



Universidade Estadual da Paraíba
Campus VI - Poeta Pinto do Monteiro
Centro de Ciências Humanas e Exatas
Curso de Licenciatura em Matemática

Ricardo de Souza Bandeira

TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES

Monteiro - PB, Brasil

Maio de 2016

Ricardo de Souza Bandeira

TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Luciano dos Santos Ferreira

Monteiro - PB, Brasil

Maio de 2016

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

B214t Bandeira, Ricardo de Souza.
Teorema de Green e aplicações [manuscrito] / Ricardo de Souza Bandeira. - 2016.
84 p. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em MATEMÁTICA) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2016.

"Orientação: Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira, Departamento de Matemática".

1. Teorema de Green. 2. Cálculo de Áreas. 3. Fluxo. I.
Título.

21. ed. CDD 515

Ricardo de Souza Bandeira

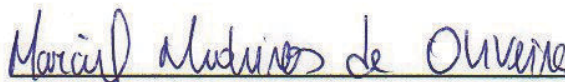
TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Trabalho aprovado. Monteiro - PB, Brasil, 11 de maio de 2016:



Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira
Orientador



Prof. Me. Marciel Medeiros de Oliveira
Examinador interno (CCHE/UEPB)



Prof. Me. Robson Batista de Sousa
Examinador interno (CCHE/UEPB)

Monteiro - PB, Brasil

Maio de 2016

Dedico a minha querida Doralice, que sempre me aconselhou para a prática do bem. Procurei um reflexo do teu amor, no recorte do tempo, encontrando em mim a tua paz, a tua esperança; buscando promover tudo que é de bom e de útil; e, jamais praticar o mal. E a minha filha amável, que me mantém na busca imorredoura do prazer de ser pai, no toque suave de suas mãos, na ternura dos seus gestos, na doce voz, firme e angelical, vozes que a todo tempo me ecoam, que jamais morrerão, quer seja renovando as minhas energias quer seja me sobrepujando a reflexão, mantendo-me na retidão do bem; meus pensamentos tornam-se iam descontentes, imacular a terna proteção de digníssima flor.

Agradecimentos

CADA UM

Cada um que passa em nossa vida,
Passa sozinho...

Porque cada pessoa é única pra nós,
E nenhuma substitui a outra...

Cada um que passa em nossa vida,
Passa sozinho,
Mas não vai só...

Cada um que passa em nossa vida,
Leva um pouco de nós mesmos,
E nos deixa um pouco de si mesmo...

Há os que levam muito,
Mas não há os que não levam nada...

Há os que deixam muito,
Mas não há os que não deixam nada...

Esta é a mais bela realidade da vida.
A prova tremenda de que cada um é
importante,

E que ninguém se aproxima do outro
por acaso...

A cada dia que vivo, mais me convenço
de que o desperdício da vida está no
amor que não damos, nas forças que
não usamos, na prudência egoísta que
nada arrisca e que, esquivando-nos do
sofrimento, perdemos também a felici-
dade.

Antoine de Saint-Exupéry

Mary Cholmondeley

Primeiramente agradeço a Deus, causa primária de todas as coisas, pela oportunidade de aprender. Agradeço também pela vida; e, na vida, pelos sentidos que estruturam a percepção de mundo, de vida e das relações. Agradeço a minha família. Agradeço pelas calmarias e pelas adversidades, agradeço aos homens de boa vontade; aqueles que não sepultam nossos sonhos, mas nos encorajam a realizá-los. Mais uma vez, certificando que Deus sempre ajuda os homens pelos próprios homens, já que aprendendo com eles, percebemos o quanto todos nós somos importantes.

É difícil para mim, mas não é estranho para ninguém, conter a empolgação de revelar a enorme admiração pela categoria docente. Não posso deixar em obscuro, nem no anônimato, seus nomes, que devem preencher os recortes desse tempo, os méritos que lhes são devidos: são práticas sociais relevantes e pertinentes que promoveram durante todo esse período a construção da aprendizagem e o desenvolvimento de nossa identidade histórica, em seus aspectos político, social e cultural; e, que se manifestam além das fronteiras da universidade. Algumas dessas manifestações percorrem no tempo, a exemplo de uma

homenagem de um discípulo aos seus mestres, uma célebre frase das cartas, enviadas a R. Hooke: Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes. Do seu autor, traduzindo a minha passagem na vida acadêmica. Por meio de cada um dos senhores, tive acesso aos bens materiais, tive acesso ao conhecimento, compartilhei inclusive, de outras virtudes que dificilmente ensinam-se nas escolas: aprender a respeitar as diferenças, seus tempos, seus espaços, limites e possibilidades. Essas conquistas a que me refiro, também são reflexos de um projeto que foi centralizador e decisivo para a minha permanência nessa instituição, representada diretamente na figura eminente do Me José Luís Cavalcanti e equipe.

O **PIBID-MATEMÁTICA**, em particular, do Campos-VI/ Monteiro vem oferecendo aos licenciandos, uma nova visão de mundo nos parâmetros da educação escolar e de modo mais amplo, aos corpos do ensino e aprendizagem da educação brasileira, com o objetivo de cotejar um ensino e aprendizagem de melhor qualidade nas nossas escolas e do qual desfecho deixando meus sinceros agradecimentos a todos esses homens e mulheres que nessa casa do conhecimento muito contribuíram e muito contribuem para a formação pessoal e profissional do educando, o que faz a grandeza de ser educador.

Aos professores-substitutos, mestres e doutores: Adriana Ribeiro de Moura - Alex Fernandes Mendes - Ana Emília Victor Barbosa Coutinho - Brauner Gonçalves Coutinho - Cláudio Odair Pereira da Silva - Edênia de Farias Sousa - Estevam Dedalus Pereira de Aguiar Mendes - Francisco William Braga - Joana Dar'k Costa - José Luís Cavalcante - José Joelson Pimentel de Almeida - Luciano dos Santos Ferreira - Luiz Lima de Oliveira Júnior - Marcelo Medeiros da Silva - Marciel Medeiros de Oliveira - Maria José Neves de Amorim Moura - Marília Lidiane Chaves da Costa - Natan de Assis Lima - Oscar Tomé Farias Silva - Otacílio Gomes da Silva Neto - Patrícia Melo Rocha - Robson Batista de Sousa - Rodrigo César Fonseca da Silva - Roger Ruben Huanca - Rosilda Sousa Santos - Sam Thiago Pereira Borges - Stanley Borges de Oliveira - Tiago Marques Madureira - Tony Regy Ferreira da Silva -

Aos servidores técnicos-administrativo, seguranças, colaboradores da limpeza;

Aos amigos de sala: Eugênio, Edilane, Thaís, Cícero, Izailma, Diogo, e aqueles que não puderam por algum motivo concluir o curso ao nosso lado: Mônica, Aldanilo, Jocelânia, Janiele, Wagner, Victor.

Aos amigos do curso de matemática de outros períodos:

Paula, Raiane, Fernanda, Mary, Paulo, Iraneide, Cirila, Ivo, Flávia, Aline, Neto, Júlio, Izamara, Patrícia, Matheus, Vanderley, Janaína, Hiranez, Zilda.

Aos amigos, colegas, professores e coordenadores dos Cursos de Letras (Português/Espanhol e Ciências Contábeis;

Aos professores da educação básica, professores e alunos do youtube;

Aos amigos da República Estudantil.

*Muitas ilusões preenchem lacunas na
vida daquêles que temem as realidades
amargas da mesma.*

Geraldo Bandeira

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de abordar o Teorema de Green e suas aplicações. De caráter bibliográfico, vem dar ênfase as aplicações de cálculos de área e Momentos de Inércia, estabelecendo para seus resultados, definições e teoremas, conceitos norteadores importantes, tais como: Campos Vetoriais, Integrais de Linha, Divergência e Rotacional. Este teorema relaciona a integral de linha ao longo de uma curva fechada simples parcialmente suave com a integral dupla sobre a região delimitada por esta curva, expresso por $\oint_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$. O Teorema de Green, que é um importante Teorema do Cálculo Diferencial Vetorial, possibilita escolher trabalhar integral simples em vez de integral dupla sobre uma região, e vice-versa, certificando o uso do Teorema de Green como importante ferramenta que colabora na resolução de problemas difíceis de resolver. É nesse contexto que, discorre a pretensão de mostrar sua aplicação no cálculo de área de regiões determinadas por curvas simples e fechadas e estabelecermos a relação existente entre o Teorema de Green e o Fluxo de Campo de Velocidade através de uma região plana; assim como, também, a relação do Teorema de Green e o Momento de Inércia. Para o cálculo dessa área empregaremos o teorema que é consequência do Teorema de Green, expresso por $\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = A$. Outro resultado proveniente do Teorema de Green, originando expressões diferentes para o Momento de Inércia, anuncia o cálculo do Momento de Inércia por Integral de Linha em vez de integral de área.

Palavras-chave: Teorema de Green. Cálculo de Áreas. Fluxo.

Abstract

This work aims to address Green's theorem and its applications. As a bibliographic review, it emphasizes area calculations and Inertia Moments applications, establishing important guiding concepts, for its results, definitions, and theorems, such as: Vector Fields, Line Integrals, Divergence and Rotational. This theorem relates line integral along a simple closed curve partially smooth with double integral over the region bounded by the curve, expressed by $\oint_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$. Green's theorem, which is an important Differential Vector Calculus Theorem, allows to choose to work simple integral instead of double integral over a region, and vice versa, ensuring the use of Green's theorem as an important tool that assists in solving complex problems. It is in this context that discusses the intention of showing its application in region area calculation determined by simple and closed curves and establishing the relationship between Green's theorem and the Speed Field Flow through a flat region; and also, the relationship between Green's theorem and Moment of Inertia. For the calculation of that area will be used the theorem which is a consequence of Green's theorem, expressed by $\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = A$. Another result from Green's theorem, giving different expressions for the Moment of Inertia, announces the calculation of the Moment of Inertia by line integral instead of area integral..

Key-words: Green's theorem. Area calculation. Flow.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Imagem de George Green	15
Figura 2 – Imagem de Isaac Newton.	17
Figura 3 – Imagem de Gottfried Leibniz	17
Figura 4 – Imagem de George Gabriel Stokes	18
Figura 5 – Imagem de William Thomson	19
Figura 6 – Placa para George Green na Abadia de Westminster	20
Figura 7 – Representação das linhas de força do campo gravitacional	21
Figura 8 – Representação de um campo vetorial no R^2	23
Figura 9 – Representação de um campo vetorial no R^3	23
Figura 10 – Representação vetorial do campo: $F(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$	24
Figura 11 – Campo vetor velocidade	24
Figura 12 – Campo gradiente sobre uma superfície	25
Figura 13 – Representação do trabalho realizado por F sobre a curva lisa de A a B	27
Figura 14 – Seis maneiras diferentes de escrever a integral de trabalho	28
Figura 15 – Representação do trabalho realizado por uma força variável sobre uma curva no espaço	28
Figura 16 – Representação da curva de intersecção do cilindro $y = x^2$ e do plano $z = x$	30
Figura 17 – Representação do versor normal exterior a uma curva lisa C no plano xy	32
Figura 18 – Corpo rígido que gira em torno de um eixo	39
Figura 19 – A curva $\mathbf{r}(t)$ particionada em pequenos arcos de $t = a$ a $t = b$. O comprimento de um subarco típico é Δs_k	41
Figura 20 – Representação do segmento da reta C no espaço: calculando uma integral de linha	42
Figura 21 – Integral de linha para dois caminhos ligados	42
Figura 22 – Caminhos de integração: união dos segmentos de reta C_1 e C_2	45
Figura 23 – Caminhos de integração: união dos segmentos de reta C_1 , C_2 e C_3	45
Figura 24 – Caminhos de integração: representação do segmento da reta.	53
Figura 25 – Caminhos de integração: representação do segmento da parábola $y = x^2$	53
Figura 26 – Caminhos de integração: representação do segmento da curva $x = y^3$	53
Figura 27 – Representação da circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$	56
Figura 28 – Região do plano xy	58
Figura 29 – Região do plano definida por $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$	58
Figura 30 – Região do plano definido por $R = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$	58
Figura 31 – Representação de tipos de curvas fechadas	59
Figura 32 – Representação no plano xy da elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$	60
Figura 33 – Representação no plano de triângulo limitado por retas	61

Figura 34 – Representação da equação $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ no plano	62
Figura 35 – Região limitada pela curva $r(t) = t^2i + \left(\left(\frac{t^3}{3}\right) - t\right)j$ no plano	66
Figura 36 – Representação do fluxo do campo velocidade através da malha	67
Figura 37 – Representação do vetor velocidade que passa através da malha	68
Figura 38 – Representação da Região de Jordan	70
Figura 39 – Curva de fronteira C formada por C_1 , o gráfico de $y = f_1(x)$ e C_2 , o gráfico de $y = f_2(x)$	71
Figura 40 – Curva de fronteira C formada por C_1 , o gráfico de $x = g_1(y)$ e C_2' , $x = g_2(y)$	71
Figura 41 – Prova do Teorema de Green para um retângulo	73
Figura 42 – Outras regiões as quais o Teorema de Green se aplica	74
Figura 43 – Uma região R que é formada por regiões R_1 e R_2 : representação de uma semi coroa circular	75
Figura 44 – A região anular R	76
Figura 45 – Região limitada pela circunferência C_n e pela curva K	77
Figura 46 – Teorema de Green aplicado à região anular R (coroa circular)	77
Figura 47 – Gráfico de uma região retangular	79
Figura 48 – Representação da elipse $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ no plano	80

Lista de símbolos

\in	Pertence.
\mathbb{R}^2	Plano xy .
\mathbb{R}^3	Plano xyz .
\int_a^b	Integral variando de a a b .
\Rightarrow	Implica.
\Leftrightarrow	Se e somente se.
Φ	Fi. Representando o fluxo.
Ω	Ômega. Representando uma lâmina na forma de uma região de Jordan.
∇f	Gradiente da função f .
\oint_C	Integral de linha através de uma curva fechada C .
$\int_R \int$	Integral dupla sobre a região R .
$\int_D \int$	Integral dupla sobre a região D .
$\frac{\partial \phi}{\partial x}$	Derivada da função ϕ em relação a x .
\int_C	Integral de linha através da curva C .
$\langle . \rangle$	Produto escalar.
$f'(t)$	Derivada da função f em relação a t .
λ	Lambda. Representando a densidade de massa constante.
W	Dáblio. Representando o trabalho.

Sumário

	Introdução	14
1	ASPECTOS HISTÓRICOS	15
2	CAMPOS VETORIAIS	21
2.1	Campos Vetoriais	21
2.2	Campos Gradientes	25
2.3	Trabalho realizado por uma Força ao longo de uma Curva no Espaço	26
2.4	Integrais de Escoamento e Circulação para Campos de Velocidade	29
2.5	Fluxo através de uma Curva Plana	31
2.6	Campos Conservativos	33
2.6.1	Integrais de Linha em Campos Conservativos	34
2.6.2	Teste das Componentes para Campos Conservativos	34
2.6.3	Formas Diferenciais Exatas	34
3	DIVERGÊNCIA E ROTACIONAL	37
4	INTEGRAIS DE LINHA	41
4.1	Como Calcular uma Integral de Linha	43
4.2	Integrais de Linha Independentes do Caminho	51
5	TEOREMA DE GREEN	57
5.1	Duas Formas para o Teorema de Green	63
5.1.1	Hipóteses Matemáticas	64
5.2	Momento de Inércia	64
5.3	Aplicações do Teorema de Green	65
5.4	Prova do Teorema de Green para Regiões Especiais	70
5.4.1	Estendendo a Prova para Outras Regiões	72
	Considerações finais	83
	REFERÊNCIAS	84

Introdução

Esta pesquisa coleta importantes conceitos relacionados ao tema: Teorema de Green e Aplicações. Para que possamos estabelecer as relações necessárias e suficientes, quanto mecanismos fundamentais para o processo de construção do desenvolvimento do Teorema de Green. Por isso, é imprescindível mencionarmos a importância desses matemáticos para o Cálculo Diferencial e Integral, os estudos de Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), que deram origem aos fundamentos mais importantes do Cálculo: as derivadas e as integrais; também conhecido como Cálculo Infinitesimal e, que sobremaneira mais tarde refletem o Teorema de Green como importante Teorema de Cálculo Diferencial Vetorial.

Seguindo a linha do trabalho, será feita a abordagem de Cálculos Vetoriais. Uma classe importante de campos vetoriais surge do processo de determinação de gradientes - Campos gradientes tratados neste trabalho. Vamos, em seguida, definir duas operações fundamentais dos campos vetoriais do espaço 3 - D - a Divergência e o Rotacional do Campo com aplicações na Física. Em seguida, trataremos de apresentar Integrais de Linha, como calcular uma integral de linha, integral de linha para dois caminhos ligados.

As Integrais de Linha independentes do caminho são definidas neste trabalho e onde será enunciado e demonstrado um teorema que além de dar condições para que a integral de linha seja independente do caminho, também apresenta uma fórmula para encontrar o valor de tal integral. Também trataremos de apresentar de forma ostensiva, empregando em algumas aplicações, um teorema que expressa uma integral dupla sobre uma região plana R , em termos de uma integral de linha ao longo da fronteira de R , chamado Teorema de Green. Esse sem dúvida é o propósito do tratamento dessa pesquisa.

Para efeito de fundamentação teórica compilamos alguns trechos de comentários e exemplos das referências; ampliando-os, na tentativa de oferecer ao leitor mais do que textos pontuais. Culminando numa associação de idéias que se relacionam e que se interagem para compor a idéia concisa para trabalhar o nosso objeto de estudo, Teorema de Green e suas aplicações. No corpus do trabalho desenvolvemos uma série de ilustrações, a título de compreendermos melhor o repertório de definições e teoremas. E, finalizamos demonstrando o teorema para o caso de regiões especiais e verificando sua extensão para outros tipos de regiões mais gerais.

Sabemos que o Teorema de Green é trabalhado no espaço 2-D. No entanto, concebemos para o aporte teórico, discussões de conceitos no espaço 3-D à medida que, levamos em consideração, estudos futuros. Por exemplo, da generalização do Teorema de Green para o Teorema de Stoke no espaço 3-D.

1 Aspectos Históricos

Figura 1 – George Green



Fonte: disponível em <http://goo.gl/qevLI1>. Acesso em abr. 2016.

A vida de Green

Adaptado de (BRAGA, 2005) e (BUFFONI, 2003).

George Green nasceu em Nottingham em 13 de julho de 1793. Quando George tinha oito anos, enviaram-no para a Robert Goodacre's Academy. Quando adolescente, Green teria sido matriculado em uma escola particular onde conheceu professor Robert Goodacre, professor de ciência. Assim George Green teria adquirido um gosto pela ciência, embora pouco provável encontrar no professor a dedicação pelo estudo da Matemática.

Aos nove anos, George Green havia recebido toda a educação formal que ele ia adquirir até os quarenta anos. Nessa época não havia biblioteca em Nottingham, entretanto, nada o impedia de comprar livros nas livrarias. Eram livros de ensino e enciclopédias. É possível que ele possa ter recebido algum aconselhamento para leitura de um dos matemáticos diplomados que viveram em Nottingham.

Quando o George tinha 24 anos, acompanhou o surgimento da primeira Biblioteca de Nottingham, recentemente aberta, tornou-se o centro de referência para as pesquisas e da vida intelectual em Nottingham. Continha uma coleção modesta de livros de ensino matemáticos e científicos; e, jornais científicos britânicos importantes. Estes normalmente

também incluíram os títulos e abstratos de documentos de jornais estrangeiros, de forma que Green poderia seguir o que estava sendo feito em outro lugar . Em princípio, ele poderia ter escrito então aos autores pedindo cópias dos documentos deles.

