



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS-CCEA
CAMPUS VII- GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
LICENCIATURA EM CIÊNCIAS EXATAS**

**CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE REINCIDÊNCIA DO NEUTRINO
ELETRÔNICO SOLAR**

MARIA JOSÉ DE BRITO ROCHA

**PATOS – PB
2012**

MARIA JOSÉ DE BRITO ROCHA

**CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE REINCIDÊNCIA DO NEUTRINO
ELETRÔNICO SOLAR**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Ciências Exatas da Universidade Estadual da Paraíba-UEPB, em cumprimento às exigências como requisito para a obtenção do título de Graduada em Licenciatura em Ciências Exatas com habilitação específica em Física.

ORIENTADOR: Msc. EVERTON CAVALCANTE

**PATOS – PB
2012**

R672c ROCHA, Maria José de Brito.

Cálculo da probabilidade de reincidência do neutrino
eletrônico solar / Maria José de Brito Rocha.

Patos: UEPB. 2012.

46f

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso -
(TCC) - Universidade Estadual da Paraíba).

Orientador: Prof. Msc. Everton Cavalcante

1. Física 2. Mecânica quântica

I. Título II. Cavalcante, Everton.

CDD 530.12

MARIA JOSÉ DE BRITO ROCHA

**CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE REINCIDÊNCIA DO NEUTRINO
ELETRÔNICO SOLAR**

Monografia Aprovada em 26/06/2012

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Ciências Exatas com habilitação específica em Física da Universidade Estadual da Paraíba-UEPB, em cumprimento às exigências como requisito para a obtenção do título de Graduado em Licenciatura em Ciências Exatas com habilitação em Física.

Banca Examinadora



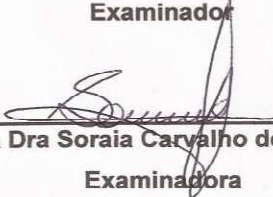
Professor Msc. Everton Cavalcante / UEPB

Orientador



Professor Dr. Marcelo da Silva Vieira / UEPB

Examinador



Professora Dra Soraia Carvalho de Souza / UEPB

Examinadora

PATOS – PB
2012

DEDICATÓRIA

*Dedico a Deus, pois sem a presença dele na minha vida não sou nada.
E a minha família, pois me permitiram lutar pelos meus ideais e sempre me mostraram o caminho da honestidade.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que esteve junto a mim vivenciando as minhas dificuldades e ouvindo meus apelos, sinto que sem a fé em Deus seria impossível vencer este desafio. **Obrigada senhor!**

Agradeço a toda minha família que contribuíram da forma que puderam dando apoio moral e financeiro, me possibilitando o deslocamento para a cidade de Patos-PB, em especial a meu avô Marinho Ferreira de Brito que sempre esteve ao meu lado dando todo apoio que precisei. **Vocês são essenciais na minha vida.**

Sou muito grata ao meu namorado Luiz Rufino de França Filho que me recebeu nesta cidade e sempre esteve ao meu lado em todos os momentos, sempre paciente e companheiro.

Não poderia de forma alguma deixar de agradecer aos meus colegas da turma de ciências exatas que estiveram comigo durante estes quatro anos e meio, em especial a Joel Oliveira, onde vivenciamos muitas tardes e finais de semana de estudos e Alan Cabral que nos fez rir o tempo todo. Todos os colegas desta turma me incentivaram para obtenção desta vitória, sou ainda mais feliz por ter pessoas como vocês na minha vida. Neste tempo vivenciamos muitos momentos de felicidades que jamais serão esquecidos.

Agradeço ao professor Everton Cavalcante pela paciência e excelentes orientações, fundamental na minha formação e na realização deste trabalho.

A todos os professores que tive até hoje, pois ao longo da minha formação contribuíram de forma decisiva para o meu crescimento, proporcionando este momento. **Sou muito grata por todos vocês.**

Sou muito grata à coordenação do curso de ciências Exatas: Professor Dr. Pedro Carlos de Assis Junior e Aninha exemplos de paciência e perseverança, na luta para o crescimento do campus VII da UEPB.

Também não poderia deixar de agradecer a todos os meus amigos e amigas que fazem parte da minha vida e me ergue sempre nos momentos de desânimos.

Enfim, a todos que contribuíram direto ou indiretamente para minha formação e conclusão deste trabalho, deixo minha profunda gratidão.

