes, pois têm os mesmos ângulos internos. Assim, as razões entre seus lados correspondentes se mantém, dependendo apenas do ângulo α, e não dos comprimentos. Estas razões recebem nomes especiais, são elas:

Figura 10 – Construção de triângulos semelhantes



Fonte: Elaborada pela autora

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = sen\ \alpha$$

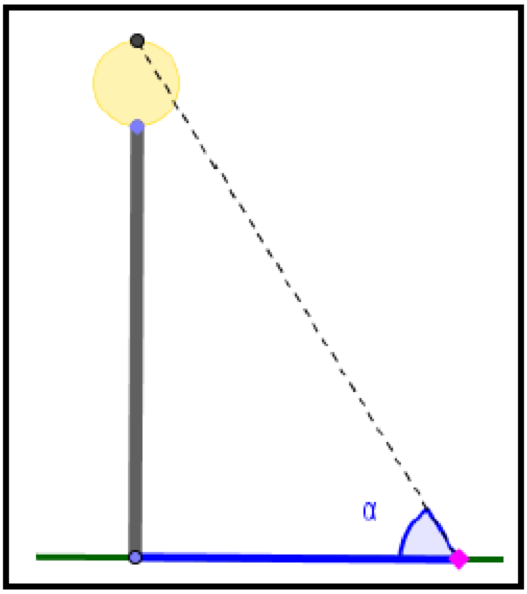
$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = cos\ \alpha$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = tg\ \alpha$$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha}$$

Desse modo, voltando à resolução do item da solução 3, encontraremos através da tangente do ângulo, a medida da altura do poste. Os elementos conhecidos estão destacados em azul, ver na figura 11.

Figura 11 – Triângulo Retângulo



Fonte: Elaborada pela autora

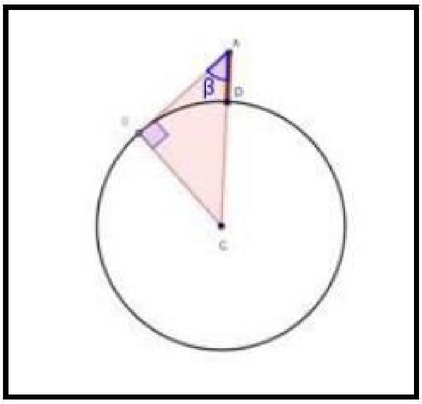
4.2.3. Proposta para os Encontros 6, 7 e 8

Objetivos: resolver problemas usando as razões trigonométricas e cálculo das razões trigonométricas correspondentes aos ângulos de 30º, 45º e 60º através da Resolução de Problemas.

Metodologia: Selecionamos um problema para resolver em conjunto com os alunos para mostrar a importância de se conhecer alguns valores das razões trigonométricas. No sexto encontro, será resolvido um problema. Já nos dois encontros seguintes será a determinação das razões trigonométricas dos ângulos 30º, 60º e 45º.

<u>Situação-Problema 2</u>: Do alto de um prédio de 10 andares, um observador mede um ângulo de 88º entre o prédio e a linha do horizonte. Sabe-se que cada andar tem 3 metros de altura. Inspirado na figura 12, você consegue uma estratégia para calcular o raio da terra? Explique seu raciocínio.

Figura 12 – Modelagem para calcular o raio da Terra



Fonte: Elaborada pela autora

<u>Possíveis estratégias para a resolução do problema</u>:

Através deste problema podemos mostrar a importância de se conhecer alguns valores das razões especiais para calcular o raio da terra. Este problema será discutido em conjunto com a turma. Quais as vantagens de se conhecer os valores de seno, cosseno e tangente de alguns ângulos?