George Green publicou o seu primeiro documento "Um Ensaio na Aplicação de Análise Matemática para as Teorias de Eletricidade e Magnetismo" em 1828, à idade de 35 anos. Ele inventou técnicas matemáticas completamente novas para resolver os problemas que surgiram na análise. Os estudiosos da época não o reconheciam pelo simples fato dele não ter posição social e treinamento formal. A inspiração de Green veio da França, de Laplace e Poisson, mas ninguém parece ter visto seu trabalho lá. Esta falta de resposta deve ter deprimido Green, mas ele começou a trabalhar logo em um segundo documento. Ele recebeu valioso encorajamento do Senhor Edward Bromhead, um matemático de Cambridge diplomado e influente que viveu em Lincolnshire e claramente percebeu habilidade excepcional em Green. Green procurou áreas de muito mais interesse a físicos matemáticos britânicos e, com a influência de Bromhead, ele começou a publicar documentos nos jornais científicos. Com a ajuda de Bromhead ele entrou em Cambridge como um estudante universitário para conseguir um diploma em matemática. Ele conseguiu seu diploma em 1837.

A Matemática de Green

A matemática de Green era quase toda desenvolvida para resolver problemas físicos muito gerais. O primeiro interesse dele estava em eletrostática. Ele fez grande uso do potencial elétrico (e deu este nome) e um dos teoremas que ele provou neste trabalho ficou famoso como Teorema de Green. Relaciona as propriedades de funções matemáticas às superfícies de um volume fechado para outras propriedades internas. Em sua forma habitual, o teorema envolve duas funções, mas é simplificado prontamente ao que é chamado frequentemente o Teorema da divergência ou o Teorema de Gauss. (Muitos livros de ensino também chamaram desta forma o Teorema de Green).

Trabalhos de George Green

- Um ensaio na aplicação de análise matemática para as teorias de eletricidade e magnetismo;
- Aplicação dos resultados preliminares na teoria de magnetismo;
- Investigações matemáticas relativas às leis do equilíbrio de fluidos análogo ao fluido elétrico, com outras pesquisas semelhantes;
- Na determinação das atrações exteriores e interiores de elipsóides de densidades variáveis;

- No movimento de ondas em um canal variável de pequena profundidade e largura;
- Na reflexão e refração de som;
- Na propagação de luz em meio cristalizadas.

Figura 2 – Isaac Newton foi um cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático, embora tenha sido também astrônomo, alquimista, filósofo natural e teólogo.



Fonte: disponível em: <http://goo.gl/0ugIhy>. Acesso em abr. 2016.

Figura 3 – Gottfried Wilhelm Leibniz foi um filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão.



Fonte: disponível em: <https://goo.gl/8GN6fu>. Acesso em abr. 2016.

Reconhecimento

George Green recebeu pequeno reconhecimento popular, tanto durante a vida, como depois de sua morte. Entretanto, foram reconhecidas as suas contribuições para ciência e foram desenvolvidos seus trabalhos durante o século XIX por William Thomson, George Gabriel Stokes¹ e outros.

Figura 4 – Imagem de George Gabriel Stokes



Fonte: Disponível em: <https://goo.gl/wPPp8t>. Acesso em abr. 2016.

O reconhecimento de sua contribuição surgiria alguns anos depois pela ação de um escocês, William Thomson², mais conhecido como Lord Kelvin. Interessado em eletricidade e magnetismo, Lord Kelvin quase por acaso encontrou uma referência em um trabalho que mencionava *the ingenious Essay by Mr. Green of Nottingham*³. O Essay havia sido publicado dezessete anos antes, com fundos privados, em Nottingham, de modo que as

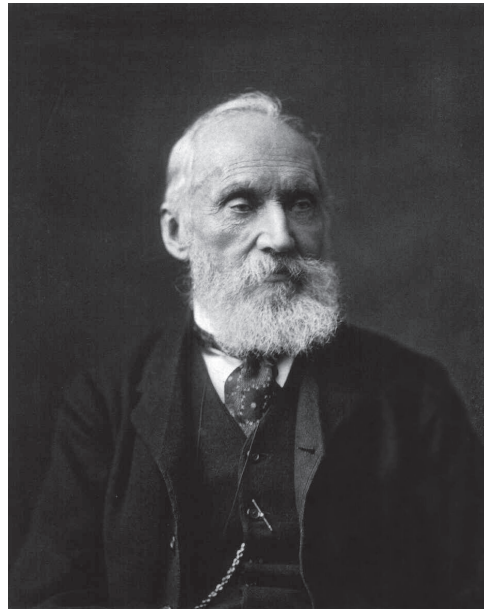
¹ Veja (Fig.:4) George Gabriel Stokes (Skreen, Condado de Sligo, 13 de Agosto de 1819 — Cambridge, 1 de Fevereiro de 1903) foi um matemático e físico irlandês que se distinguiu pelas suas contribuições na dinâmica de fluidos (por exemplo, as equações de Navier-Stokes), na óptica e física matemática (Teorema de Stokes).

² Veja (Fig.:5) William Thomson, 1º barão Kelvin, (no Brasil é mais conhecido como Lorde Kelvin). Considerado um líder nas ciências físicas do século XIX, ele fez importantes contribuições na análise matemática da eletricidade e termodinâmica, e fez muito para unificar as disciplinas emergentes da física em sua forma moderna. É conhecido por desenvolver a escala Kelvin de temperatura absoluta (onde o zero absoluto é definido como $0K$). O título de Barão Kelvin foi-lhe dado em homenagem a suas realizações.

³ Engenhoso Ensaio do Senhor Green de Nottingham.

buscas de Lord Kelvin nas fontes usuais de Cambridge foram mal sucedidas. Entretanto, na véspera de uma viagem para Paris, onde pretendia encontrar com colegas matemáticos, tomou conhecimento de que seu orientador (William Hopkins)⁴ dispunha de três cópias que, supõe-se, lhe teriam sido dadas pelo próprio Green. Ele levou duas cópias a Paris e, tendo

Figura 5 – Imagem de William Thomson.



Fonte: disponível em: <https://goo.gl/fFNhNZ>. Acesso em abr. 2016.

percebido a importância do resultado, entregou uma delas a um editor de um periódico muito lido na Europa Continental. Este lhe prometeu publicar o trabalho e o fez em três partes, entre 1850 e 1854, em inglês e, mais tarde em alemão; mas foi só em 1871 que esse primeiro trabalho de George Green foi publicado na Inglaterra; quando da publicação do *Essay* em alemão, o editor procurou conhecer um pouco da vida do homem por trás da obra. Evidentemente, pouco sabiam da sua história, mas teve início um esforço para reconstruí-la. Contemporâneos e familiares deram informações e, já na segunda metade do século vinte, alguns estudiosos se dedicaram à pesquisa de sua biografia. Na ocasião em que Green publicou seu *Essay*, o resultado que hoje conhecemos como Teorema de Green foi escrito com uma notação quase incompreensível para os matemáticos atuais.

O trabalho principal de Green em eletricidade e magnetismo estava negligenciado na Inglaterra em lugar desconhecido. Suas contribuições em outros campos que foram publicados entre 1835 e 1839 foram melhor conhecidas por seus contemporâneos, mas o verdadeiro valor delas não foi apreciado até mais tarde.

⁴ William Hopkins (Kingston-on-Soar, Nottinghamshire, 21 de fevereiro de 1793 — Cambridge, 13 de outubro de 1866) foi um matemático e geólogo britânico. Foi laureado com a medalha Wollaston de 1850, concedida pela Sociedade Geológica de Londres.

Julian Schwinger (1918-1994), Nobel Laureate, e Freeman Dyson, estabeleceram uma boa reputação para Green em física moderna. Nos anos 40, Schwinger mostrou que as funções de Green poderiam ser usadas muito efetivamente em mecânica quântica e poderiam ser aplicadas em eletrodinâmica quântica. Isto ampliou o campo de aplicações do trabalho de Green.

Figura 6 – Placa para George Green na Abadia de Westminster, Londres, dedicada em Julho de 1993, sobre o bicentenário do seu nascimento.



Fonte: disponível em <http://goo.gl/UHaaFi>. Acesso em abr. 2016.

2 Campos Vetoriais

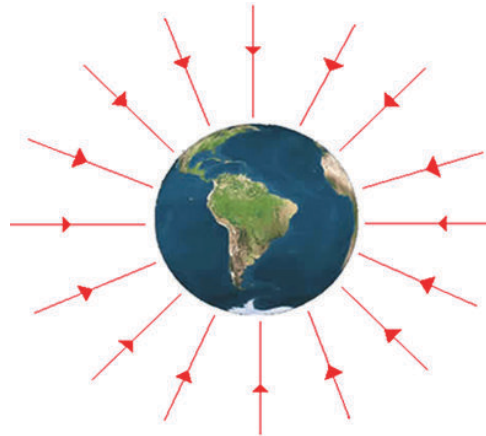
2.1 Campos Vetoriais

Nesta seção, iremos inicialmente apresentar a definição de campos vetoriais no espaço 2-D e no espaço 3-D. A seguir, forneceremos as representações gráficas úteis para mostrar a descrição dos vetores na representação do campo vetorial desses espaços.

Para motivar as idéias matemáticas desta seção, citaremos um exemplo de campo gravitacional, e de modo geral, definiremos campo vetorial a partir da leitura de Anton (2000) e Stewart (2001). Nesta seção, consideramos funções que associam vetores com pontos no espaço 2-D ou no espaço 3-D.

Na sua obra, Anton (2000, p. 478) pede que considere um ponto de massa unitária localizado em qualquer ponto do universo.

Figura 7 – Representação das linhas de força do campo gravitacional. A Terra define uma região do espaço onde qualquer objeto fica sujeito a uma força atrativa. Representamos essa propriedade por meio de um conjunto de linhas denominado linhas de força do campo gravitacional.



Fonte: Disponível em: <http://goo.gl/M4woUp> Acesso em abr. 2016.

Essa associação de vetores de força com pontos no espaço é chamada campo gravitacional da Terra. (Fig.:7)

Em geral, um campo vetorial é uma função cujo domínio é um conjunto de pontos do \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3) e cuja imagem é o conjunto de vetores em V_2 (ou V_3).

Segundo Stewart (2001, p. 976) campo vetorial no espaço 2-D pode ser visto geometricamente desenhando vetores representativos $F(x, y)$ em alguns pontos bem selecionados do plano xy . Porém, assim como, normalmente não é possível descrever completamente uma

curva plana localizando um número finito de pontos, também não é normalmente possível descrever um campo vetorial localizando um número finito de vetores. Todavia, temos representações gráficas que podem fornecer informações úteis acerca do comportamento geral do campo se os vetores forem escolhidos adequadamente. Entretanto, representações gráficas de campos vetoriais requerem um volume substancial de cálculos, de modo que são geralmente criados com o uso de computadores.

Definição 2.1. Seja D um subconjunto em \mathbb{R}^2 (uma região plana). Um **campo vetorial em \mathbb{R}^2** é uma função \mathbf{F} que associa a cada ponto (x, y) em D um vetor bidimensional $F(x, y)$.

Segundo Stewart (2001, p. 976) vem esclarecer também que, a melhor maneira de se enxergar um campo vetorial é desenhar setas representando os vetores $F(x, y)$, começando no ponto (x, y) . É claro que é impossível fazer isso para todos os pontos (x, y) , mas podemos visualizar \mathbf{F} fazendo isso para alguns pontos representativos em D , como na Figura (8). Como $F(x, y)$ é um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas **funções componentes** P e Q , da seguinte forma:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle \quad (2.1)$$

ou, de forma mais compacta,

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} \quad (2.2)$$

Definição 2.2. Seja E um subconjunto do \mathbb{R}^3 . Um **campo vetorial em \mathbb{R}^3** é uma função \mathbf{F} que associa a cada ponto (x, y, z) em E um vetor tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$.

Um campo vetorial \mathbf{F} em \mathbb{R}^3 está ilustrado (Fig.: 9). Podemos escrevê-lo em termos das funções componentes P, Q e R como:

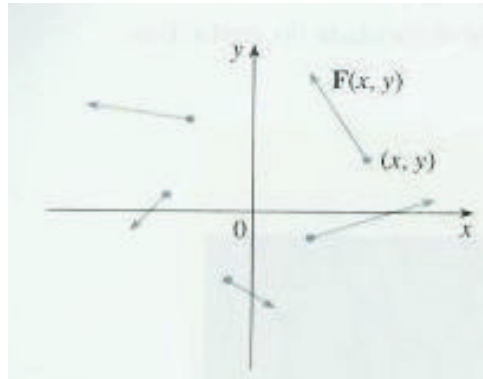
$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}. \quad (2.3)$$

Como nas funções vetoriais, podemos definir a continuidade dos campos vetoriais e mostrar que \mathbf{F} será contínua se, e somente se, suas funções componentes P, Q e R forem contínuas.

Às vezes identificamos o ponto (x, y, z) com seu vetor posição $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ e escrevemos $F(x)$ em vez de $\mathbf{F}(x, y, z)$. Então, \mathbf{F} se torna uma função que associa um vetor $F(x)$ a um vetor \mathbf{x} .

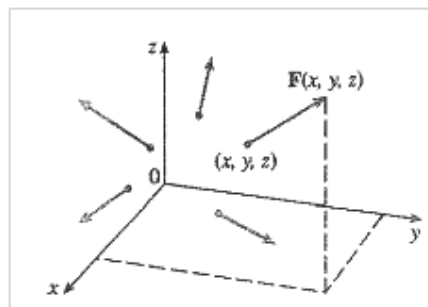
Exemplo 2.1. Um campo vetorial em \mathbb{R}^2 é definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Descreva \mathbf{F} desenhando alguns de seus vetores $\mathbf{F}(x, y)$.

Figura 8 – Campo vetorial do \mathbb{R}^2 . Temos uma representação de um campo vetorial em um domínio no \mathbb{R}^2 que é uma aplicação que associa cada vetor a cada ponto de seu domínio. Entendendo a idéia de domínio o conjunto de pares ordenados (x, y) e imagens os vetores aplicados nesses correspondentes pontos.



Fonte: (STEWART, 2001, p. 976).

Figura 9 – Campo vetorial do \mathbb{R}^3 . Campos vetoriais são funções que associam vetores a pontos no espaço. Nessas funções, os pontos no espaço \mathbb{R}^3 constituem o conjunto domínio, enquanto o conjunto de vetores correspondentes aos seus respectivos pontos constitui o conjunto imagem.



Fonte: (STEWART, 2001, p. 976).

Resolução: Como $F(1, 0) = \mathbf{j}$, desenhamos o vetor $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ começando no ponto $(1, 0)$ na Figura (10). Como $F(0, 1) = -\mathbf{i}$, desenhamos o vetor $-\mathbf{i} = \langle -1, 0 \rangle$ iniciando no ponto $(0, 1)$.

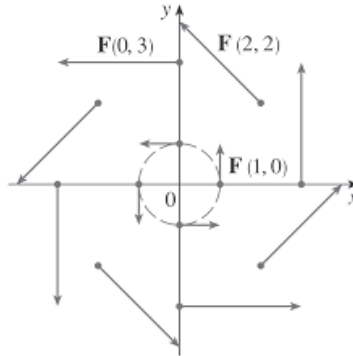
Continuamos desse modo desenhando um número significativo de vetores para representar esse campo vetorial. (Veja tabela 1).

Na Figura (10), perceba que cada seta é tangente a um círculo com centro na origem.

Para confirmar isso, vamos tomar o produto escalar do vetor posição $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

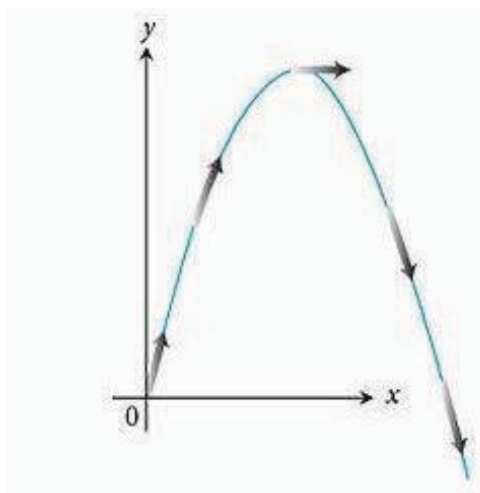
¹ Observe que P e Q são funções escalares de duas variáveis e são chamadas, algumas vezes, **campos escalares**, para distingui-los dos campos vetoriais.

Figura 10 – Representação vetorial do campo: $F(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Em cada ponto (x, y) a velocidade é $(-y, x)$. $(-y, x)$ é velocidade, porque velocidade é tangente as trajetórias. Então, o vetor $(-y, x)$, tangente a trajetória é perpendicular ao vetor radial. Nesse campo de velocidade, onde temos um campo de vetores atuando no plano, que movimento descreveria uma partícula nesse campo de velocidade? Movimentos circulares.



Fonte: (STEWART, 2001, p. 976).

Figura 11 – Os vetores velocidade $\mathbf{v}(t)$ do movimento de um projétil descrevem um campo de vetores ao longo da trajetória. Se anexarmos o vetor velocidade de um projétil a cada ponto de sua trajetória no plano de movimento, teremos um campo bidimensional ao longo de sua trajetória.



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 475).

com o vetor $\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(x, y)$:

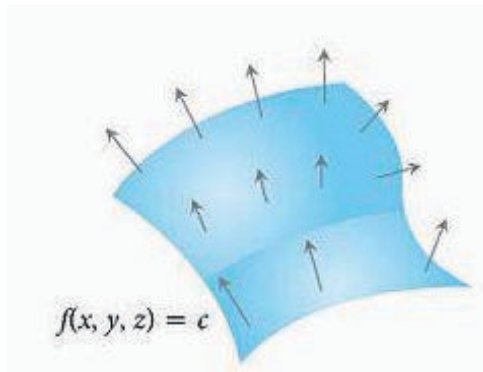
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(x) = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) = -xy + yx = 0.$$

Isso mostra que $\mathbf{F}(x, y)$ é perpendicular ao vetor posição $\langle x, y \rangle$ e, portanto, tangente ao círculo com centro na origem e raio $|x| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Observe também que,

$$|\mathbf{F}(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |x|,$$

de modo que o comprimento do vetor $\mathbf{F}(x, y)$ é igual ao raio do círculo.

Figura 12 – O campo de vetores gradiente ∇f sobre uma superfície $f(x, y, z) = c$. Se anexarmos o vetor gradiente de uma função escalar a cada ponto de uma superfície de nível da função, teremos um campo tridimensional sobre a superfície.



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 475).

Tabela 1 – número significativo de vetores para representar o campo vetorial.

(x, y)	$F(x, y)$	(x, y)	$F(x, y)$
(1, 0)	$\langle 0, 1 \rangle$	(-1, 0)	$\langle 0, -1 \rangle$
(2, 2)	$\langle -2, 2 \rangle$	(-2, -2)	$\langle 2, -2 \rangle$
(3, 0)	$\langle 0, 3 \rangle$	(-3, 0)	$\langle 0, -3 \rangle$
(0, 1)	$\langle -1, 0 \rangle$	(0, -1)	$\langle 1, 0 \rangle$
(-2, 2)	$\langle -2, -2 \rangle$	(2, -2)	$\langle 2, 2 \rangle$
(0, 3)	$\langle -3, 0 \rangle$	(0, -3)	$\langle 3, 0 \rangle$

Fonte: (STEWART, 2001, p. 976).