*Nada é pequeno demais para saber, e
nada é grande demais para tentar.*
(William Van Horne)

RESUMO

Na mecânica quântica não calculamos a posição exata de uma partícula como acontece na mecânica clássica, apenas calculamos a probabilidade da partícula ser encontrada em determinada região, para solucionar estes problemas da física de partícula foi construído o Modelo Padrão (MP), onde os neutrinos não teriam massa. Neste trabalho iremos mostrar como a proposta da oscilação de neutrinos conseguiu sanar o, até então, paradoxo dos neutrinos solares desaparecidos, não verificados pelo modelo solar padrão (MSP), conhecido como o problema do neutrino solar. Tais partículas até então não massivas surgem como incógnita da física moderna. Através de resultados experimentais, foi provado que o neutrino é convertido sucessivamente entre os três sabores possíveis: neutrino do elétron (ν_e), neutrino do múon (ν_μ) e o neutrino do tau (ν_τ). Por ser mais simples na realização dos cálculos, consideramos apenas a mistura entre dois autoestados de sabor, o neutrino eletrônico (ν_e) e outro qualquer (ν_α) e veremos que tal oscilação exige uma massa não nula, havendo apenas a probabilidade de aproximadamente 50% de um neutrino do tipo eletrônico “sobreviver” no detector em seu trajeto até a Terra, tendo a mesma probabilidade para oscilar para o outro sabor.

Palavras chaves: Neutrinos solares, Mistura de sabor e Modelo solar padrão.

ABSTRACT

In quantum mechanics we do not calculate the exact position of a particle as in classical mechanics, we just calculate the probability of the particle is found in a given region, to solve these problems of particle physics has been built to the Standard Model (SM), where the neutrinos do not would have mass. In this work we show how the proposed neutrino oscillation could remedy the, until then, the paradox of the missing solar neutrinos, not verified by the standard solar model (MSP), known as the solar neutrino problem. Such particles hitherto unknown massive emerge as modern physics. Through experimental results has been proven that the neutrino is converted between the three possible flavors: the electron neutrino (ν_e), the muon neutrino (ν_μ) and the tau neutrino (ν_τ). Because it is simpler in performing the calculations, we consider only the mixing of two flavor eigenstates, the electron neutrino (ν) and any other ($\nu\alpha$) and we will see that this oscillation requires a nonzero mass, with only the probability of about 50 % of an electron neutrino type "survive" in the detector on your path to Earth, having the same probability to oscillate to another flavor.

Keywords: Solar Neutrinos. Flavormixture. Model solar pattern.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: O gráfico mostra a discordância entre a teoria clássica e os resultados experimentais	11
Figura 2. O gráfico mostra as curvas de radiação emitidas por um corpo negro em diferentes temperaturas.....	12
Figura 3. A figura representa a emissão fotoelétrica	13
Figura 4. Esquema do experimento com de fenda dupla com ondas.....	14
Figura 5: esquema do experimento com de fenda dupla com elétrons sendo observados com fótons	15
Figura 6. A figura mostra o espalhamento Compton	16
Figura 7. Interior do detector de neutrinos (Super-kamiokande)	24

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
2 CONCEITOS BÁSICOS DE MECÂNICA QUÂNTICA	11
2.1 As Origens Históricas da Mecânica Quântica	11
2.2 A Equação de Schrödinger e a interpretação de Copenhague	17
2.3 Formalismo vetorial na Mecânica Quântica	20
3 OSCILAÇÃO DE NEUTRINOS	22
3.1 O problema dos neutrinos solares	22
4 MODELO DE OSCILAÇÃO	27
4.1 Um modelo de oscilação bidimensional	27
4.2 Probabilidades de transição	31
5 CONCLUSÃO	33
6 REFERÊNCIAS	35
APÊNDICE	36

1 INTRODUÇÃO

Na teoria clássica conhecemos com exatidão as posições e velocidades de todas as partículas de um sistema utilizando das leis de Newton. Por outro lado, na mecânica quântica o comportamento da natureza é intrinsecamente indeterminado, mesmo para sistemas simples como a partícula livre. Não é possível conhecer com exatidão o resultado que será obtido na medida de um observável qualquer. Conhecemos apenas as probabilidades de em determinada experiência ocorrer em cada um dos possíveis valores do observável.

Os experimentos e o nosso conhecimento sobre Física de neutrinos sofreram avanços significativos nos últimos anos. Foram realizados vários experimentos e todos não obtinham resultados esperados. Em 2000 com a colaboração do Super-Kamiokande foram observadas fortes evidências na oscilação de neutrinos atmosféricos. Outro problema era observado no Sol, percebia-se um déficit de eventos de neutrinos eletrônicos em relação ao que se esperava por modelos teóricos, chamado problema do neutrino solar, assim como no caso atmosférico com o déficit de neutrinos muônicos, chamado problema do neutrino atmosférico.