Possível solução para um caso geral:

Inicialmente, chamamos atenção para a falta de proporção entre o prédio e a terra na figura 13. Nesse sentido, para medir o raio R da terra, sobe-se em um prédio de altura conhecida h e mede-se o ângulo β do prédio com a linha horizonte.

$$\frac{R}{R+h} = sen\beta$$

Dessa forma, se conhecermos as medidas de h e β, que são acessíveis, e o valor do $sen\beta$ consegue-se aproximar a medida do raio da terra. Isolando R:

$$R = \frac{sen\beta}{1 - sen\beta} \cdot h$$

Assim, com essas informações do enunciado e utilizando que *sen* 88º = 0,999 chegamos que R = 29,970 km. Em uma pesquisa rápida na internet, encontramos a medida aproximada do raio da terra de 6378,1 km, ou seja, o erro será muito expressivo. Para obtermos precisão maior na resposta, o ângulo deve ser de aproximadamente 89,82º e com *sen* 89,82º = 0,999995065201. A proposta é que os alunos se sintam intrigados e motivados a investigar qual seria o ângulo correto para que o erro na resposta seja menor e compreendam que quando se tratam de medidas muito grandes, as precisões nas casas decimais diminuem o erro cometido nos cálculos.

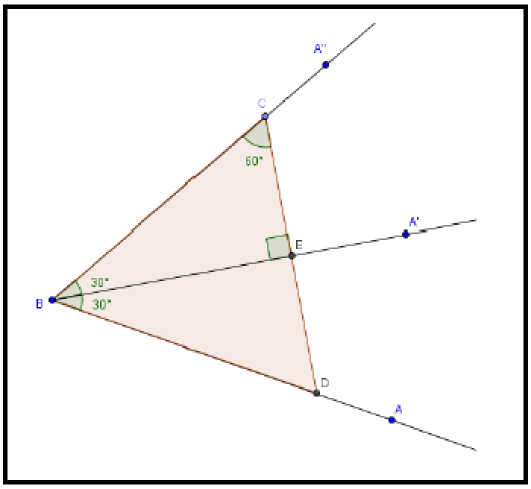
Para os encontros 7 e 8 será feito o cálculo para valores das razões trigonométricas de ângulos especiais através da Resolução de Problemas.

Poderia ser iniciado fazendo a seguinte pergunta: – Por que alguns ângulos são especiais?

Os ângulos de 30º, 45º e 60º são considerados especiais, pois conseguimos calcular precisamente os valores do seno, cosseno e tangente através de construções do triângulo equilátero ou quadrado. Assim, podemos observar que com outras relações trigonométricas e um pouco mais de cálculo se pode ampliar esta tabela de valores.

Nesse caso, se dará a construção para cálculo dos valores das razões trigonométricas para o ângulo de 30º:

Figura 13 – Construção dos ângulos de 30º e 60º



Fonte: Elaborada pela autora

Desse modo, construímos primeiro um ângulo de 30º, reflete-o em torno de uma das semirretas e obtém-se um ângulo de 60º. Nesta mesma semirreta, construímos uma reta perpendicular e marcamos os pontos de interseção com as outras semirretas. Assim, obtemos dois triângulos retângulos que formam um triângulo equilátero. Observe que o cateto menor de cada triângulo retângulo mede metade da hipotenusa. Se a hipotenusa mede *x*, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede $\frac{x}{2}$. Assim,

$$sen30^o = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

Em seguida, para o cálculo do cosseno de 30º, precisamos da medida do cateto maior *c*. Nesse caso, aplicaremos o Teorema de Pitágoras e obtemos:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + c^2$$

$$c = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Com isto,

$$cos30^o = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para a tangente de 30º:

$$tg30^o = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Então, para um ângulo de 60º, como já temos um triângulo retângulo com um ângulo de 60º na construção anterior, deduzimos os valores de seno, cosseno e tangente para 60º.

$$sen60^o = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

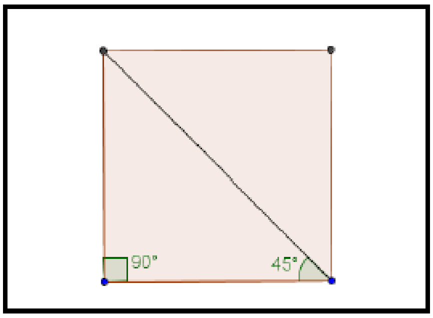
$$cos60^o = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$tg60^o = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

Com relação ao ângulo de 45º, como construir?

Partimos da construção de um quadrado e traçamos uma das diagonais, dividindo o quadrado em dois triângulos que são retângulos e isósceles simultaneamente conforme a figura.