2.2 Campos Gradientes

Nesta seção estudaremos uma classe muito importante de campos vetoriais, os chamados campos gradientes. Apartir da leitura de Anton, apresentaremos um exemplo que se pede para determinar o campo vetorial definido pelas derivadas parciais de uma função escalar.

Segundo Anton (2000, p. 480) campos gradientes é uma classe de campos vetoriais, que surge do processo de determinação de gradientes.

Lembrando que se ϕ é uma função de três variáveis, então o gradiente de ϕ é definido como:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}. \quad (2.4)$$

Essa fórmula define um campo vetorial do espaço 3-D chamado **campo gradiente** de ϕ . De modo similar, o gradiente de uma função de duas variáveis define um campo

gradiente no espaço $2 - D$. Em cada ponto de um campo gradiente em que o gradiente é não nulo, o vetor aponta na direção em que a taxa do aumento de ϕ é máxima.

Exemplo 2.2. (Encontrando um campo gradiente)

Encontre o campo gradiente da função $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Resolução:² O campo gradiente de f será calculado por meio das derivadas parciais em relação a x, y e z .

Calculando as derivadas parciais com relação a x , temos:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \ln(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right] (2x) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais com relação a y , temos:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \ln(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right] (2y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais com relação a z , temos:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \ln(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right] (2z) = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

isso implica que o campo gradiente será:

$$\nabla f = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2.3 Trabalho realizado por uma Força ao longo de uma Curva no Espaço

Nesta seção apresentamos uma definição para trabalho realizado por uma força sobre uma curva lisa. Em seguida, discutimos o passo a passo para calcular uma integral de trabalho.

² Questão resolvida pelo graduando, ver referência Thomas (2009, p. 483).

Suponha que o campo vetorial $F = M(x, y, z) + N(x, y, z) + P(x, y, z)$ represente uma força em uma região no espaço (pode ser a força da gravidade ou uma força eletromagnética de algum tipo) e que

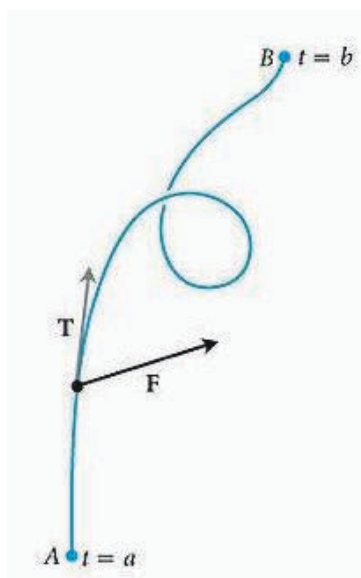
$$r(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

seja uma curva lisa na região. Então, a integral de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$, (em que a componente escalar de \mathbf{F} na direção do vetor tangente da curva, sobre a curva é chamada trabalho realizado por \mathbf{F} sobre a curva de a a b .) (Fig.: 13). Detalhes podem ser encontrados em Thomas (2009, p. 469).

Definição 2.3 (Trabalho sobre uma curva lisa). O trabalho realizado por uma força $F = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ sobre uma curva lisa de $r(t)$ de $t = a$ a $t = b$ é

$$W = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \quad (2.5)$$

Figura 13 – O trabalho realizado pela força \mathbf{F} é a integral de linha da componente escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ sobre a curva lisa de A a B .



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 477).

Como calcular uma integral de trabalho

Para calcular uma integral de trabalho, ao longo da curva lisa $\mathbf{r}(t)$, siga estes passos:

Passo 1: Calcule \mathbf{F} sobre a curva como uma função do parâmetro t .

Passo 2: Encontre $d\mathbf{r}/dt$.

Passo 3: Integre $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt$ de $t = a$ a $t = b$.

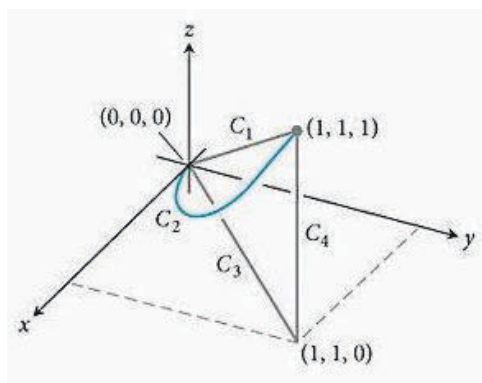
Figura 14 – Seis maneiras diferentes de escrever a integral de trabalho.

$\mathbf{W} = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$	A definição
$= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$	Forma diferencial compacta
$= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$	Expandida para incluir dt ; enfatiza o parâmetro t e o vetor velocidade $d\mathbf{r}/dt$
$= \int_a^b \left(M \frac{dg}{dt} + N \frac{dh}{dt} + P \frac{dk}{dt} \right) dt$	Enfatiza as funções componentes
$= \int_a^b \left(M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right) dt$	Abrevia as componentes de \mathbf{r}
$= \int_a^b M dx + N dy + P dz$	Os dt são cancelados; é a forma mais comum

Fonte: (THOMAS, 2009, p. 479).

Exemplo 2.3. Encontrando o trabalho realizado por uma força variável sobre uma curva no espaço. Encontre o trabalho realizado pela força \mathbf{F} , $F = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$ de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ sobre o caminho curvo C_2 definido por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$. (Fig.: 15).

Figura 15 – Os caminhos de integração de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$. Essa figura nos mostra três caminhos: C_1 , C_2 e C_3 . No entanto, o caminho de integração que nos interessa é o C_2 que parte da origem percorre o caminho de integração C_2 até o ponto $(1, 1, 1)$.



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 483).

Resolução:³ Calcule \mathbf{F} sobre a curva

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k} \\ &= (t^2 + t^4)\mathbf{i} + (t^4 + t)\mathbf{j} + (t + t^2)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

³ Questão resolvida pelo graduando, ver referência Thomas (2009, p. 483).

Então, encontre $d\mathbf{r}/dt$,

$$r(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^4\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}.$$

Por fim, calcule o produto escalar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt$ e integre de $t = 0$ a $t = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt &= [(t^2 + t^4)\mathbf{i} + (t^4 + t)\mathbf{j} + (t + t^2)\mathbf{k}] \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}) \\ &= (t^2 + t^4)(1) + (t^4 + t)(2t) + (t + t^2)(4t^3) \\ &= t^2 + t^4 + 2t^5 + 2t^2 + 4t^4 + 4t^5 \\ &= 6t^5 + 5t^4 + 3t^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (6t^5 + 5t^4 + 3t^2) dt \\ &= [t^6 + t^5 + t^3]_0^1 \\ &= 3J. \end{aligned}$$

2.4 Integrais de Escoamento e Circulação para Campos de Velocidade

Nesta seção definiremos integrais de escoamento e circulação para campos vetoriais.

Em seguida, usaremos a definição estudada para obter os resultados concernentes ao tema exposto.

Thomas (2009, p. 480) estabelece o estudo de integrais de escoamento e circulação para campos de velocidade, considerando \mathbf{F} como o campo de velocidade de um fluido escoando por uma região no espaço (um dique ou a câmara da turbina de um gerador hidroelétrico, por exemplo). Sob essas condições, a integral de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ ao longo de uma curva na região fornece o escoamento do fluido ao longo da curva.

Definição 2.4 (Fluxo, integral de escoamento e circulação). Se $\mathbf{r}(t)$ é uma curva lisa no domínio de um campo de velocidade contínuo \mathbf{F} , o escoamento ao longo da curva de $t = a$ a $t = b$ é:

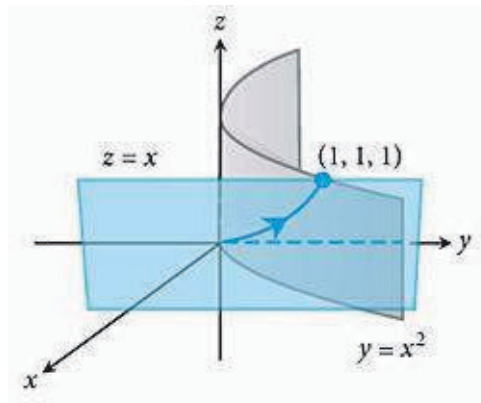
$$\text{Escoamento} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds. \quad (2.6)$$

A integral, nesse caso, é chamada integral de **escoamento**. Se a curva é um laço fechado, o escoamento é denominado **circulação** ao redor da curva.

Calculamos integrais de escoamento da mesma maneira que calculamos integrais de trabalho.

Exemplo 2.4 (Escoamento ao longo de uma curva). O campo $F = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$ é o campo de velocidades de um escoamento no espaço. Encontre o escoamento de $(0, 0, 0)$ até $(1, 1, 1)$ ao longo da curva de intersecção do cilindro $y = x^2$ e do plano $z = x$. (Sugestão: use $t = x$ como parâmetro e escreva a vazão dada em $\frac{m^3}{s}$).

Figura 16 – Curva de intersecção do cilindro $y = x^2$ e do plano $z = x$. Considere ao longo da curva de intersecção do cilindro $y = x^2$ e do plano $z = x$ o fluxo de um líquido, sobre o qual desejamos saber a rapidez com a qual esse volume escoa por uma unidade de tempo.



Fonte:(THOMAS, 2009, p. 485).

Resolução:⁴ Da sugestão feita, façamos $x = t$ e isso implica que $y = t^2$ e $z = t$, pois do plano $z = x$. Assim, teremos,

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

t variando de 0 a 1 de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$. Agora, calculemos a derivada de r :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Fazendo o produto escalar com \mathbf{F} e utilizando o parâmetro $x = t$, temos que, $F = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} - yz\mathbf{k} = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}$. Daí, implica que:

$$\begin{aligned} F \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= [t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}] [\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}] \\ &= t^3 + 2t^3 - t^3 \\ &= 2t^3. \end{aligned}$$

Portanto, o fluxo é

$$\int_0^1 2t^3 dt = \frac{t^4}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \frac{m^3}{s}.$$

⁴ Questão resolvida pelo graduando, ver referência Thomas (2009, p. 485).

2.5 Fluxo através de uma Curva Plana

Nesta seção, iremos definir fluxo através de uma curva fechada no plano, bem como apresentar uma fórmula para calcular o fluxo através de uma curva plana, lisa e fechada.

Para encontrarmos a taxa à qual um fluido entra ou sai de uma região limitada por uma curva lisa C no plano xy , calculamos a integral sobre C de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, o componente escalar do campo de velocidade do fluido na direção do vetor normal exterior da curva, diz (THOMAS, 2009).

Definição 2.5 (Fluxo através de uma curva fechada no plano). Se C for uma curva lisa e fechada no domínio de um campo vetorial contínuo $F = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ no plano e se \mathbf{n} for o versor normal exterior de C , o fluxo de f através de C é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (2.7)$$

Segundo Thomas (2009, p. 486), para calcularmos a integral nessa equação, começamos com uma parametrização da curva lisa

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad a \leq t \leq b.$$

que traça a curva C somente uma vez quando t varia de a a b . Podemos encontrar o versor normal \mathbf{n} exterior à curva fazendo o produto vetorial do versor tangente \mathbf{T} com o vetor \mathbf{K} . Mas que ordem escolhemos? $\mathbf{T} \times \mathbf{K}$ ou $\mathbf{K} \times \mathbf{T}$? Qual aponta para fora? Depende da maneira pela qual a curva C é percorrida à medida que t aumenta. Se o movimento for no sentido horário, $\mathbf{K} \times \mathbf{T}$ aponta para fora; se o movimento for no sentido anti-horário, $\mathbf{T} \times \mathbf{K}$ aponta para fora. (Veja figura abaixo).

Fórmula para calcular o fluxo através de uma curva plana, lisa e fechada

$$(\text{Fluxo de } F = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \text{ através de } C) = \int_C M \, dy - N \, dx \quad (2.8)$$

A integral pode ser calculada a partir de qualquer parametrização lisa $x = g(t)$, $y = h(t)$, $a \leq t \leq b$, que percorre C no sentido anti-horário uma única vez.

Exemplo 2.5 (Questão reformulada). Encontre a circulação dos campos

$$\mathbf{F}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \text{ e } \mathbf{F}_2 = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

ao redor da curva $r(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

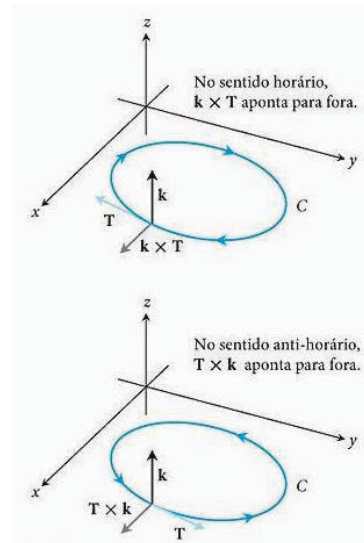
Resolução⁵:

1. Na circunferência,

$$\mathbf{F}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} \text{ e } \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

⁵ Questão resolvida pelo graduando, ver referência Thomas (2009, p. 483).

Figura 17 – Para encontrarmos um vetor normal exterior a uma curva lisa C no plano xy que é percorrida no sentido anti-horário quando t aumenta, tomamos $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{K}$.



No sentido horário, tomamos $\mathbf{n} = \mathbf{K} \times \mathbf{T}$.

Fonte: (THOMAS, 2009, p. 481).

Portanto,

$$\begin{aligned}
 F_1 \cdot \frac{dr}{dt} &= [(\cos t) i + (\sin t) j] \cdot [(-\sin t) i + (\cos t) j] \\
 &= -\sin t \cdot \cos t + \sin t \cdot \cos t \\
 &= 0. \\
 \Rightarrow \text{Circulação} &= \int_0^{2\pi} F \cdot \frac{dr}{dt} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} 0 dt = 0.
 \end{aligned}$$

2. Na circunferência,

$$\mathbf{F}_2 = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} \quad e \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 F_2 \cdot \frac{dr}{dt} &= [(-\sin t) i + (\cos t) j] \cdot [(-\sin t) i + (\cos t) j] \\
 &= \sin^2 t + \cos^2 t \\
 &= 1. \\
 \Rightarrow \text{Circulação} &= \int_0^{2\pi} F \cdot \frac{dr}{dt} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.
 \end{aligned}$$

2.6 Campos Conservativos

Segundo Thomas (2009, p. 486), a palavra *conservativo* vem da física e se refere a campos vetoriais nos quais o princípio da conservação de energia é válido (é válido em campos conservativos). Na prática, um campo vetorial F será conservativo se, e somente se for o campo gradiente de uma função escalar f ; isto é, se e somente se $F = \nabla f$ para alguma f .

Definição 2.6 (Função potencial). Se \mathbf{F} for um campo definido sobre D e $F = \nabla f$ para alguma função escalar f em uma região aberta D no espaço, então f é chamada **função potencial para \mathbf{F}** .

Uma vez que tenhamos encontrado uma função potencial f para um campo \mathbf{F} ⁶, poderemos calcular todas as integrais de trabalho no domínio de \mathbf{F} sobre qualquer caminho entre A e B com a fórmula

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A). \quad (2.9)$$

Se você pensar em ∇f para funções de várias variáveis como algo parecido com a derivada f' para funções de uma única variável, então verá que a equação (2.9) é o análogo no cálculo vetorial da fórmula do Teorema fundamental do cálculo:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a). \quad (2.10)$$

⁶ \mathbf{F} é conservativo em D equivale a dizer que a integral de \mathbf{F} em torno de qualquer caminho em D fechado é zero. Naturalmente, precisamos impor condições sobre as curvas, campos e domínios para que a equação (2.9) e suas implicações sejam verdadeiras. Essas condições são: consideramos que todas as curvas sejam **lisas por partes**; consideramos que as funções componentes de \mathbf{F} têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas; consideramos que D é uma região aberta no espaço; também D conexo e simplesmente conexo.

2.6.1 Integrais de Linha em Campos Conservativos

Teorema 2.1 (Teorema fundamental das integrais de linha). 1. Seja $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ um campo vetorial cujas funções componentes são contínuas em uma região D aberta e conexa no espaço. Então, existe uma função diferenciável f tal que:

$$\mathbf{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \quad (2.11)$$

se, e somente se para todos os pontos A e B em D o valor de $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ for independente do caminho que liga A e B em D .

2. Se a integral for independente do caminho de A até B , seu valor é:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) \quad (2.12)$$

O resultado estabelece que o valor da integral depende somente das extremidades do caminho, e não do caminho específico que os liga.

Teorema 2.2 (Propriedade do laço fechado de campos conservativos). As informações a seguir são equivalentes.

1. $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ao redor de todo o laço fechado em D .
2. O campo \mathbf{F} é conservativo em D .

2.6.2 Teste das Componentes para Campos Conservativos

Teste das componentes para campos conservativos

Seja $F = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ um campo cujas funções componentes têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então, \mathbf{F} é conservativo se e somente se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (2.13)$$

2.6.3 Formas Diferenciais Exatas

Definição 2.7 (Forma diferencial e forma diferencial exata). Qualquer expressão $M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + P(x, y, z)dz$ é uma **forma diferencial**. Uma forma diferencial é **exata** em um domínio D no espaço se

$$M dx + N dy + P dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df, \quad (2.14)$$

para alguma função escalar f em D .

Observe que, se $M dx + N dy + P dz = df$ em D , então $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ é o campo gradiente de f em D . Reciprocamente, se $F = \nabla f$, então a forma $M dx + N dy + P dz$ é exata. O teste de exatidão da forma é, portanto, igual ao teste para saber se \mathbf{F} é conservativo.

Teste das componentes para exatidão de $M dx + N dy + P dz$.

A forma diferencial $M dx + N dy + P dz$, é exata se e somente se:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad (2.15)$$

Isso é equivalente a dizer que o campo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ é conservativo.

Exemplo 2.6 (Mostrando que um campo é conservativo). Mostre que $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ é um campo conservativo.

Resolução:⁷ Aplicamos o teste das componentes nas equações (2.13). Daí, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x & e & \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(xz) = x \\ \frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(yz) = y & e & \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(xz) = z & e & \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(yz) = z \end{aligned}$$

Portanto, \mathbf{F} é conservativo.

Exemplo 2.7 (Mostrando que um campo é conservativo). Mostre que

$$\vec{f} = (10xz + y \operatorname{sen} xy)\vec{i} + x \operatorname{sen} xy\vec{j} + 5x^2\vec{k}$$

é um campo conservativo.

Resolução:⁸ Aplicamos o teste das componentes nas equações (2.13). Daí, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(5x^2) = 0 & e & \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x \operatorname{sen} xy) = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(10xz + y \operatorname{sen} xy) = 10x & e & \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(5x^2) = 10x \\ & \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \operatorname{sen} xy) = \operatorname{sen} xy + xy \cos xy \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(10xz + y \operatorname{sen} xy) = \operatorname{sen} xy + xy \cos xy$$

Portanto, \vec{f} é conservativo.

⁷ Questão resolvida pelo graduando, ver referência Thomas (2009, p. 492).

⁸ Questão resolvida pelo graduando, ver referência Gonçalves e Flemming (2007, p. 228).

Exemplo 2.8. Se F for um campo vetorial definido por $F(x, y) = y \cos(x + y) \mathbf{i} - x \sin(x + y) \mathbf{j}$. Mostre que F não é conservativo.