Hoje se sabe por diversos resultados experimentais que os neutrinos são partículas massivas. Além disso, os neutrinos são criados e detectados como uma mistura de autoestados de massa e, portanto durante a sua evolução, podem trocar de sabor, solucionando o problema do fenômeno conhecido como oscilação de neutrinos.

Neste trabalho monográfico em seu primeiro capítulo serão apresentados alguns conceitos fundamentais da teoria quântica, como a radiação do corpo negro, o efeito fotoelétrico, a dualidade onda-partícula de De Broglie e a equação de Schrödinger independente do tempo, e tem a finalidade de introduzir os conceitos básicos da teoria quântica, dando apoio ao estudo da oscilação dos neutrinos, em específico o neutrino do elétron.

No segundo capítulo será apresentada a evolução da teoria da oscilação dos neutrinos, que partiu de uma hipótese que o neutrino não possuía massa, após os estudos experimentais foi provado que só há oscilação com a existência massa.

E no terceiro capítulo o desenvolvimento dos cálculos probabilísticos, apresentando as soluções do problema da oscilação do neutrino solar entre dois

sabores, onde há a probabilidade do neutrino permanecer no sabor inicial como também oscilar para outro sabor.

Em fim, concluímos que a probabilidade de “sobrevivência” do neutrino durante o seu trajeto é $\cong 50\%$, a mesma probabilidade deste oscilar para outro sabor.

2 CONCEITOS BÁSICOS DE MECÂNICA QUÂNTICA

2.1 As Origens Históricas da Mecânica Quântica

No final do século XIX a Física constituía-se basicamente da mecânica clássica, termodinâmica e eletromagnetismo, mas no final deste século surgiram novos desafios. Verificou-se que a teoria clássica não seria válida para explicar fenômenos realizados com partículas microscópicas e velocidades próximas a velocidade da luz. A mecânica quântica teve início no século XX, sendo a base de diversos ramos da física, como física de partículas, física da matéria condensada, e até mesmo partes da cosmologia.

Foi o estudo da radiação térmica emitida por corpos opacos que forneceu os primeiros indícios da natureza quântica da radiação. Quando a radiação incide em um corpo opaco parte é refletida e parte é absorvida. Os corpos de radiação clara refletem a maior parte da radiação visível incidente enquanto os corpos escuros absorvem a maior parte da radiação. A radiação absorvida pelo corpo aumenta a energia cinética dos átomos que os constituem, fazendo-os oscilar mais vigorosamente em torno da posição de equilíbrio [1]. Um corpo que absorve e emite toda a radiação incidente é chamado de corpo negro ideal.

O problema abordado por Planck era explicar a discordância entre os resultados da teoria clássica e os resultados experimentais como aborda na (figura 1), observamos que à medida que a frequência aumenta o resultado teórico tende ao infinito e o resultado experimental tende a zero, este problema ficou conhecido como a catástrofe ultravioleta.



Figura 1: O gráfico mostra a discordância entre a teoria clássica e os resultados experimentais (catástrofe ultravioleta) [2].

A anomalia observada no espectro da radiação térmica (catástrofe ultravioleta), no qual o máximo do espectro correspondente a frequência $\nu_{\text{máx}}$, se desloca com o aumento da temperatura T e os comprimentos de ondas $\lambda_{\text{máx}}$ correspondentes aos valores máximos de radiância $R_{\lambda}(\lambda)$ que diminuem com o aumento da temperatura T como observado na (figura 2).

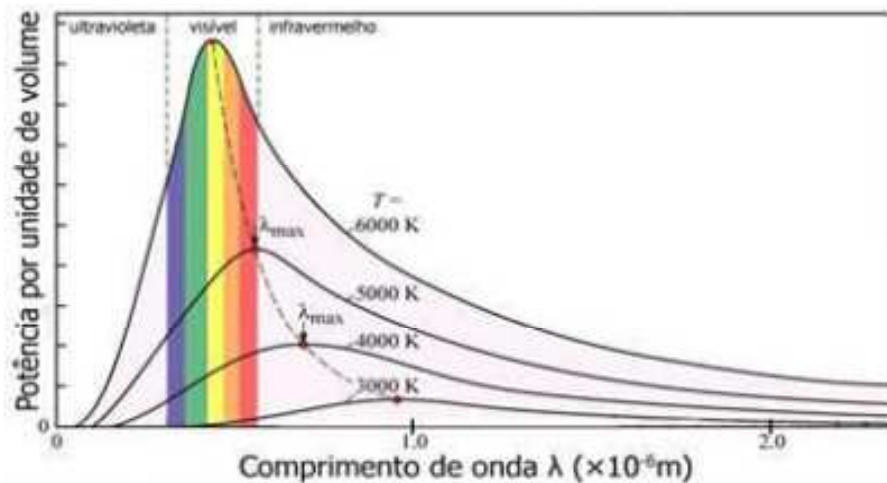


Figura 2. O gráfico mostra as curvas de radiação emitidas por um corpo negro em diferentes temperaturas [2].