Figura 14 – Construção do ângulo de 45º



Fonte: Elaborada pela autora

Então, com o lado do quadrado medindo *a*, a diagonal *d* mede:

$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d = a\sqrt{2}$$

Assim, a dedução dos valores de seno, cosseno e tangente para o ângulo de 45º é:

$$sen45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = cos45^0$$

$$tg45^0 = \frac{a}{a} = 1$$

Finalmente completaremos uma tabela com os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30º 45º e 60º.

4.2.4. Proposta para os Encontros 9, 10 e 11

Objetivos: Resolver 11 problemas, visando a construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esses onze problemas serão chamados de problemas geradores para a construção de conhecimento.

Metodologia: Utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

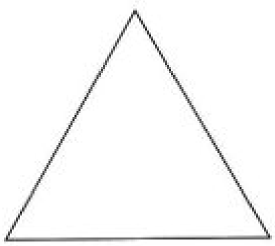
Possíveis estratégias para a resolução dos problemas:

Quanto aos problemas, propomos atividades parecidas com as trabalhadas em aula e alguns problemas que precisam ser resolvidos com as razões trigonométricas. Os encontros 9 e 10 serão dedicados à resolução da lista de problemas pelos alunos com o auxílio do(a) professor(a)/pesquisador(a). Já no encontro 11 serão resolvidos os problemas elencados pelos alunos como os mais difíceis.

Sugestão: Lista de Problemas sobre Trigonometria

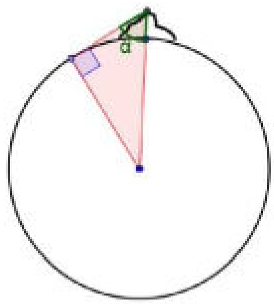
Problema 1: Descreva uma solução para calcular a altura de uma árvore.

Problema 2: Encontre o valor que falta na tabela utilizando o triângulo equilátero abaixo.



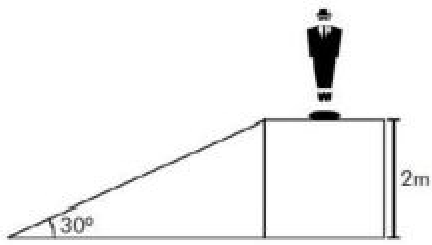
	30°	45°	60°
sen		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
cos		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
tg		1	

Problema 3: Sabe-se que a colina mais alta de Marte mede 100 metros. Do alto desta colina, um astronauta mede o ângulo de 89,56º indicado na figura abaixo. Calcule uma estimativa do raio de Marte.



Problema 4: Para permitir o acesso a um monumento que está em um pedestal de 2m de altura, vai ser construída uma rampa com inclinação de 30º com o solo, conforme a ilustração. O comprimento da rampa será igual a:

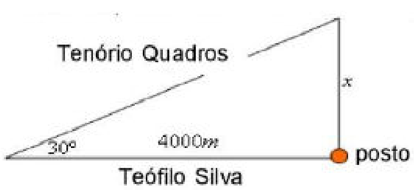
a) $\sqrt{2}$ m
b) $\sqrt{3}$ m
c) 2 m
d) 4 m
e) $4\sqrt{2}$ m



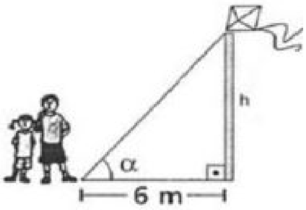
Problema 5: Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formado com o solo, um ângulo de 30º (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1000 metros, qual a altura atingida pelo avião?

Problema 6: Um avião levanta voo sob um ângulo constante de 20º. Após percorrer 2000 metros em linha reta, qual será a altura atingida pelo avião, aproximadamente? (Utilize: sen 20º = 0,342; cos 20º = 0,94 e tg 20º = 0,364)

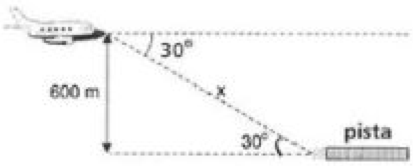
Problema 7: A rua Tenório Quadros e a avenida Teófilo Silva, ambas retilínea, cruzam-se conforme um ângulo de 30º. O posto de gasolina Estrela do Sul encontra-se na avenida Teófilo Silva a 4000 m do citado cruzamento. Portanto, determine em quilômetros, a distância entre o posto de gasolina Estrela do Sul e a rua Tenório Quadros?