Resolução:⁹ Seja

$$M(x, y) = y \cos(x + y) \quad e \quad N(x, y) = -x \sin(x + y)$$

$$M_y(x, y) = \cos(x + y) - y \sin(x + y) \quad e \quad N_x(x, y) = -\sin(x + y) - x \cos(x + y)$$

Como $M_y(x, y) \neq N_x(x, y)$, o campo F não é conservativo.

⁹ Questão resolvida pelo graduando, ver referência Leithold (1994, p. 1081).

3 Divergência e Rotacional

Neste capítulo vamos iniciar o estudo do divergente e rotacional. Nele trataremos de definir e exemplificar campo vetorial rotacional de F e o campo escalar *divergente* de F . Seguidos de exemplos e suas respectivas resoluções.

De acordo com Anton (2000, p. 477) devemos definir duas operações importantes dos campos vetoriais do espaço 3 – D - a divergência e o rotacional do campo.

Esses nomes originaram-se no estudo do fluxo fluído, caso em que divergência refere-se à maneira como o fluído flui para ou afasta-se de um ponto. Rotacional refere-se as propriedades de rotação do fluído num ponto.

Já segundo Leithold (1994, p. 1078) há dois campos obtidos do campo vetorial \mathbf{F} por meio de derivações parciais.

Um deles é o campo vetorial denotado rotacional de \mathbf{F} e o outro é o campo escalar *divergente* de \mathbf{F} , denotado por $\mathbf{div} \mathbf{F}$. Antes de dar as suas definições, mostraremos como o símbolo ∇ é utilizado como um operador.

Recordemos que se f for uma função escalar de três variáveis x , y e z , então o gradiente de f será dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \mathbf{i} + f_y(x, y, z) \mathbf{j} + f_z(x, y, z) \mathbf{k}. \quad (3.1)$$

Denotaremos agora o operador del em três dimensões por

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.2)$$

Assim, a operação ∇ sobre a função escalar f significa

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \quad (3.3)$$

o que está de acordo com a equação (3.1).

Definição 3.1. Seja \mathbf{F} um campo vetorial numa bola aberta \mathbf{B} em \mathbb{R}^3 , tal que $F(x, y, z) = M(x, y, z) \mathbf{i} + N(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$. Então, o **rotacional** de \mathbf{F} é definido por

$$\mathit{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

se essas derivadas parciais existirem.

Uma regra mnemônica para calcular o rotacional de \mathbf{F} é estender a notação do produto vetorial¹ de dois vetores ao produto vetorial do operador ∇ com o campo vetorial \mathbf{F} e escrevemos

$$\text{rot } F = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & R \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

Exemplo 3.1. Um corpo rígido gira em torno de um eixo que passa pela origem do sistema de coordenadas, com vetor velocidade angular $\vec{\mathbf{w}}$ constante. Seja $\vec{\mathbf{v}}$ o vetor velocidade em um ponto P do corpo. Calcular o rot $\vec{\mathbf{w}}$.

Resolução: A Figura (18) ilustra esse exemplo. Da Física, sabemos que o vetor velocidade em um ponto P do corpo é dado por

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{r}} \quad (3.5)$$

onde, $\vec{\mathbf{r}}$ é o vetor posição do ponto P .

Fazendo $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3,)$ e $\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$, temos:

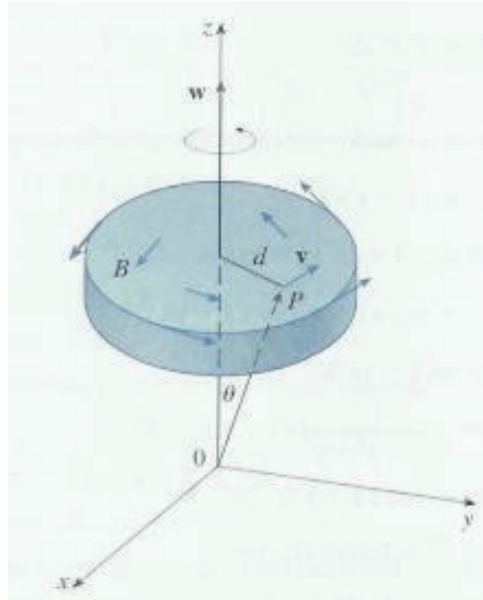
$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (w_2z - w_3y)\vec{\mathbf{i}} + (w_3x - w_1z)\vec{\mathbf{j}} + (w_1y - w_2x)\vec{\mathbf{k}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{\mathbf{v}} &= \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_2z - w_3y & w_3x - w_1z & w_1y - w_2x \end{vmatrix} \\ &= (w_1 + w_1)\vec{\mathbf{i}} + (w_2 + w_2)\vec{\mathbf{j}} + (w_3 + w_3)\vec{\mathbf{k}} \\ &= 2w_1\vec{\mathbf{i}} + 2w_2\vec{\mathbf{j}} + 2w_3\vec{\mathbf{k}} = 2\vec{\mathbf{w}}. \end{aligned}$$

¹ Recordemos que ao utilizarmos a notação de determinante para o produto vetorial, foi ressaltados que nem todos os elementos do determinante eram números reais, ao contrário do usual. No "determinante" acima, a primeira linha é formada de vetores, a segunda de operadores de derivação parcial, enquanto que a terceira linha é formada por funções escalares.

Figura 18 – Corpo rígido que gira em torno de um eixo. A figura ilustra a relação entre vetor rotacional e rotações. Temos a representação de um corpo rígido girando em torno do eixo z . O vetor posição de P pode ser descrito por $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ e a rotação pode ser descrita pelo vetor $\mathbf{W} = w\mathbf{K}$, onde w é a velocidade angular de B , ou seja, a velocidade tangencial de qualquer ponto P em B dividido pela distância d do eixo de rotação.



Fonte: (STEWART, 2001, p. 1014).

Definição 3.2. Seja \mathbf{F} um campo vetorial numa bola aberta B em \mathbb{R}^3 , tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Então, o **divergente** de \mathbf{F} , denotado por $\text{div } \mathbf{F}$ será definido por

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

se essas derivadas parciais existirem.

Segundo Leithold (1994, p. 1079) temos essa definição para divergente de \mathbf{F} , onde por sua vez, para calcular o divergente do campo escrevemos, a notação do produto escalar de dois vetores ao "produto escalar" do operador ∇ com o campo vetorial \mathbf{F} para calcular o divergente de \mathbf{F} , escrevendo

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Exemplo 3.2. Ache o $\operatorname{div} \mathbf{F}$, sendo \mathbf{F} o campo vetorial definido por

$$F(x, y, z) = e^{2x}\mathbf{i} + 3x^2yz\mathbf{j} + (2y^2z + x)\mathbf{k}.$$

Resolução: Temos que

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{2x}) + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(2y^2z + x) \\ &= 2e^{2x} + 3x^2z + 2y^2.\end{aligned}$$

Exemplo 3.3. Ache o $\operatorname{div} \mathbf{F}$ para o campo vetorial definido por

$$F(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}.$$

Resolução:²

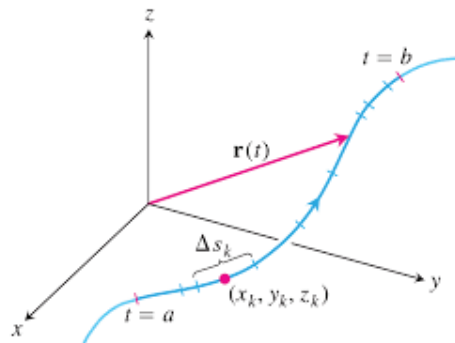
$$\begin{aligned}\operatorname{div} F(x, y, z) &= \nabla \cdot F(x, y, z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \\ &= 2x + 2y + 2z.\end{aligned}$$

² Questão resolvida pelo graduando, ver referência Thomas (2009).

4 Integrais de Linha

Neste capítulo apresentaremos conceitos e daremos definições à cerca da integral de linha. Veremos suas aplicações ao anunciarmos suas propriedades fundamentais.

Figura 19 – A curva $\mathbf{r}(t)$ particionada em pequenos arcos de $t = a$ a $t = b$. O comprimento de um subarco típico é Δs_k .



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 468).

Vamos agora integrar sobre uma curva C no plano ou no espaço.

Segundo Thomas (2009, p. 469) essas integrais mais genéricas são chamadas *integrais de linha*, embora integrais de "curva" seja uma nomenclatura melhor. Fazemos a definição de curvas espaciais, lembrando que as curvas no plano xy são apenas um tipo especial no qual a coordenada z é identicamente zero.

Suponha que $f(x, y, z)$ seja uma função real que desejamos integrar sobre a curva $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$, dentro do domínio de f . Os valores de f ao longo da curva são dados pela função composta $f(g(t), h(t), k(t))$. Vamos integrar essa função em relação ao comprimento de arco de $t=a$ a $t=b$.

Para começar, particionamos a curva em um número n finito de subarcos (que costuma ter comprimento Δs_k , conforme a Figura (19)). Em cada um dos subarcos escolhemos um ponto (x_k, y_k, z_k) e está representado a soma:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k. \quad (4.1)$$

De acordo com o autor, se f é contínua e as funções g , h e k possuem derivadas de primeira ordem contínuas, então essas somas se aproximam de um limite à medida que n aumenta e os comprimentos Δs_k se aproximam de zero. Chamamos esse limite de **integral de linha de f sobre a curva de a a b** . Se a curva for denotada por uma única letra, C ,

por exemplo, a notação para integral será:

$$\int_C f(x, y, z) ds \quad (\text{Integral de } f \text{ sobre } C). \quad (4.2)$$

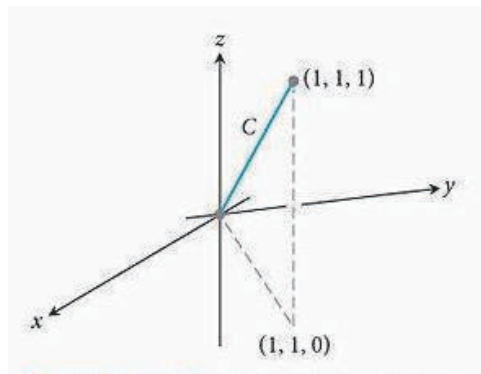
Se $\mathbf{r}(t)$ for lisa¹ para $a \leq t \leq b$ ($v = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ é contínua e nunca é 0), podemos usar a equação:

$$s(t) = \int_a^b |v(\tau)| d\tau, \quad (4.3)$$

para expressar ds na equação (4.2) como $ds = |v(t)| dt$. E, finalmente, podemos então calcular a integral de f sobre C como sendo:

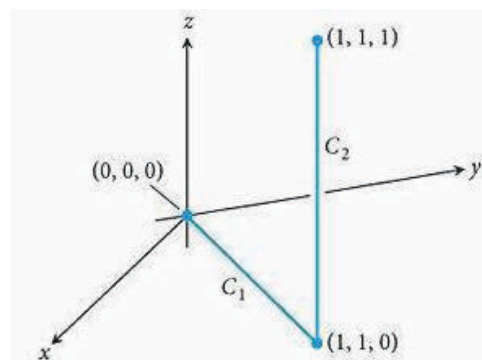
$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) |v(t)| dt. \quad (4.4)$$

Figura 20 – O caminho de integral do Exemplo. (4.1). A figura ilustra o caminho de integração C que une a origem ao ponto $(1,1,1)$.



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 469).

Figura 21 – O caminho de integração no Exemplo. (4.2)



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 470).

¹ $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$ é dita lisa, se $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ é contínua e $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq 0, \forall t \in [a, b]$.

Segundo Thomas (2009, p. 469) a integral do lado direito da equação (4.4) é uma integral definida simples, a qual se integra com relação ao parâmetro t . Essa fórmula calculará a integral corretamente não importa qual parametrização se use, desde que esta seja lisa.

4.1 Como Calcular uma Integral de Linha

Para integrar uma função contínua $f(x, y, z)$ sobre uma curva C :

Passo 1: Encontre uma parametrização lisa de C ,

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

Passo 2: Calcule a integral

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) |v(t)| dt. \quad (4.5)$$

Se f tem o valor constante 1, então a integral de f sobre C dá o comprimento de C .

Exemplo 4.1. [Calculando uma integral de linha]

Integre $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ sobre o segmento da reta C que une a origem ao ponto $(1, 1, 1)$, como mostra a Figura (20.)

Resolução: Escolhemos a parametrização mais simples que pudermos imaginar:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

As componentes têm derivadas de primeira ordem contínuas e $|v(t)| = |\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \neq 0, \forall t \in [0, 1]$, portanto a parametrização é lisa.

A integral de f sobre C é

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_0^1 f(t, t, t) (\sqrt{3}) dt \\ &= \int_0^1 (3 - 3t^2 + t) \sqrt{3} dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (2t - 3t^2) dt = \sqrt{3} [t^2 - t^3]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

De acordo com Thomas (2009, p. 470) integrais de linha têm a propriedade útil de que se uma curva C for feita ligando-se um número finito de curvas C_1, C_2, \dots, C_n pelas

extremidades, então a integral de uma função sobre C é a soma das integrais sobre as curvas que a compõem:

$$\int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds + \int_{C_3} f \, ds + \dots + \int_{C_n} f \, ds. \quad (4.6)$$

Exemplo 4.2. [Integral de linha para dois caminhos ligados] A Figura (21) representa outro caminho da origem ao ponto $(1,1,1)$, a união dos segmentos de reta C_1 e C_2 . Integre $f(x, y, z) = x - 3y^3 + z$ sobre $C_1 \cup C_2$.

Resolução: Escolhemos as parametrizações mais simples que pudermos imaginar para C_1 e C_2 , verificando os comprimentos dos vetores velocidade à medida que prosseguimos:

$$C_1 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad |v| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$C_2 : \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad |v| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1.$$

Com essas parametrizações, descobrimos que

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_2} f(x, y, z) \, ds &= \int_{C_1} f(x, y, z) \, ds + \int_{C_2} f(x, y, z) \, ds \\ &= \int_0^1 f(t, t, 0) \sqrt{2} \, dt + \int_0^1 f(1, 1, t) (1) \, dt \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + 0) \sqrt{2} \, dt + \int_0^1 (1 - 3 + t) (1) \, dt \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{t^2}{2} - t^3 \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t \right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.3. Integre $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$, sobre o caminho de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ (Figura 22) dado por $C_1 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ e $C_2 : \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

Resolução:²

$$C_1 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \Rightarrow \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{1^2 + (2t)^2} = \sqrt{1 + 4t^2}.$$

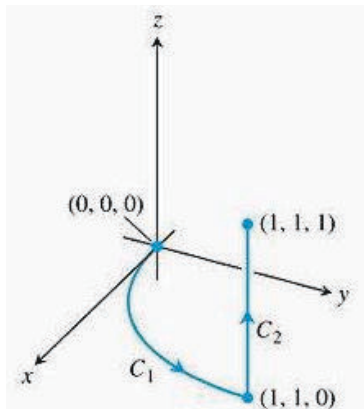
$$C_2 : \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 1; \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{k} \Rightarrow \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1.$$

Com essas parametrizações descobrimos que:

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_2} f(x, y, z) \, ds &= \int_{C_1} f(x, y, z) \, ds + \int_{C_2} f(x, y, z) \, ds \\ &= \int_0^1 f(t, t^2, 0) \sqrt{1 + 4t^2} \, dt + \int_0^1 f(1, 1, t) (1) \, dt \\ &= \int_0^1 (t + \sqrt{t^2} - 0^2) (\sqrt{1 + 4t^2}) \, dt + \int_0^1 (1 + \sqrt{1} - t^2) (1) \, dt \\ &= \int_0^1 (2t) \sqrt{1 + 4t^2} \, dt + \int_0^1 (2 - t^2) (1) \, dt \\ &= \underbrace{2 \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} \, dt} + \int_0^1 (2 - t^2) \, dt \end{aligned}$$

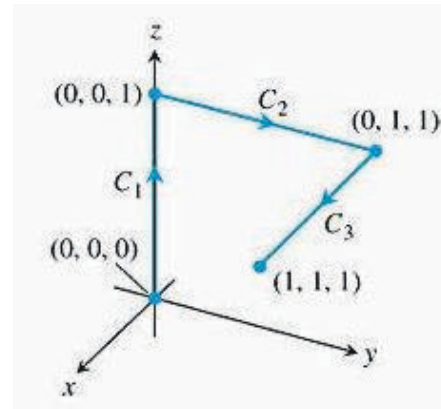
² Questão resolvida pelo graduando, ver referência Thomas (2009, p. 473).

Figura 22 – Caminhos de integração que vai da origem ao ponto (1,1,1) unindo os caminhos C_1 e C_2 .



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 473).

Figura 23 – Caminhos de integração que vai da origem ao ponto (1,1,1) unindo os caminhos C_1 , C_2 e C_3 .



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 473).

Nessa primeira parcela, aplicamos a integração através do método da substituição.

Daí, segue que:

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} dt + \int_0^1 (2 - t^2) dt \\
 &= \frac{1}{6} \left[\sqrt{(1 + 4t^2)^3} \right]_0^1 + \left[2t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= \left[\frac{5\sqrt{5}}{6} - \frac{1}{6} \right] + \left[\frac{5}{3} \right] \\
 &= \frac{5\sqrt{5}}{6} + \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Logo, } \int_{C_1 \cup C_2} f(x, y, z) ds &= \int_{C_1} f(x, y, z) ds + \int_{C_2} f(x, y, z) ds \\
 &= \frac{5\sqrt{5}}{6} + \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 4.4. Integre $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$ sobre o caminho de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$, como mostra a Figura (23).

Resolução:³

$$C_1 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 1; \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t\mathbf{k}) = \mathbf{k} \Rightarrow \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$C_2 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 1; \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \mathbf{j} \Rightarrow \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$$

$$C_3 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 1; \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = \mathbf{i} \Rightarrow \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

³ Questão resolvida pelo graduando, ver referência Thomas (2009, p. 473).

Com essas parametrizações descobrimos que

$$\begin{aligned}
 \int_{C_1 \cup C_2} f(x, y, z) \, ds &= \int_{C_1} f(x, y, z) \, ds + \int_{C_2} f(x, y, z) \, ds + \int_{C_3} f(x, y, z) \, ds \\
 &= \int_0^1 f(0, 0, t) (1) \, dt + \int_0^1 f(0, t, 1) (1) \, dt + \int_0^1 f(t, 1, 1) (1) \, dt \\
 &= \int_0^1 (-t^2) (1) \, dt + \int_0^1 (\sqrt{t} - 1) (1) \, dt + \int_0^1 t (1) \, dt \\
 &= \left[\frac{-t^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3} t^{\frac{2}{3}} - t \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \\
 &= -\frac{1}{6} \\
 \Rightarrow \int_{C_1 \cup C_2} f(x, y, z) \, ds &= \int_{C_1} f(x, y, z) \, ds + \int_{C_2} f(x, y, z) \, ds + \int_{C_3} f(x, y, z) \, ds \\
 &= -\frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

É interessante apresentar as idéias do autor, Thomas (2009), acerca da integral de f sobre $C_1 \cup C_2$ obtida integrando-se f sobre cada seção do caminho, segundo a seguinte recomendação:

Segundo ele, devemos observar três coisas sobre as integrações nos exemplos (4.1) e (4.2). Primeiro, assim que as componentes da curva apropriada foram substituídas na fórmula para f , a integração se tornou uma integração-padrão em relação a t . Segundo, a integral de f sobre $C_1 \cup C_2$ foi obtida integrando-se f sobre cada seção do caminho e somando-se os resultados. Terceiro, as integrais de f sobre C e $C_1 \cup C_2$ tem valores diferentes.