A ideia de Planck era que a radiação em uma cavidade deve estar em equilíbrio térmico com moléculas que emitem e absorvem essa radiação. Ele imaginou que seria possível chegar à distribuição do espectro do corpo negro estudando esta situação de equilíbrio e usando as equações do eletromagnetismo. Porém só conseguiu solucionar o problema tomando a energia discreta, que são pacotes de energia, e esta dependendo da frequência:

$$E = hf \quad (1)$$

Observamos que h é a constante de Planck. Em 1887 Hertz que detectou as ondas eletromagnéticas e também observou pela primeira vez o efeito fotoelétrico quando realizava um experimento, onde um cátodo (emissor de cargas negativas) e um ânodo (receptor de cargas negativas) são mantidos a uma diferença de potencial. Quando a luz ultravioleta atinge o cátodo, observa-se um fluxo de corrente elétrica através do ânodo. Mas este não conseguia ser explicado pela teoria das ondas eletromagnéticas de Maxwell.

Foi então usando a proposta de Planck que Einstein considerou que era necessário granular (quantizar) também a radiação. A comunidade científica levou mais de 10 anos para reconhecer a validade de seu trabalho. Em 1921 Einstein recebeu o prêmio Nobel de Física pelas suas contribuições à Física Teórica, em particular por seu trabalho sobre o efeito fotoelétrico. O efeito fotoelétrico consiste na emissão de fótons, que são pacotes de luz em movimento sob a influência de uma dada radiação, quando esses fótons penetram na superfície metálica, cedem energia a esta superfície metálica fazendo ejetar fotoelétrons para fora do metal, como podemos visualizar na figura 3.

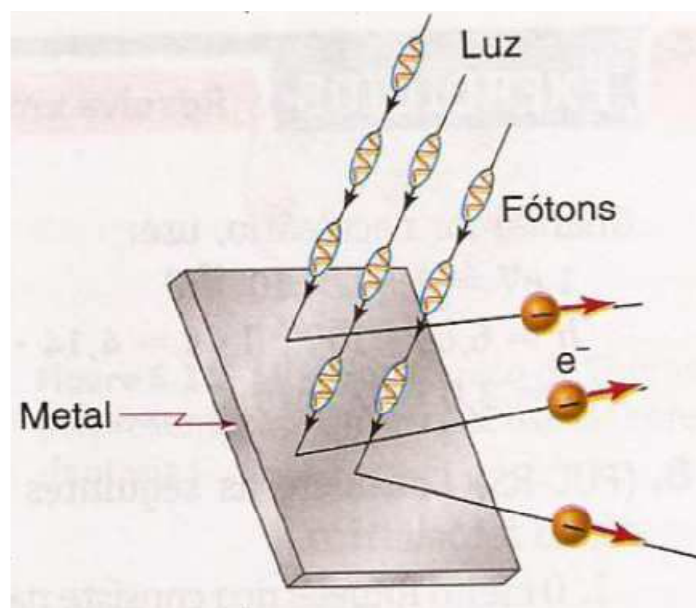


Figura 3. A figura representa a emissão fotoelétrica [3].

A experiência mostra que a energia dos elétrons expulsos depende da frequência da radiação excitadora e não da intensidade incidente, como previa a teoria clássica, onde poderia ser qualquer frequência de radiação incidente, desde que a intensidade fosse suficiente para ejetar os elétrons.

Este problema foi explicado com o auxílio de uma equação análoga à relação de Planck, porém com uma nova interpretação. A radiação só poderia ser emitida e absorvida pela matéria através de quantidades bem definidas de energia $h\nu$, e a própria luz seria constituída por esses “quanta de energia”. Se um determinado elétron absorver energia sob esta forma, ele deverá abandonar a matéria dispersando um trabalho w , sendo sua energia cinética final [4] igual a:

$$E = h\nu - w \quad (2)$$

Em 1927, Germer e Davisson obtiveram evidências experimentais da teoria de De Broglie, partindo do princípio experimental da radiação eletromagnética, realizado por Thomas Young. O experimento da radiação eletromagnética consistiu em fazer com que raios de luz monocromática incidam através de duas fendas próximas para que, depois de passar pelas fendas, sofram interferência, que pode ocorrer de maneira construtiva (franjas claras) e destrutiva (franjas escuras). O resultado é um padrão de linhas paralelas com intensidade que diminui à medida que as linhas se afastam do centro [5].