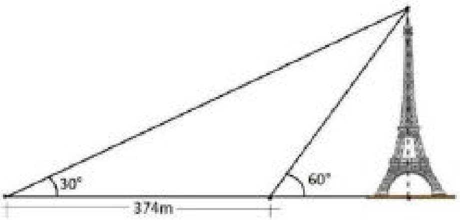
Problema 8: Ao empinar uma pipa, João percebeu que estava a uma distância de 6 m do poste onde a pipa engatou. Renata notou que o ângulo α formado entre a linha da pipa e a rua era 60º, como mostra a figura abaixo. Calcule a altura do poste.



Problema 9: Um avião está a 600 m de altura quando se vê a cabeceira da pista sob um ângulo de declive de 30º. A que distância o avião está da cabeceira da pista?



Problema 10: Um turista vê o topo de uma torre construída em um terreno plano, sob um ângulo de 30º. Aproximando-se da torre mais 374 m, passa a vê-la sob um ângulo de 60º. Considerando que a base da torre está no mesmo nível do olho do turista, calcule a altura da torre.



Problema 11: Uma pessoa encontra-se num ponto A, localizado na base de um prédio, conforme mostra a figura 1 abaixo. Se ela caminhar 120 m em linha reta, chegará num ponto B, de onde poderá ver o ponto C do prédio, sob um ângulo de 60º. Quantos metros ela deverá se afastar do ponto A, andando em linha reta no sentido de A para B (ver figura 2 abaixo), para que possa enxergar o topo de prédio sob um ângulo de 30º.

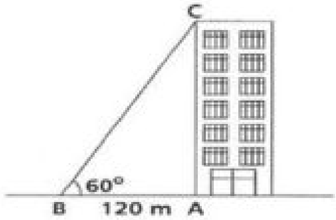


Figura 1

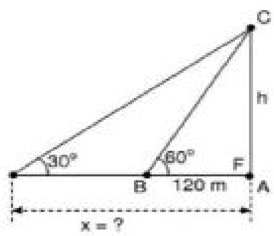


Figura 2

A fim de encerrar esta seção, de uma forma geral, nesta proposta de trabalho para o longo dos encontros pretendidos, além de ensinar trigonometria através da Resolução de Problemas, seria bom mostrar aos alunos formas diferentes de pensar matemática através do uso da geometria dinâmica e das intervenções do(a) professor(a)/pesquisador(a) na forma de conduzir as atividades, buscando levar os hábitos de pensamento crítico em matemática para a sala de aula.

CONSIDERAÇÕES

Salientamos que esta pesquisa bibliográfica significou muito para nossa prática como futura professora de matemática. Foi um desafio, pois não imaginávamos propor um problema como ponto de origem do conhecimento matemático em sala de aula. Sempre pensávamos que poderíamos propor exercícios para os alunos depois de formalizar um determinado conteúdo matemático, ou seja, o ensino de matemática para a Resolução de Problemas.

Pelos conhecimentos obtidos durante o estudo da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas acreditamos que a metodologia estudada por nós possa ser aprimorada. Estamos convencidos que esta metodologia é uma boa alternativa para a prática docente, e aos alunos, é uma oportunidade de construir um novo conhecimento matemático valendo-se de seu potencial.

Neste sentido, a Resolução de Problemas se torna um recurso não só para aplicar, mas para aprender matemática. Assim, este trabalho se propôs a contribuir no ensino da trigonometria fundamentando-se na pesquisa bibliográfica. Para tanto, tomamos como eixo de ação uma proposta de aplicação de uma sequência didática com problemas até chegarmos a Trigonometria, sempre utilizando a pesquisa bibliográfica.

No desenvolvimento deste trabalho pudemos perceber que utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o professor poderá aprimorar e refletir sobre o conhecimento que os alunos têm, ou seja, seu conhecimento prévio sobre a sala de aula e o programa que está sendo desenvolvido o conteúdo e as razões para ensiná-lo e aprendê-lo.