Para a maioria das funções, o valor da integral ao longo de um caminho ligando dois pontos varia se o caminho entre eles variar. Para algumas funções, entretanto, o valor permanece o mesmo. Detalhes disso, podemos encontrar em Leithold (1994, p. 1083).

Definição 4.1. Seja C uma curva contida num disco aberto B em \mathbb{R}^2 , com equação vetorial $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, onde f' e g' são contínuas em $[a, b]$. Além disso, consideremos um campo de forças em B definido por $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, onde M e N são contínuas em B . Então, se W for a medida do **trabalho** realizado pelo campo de forças \mathbf{F} ao mover uma partícula ao longo de C de $(f(a), g(a))$ até $(f(b), g(b))$, temos:

$$W = \int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)] dt, \quad (4.7)$$

ou, equivalentemente, usando a notação vetorial

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \langle M(f(t), g(t)), N(f(t), g(t)) \rangle \cdot \langle f'(t), g'(t) \rangle dt \\ &\Leftrightarrow W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Exemplo 4.5. Suponha que uma partícula se move ao longo da parábola $y = x^2$ do ponto $(-1, 1)$ ao ponto $(2, 4)$. Ache o trabalho total realizado, se o movimento for causado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$. Suponha que os arcos sejam medidos em metros e a força em newtons.

Resolução: As equações paramétricas da parábola são $x = t$ e $y = t^2$, $-1 \leq t \leq 2$. Assim, uma equação vetorial da parábola é $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ e $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$. Como $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2 + y^2, 3x^2y \rangle$, então:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) &= \mathbf{F}(t, t^2) \\ &= \langle t^2 + t^4, 3t^4 \rangle. \end{aligned}$$

Se W for o trabalho realizado, então, da equação (4.8),

$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^2 \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \quad (4.9) \\ &= \int_{-1}^2 \langle t^2 + t^4, 3t^4 \rangle \cdot \langle 1, 2t \rangle dt \\ &= \int_{-1}^2 (t^2 + t^4 + 6t^5) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + t^6 \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{32}{5} + 64 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + 1 \right) \\ &= \frac{363}{5}. \end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado é de $\frac{363}{5} \mathbf{J}$.

As integrais nas fórmulas (4.7) e (4.8) são chamadas *integrais de linha*.

Para a integral de linha da fórmula (4.7), uma notação comumente usada, envolvendo a forma diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ é

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy. \quad (4.10)$$

Essa notação é sugerida pelo fato de que como as equações paramétricas de C são $x = f(t)$ e $y = g(t)$, então $dx = f'(t) dt$ e $dy = g'(t) dt$. Uma notação vetorial para a integral de linha da fórmula (4.8) é:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}. \quad (4.11)$$

Essa notação é sugerida ao considerarmos a equação vetorial de C que é $\mathbf{R}(t) = f(t) \mathbf{i} + g(t) \mathbf{j}$, expressando $d\mathbf{R} = \mathbf{R}'(t) dt$. Então:

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot d\mathbf{R} = \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt.$$

Temos, assim, a definição formal a seguir.

Definição 4.2. Seja C uma curva contida em um disco aberto em B em \mathbb{R}^2 e tendo a equação vetorial:

$$\mathbf{R}(t) = f(t) \mathbf{i} + g(t) \mathbf{j} \quad a \leq t \leq b,$$

tal que f' e g' sejam contínuas em $[a, b]$. Seja \mathbf{F} um campo vetorial em B definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y) \mathbf{i} + N(x, y) \mathbf{j},$$

onde M e N são contínuas em B . Então, a **integral de linha** de $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ sobre C é dada por

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_a^b [M(f(t), g(t)) f'(t) + N(f(t), g(t)) g'(t)] dt$$

ou, equivalentemente, usando a notação vetorial, a **integral de linha** de \mathbf{F} sobre C é dada por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt.$$

Ainda segundo Leithold (1994, p. 1084) ambas as notações na forma diferencial e na forma vetorial são usadas para integrais de linha.

Ilustração I: No exemplo (4.5) a integral da equação (4.9) que define \mathbf{W} é uma integral de linha. Com a notação vetorial, essa integral de linha pode ser denotada por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}^4$$

onde $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$ e $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$. Com a notação na forma diferencial essa integral de linha pode ser denotada por

$$\int_C (x^2 + y^2) dx + 3x^2y dy. \quad (4.12)$$

Se uma equação C for da forma $y = F(x)$, então x poderá ser usado como um parâmetro, em lugar de t . Analogamente, se uma equação de C for da forma $x = G(y)$, então y poderá ser usado como um parâmetro de t .

Ilustração 2: No exemplo (4.7) e na ilustração 1, a equação de C é $y = x^2$ que é da forma $y = F(x)$. Logo, podemos usar x como um parâmetro, em vez de t .

Assim na integral (4.12) da ilustração 1 podemos substituir y por x^2 e dy por $2x dx$, e obteremos

$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^2 (x^2 + x^4) dx + 3x^2x^2 (2x dx) \\ &= \int_{-1}^2 (x^2 + x^4 + 6x^5) dx. \end{aligned}$$

Essa integral é a mesma que a terceira integral da solução do exemplo (4.7), exceto que a variável é x , em vez de t .

Se a curva C na definição de integral estiver no intervalo fechado $[a, b]$ sobre o eixo x , então $y = 0$ e $dy = 0$. Assim,

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_a^b M(x, 0) dx.$$

Portanto, nesse caso, a integral de linha reduz-se a uma integral definida.

Na definição de integral de linha, se C tiver a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad a \leq t \leq b.$$

Então exigimos que f' e g' sejam contínuas em $[a, b]$. Se, além dessa exigência de continuidade, $f'(t)$ e $g'(t)$ não forem ambas nulas em cada ponto do intervalo aberto (a, b) , então C será dita **suave** em $[a, b]$. Se um intervalo I puder ser dividido em um número finito de subintervalos nos quais C é suave, então C será dita **seccionalmente suave** em I .

⁴ A notação $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ pressupõe que a curva C seja orientada.

Definição 4.3. Suponha que a curva C consista em arcos suaves C_1, C_2, \dots, C_n . Então a **integral de linha** de $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ sobre C será definida por

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \sum_{i=1}^n \left(\int_{C_i} M(x, y) dx + N(x, y) dy \right)$$

ou, equivalentemente, usando a notação vetorial, a integral de linha de \mathbf{F} sobre C será definida por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \left(\int_{C_i} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \right).$$

Definição 4.4. Seja C uma curva contida numa bola aberta em B em \mathbb{R}^3 tendo a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t) \mathbf{i} + g(t) \mathbf{j} + h(t) \mathbf{k} \quad a \leq t \leq b$$

tal que f', g' e h' sejam contínuas em $[a, b]$. Seja \mathbf{F} um campo vetorial em \mathbf{B} , definido por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z) \mathbf{i} + N(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$$

onde M, N e R são funções contínuas em \mathbf{B} . Então, a **integral de linha** de

$$M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

sobre C será dada por:

$$\begin{aligned} \int_C M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ \int_a^b [M(f(t), g(t), h(t)) f'(t) + N(f(t), g(t), h(t)) g'(t) + \\ R(f(t), g(t), h(t)) h'(t)] dt. \end{aligned}$$

ou, equivalentemente, usando a notação vetorial, a **integral de linha** de \mathbf{F} sobre C será dada por:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt.$$

Podemos definir o trabalho realizado por um campo de forças sobre uma partícula em movimento ao longo de uma curva em \mathbb{R}^3 como uma integral de linha, como foi feito na definição (4.1) para uma curva em \mathbb{R}^2 . Essa definição será aplicada no exemplo a seguir.

Exemplo 4.6. Uma partícula percorre a cúbica retorcida

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ache o trabalho total realizado, se o movimento foi causado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + x \operatorname{sen} \pi y^2\mathbf{k}.$$

Suponha que o arco seja medido em metros e a força em newtons.

Resolução: Se $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ então $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$.

Como $F(x, y, z) = \langle e^x, xe^z, x \operatorname{sen} \pi y^2 \rangle$, então:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) &= \mathbf{F}(t, t^2, t^3) \\ &= \langle e^t, te^{t^3}, t \operatorname{sen} \pi t^4 \rangle. \end{aligned}$$

Se W for o trabalho realizado, então, da notação vetorial para a integral de linha, na definição (4.4).

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \\ &= \int_0^1 \langle e^t, te^{t^3}, t \operatorname{sen} \pi t^4 \rangle \cdot \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle dt \\ &= \int_0^1 (e^t + 2t^2 e^{t^3} + 3t^3 \operatorname{sen} \pi t^4) dt \\ &= \left[e^t + \frac{2}{3} e^{t^3} - \frac{3}{4\pi} \cos \pi t^4 \right]_0^1 \\ &= e + \frac{2}{3} e - \frac{3}{4\pi} \cos \pi - 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4\pi} \cos 0 \\ &= \frac{5}{3} e + \frac{3}{2\pi} - \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado é $\left[\frac{5}{3}(e - 1) + \frac{3}{2\pi} \right] \mathbf{J}$.

4.2 Integrais de Linha Independentes do Caminho

No capítulo (4), segundo Leithold (1994, p. 1089), o valor de uma integral de linha é determinado pelo integrando e pela curva C entre dois pontos P_1 e P_2 . Mas, sob certas condições, o valor da integral de linha depende somente do integrando e dos pontos P_1 e P_2 , e não do caminho de P_1 e P_2 . Tal integral de linha é denominada **independente do caminho**.

Ilustração:⁵ Suponha que o campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j},$$

⁵ Ilustração compilada da referência (LEITHOLD, 1994).

mova uma partícula da origem ao ponto $(1, 1)$. Vamos mostrar que o trabalho total realizado será o mesmo, se o caminho for ao longo:

[(a)] do segmento de reta da origem ao ponto $(1, 1)$;

[(b)] do segmento da parábola $y = x^2$ da origem a $(1, 1)$;

[(c)] do segmento da curva $x = y^3$.

Se \mathbf{W} for a medida do trabalho realizado, então

$$W = \int_C (y^2 + 2x + 4) dx + (2xy + 4y - 5) dy. \quad (4.13)$$

(a) Veja a Figura 24. Uma equação de C é $y = x$. Usamos x como parâmetro e expressamos $y = x$ e $dy = dx$ em (4.13). Então,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^2 + 2x + 4) dx + (2x^2 + 4x - 5) dx \\ &= \int_0^1 (3x^2 + 6x - 1) dx \\ &= [x^3 + 3x^2 - x]_0^1 \\ &= 3J. \end{aligned}$$

(b) Veja a Figura 25. Uma equação de C é $y = x^2$. Novamente, tomamos x como parâmetro e em (4.13), expressando $y = x^2$ e $dy = 2x dx$, temos

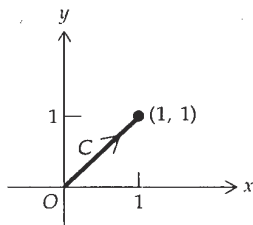
$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^4 + 2x + 4) dx + (2x^3 + 4x^2 - 5) 2x dx \\ &= \int_0^1 (5x^4 + 8x^3 - 8x + 4) dx \\ &= [x^5 + 2x^4 - 4x^2 + 4x]_0^1 \\ &= 3J. \end{aligned}$$

(c) Veja a Figura 26. Uma equação de C é $x = y^3$. Tomamos y como parâmetro e em (4.13) expressamos $x = y^3$ e $dx = 3y^2 dy$. Então,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (y^2 + 2y^3 + 4) 3y^2 dy + (2y^4 + 4y - 5) dy \\ &= \int_0^1 (6y^5 + 5y^4 + 12y^2 + 4y - 5) dy \\ &= [y^6 + y^5 + 4y^3 + 2y^2 - 5y]_0^1 \\ &= 3J. \end{aligned}$$

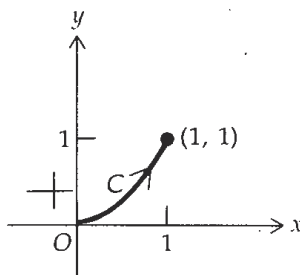
No começo dessa seção, vimos que o valor da integral de linha é o mesmo em três caminhos diferentes, de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Na verdade, o valor da integral de linha é o mesmo

Figura 24 – Segmento da reta.



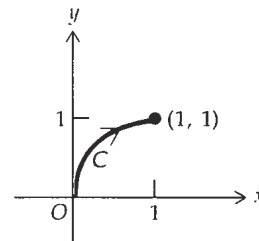
Fonte: (LEITHOLD, 1994, p. 1090).

Figura 25 – Segmento da parábola $y = x^2$.



Fonte: (LEITHOLD, 1994, p. 1090).

Figura 26 – Segmento da curva $x = y^3$



Fonte: (LEITHOLD, 1994, p. 1090).

sobre qualquer curva seccionalmente suave da origem a $(1, 1)$; assim, essa integral de linha é independente do caminho.

Vamos enunciar e demonstrar agora um teorema que, além de dar condições para que a integral de linha seja independente do caminho, também apresenta uma fórmula para encontrar o valor de tal integral de linha.

Teorema 4.1. *Seja C qualquer curva seccionalmente suave, contida num disco aberto B em \mathbb{R}^2 do ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2) . Se \mathbf{F} for um campo vetorial conservativo contínuo em B e ϕ for uma função potencial para \mathbf{F} , então a integral de linha*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R},$$

será independente do caminho C e,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1).$$

Demonstração. Daremos a demonstração para C suave. Caso C seja apenas seccionalmente suave, consideraremos as partes separadamente, aplicando a demonstração seguinte a cada parte suave.

Sejam as equações paramétricas de C

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

Assim, a equação vetorial de C é:

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}, \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

Além disso, o ponto (x_1, y_1) é $(f(t_1), g(t_1))$ e o ponto (x_2, y_2) é $(f(t_2), g(t_2))$.

Como ϕ é uma função potencial para \mathbf{F} , $\nabla\phi(x, y) = F(x, y)$, onde:

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{R} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \nabla\phi(R(t)) \cdot R'(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \nabla\phi(f(t), g(t)) \cdot R'(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \langle M(f(t), g(t)), N(f(t), g(t)) \rangle \cdot \langle f'(t), g'(t) \rangle dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [M(f(t), g(t)) f'(t) dt + N(f(t), g(t)) g'(t) dt]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Observe que como $M(x, y) dx + N(x, y) dy = d\phi(x, y)$, então

$$M(f(t), g(t)) f'(t) dt + N(f(t), g(t)) g'(t) dt = d\phi(x, y).$$

Substituindo essa equação em (4.14) e aplicando o segundo Teorema Fundamental do Cálculo⁶, obtemos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_{t_1}^{t_2} d\phi(f(t), g(t)) \\ &= [\phi(f(t), g(t))]_{t_1}^{t_2} \\ &= \phi(f(t_2), g(t_2)) - \phi(f(t_1), g(t_1)) \\ &= \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1), \end{aligned}$$

que é o que queríamos provar. ■

Teorema 4.2. *Se C for qualquer curva fechada seccionalmente suave, contida em um disco aberto B em \mathbb{R}^2 e se \mathbf{F} for um campo vetorial conservativo em B , então*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0.$$

⁶ **Segundo Teorema Fundamental do Cálculo.** Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja g uma função tal que

$$g'(x) = f(x) \quad (4.15)$$

para todo x em $[a, b]$. Então, $\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a)$ (Se $x = a$, a derivada de (4.15) pode ser uma derivada à direita, e se $x = b$, a derivada em (4.15) pode ser uma derivada à esquerda.)

Demonstração. Aplicando o teorema (4.1), e como C é fechada, o ponto (x_1, y_1) coincide com o ponto (x_2, y_2) . Logo,

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1) = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_2, y_2) \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.7. Uma partícula movimenta-se sobre a circunferência

$$\mathbf{R}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ache o trabalho total realizado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(4 \ln 3y + \frac{1}{x}\right) \mathbf{i} + \frac{4x}{y} \mathbf{j}.$$

Resolução: Seja

$$\begin{aligned}M(x, y) &= 4 \ln 3y + \frac{1}{x}, & N(x, y) &= \frac{4x}{y} \\ M_y(x, y) &= \frac{4}{y}, & N_x(x, y) &= \frac{4}{y}.\end{aligned}$$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, \mathbf{F} é conservativo. Além disso, C é uma curva fechada.

Logo, se \mathbf{W} for a medida do trabalho realizado, temos, do teorema (4.15).

$$\begin{aligned}W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ &= 0J.\end{aligned}$$

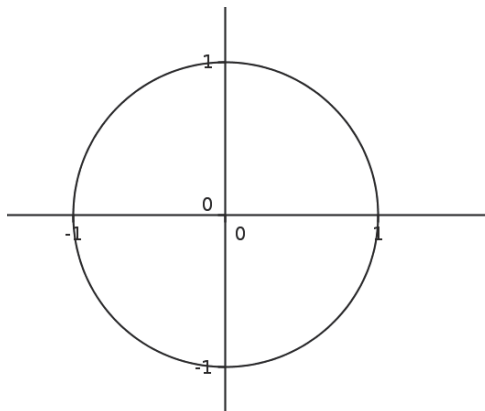
Agora, vejamos um outro exemplo:

Exemplo 4.8. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para o campo vetorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ no sentido anti-horário ao longo da circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$ de $(0, 1)$ até $(1, 0)$.

Resolução:⁷

$$\begin{aligned}M &= 2x + y^2, \\ N &= 2xy + 3y \\ \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} &= 2y, \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2y \\ \Rightarrow \int_C (2x + y^2) dx + \int_C (2xy + 3y) dy &= \int_R \int (2y - 2y) dx dy \\ &= 0.\end{aligned}$$

⁷ Questão resolvida pelo graduando, ver referência Thomas (2009, p. 483).

Figura 27 – Representação da circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Teorema 4.3. *Seja C qualquer curva seccionalmente suave contida em uma bola aberta B em \mathbb{R}^3 , do ponto (x_1, y_1, z_1) ao ponto (x_2, y_2, z_2) . Se \mathbf{F} for um campo vetorial conservativo em B e ϕ for uma função potencial para \mathbf{F} , então a integral de linha*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R},$$

será independente do caminho C , e

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1).$$

5 Teorema de Green

Este capítulo é a parte central do trabalho, o Teorema de Green, onde faremos uso dos resultados anteriormente expostos até o momento para definir o Teorema; e, logo em seguida, demonstrar e exemplificar.

Segundo Leithold (1994, p. 1099) existe um teorema que expressa uma integral dupla sobre uma região plana R , em termos de uma integral de linha ao longo da fronteira de R , chamado Teorema de Green. Para o autor, é necessário revisar e introduzir alguns termos referentes a curvas planas, antes de enunciar o Teorema.

No enunciado do Teorema de Green iremos nos referir a uma integral de linha ao longo de uma curva C , fechada, simples e seccionalmente suave que forma a fronteira de uma região R no plano e o sentido ao longo de C é anti-horário.

A integral de linha em torno de C no sentido anti-horário é denotado por \oint_C .

Teorema 5.1 (Teorema de Green). *Sejam M e N funções de duas variáveis x e y , de tal modo que tenham derivadas parciais primeiras contínuas em um disco aberto B em \mathbb{R}^2 . Se C for uma curva fechada simples seccionalmente suave, contida inteiramente em B , e se R for a região limitada por C , então:*

$$\oint_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA. \quad (5.1)$$

A demonstração do Teorema de Green para todas as regiões limitadas por curvas que são fechadas, simples e seccionalmente suaves é matéria de um curso de cálculo avançado. Mas, provaremos o teorema para um tipo particular de região, onde cada reta horizontal ou vertical intercepta-a em no máximo dois pontos. A prova está a seguir.