Os experimentos que evidenciaram a natureza ondulatória do elétron tinham a mesma montagem, no entanto, em vez de se usar um feixe de luz, usou-se um feixe de elétrons para incidir nas duas fendas como podemos observar na (figura 4).

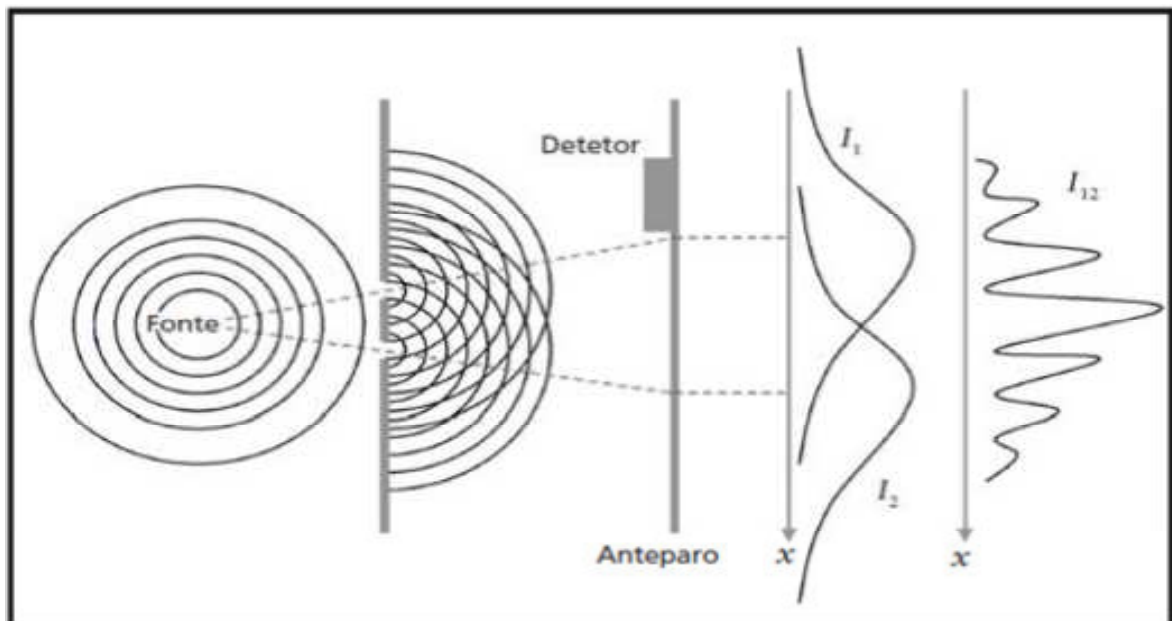


Figura 4. Esquema do experimento com de fenda dupla com ondas [5].

As intensidades I_1 e I_2 corresponde a situação em que apenas os buracos 1 ou 2 estão abertos, respectivamente. Já a situação I_{12} corresponde à situação em que as duas fendas estão abertas, simultaneamente.

O resultado observado com a incidência dos elétrons foi exatamente igual ao resultado obtido com a incidência de radiação eletromagnética, isto é, foram obtidos os mesmos padrões de interferência, evidenciando o comportamento de onda associado ao elétron (figura 5), como havia previsto De Broglie alguns anos antes.