As primeiras resoluções dos problemas que apresentamos na proposta para os alunos tem um nível de dificuldade menor devido a diferentes estratégias de solução que podem ser utilizadas. A ideia é que os alunos percebam que saber trigonometria é importante para a resolução dos problemas com menos informações. Sendo assim, a maior dificuldade é entender a necessidade do conteúdo.

Com as sequências de atividades propostas pretendemos que os alunos consigam resolver os problemas de acordo com o raciocínio trabalhado em aula na abordagem do conteúdo. Esperamos que usando pensamento lógico eles desenvolvam o raciocínio argumentativo e produzam soluções para as questões, desenvolvendo hábitos de pensar através da resolução de problemas.

Também esperamos, com essas atividades, que os alunos tenham clareza no raciocínio, no passo a passo a ser utilizado, que identifiquem qual razão trigonométrica é adequada de acordo com as informações dadas ou que utilizem o Teorema de Pitágoras relacionando as medidas dos lados do triângulo retângulo. Nesse sentido, os alunos construiriam seu conhecimento sobre Trigonometria através da Resolução de Problemas quando forem propostas situações desafiadoras, situações essas que os alunos deveriam analisar e resolver, edificando seu conhecimento matemático a partir desses problemas.

Este trabalho foi de grande importância para a minha formação profissional, mas devido o tempo não foi possível desenvolvê-lo em sala de aula, desse modo deixamos para que outras pessoas possam aplicá-lo ou quem sabe eu possa futuramente transformá-lo em um projeto para o mestrado.

Por fim, apresentamos como proposta de estudos futuros a aplicação e a avaliação da pesquisa em uma sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 1º e 2º ciclos**. Brasília: MEC, 1997. 141p.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 3º e 4º ciclos**. Brasília: MEC, 1998. 148p.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2000, 113p.

________. Ministério da Educação – Secretaria da Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2006. v.2, p.69-98.

DANTE, L. R. **Matemática – Contextos e Aplicações**. 2.ed. Vol. Único. São Paulo: Editora Ática. 2006.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI JR, J. R. **Matemática**. Sistema de Ensino. São Paulo: Editora FTD. 2007

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

HUANCA, R. R. H. **A Resolução de Problemas no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e além da sala de aula**. 2006. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

LIMA, S. S. **Trigonometria no Triângulo Retângulo**. 2006. 49 f. TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Departamento de Matemática e Estatística, Curso de Licenciatura Plena em Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2006.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. Cap. 12, p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2005, p. 212-231.

_______. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 25, nº 41. p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, L. R.; HUANCA, R. R. H. A Licenciatura em Matemática: O desenvolvimento profissional dos formadores de professores. In: Maria Clara Rezende Frota; Barbara Lutaif Bianchini; Ana Márcia F. Tucci de Carvalho. (Org.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. 1ed. Campinas: Papirus, 2013, v. 1, p. 307-331.

ONUCHIC, L. R.; HUANCA, R. R. H. **Uma Revolução no campo da Formação de professores de Matemática**. In. II congresso Nacional de Formação de Professores de Matemática. 2014, Águas de Lindóia. Anais. p. 1-10

ONUCHIC. L. R.; ALLEVATO. N. S. G.; NOGUTI. F.C.H.; JUSTULIN. A. M. **Resolução de Problemas: teoria e prática**. Jundiaí, Paco editora, 2014.

PEREIRA, C. S. **Aprendizagem em Trigonometria no Ensino Médio: Contribuições da Teoria Aprendizagem Significativa**. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2012.

POLYA, G. **Arte de resolver problemas**: um novo enfoque do método matemático. Trad. H. L. Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1994. 196 p.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Resolução de problemas. In: PALHARES, P. (Coord.). **Elementos de matemática para professores do ensino básico**. Lisboa: Lidel, 2004. p. 7-51.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009 584 p.

VIANNA, C. R. Problemas. In: FUTURO CONGRESSOS E EVENTOS (Org.). **Temas em educação I:** o livro das jornadas de 2002. Curitiba, PR: UFPR, 2002. p. 401-410.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre, RS: Artmed, 2006.