Demonstração. Seja R a região do plano xy que pode ser definida por:

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}. \quad (5.2)$$

e

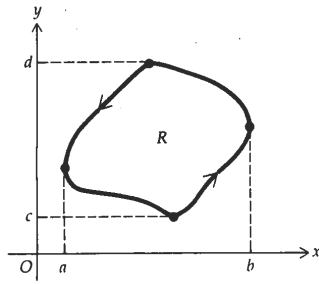
$$R = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}. \quad (5.3)$$

onde as funções f_1, f_2, g_1 e g_2 são suaves. A Figura (28) representa tal região R , que deve ser considerada por (5.2) na Figura (29) e por (5.3) na Figura (30).

A demonstração consistirá em mostrar que

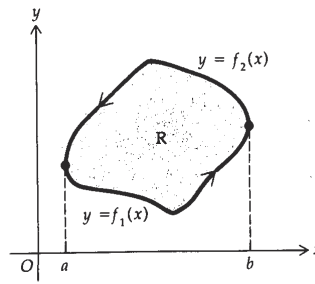
$$\oint_C M(x, y) dx = - \int_R \int \frac{\partial M}{\partial y} dA \quad (5.4)$$

Figura 28 –



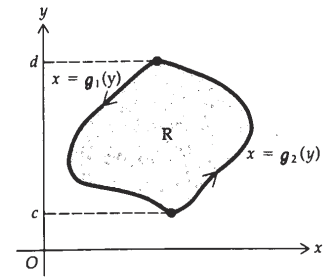
Fonte: (LEITHOLD, 1994, p. 1101).

Figura 29 –



Fonte: (LEITHOLD, 1994, p. 1101).

Figura 30 –



Fonte: (LEITHOLD, 1994, p. 1101).

e

$$\oint_C N(x, y) dy = \int_R \int \frac{\partial N}{\partial x} dA. \quad (5.5)$$

Para provar (5.4), tratamos R como a região definida por (5.2). Consulte a Figura (28).

Seja C_1 o gráfico de $y = f_1(x)$ de $x = a$ a $x = b$; isto é, C_1 é a parte mais baixa da curva de fronteira orientada C , indo da esquerda para a direita. Seja C_2 o gráfico de $y = f_2(x)$ de $x = b$ a $x = a$ isto é, C_2 é a parte superior da curva de fronteira orientada C , que vai da direita para a esquerda. Consideremos a integral de linha $\oint_C M(x, y) dx$.

$$\begin{aligned} \oint_C M(x, y) dx &= \int_{C_1} M(x, y) dx + \int_{C_2} M(x, y) dx \\ &= \int_a^b M(x, f_1(x)) dx + \int_b^a M(x, f_2(x)) dx \\ &= \int_a^b M(x, f_1(x)) dx - \int_a^b M(x, f_2(x)) dx \\ &= \int_a^b [M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))] dx. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Vamos considerar agora a integral dupla $\int_R \int \frac{\partial M}{\partial y} dA$, onde R é ainda tratada como sendo definida por (5.2)

$$\begin{aligned} \int_R \int \frac{\partial M}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_a^b [M(x, y)]_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx \\ &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))] dx. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Comparando (5.6) e (5.7), segue que a igualdade (5.4) é válida.

Para provar (5.5), R é considerada como uma região definida por (5.3), como na Figura 5.

Somando os termos correspondentes das igualdades (5.4) e a (5.5), obtemos o Teorema de Green para essa região R . ■

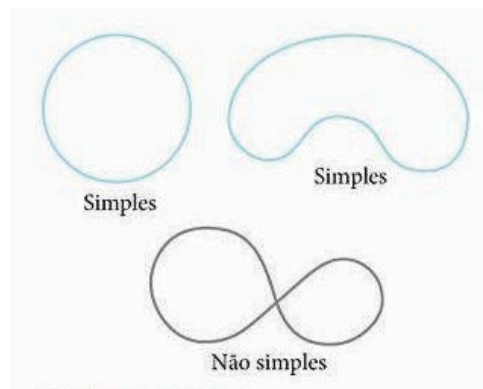
Teorema 5.2. *Se R for uma região tendo por fronteira uma curva C fechada simples e seccionalmente suave, e A unidades de área for a área de R , então:*

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x \, dy - y \, dx.$$

Demonstração. No enunciado do Teorema de Green, seja $M(x, y) = -\frac{1}{2}y$ e $N(x, y) = \frac{1}{2}x$. Então:

$$\begin{aligned} \oint_C -\frac{1}{2}y \, dx + \frac{1}{2}x \, dy &= \int_R \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}x \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{2}y \right) \right] dA \\ &= \int_R \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dA \\ &= \int_R \int dA. \end{aligned}$$

Figura 31 – Ao provarmos o Teorema de Green, distinguimos dois tipos de curvas fechadas, simples e não simples. As curvas simples não têm interseção com elas mesmas. Uma circunferência é simples, mas uma Figura na forma de 8 não é, pois ela intersecta ela mesma



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 497).

Como $\int_R \int dA$ é a medida da área de R , então $\frac{1}{2} \oint_C x \, dy - y \, dx = A$.

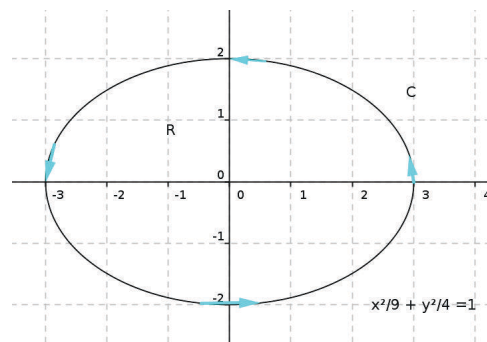
Exemplo 5.1. Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha

$$\oint_C (x^4 - 3y) \, dx + (2y^3 + 4x) \, dy$$

onde, C é a elipse Figura (32) de equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Figura 32 – Representação no plano xy da elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução:¹ Do Teorema de Green,

$$\begin{aligned} \oint_C (x^4 - 3y) dx + (2y^3 + 4x) dy &= \int_R \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (2y^3 + 4x) - \frac{\partial}{\partial y} (x^4 - 3y) \right] dA \\ &= \int_R \int (4 + 3) dA \\ &= 7 \int_R \int dA = 7\pi \cdot a \cdot b = 7 \cdot 3 \cdot 2\pi = 42 \pi \text{ u.a.} \end{aligned}$$

(5.9)

A integral dupla $\int_R f dA$ é a medida da área da região encerrada pela elipse. Vejamos agora um outro exemplo:

Exemplo 5.2. Aplique o Teorema de Green para calcular a integral:

$$\oint_C (y^2 dx + x^2 dy),$$

onde C , é o triângulo limitado por $x = 0$, $x + y = 1$, $y = 0$. C orientada positivamente.

Resolução:²

Temos que $C = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$, triângulo R definido por $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, e $C = (0, 1)$ onde C está orientada positivamente. Daí, segue que:

$$M = y^2, \quad N = x^2.$$

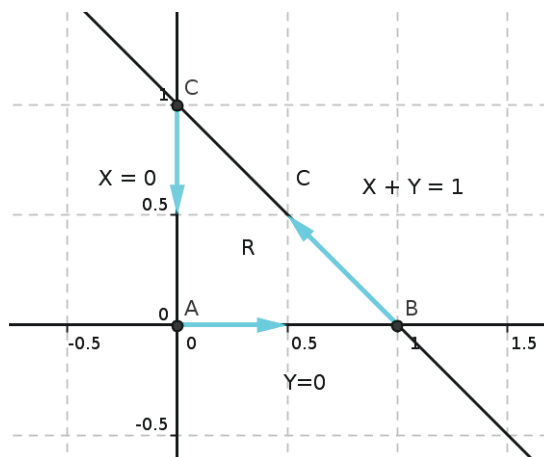
Agora, calculando as derivadas parciais:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x.$$

¹ Questão resolvida pelo graduando, ver referência Thomas (2009) **Comentário do graduando com base no aporte teórico:** No caso da elipse só possui uma única componente externa.

² Questão resolvida pelo graduando, ver referência Thomas (2009, p. 505).

Figura 33 – Representação no plano de triângulo limitado por retas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\begin{aligned}
 \oint_C y^2 dx + x^2 dy &= \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy dx \\
 &= \int_R \int (2x - 2y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2x - 2y) dy dx \\
 &= \int_0^1 (2xy - y^2) \Big|_0^{1-x} \\
 &= \int_0^1 (-3x^2 + 4x - 1) dx \\
 &= [-x^3 + 2x^2 - x]_0^1 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Exemplo 5.3. Use a fórmula da área dada pelo Teorema de Green (Equação(5.2)) para encontrar a área da região limitada pela curva da elipse

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t) \mathbf{i} + (b \sin t) \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Resolução:³ As equações paramétricas da elipse são $x = a \cos t$ e $y = b \sin t$. Note que a parametrização da elipse vai de $0 \leq t \leq 2\pi$. Então, $dx = -a \sin t dt$ e $dy = b \cos t dt$. Se C for a elipse e A unidades for a área da região delimitada por C , então, do Teorema (5.2), $\text{Área} = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$.

$$M = x = a \cos t,$$

$$N = y = b \sin t,$$

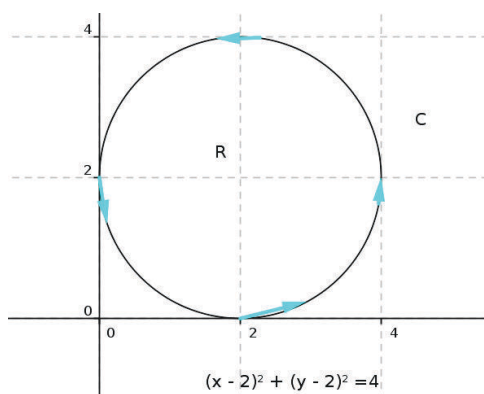
³ Questão resolvida pelo graduando, ver referência Thomas (2009, p. 505).

$$\begin{aligned} \Rightarrow dx &= -a \operatorname{sen} t dt, \\ dy &= b \cos t dt \\ \Rightarrow \text{Área} &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \operatorname{sen}^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab. \end{aligned}$$

Exemplo 5.4. Encontrar⁴ o trabalho realizado por \mathbf{F} para mover uma partícula uma vez no sentido anti-horário ao redor da curva dada. (Veja Figura 34.)

$$\mathbf{F} = (4x - 2y) \mathbf{i} + (2x - 4y) \mathbf{j}.$$

Figura 34 – equação $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A região da Figura (34) também pode ser calculada com o Teorema de Green, aplicando a equação (5.1).

Resolução: No enunciado do Teorema de Green, seja $M(x, y) = 4x - 2y$ e $N(x, y) = 2x - 4y$. Então, $\frac{\partial M}{\partial y} = -2$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = 2$. Se C for a circunferência e A unidades for a área da região delimitada por C , então, o trabalho realizado por \mathbf{F} para mover uma partícula uma vez no sentido anti-horário ao redor da curva dada será numericamente igual a área da circunferência obtida pelo Teorema (5.1).

$$\begin{aligned} M &= 4x - 2y, \\ N &= 2x - 4y \Rightarrow \end{aligned}$$

⁴ Questão resolvida pelo graduando, ver referência Thomas (2009, p. 504).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y} &= -2, \\
\frac{\partial N}{\partial x} &= 2 \Rightarrow \\
\text{Trabalho} &= \oint_C (4x - 2y) dx + (2x - 4y) dy \\
&= \int_R \int [2 - (-2)] dx dy \\
&= 4 \int_R \int dx dy \\
&= 4(\text{Área do círculo}) \\
&= 4(4\pi) = 16\pi.
\end{aligned}$$

5.1 Duas Formas para o Teorema de Green

Segundo Thomas (2009, p. 497) há duas formas de definir o Teorema de Green:

Em uma forma, o Teorema de Green diz que, sob condições adequadas, o fluxo exterior de um campo vetorial através de uma curva fechada simples no plano (Figura 31) é igual à integral dupla do divergente do campo sobre a região limitada pela curva.

Teorema 5.3 (Teorema de Green (fluxo-divergência ou forma normal)). *O fluxo exterior de um campo $\mathbf{F} = M \mathbf{i} + N \mathbf{j}$ através de uma curva fechada simples C é igual à integral dupla de $\text{div } \mathbf{F}$ sobre a região R limitada por C .*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \oint_C M dy - N dx = \int_R \int \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy. \quad (5.10)$$

Em outra forma, o Teorema de Green diz que a circulação no sentido anti-horário de um campo vetorial em torno de uma curva fechada simples é a integral dupla da componente \mathbf{k} do rotacional do campo sobre a região limitada pela curva.

Teorema 5.4 (Teorema de Green (circulação-rotacional ou forma tangencial)). *A circulação no sentido anti-horário de um campo $\mathbf{F} = M \mathbf{i} + N \mathbf{j}$ em torno de uma curva fechada simples C no plano é igual à integral dupla de $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$ sobre a região R limitada por C .*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \oint_C M dx + N dy = \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \quad (5.11)$$

As duas formas do Teorema de Green são equivalentes. Aplicando a equação (5.10) ao campo $\mathbf{G}_1 = N \mathbf{i} + M \mathbf{j}$ temos a equação (5.11), e aplicando a equação (5.11) a $\mathbf{G}_2 = -N \mathbf{i} + M \mathbf{j}$, temos a equação (5.10).

5.1.1 Hipóteses Matemáticas

Segundo Thomas (2009, p. 497) precisamos de dois tipos de hipóteses para o Teorema de Green ser válido. Primeiro, precisamos de condições sobre M e N para assegurar a existência das integrais. As suposições usuais são de que M e N e suas derivadas parciais de primeira ordem sejam contínuas em todos os pontos de alguma região aberta que contenha C e R . Segundo, necessitamos de condições geométricas na curva C . Ela deve ser simples, fechada e formada por pedaços ao longo dos quais podemos integrar M e N . As hipóteses usuais são que C seja lisa por partes.

5.2 Momento de Inércia

Definição 5.1. O momento de inércia de uma partícula cuja massa é m kg, em torno de um eixo, é definido como sendo mr^2 kg – m^2 onde r, m é a distância entre a partícula e o eixo.

Para Leithold (1994, p. 1036) um sistema de n partículas, o momento de inércia do sistema será definido como a soma dos momentos de inércia de todas as partículas. Isto é, se a i -ésima partícula tiver uma massa de m_i kg e estiver a uma distância de r_i do eixo, então $m_i r_i^2$, será o momento de inércia do sistema, onde:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Estendendo o conceito de momento de inércia a uma distribuição contínua de massa no plano, tal como barras ou lâminas por um processo similar ao usado previamente, temos a definição a seguir.

Definição 5.2. Suponhamos que haja uma distribuição contínua de massa ocupando uma região R do plano xy , e suponhamos que a medida da densidade de área dessa distribuição no ponto (x, y) seja $\rho(x, y) \text{ kg} - m^2$, onde ρ é contínua em R . Então, o momento de inércia $I_x \text{ kg} - m^2$ em torno do eixo x dessa distribuição de massa será determinado por:

$$I_x = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \int_R \int y^2 \rho(x, y) dA \quad (5.12)$$

Da mesma forma, a medida $I_y \text{ kg} - m^2$ **do momento de inércia em torno do eixo y** é dada por:

$$I_y = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \int_R \int x^2 \rho(x, y) dA \quad (5.13)$$

e a medida $I_0 \text{ kg} - m^2$ **do momento de inércia em torno da origem**, ou do eixo z , é dada por:

$$I_0 = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \gamma_i^2) \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \int_R \int (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA \quad (5.14)$$

O número I_0 , é a medida do chamado **momento de inércia polar**.

5.3 Aplicações do Teorema de Green

Nesta seção apresentaremos algumas aplicações do Teorema de Green. Para a aplicação que se segue, utilizaremos como metodologia de estudo do fenômeno fluxo de campo através de uma região de área A , a modelagem matemática. Nessa aplicação começaremos com um problema que procura encontrar a quantidade de campo que uma área intercepta.

Aplicação 1: Considere uma região⁵ limitada pela curva $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + \left(\left(\frac{t^3}{3}\right) - t\right) \mathbf{j}$ veja Figura (35), no intervalo entre $-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$.

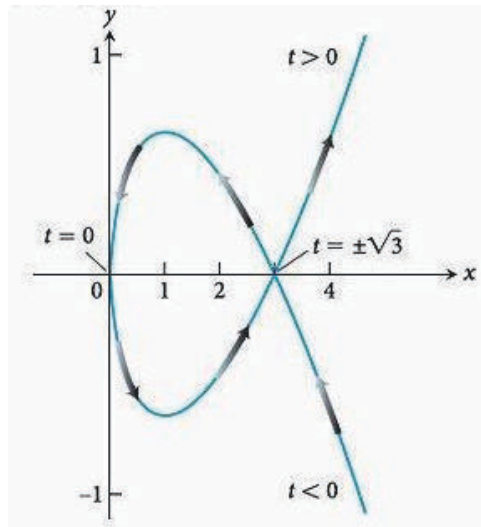
Suponhamos que desejássemos determinar o fluxo de campo de velocidade através da região plana limitada por essa curva.

De acordo com Resnick, Halliday e Krane (2003, p. 40) essa taxa depende do ângulo entre \mathbf{v} e o ângulo da malha. Quando \mathbf{v} é perpendicular ao plano, como na Figura (37 a), a taxa é vA .

Quando \mathbf{v} é paralelo ao plano da malha, nenhum ar se move atrás dela, de modo que Φ é igual a zero. Para ângulos intermediários, a taxa Φ depende do componente de \mathbf{v} que é normal ao plano (Figura 37 b). Uma vez que este componente vale $v \cos \theta$, a taxa de

⁵ Modelagem matemática de um problema de natureza física, uma aplicação para o uso do Teorema de Green, ver referência Resnick, Halliday e Krane (2003).

Figura 35 – Região no plano.



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 505).

escoamento volumar através da malha é:

$$\Phi = (v \cos \theta) A. \quad (5.15)$$

Essa taxa de escoamento através de uma área é um exemplo de um fluxo - *um fluxo de volume*.

Para fazermos isso, inicialmente definimos *um vetor área* A como sendo um vetor cujo módulo é igual a uma área (aqui a área da malha) e cuja direção é normal ao plano da área (a malha Figura, 37 c). A seguir reescrevemos a equação (5.15) como o produto escalar do vetor velocidade \mathbf{v} da corrente de ar e o vetor área A da malha :

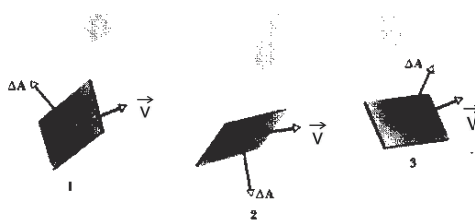
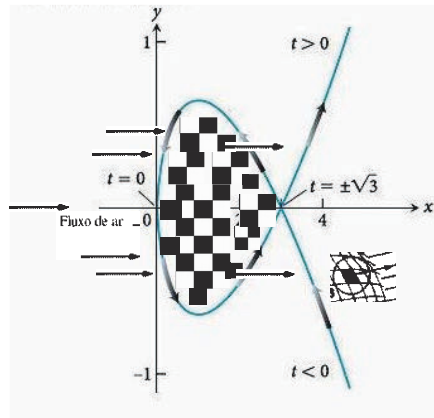
$$\Phi = \mathbf{v}A \cos \theta = \mathbf{v} \cdot A \quad (5.16)$$

Segundo o autor, a palavra "fluxo" vem do latim *fluere*, que significa fluir. Tal significado faz sentido quando falamos sobre o escoamento do volume de ar através da malha. Entretanto, a equação (5.16) pode ser vista de um modo mais abstrato. Podemos atribuir um vetor velocidade a cada ponto na corrente de ar que passa através da malha.