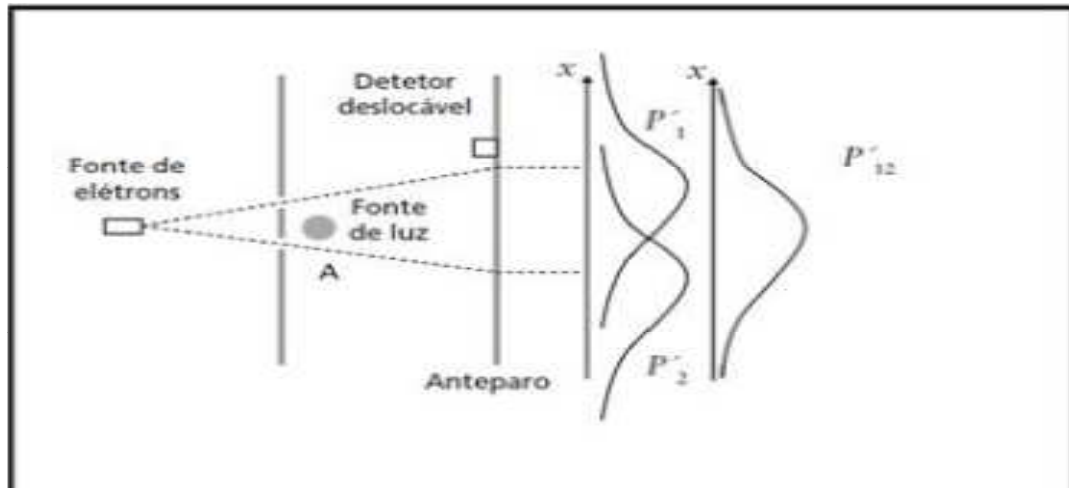


Figura 5: esquema do experimento com de fenda dupla com elétrons sendo observados com fótons [5].

As possibilidades P'_1 e P'_2 correspondem às situações nas quais apenas as fendas 1 ou 2 estão abertas, respectivamente. Já a probabilidade P'_{12} corresponde à situação em que as duas fendas estão abertas, simultaneamente.

No experimento de Young, para que aconteça a passagem pela dupla fenda, a onda deve atravessar as duas fendas simultaneamente. No caso dos elétrons, essa interpretação também tem que ser válida, ou seja, o elétron, mesmo sendo uma partícula, atravessa ambas as fendas ao mesmo tempo, comportando-se como uma onda.

Em 1923 a natureza corpuscular da radiação também foi comprovada por Compton, observando variações de comprimento de onda da radiação resultantes do espalhamento de elétrons. Ele observou que se o processo de difração fosse considerado uma “colisão” entre um fóton de energia hf_1 e um elétron, o elétron absorveria parte da energia inicial e, portanto a energia hf_2 do fóton difratado seria menor do que a do fóton incidente [1].

Para explicar seus resultados experimentais Compton supôs que os raios X incidentes que são radiações eletromagnéticas, fossem formados por fótons de energia, Equação (1), os quais colidem com os elétrons livres causando um espalhamento de elétrons. Sobre a teoria ele comentou [4]:

De acordo com a teoria clássica, cada raio X afeta os elétrons na matéria atravessada e o espalhamento observado é devido aos efeitos combinados de todos os elétrons. Do ponto de vista da teoria quântica, podemos supor que qualquer quantum particular de raio X não é espalhado por todos os elétrons do irradiador mas gasta toda sua energia sobre elétrons particular.

Este elétron por sua vez, desviará o raio em alguma direção definida em certo ângulo com o feixe incidente. Este desvio da trajetória do quantum de radiação resulta em uma mudança de seu momentum como consequência, o elétron desviador recuará com um momentum igual à mudança de momentum dos raios-X. A energia do raio desviado será igual a do raio incidente menos a energia cinética de recuo do elétron espalhador. E como o raio desviado deve ser um quantum completo, a frequência será reduzida na mesma razão que sua energia. Assim na teoria quântica deveríamos esperar que o comprimento de onda dos raios X espalhados seja maior do que o dos raios incidentes.

As intensidades I dos raios X espalhados foram medidas como função dos comprimentos de onda para vários θ de espalhamentos. O feixe incidente consiste de um único comprimento de onda λ_0 , os raios X espalhados têm máximos de intensidade em dois comprimentos de onda. Tendo um dos comprimentos de onda, o próprio λ_0 incidente e o outro representado por λ_1 que é maior favorecendo o deslocamento Compton $\Delta\lambda$, pode-se verificar no apêndice B. A (figura 6) mostra que $\Delta\lambda$ depende do ângulo θ , onde observamos o raio X espalhado.



Figura 6. A figura mostra o espalhamento Compton [5].

Esta hipótese é satisfatória para entender os fenômenos de interferência e difração, neste caso a radiação se comporta como onda em algumas circunstâncias e como partícula em outras.

Inspirado nos trabalhos de Einstein que deu início aos estudos do comportamento ondulatório da luz, De Broglie propôs em sua tese de doutorado que

o dualismo onda-partícula, até então reconhecido apenas no caso das ondas eletromagnéticas, era também uma propriedade da matéria [1]. Ele próprio comentou:

Depois da Primeira Guerra Mundial, pensei muito a respeito da teoria dos quanta e do dualismo onda-partícula... Foi então que tive uma súbita inspiração. O dualismo onda partícula de Einstein era um fenômeno absolutamente geral, que se estendia a toda a natureza [4].