A composição de todos estes é um *campo de velocidade*. Podemos, então, interpretar a equação (5.16) como dando o *fluxo do campo velocidade através da malha*. Com essa interpretação, o fluxo não mais significa o escoamento real de alguma coisa através de uma área. Em vez disso, ele significa a quantidade de um campo que uma área intercepta.

Suponhamos que essa corrente de ar segue como ilustração (37a), e que possui velocidade constante. Assim sendo, quer-se determinar a vazão volumétrica, ou seja, Φ .

Figura 36 – Fluxo do campo velocidade através da malha. Considerando que se dirija uma corrente de ar de velocidade constante \vec{v} para essa região de área A , e seja Φ a vazão volumétrica, isto é, a taxa em que o ar escoa através da malha (volume por unidade de tempo).



Fonte: Elaborada pelo autor.

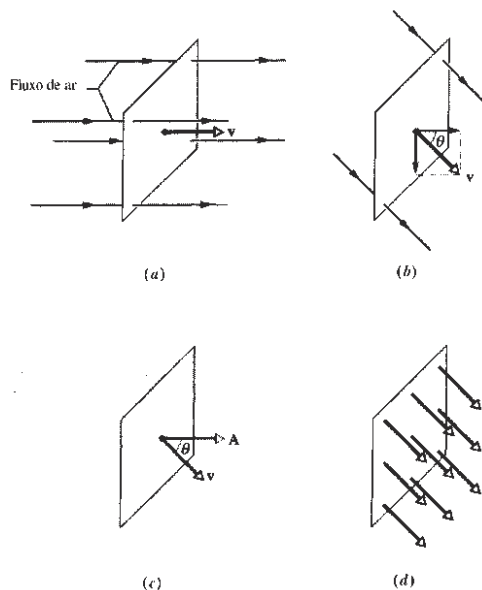
Para isso, da Figura (36), nota-se para a necessidade de determinar a área da região limitada pela curva

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \left(\left(\frac{t^3}{3} \right) - t \right) \mathbf{j}.$$

Uma região complexa, difícil de calcular a sua área, mas com a aplicação do Teorema de Green torna-se mais fácil. Regiões como a da Figura (5.3) podem ser trabalhadas sem grandes dificuldades. Para o cálculo da área dessa região empregaremos o teorema (5.2) que é consequência do Teorema de Green.

Apresentaremos, a seguir, a resolução desta área através desse teorema.

Figura 37 – Fluxo do campo velocidade.



Fonte: (RESNICK; HALLIDAY; KRANE, 2003, p. 41).

Resolução:⁶.

$$M = x = t^2, N = y = \frac{t^3}{3} - t \Rightarrow dx = 2t dt,$$

$$dy = (t^2 - 1) dt \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[t^2 (t^2 - 1) - \left(\frac{t^3}{3} - t \right) (2t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3} t^4 + t^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{15} t^5 + -\frac{1}{3} t^3 \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{15} (9\sqrt{3} + 15\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{15} (24\sqrt{3}) = \frac{8}{5} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Temos acima o valor da área da região limitada pela curva. Lembrando de que, o fluxo de F através de C é a quantidade total de fluido que atravessa C por unidade de tempo. Segundo Leithold (1994, p. 1108), o fluxo⁷ de F através de C pode ser interpretada como a medida aproximada da taxa de fluido por unidade de área. Portanto, de (5.16) o fluxo do campo velocidade através da malha é dada por $\Phi = vA \cos \theta = v \cdot A = \frac{8}{5} \sqrt{3} v$.

⁶ Questão elaborada e resolvida pelo graduando

⁷ A palavra *fluxo* normalmente significa escoamento; contudo, o termo *fluxo* é aplicado a campos vetoriais em geral, mesmo que não tenham nada a ver com velocidade de um fluido. Assim se F for um campo

Para aprofundarmos mais acerca da questão fluxo de F através de C , vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 5.5. O campo de velocidade de um fluido é definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 6x) \mathbf{i} + (2y - x^2) \mathbf{j}.$$

Ache a taxa de escoamento do fluido para fora da região R , limitada por uma curva fechada, suave, C e cuja área será 140cm^2 .

Resolução:⁸

A taxa de escoamento do fluido é dada pelo fluxo de \mathbf{F} através de C . De (5.17) e do Teorema da divergência de Gauss no plano⁹,

$$\begin{aligned} \text{Fluxo} &= \oint_C F \cdot N \, ds \\ &= \int_R \int \operatorname{div} F \, dA \\ &= \int_R \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (y^2 + 6x) + \frac{\partial}{\partial y} (2y - x^2) \right] dA \\ &= \int_R \int (6 + 2) \, dA \\ &= 8 \int_R \int dA. \end{aligned}$$

Como a área de R é 140cm^2 , ou seja, $\int_R \int dA = 140$. Portanto, a taxa de escoamento do fluido para fora da região é 1120cm^2 por unidade de tempo.

Aplicação 2: Uma aplicação¹⁰ **em Física:** Momento de inércia

Seja Ω uma lâmina com densidade de massa constante λ na forma de uma região de Jordan (Figura 38) com fronteira C^{11} suave por partes. Mostraremos que os momentos de inércia da lâmina em torno dos eixos coordenados x e y são então dados por:

$$I_x = -\frac{\lambda}{3} \oint_C y^3 \, dx, \quad I_y = \frac{\lambda}{3} \oint_C x^3 \, dy.$$

Temos da definição de I_x :

$$I_x = \int_D \int y^2 \rho(x, y) \, dA = \int_D \int \lambda y^2 \, dA = \int_D \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx dy,$$

vetorial,

$$\text{fluxo de } F \text{ através de } C = \oint_C F \cdot N \, ds \tag{5.17}$$

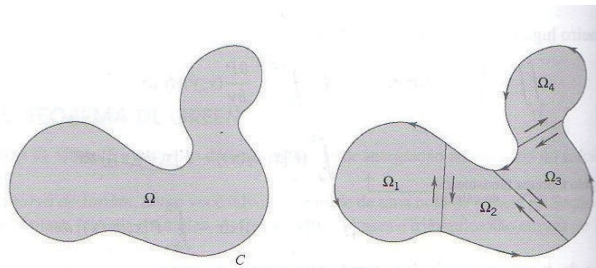
⁸ Questão elaborada e resolvida pelo graduando

⁹ **Teorema da Divergência de Gauss no Plano:** Sejam as funções M e N , a curva C e a região R idênticas àquelas que foram definidas no Teorema de Green. Se $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y) \mathbf{i} + N(x, y) \mathbf{j}$ e $N(s)$ for o vetor normal exterior unitário de C em P , onde s unidades é o comprimento do arco medido no sentido anti-horário de um ponto particular P_0 em C até P , então $\oint_C F \cdot N \, ds = \int_R \int \operatorname{div} F \, dA$

¹⁰ Questão resolvida pelo graduando, ver referência Salas (2005).

¹¹ Uma curva C que delimita uma região fechada Ω . Essa região é chamada uma região de Jordan. Em homenagem ao matemático francês Camille Jordan (1838-1922), curvas planas fechadas e simples são conhecidas como curvas de Jordan

Figura 38 – Região de Jordan. De acordo com Salas (2005, p. 408) a Figura 34 mostra um exemplo com $n=4$. A soma das integrais duplas sobre os Ω_i é a integral dupla sobre Ω e, como as integrais de linha ao longo dos cortes se cancelam, a soma das integrais ao longo das fronteiras de Ω_i é a integral de linha ao longo de C .



Fonte: (SALAS, 2005, p. 408).

onde:

$$P(x, y) = -\frac{\lambda y^3}{3} \quad e \quad Q(x, y) = 0.$$

Daí, pelo Teorema de Green:

$$I_x = \int_C -\frac{\lambda y^3}{3} dx + 0 dy = -\frac{\lambda}{3} \int_C y^3 dx.$$

Por outro lado, temos:

$$I_y = \int_D \int x^2 \rho(x, y) dA = \int_D \int \lambda x^2 dA = \int_D \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

onde:

$$Q(x, y) = \frac{\lambda x^3}{3} \quad e \quad P(x, y) = 0$$

Daí, pelo Teorema de Green:

$$I_y = \int_C \frac{\lambda x^3}{3} dy + 0 dx = \frac{\lambda}{3} \int_C x^3 dy.$$

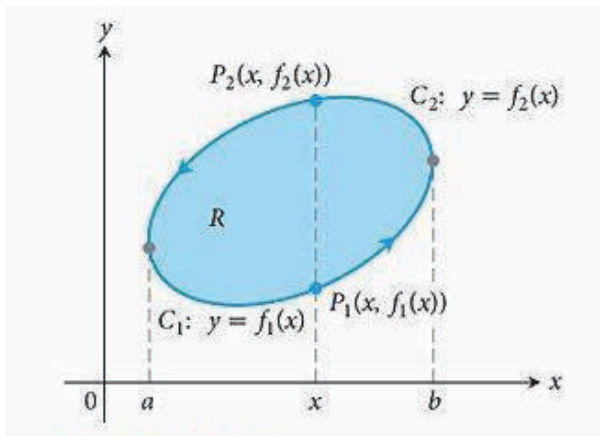
5.4 Prova do Teorema de Green para Regiões Especiais

Nesta seção, iremos inicialmente apresentar a prova para o Teorema de Green para Regiões Especiais. Apartir da leitura de Thomas (2009, p. 500) o qual afirma para C uma curva fechada simples e lisa no plano xy com a propriedade de que retas paralelas aos eixos não a cortam em mais que dois pontos. Seja R a região limitada por C e supondo que M , N e suas derivadas parciais de primeira ordem sejam contínuas em todos os pontos de

alguma região aberta que contenha C e R . Deseja-se provar a forma circulação-rotacional do Teorema de Green,

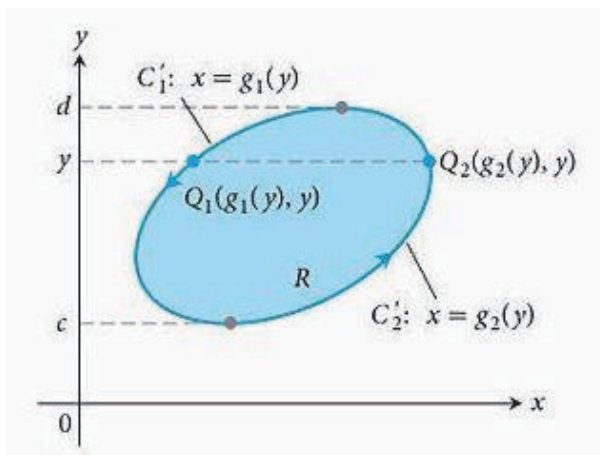
$$\oint_C M dx + N dy = \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \tag{5.18}$$

Figura 39 – A curva de fronteira C é formada por C_1 , o gráfico de $y = f_1(x)$ e C_2 , o gráfico de $y = f_2(x)$.



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 500).

Figura 40 – A curva de fronteira C é formada por C_1 , o gráfico de $x = g_1(y)$ e C_2 , $x = g_2(y)$.



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 501).

A Figura (39) mostra C formada por duas partes orientadas:

$$C_1 : y = f_1(x), \quad a \leq x \leq b, \quad C_2 : y = f_2(x), \quad b \geq x \geq a.$$

Para qualquer x entre a e b podemos integrar $\frac{\partial M}{\partial y}$ em relação a y de $y = f_1(x)$ a $y = f_2(x)$ e obter:

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy = [M(x, y)]_{f_1(x)}^{f_2(x)} = M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x)).$$

Podemos então integrar essa última em relação a x de a a b :

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))] dx \\ &= - \int_b^a M(x, f_2(x)) dx - \int_a^b M(x, f_1(x)) dx \\ &= - \int_{C_2} M dx - \int_{C_1} M dx \\ &= - \oint_C M dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\oint_C M dx = \int_R \int \left(-\frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \quad (5.19)$$

A equação (5.19) é metade do resultado de que precisamos para a equação (5.18).

Deduzimos a outra metade integrando $\frac{\partial N}{\partial x}$ primeiro em relação a x e depois em relação a y , como sugerido pela Figura (40). Isso mostra a curva C da Figura (39) decomposta em duas partes orientadas

$$C'_1 : x = g_1(y), \quad d \geq y \geq c; \quad C'_2 : x = g_2(y), \quad c \leq y \leq d.$$

O resultado dessa integração dupla é:

$$\oint_C N dy = \int_R \int \frac{\partial N}{\partial x} dx dy. \quad (5.20)$$

Combinando as equações (5.19) e (5.20) temos a equação (5.18). Isso conclui a prova.

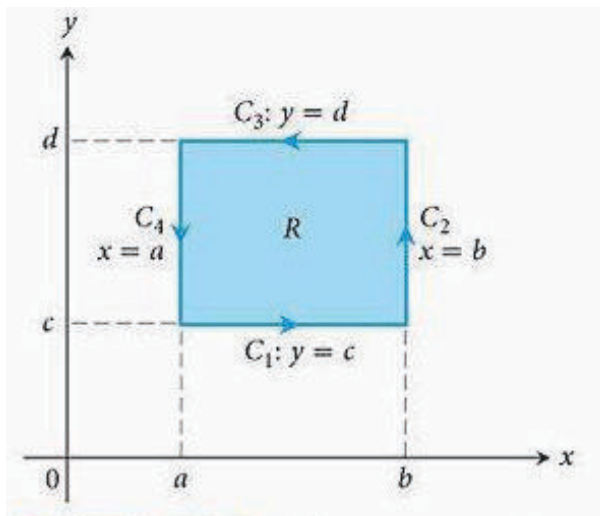
5.4.1 Estendendo a Prova para Outras Regiões

De acordo com Thomas (2009, p. 500) o argumento que acaba de ser apresentado não se aplica diretamente à região retangular na Figura (41) porque as retas $x=a$, $x=b$, $y=c$ e $y=d$ encontram com a fronteira dela em mais de dois pontos. Segundo o autor, se dividirmos a fronteira C em quatro segmentos de reta orientados:

$$\begin{aligned} C_1 : y = c, & \quad a \leq x \leq b, & C_2 : x = b, & \quad c \leq y \leq d \\ C_3 : y = d, & \quad b \leq x \leq a, & C_4 : x = a, & \quad d \leq y \leq c \end{aligned}$$

podemos modificar o argumento da maneira a seguir.

Figura 41 – Para provar o Teorema de Green para um retângulo, dividimos a fronteira em quatro segmentos de reta orientados.



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 501).

Procedendo como na prova da equação (5.20), temos

$$\begin{aligned}
 \int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x} dx dy &= \int_c^d (N(b, y) - N(a, y)) dy \\
 &= \int_c^d N(b, y) dy + \int_d^c N(a, y) dy \\
 &= \int_{C_2} N dy + \int_{C_4} N dy.
 \end{aligned}
 \tag{5.21}$$

Como \$y\$ é constante ao longo de \$C_1\$ e \$C_3\$, \$\int_{C_1} N dy = \int_{C_3} N dy = 0\$, assim podemos adicionar \$\int_{C_1} N dy = \int_{C_3} N dy\$ no lado direito da equação (5.21) sem alterar a igualdade.

Fazendo isso, temos

$$\int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x} dx dy = \oint_C N dy
 \tag{5.22}$$

De maneira similar¹², podemos mostrar que

$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial M}{\partial y} dy dx = - \oint_C M dx
 \tag{5.23}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \int_c^d \frac{\partial M}{\partial y} dy dx &= \int_a^b M(x, y) \Big|_c^d dx \\
 &= \int_a^b [M(x, d) - M(x, c)] dx
 \end{aligned}$$

¹² Demonstração feita pelo graduando com base na referência Thomas (2009, p. 501).

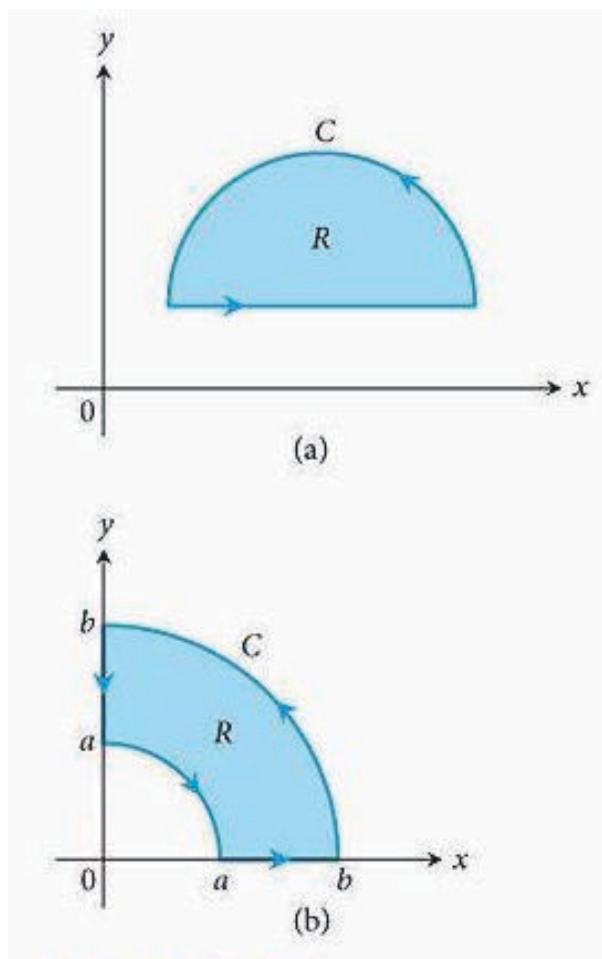
$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b M(x, d) dx - \int_a^b M(x, c) dx \\
 &= - \int_b^a M(x, d) dx - \int_a^b M(x, c) dx \\
 &= - \int_{C_3} M dx - \int_{C_1} M dx.
 \end{aligned}$$

Como a função x é constante nas curvas C_2 e C_4 , logo $\int_{C_2} M dx = \int_{C_4} M dx = 0$

Subtraindo a equação (5.23) da equação (5.22), novamente chegamos a

$$\oint_C M dx + N dy = \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$

Figura 42 – Outras regiões as quais o Teorema de Green se aplica.

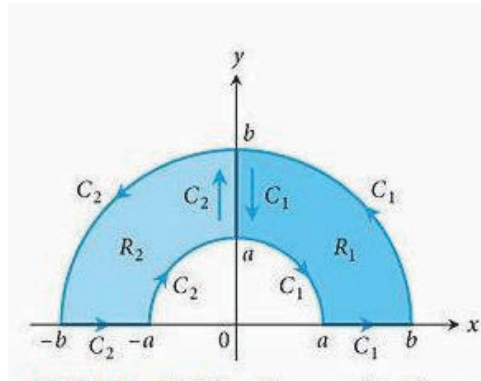


Fonte: (THOMAS, 2009, p. 502).

Regiões como aquelas da Figura (42) podem ser trabalhadas sem maiores dificuldades.

A equação (5.18) ainda se aplica. Também se aplica a região R em forma de ferradura mostrada na Figura (43), como vemos ao juntar as regiões R_1 e R_2 e suas

Figura 43 – Uma região R que é formada por regiões R_1 e R_2 .



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 502).

fronteiras. O Teorema de Green se aplica a C_1, R_1 e C_2, R_2 resultando em

$$\int_{C_1} M dx + N dy = \int_{R_1} \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\int_{C_2} M dx + N dy = \int_{R_2} \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$

Quando somamos ambos os lados dessas duas equações, a integral de linha ao longo do eixo y de b a a para C_1 cancela a integral sobre o mesmo segmento, mas em sentido oposto para C_2 . Assim,

$$\oint_C M dx + N dy = \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy,$$

onde C consiste nos dois segmentos do eixo x de $-b$ a $-a$ e de a a b e nas duas semicircunferências e onde R é a região dentro de C .

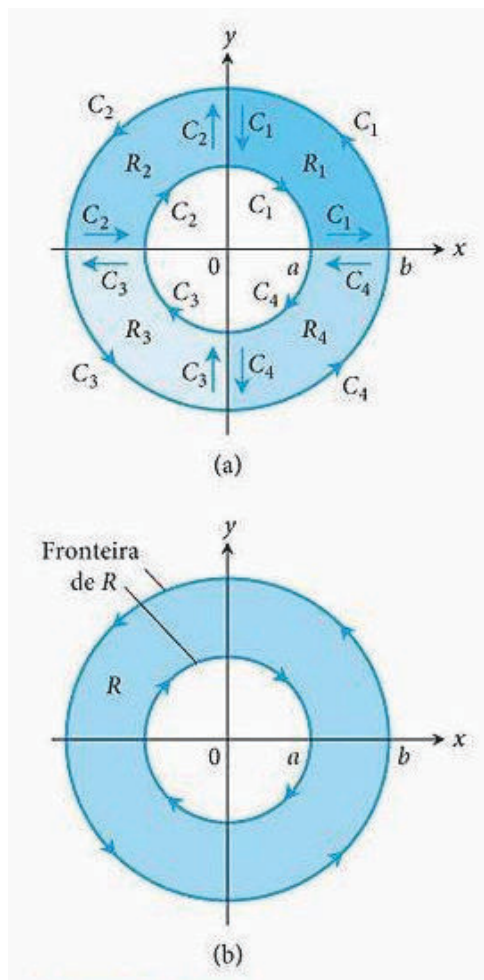
O artifício de somar integrais de linha sobre fronteiras separadas para construir uma integral sobre uma fronteira única pode ser estendido para qualquer número finito de sub-regiões. Na Figura (44a), seja C_1 a fronteira, orientada no sentido anti-horário, da região R_1 no primeiro quadrante. De maneira similar, para os outros três quadrantes, C_i é a fronteira da região $R_i, i = 1, 2, 3, 4$. Pelo Teorema de Green,

$$\oint_{C_i} M dx + N dy = \int_{R_i} \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \tag{5.24}$$

Somamos a equação (5.24) para $i = 1, 2, 3, 4$. Figura(44b).

$$\oint_{r=b} (M dx + N dy) + \oint_{r=a} (M dx + N dy) = \int_{\cup R_i} \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \tag{5.25}$$

Figura 44 – A região anular R é formada por quatro regiões menores. Em coordenadas polares, $r = a$ para a circunferência interior, $r = b$ para a circunferência exterior e $a \leq r \leq b$ para a região propriamente dita.



Fonte: (THOMAS, 2009, p. 503).

A equação (5.25) diz que a integral dupla de $\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)$ sobre a região anular R é igual a integral de linha de $M dx + N dy$ sobre a fronteira completa de R no sentido que mantém R à esquerda à medida que percorremos a curva (Figura 44b).

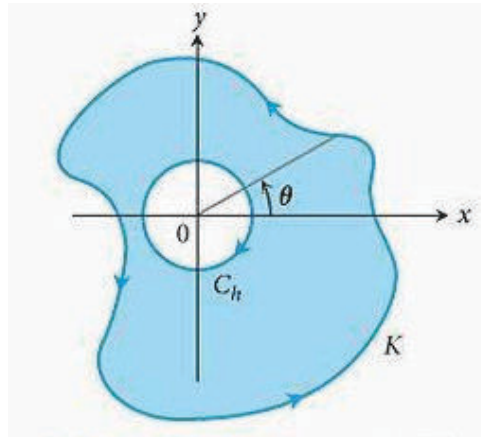
Exemplo 5.6. [Verificando o Teorema de Green para uma região anular]¹³ Verifique a forma tangencial do Teorema de Green (Equação 5.11) sobre a região anular

$$R : h^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq h \leq 1$$

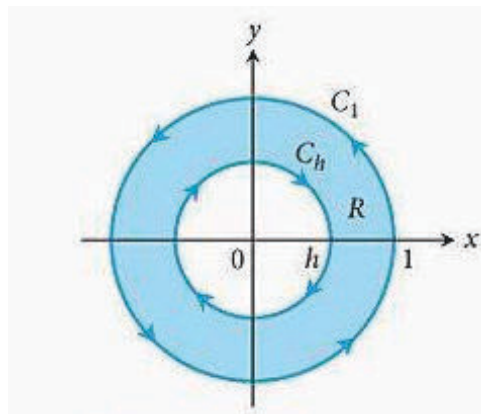
Figura (46) se

$$M = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad N = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

¹³ Compilado da referência (THOMAS, 2009).

Figura 45 – A região limitada pela circunferência C_n e pela curva K .

Fonte: (THOMAS, 2009, p. 504).

Figura 46 – O Teorema de Green pode ser aplicado à região anular R integrando-se ao longo das fronteiras como mostrado Exemplo(5.6).

Fonte: (THOMAS, 2009, p. 503).

Resolução: A fronteira de R consiste na circunferência

$$C_1 : \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

percorrida no sentido anti-horário à medida que t aumenta, e a circunferência

$$C_h : \quad x = h \cos \theta, \quad y = -h \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

percorrida no sentido horário à medida que θ aumenta. As funções M e N e suas derivadas parciais são contínuas em R . Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{(x^2 + y^2)(-1) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}, \end{aligned}$$

assim,

$$\int \int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \int \int_R 0 dx dy = 0.$$

A integral de $M dx + N dy$ sobre a fronteira de R^{14} é:

$$\begin{aligned} \int_C M dx + N dy &= \oint_{C_1} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} + \oint_{C_h} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt - \int_0^{2\pi} \frac{h^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{h^2} d\theta \\ &= 2\pi - 2\pi = 0. \end{aligned}$$

Segundo Thomas (2009, p. 503), as funções M e N no exemplo (5.6) são descontínuas em $(0, 0)$, assim, não podemos aplicar o Teorema de Green à circunferência C_1 e à região dentro dela.

Devemos excluir a origem. Fazemos isso excluindo os pontos dentro de C_h .

Poderíamos substituir a circunferência C_1 no exemplo (5.6) por uma elipse ou qualquer outra curva fechada simples K que cerque C_h (Figura 45). O resultado ainda seria:

$$\oint_K (M dx + N dy) + \oint_{C_h} (M dx + N dy) = \int \int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy dx = 0,$$

o que leva à conclusão surpreendente de que:

$$\oint_K (M dx + N dy) = 2\pi.$$

para qualquer curva K desse tipo. Podemos explicar esse resultado mudando para coordenadas polares. Com

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, \\ dx &= -r \sin \theta d\theta + \cos \theta dr, & dy &= r \cos \theta d\theta + \sin \theta dr. \end{aligned}$$

temos:

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta}{r^2} = d\theta.$$

e, θ aumenta em 2π à medida que percorremos K uma vez no sentido anti-horário.

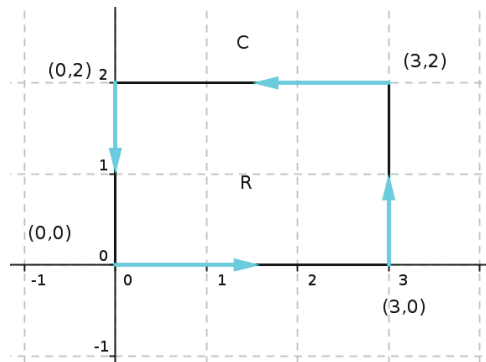
Exemplo 5.7. Calcular a integral curvilínea

$$\oint_C \left[(y^2 + \sqrt{4 - x^2}) dx + (\ln y - 4x) dy \right]$$

usando o Teorema de Green ao longo do retângulo de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$ e $(0, 2)$, no sentido anti-horário.

¹⁴ **Comentário do graduando com base no aporte teórico:** Essa região é fechada, limitada, cuja fronteira é formada por duas curvas fechadas, simples, disjuntas, ou seja uma região possível para o Teorema de Green.

Figura 47 – Região retangular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução:¹⁵ A Figura (47) mostra o caminho C de integração e a região R delimitada por C .

Como R é dada por:

$$0 \leq x \leq 3 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 2,$$

C está orientada positivamente.

Usando o Teorema de Green, temos:

$$\begin{aligned} \oint_C \left[(y^2 + \sqrt{4-x^2}) dx + (\ln y - 4x) dy \right] &= \iint_R (-4 - 2y) dy dx \\ &= \int_0^3 \left[\int_0^2 (-4 - 2y) dy \right] dx \\ &= \int_0^3 \left(-4y - \frac{2y^2}{2} \right) \Big|_0^2 dx \\ &= \int_0^3 [(-8 - 4) - (0)] dx \\ &= -12x \Big|_0^3 \\ &= -36. \end{aligned}$$

Observações:¹⁶

Observamos que nesse exemplo, uma região como um retângulo pode ser uma região para o Teorema de Green, pois a região cumpre as condições de existência para seu emprego. Temos que, essa região é fechada, limitada, cuja fronteira ou bordo é composta por uma curva fechada simples, regular por partes, uma vez que possui quatro cantos onde perde a regularidade, ou seja, onde deixa de ter a reta tangente, é regular por partes, dispõe de curvas disjuntas e também da orientação positiva. Então, podemos concluir que

¹⁵ Questão resolvida pelo graduando, ver referência Gonçalves e Flemming (2007, p. 353)

¹⁶ Comentários feitos pelo graduando com base no aporte teórico.

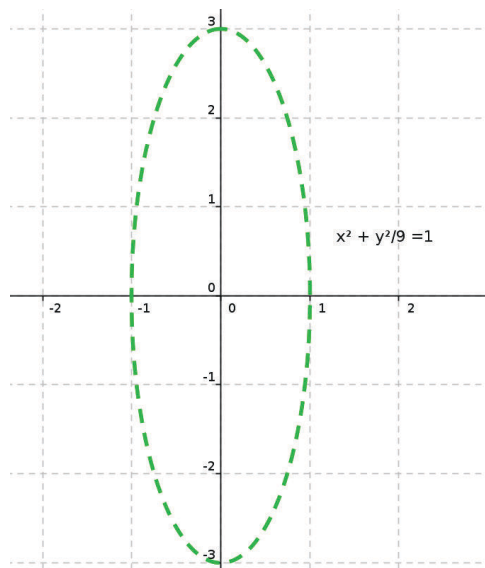
essa região é típica do Teorema de Green. Para calcular a integral curvilínea diretamente teríamos de dividir a curva C em 4 partes suaves, calculando a integral sobre cada parte. Perceba, nesse exemplo, que a integral de linha do campo vetorial sobre a curva não é tão simples de calcular. Mas, por definição, sabemos que a integral de $P dx + Q dy$ sobre a curva é a integral dupla da componente do rotacional sobre o interior da curva, ou seja, $\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \int \int_C \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{K} dA$. Em outras palavras, a integral de linha do bordo é igual a integral do rot no interior. Percebemos que a utilização do Teorema de Green, na verdade, sintetizou os cálculos.

Exemplo 5.8. Calcular a integral curvilínea

$$\oint_C [(\ln x - 2y) dx + (2x + e^y) dy],$$

usando o Teorema de Green ao longo da elipse $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ no sentido horário.

Figura 48 – Representação da elipse $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ no plano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução:¹⁷

Queremos calcular a integral de linha do tipo trabalho campo vetorial, escrita com a notação em coordenadas

$$\int_C P dx + Q dy.$$

A integral $\int_C P dx + Q dy$ sobre a curva é a integral da componente do rotacional sobre o interior da curva, ou seja,

$$\int_C P dx + Q dy = \int \int_C \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA,$$

¹⁷ Questão resolvida pelo graduando, ver referência Gonçalves e Flemming (2007, p. 353).

equivalentemente, temos:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \int \int_C \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} dA$$

Sendo a curva C a elipse $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ percorrida no sentido horário,

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= (2 - (-2)) \vec{k} \\ &= 4\vec{k} \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C &= \int \int_C \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} \\ \int_C \vec{F} d\vec{r} &= - \int \int_C 4 dA \\ &= -4 \int \int_C dA \\ &= -4\pi \cdot a \cdot b \\ &= -4 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 3 \\ &= -12\pi. \end{aligned}$$

Observações:¹⁸

Com respeito a esse exemplo, percebemos que o enunciado nos fornece uma integral de linha curvilínea do tipo trabalho campo vetorial escrita também com a notação em coordenadas $\int_C P dx + Q dy$.

Queremos calcular a integral de linha do campo sobre a curva C , sendo C a elipse $C : x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ percorrida no sentido horário. A elipse é uma região típica do Teorema de Green. Notem que é uma região que atende todas as suas características.

É interessante valermos que estamos trabalhando com integral do tipo trabalho, para isso dispomos saber se o campo é conservativo ou não. Se o campo é conservativo a integral de linha vai dar zero, $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Ocorre que, é calculando o rotacional do campo que antevimos se o campo é conservativo ou não. Daí, calculando as derivadas parciais das componentes de

$$\oint_C [(\ln x - 2y) dx + (2x + e^y)] dy$$

para a obtenção do $\text{rot } \vec{F}$.

Obtivemos $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2$ e $\frac{\partial P}{\partial y} = -2$. Que aplicados na expressão que define o rotacional de um campo, gera o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= (2 - (-2)) \vec{k} \\ &= 4\vec{k} \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

¹⁸ Comentários feito pelo graduando com base no aporte teórico.

Isso nos mostra que o campo não é conservativo. Há através da parametrização da curva ou por meio das coordenadas polares como calcular a integral, mas nota-se que esses métodos são inviáveis. Uma outra possibilidade seria o Teorema de Green que permite trocar a integral de linha por integral dupla do rot. No Teorema de Green eu só tenho uma componente de bordo, a externa; no Teorema de Green tem que ser no sentido anti-horário.

A região de integração é o interior dessa elipse. Então, esta integral no sentido anti-horário, é a integral dupla no interior dessa elipse da componente do $\text{rot}\vec{F}.\vec{k}$.

Portanto,

$$\int_C = \int \int_C \text{rot}\vec{F}.\vec{k}^{19} \quad (5.26)$$

A integral que desejamos é a $\int_C \vec{F}d\vec{r}$ sobre a elipse no sentido horário. Então, a integral que desejamos é

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}d\vec{r} &= - \int \int_C 4 dA \\ &= -4 \int \int_C dA \\ &= -4\pi.a.b \\ &= -4.\pi.1.3 \\ &= -12\pi. \end{aligned}$$

¹⁹ A integral de linha sobre a curva C da elipse no sentido anti-horário é igual a integral dupla do produto escalar $\text{rot}\vec{F}.\vec{k}$ sobre a região interna delimitada por C .

Considerações Finais

No decorrer deste estudo, foi verificada a importante contribuição do Teorema de Green para facilitar o cálculo de áreas de regiões limitadas por uma curva seccionalmente suave, simples e fechada. Para ampliarmos essa perspectiva de cálculo de área, tratando-a via Teorema de Green, como ferramenta indispensável nas áreas da Engenharia, Geologia e em particular na área da Física. Para tanto, recorreremos da fundamentação o aporte teórico apresentados que serve-nos de estímulo para compreender, a relação Cálculo Vetorial e Teorema de Green no cálculo de áreas de regiões planas e integrais curvilíneas.

Sabemos da Geometria Plana, os inúmeros polígonos basicamente conhecidos nossos, de natureza regular, a exemplo do quadrado. No entanto, existem outras áreas de figuras geométricas planas difíceis de calcular, que possuem suas unidades de superfície bastante irregulares, o que em via de regra, são pouco explorados. Nesse sentido, após um planejamento e organização adotamos uma metodologia para o estudo de um modelo matemático, direcionado para um tratamento físico. A modelagem desse fenômeno em específico, o Fluxo de campo de velocidade através de uma região foi feita da seguinte forma: através da simples observação de uma região no espaço $2 - D$, limitada por uma curva em certo intervalo, conseguimos informações sobre como calcular a área dessa região, via Teorema de Green (que do ponto de vista matemático estão relacionadas derivadas e integrais), escreve-se a equação $A = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx$; e, a partir da solução desta equação tem-se uma possível área da região para descrever o fenômeno do Fluxo do campo velocidade através dessa região fornecida pela equação $\Phi = vA \cos \theta = v \cdot A$.

Tais observações são implicações derivadas do cálculo de área associadas as integrais curvilíneas da curva que delimita essa região. Durante o corpus do trabalho, utilizamos o teorema que é consequência do Teorema de Green justificando, sem maiores preocupações a sua veracidade em inúmeros casos. Vale salientar a importância do componente rotacional para o estudo de integrais de linha de campo vetorial e Teorema de Green. Por meio dele é possível sabermos se o campo é conservativo ou não. Por meio do rot é muito mais simples calcular a integral de um campo. O Teorema de Green permite a troca de uma integral do tipo trabalho por uma integral dupla do componente do rotacional. E se a integral dupla do componente do rot for simples, a integral dupla é simples. Então, podemos notar que se utilizarmos o Teorema de Green de maneira adequada podemos tornar os cálculos de integrais de linha bem mais simplificados. Vale ressaltar também a nossa metodologia de estudo, a modelagem matemática via Teorema de Green, teve um papel de enorme destaque nesse trabalho, visto que tal técnica utilizada forneceu uma linguagem matemática para a compreensão do fenômeno físico, levando-nos a aquisição de novos conhecimentos matemáticos com extensão para a pesquisa e exploração.

Referências

- ANTON, H. *Cálculo: um novo horizonte*. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 21, 25 e 37.
- BRAGA, A. de S. Teorema de green e aplicação. 2005. Disponível em: <<https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/AlcimardeSouzaBraga.pdf>> Citado na página 15.
- BUFFONI, S. Três homens e dois teoremas. cálculo vetorial aplicado. Universidade Federal Fluminense (UFF). 2003. Disponível em: <<http://www.professores.uff.br/salete/trabalu/HistoriaMat.pdf>>. Citado na página 15.
- GONÇALVES, M.; FLEMMING, D. *Calculo B: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície*. 2. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 35, 79 e 80.
- LEITHOLD, L. *Calculo com geometria analitica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. Citado 11 vezes nas páginas 36, 37, 39, 46, 49, 51, 53, 57, 58, 64 e 68.
- RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K. *Fisica 2*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 68.
- SALAS, S. L. *Cálculo*. Rio de Janeiro: LTC, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.
- STEWART, J. *Cálculo*. 6. ed. São Paulo: Editora Pioneira, 2001. (Mathematics Series, v. 2). Citado 6 vezes nas páginas 21, 22, 23, 24, 25 e 39.
- THOMAS, G. *Cálculo*. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. Citado 35 vezes nas páginas 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 55, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77 e 78.