Ele estudou os trabalhos de Einstein sobre a luz, e convenceu-se de que era necessário desenvolver uma teoria que combinasse as teorias ondulatória e corpuscular [4].

Minhas pesquisas sobre física dos raios X me haviam convencido da necessidade de uma teoria sintética das radiações combinando o aspecto "onda" e o aspecto "fóton", e eu havia refletido muito sobre os trabalhos antigos do Sr. Einstein sobre os quanta de luz. Medindo sobre essas questões fui levado a fazer em 1922 duas publicações sobre este assunto.

A característica das partículas materiais se comportarem como onda levou a necessidade de termos uma função de onda associada às partículas, escrita em geral por $\psi(x, t)$. Se a matéria apresenta comportamento ondulatório, então a onda associada à matéria deve obedecer alguma equação de onda, e a solução desta equação tem significado físico. Coube a Schrödinger apresentar a equação de onda associada à onda de matéria e a partir daí surgiu a mecânica quântica.

2.2 A Equação de Schrödinger e a interpretação de Copenhague

Schrödinger propôs um novo formalismo para a teoria quântica. A inspiração principal dele se baseava nas evidências experimentais de que o movimento das partículas de sistemas microscópicos deve obedecer aos movimentos ondulatórios. Esta equação que descreve a evolução temporal e espacial das funções de onda é a equação Schrödinger [6]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi \quad (3)$$

A validade desta equação, como qualquer equação fundamental, está na concordância com os resultados experimentais, não existe demonstração desta equação.

A interpretação de Copenhague defende que na Mecânica Quântica, os resultados são indeterminados. Nesta interpretação os eventos devem ser interpretados probabilisticamente e neste caso a possibilidade de encontrar uma partícula em determinado espaço é real e positivo. Temos que a probabilidade de encontramos uma partícula governada pela função de onda $\psi(\vec{x})$, em um volume $d^3\vec{x}$ em uma determinada região do espaço é dada por:

$$P = \int \psi^* \psi d^3\vec{x} \quad (4)$$

Ou seja, a probabilidade de se encontrar a partícula em qualquer região do espaço, num dado instante de tempo, deve ser igual a 1:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi d^3\vec{x} = 1 \quad (5)$$

Tais resultados são conhecidos como interpretação probabilística da função de onda.

Nesta interpretação, o valor médio ou valor esperado da posição de uma partícula associada a uma função de onda $\psi(x, t)$ é dado por:

$$\bar{x} = \int x |\psi(x, t)|^2 dx \quad (6)$$

A função de onda $\psi(x, t)$ especifica o estado estacionário e a densidade de probabilidade $|\psi(x, t)|^2$ que determina todos os aspectos probabilísticos associados a um sistema quântico. Esta densidade juntamente com a posição, o momento e a energia compõem os observáveis físicos de uma partícula em movimento.

Temos que em sistema do tipo conservativo, como a energia potencial que sofre a partícula é independente do tempo $V = V(x)$. Neste caso a equação pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis [6].

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \varphi(t) \quad (7)$$

Tomando as derivadas temporais e espaciais obtemos:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \psi \frac{d\varphi}{dt} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \psi}{dx^2} \quad (9)$$

Com derivadas totais a Equação (3) de Schroedinger fica:

$$i\hbar\psi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\hbar^2 d^2\psi}{2m dx^2} \varphi + V\psi\varphi \quad (10)$$

E, dividindo por $\psi\varphi$:

$$i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} \varphi + V \quad (11)$$

Observamos que do lado esquerdo é uma função apenas de t e o lado direito é uma função de x . Isso só pode ser verdade se ambos os lados forem iguais a constantes. Chamando de E a constante de separação temos:

$$i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = E \quad (12)$$

ou,

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{iE}{\hbar} \varphi \quad (13)$$

e,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V = E \quad (14)$$

ou

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \quad (15)$$

Observamos também que a constante E é a energia do sistema. Em especial a Equação (15) é conhecida como a equação de Schrödinger independente do tempo, que determina os estados estacionários e as autofunções associadas. As propriedades das autofunções $\psi(x)$ dependem da forma da energia potencial $V(x)$, uma vez que ela determina a força que atua na partícula.

Deve-se concluir que se a relação entre energia E e o potencial $V(x)$ faz com que a partícula fique confinada em uma determinada região do espaço, a teoria de Schrödinger prevê que a energia seja totalmente quantizada. Por outro lado, se a relação não faz com que a partícula fique confinada em uma determinada região, a teoria prevê que qualquer valor é possível para a energia total.

2.3 Formalismo vetorial na Mecânica Quântica

Uma vez que a função de onda determina completamente o estado físico do sistema, para uma dada função de onda ψ de um sistema no instante t , não somente todas as propriedades do sistema naquele instante estão descritas, mas também as propriedades em qualquer instante.

A teoria quântica se baseia em duas construções: funções de onda e operadores. O estado de um sistema é representado por uma função de onda, e os observáveis são representados por operadores [5]. Matematicamente, as funções de onda satisfazem as condições que definem os vetores abstratos e os operadores agem sobre eles como transformações lineares. Essa teoria teve um grande avanço com o conceito de vetor de estado criado por Dirac, na qual funções de onda genéricas, são representadas geralmente por vetores e pelos símbolos bra “ \langle ” ou ket “ \rangle ”. Ele desenvolveu uma representação para a teoria num espaço vetorial, utilizando o espaço conhecido como espaço de Hilbert (apêndice D) que é um espaço vetorial complexo, cujas dimensões são infinitas, onde a densidade de probabilidade passa agora a ser um produto interno no espaço de Hilbert [7]:

$$\psi^* \psi = \langle \psi(x) | \psi(x) \rangle \quad (16)$$

Usando a notação de Dirac podemos reescrever a equação de Schroedinger independente do tempo (Equação 15), e assim obter:

$$E_n |\psi_n\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} |\psi_n\rangle + V |\psi_n\rangle \quad (17)$$

ou,

$$E_n |\psi_n\rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V \right] |\psi_n\rangle \quad (18)$$

e ainda pode ser escrito assim:

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (19)$$

Observamos na Equação (19) que o operador **H** Hamiltoniano (energia) do sistema está atuando no espaço vetorial. Os observáveis são representados por operadores hermitianos, cujos possíveis resultados das medidas são os autovalores (apêndice C), os quais são sempre reais [6]. Para comprovar que os autovalores dos

operadores hermitianos são reais, vejamos a equação de autovalor, definida como sendo:

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle \quad (20)$$

onde $|a\rangle$ é um autovalor associado ao operador \hat{A} e a é o seu respectivo autovalor.

A correspondente dual à Equação acima é dada por:

$$\langle a|\hat{A} = \langle a|a^* \quad (21)$$

Multiplicando a Equação (20) por $\langle a|$ à direita e a Equação (21) por $|a\rangle$ à esquerda e subtraindo uma da outra chegamos a:

$$\langle a|a\rangle a - a^* \langle a|a\rangle = 0 \quad (22)$$

Como $|a\rangle$ não é nulo, teremos que $\langle a|a\rangle > 0$, então para que a Equação (22) seja verdadeira a tem que ser igual à a^* , confirmando que esses autovalores são reais e assim operadores hermitiano.

A notação de Dirac torna-se uma importante ferramenta na obtenção de resultados mais robustos da mecânica quântica, por facilitar a obtenção dos resultados [8].

No decorrer do texto, a abordagem quântica da oscilação de neutrinos se dará com o uso do formalismo de Dirac. Com as devidas analogias ao uso de funções de onda sendo introduzidas concomitantemente ao desenrolar do problema.

3 OSCILAÇÃO DE NEUTRINOS

3.1 O problema dos neutrinos solares

Os neutrinos foram previstos teoricamente por Wolfgang Pauli em 1930, para explicar a variação da energia dos elétrons emitidos em decaimentos β [9]:



Onde temos na Equação (23) que n é um nêutron, p é um próton, observa-se que o nêutron se transforma espontaneamente em um próton, emitindo um elétron. A vida média de um nêutron livre é de aproximadamente 12 minutos. Pauli propôs que a diferença de energia estava sendo carregada por uma partícula neutra de difícil detecção, o neutrino (ν_e). Com esta descoberta ele recebeu o prêmio Nobel em 1945.

Os neutrinos são partículas capazes de atravessar a Terra sem interagir com nenhuma outra partícula. Eles podem ser emitidos de diferentes fontes: o sol, a atmosfera, as rochas e até nós emitimos esta partícula. Nas diversas fontes de neutrinos temos: os neutrinos solares que são produzidos durante as reações no sol, os atmosféricos que são produzidos por raios-cósmicos, os geo-neutrinos que surgem através dos decaimentos radioativos naturais que ocorrem nas rochas terrestres e os neutrinos-de-reatores produzidos como consequências ocorridas nos núcleos dos reatores.

De acordo com o Modelo Padrão (MP) que foi construído para solucionar a teoria da física de partícula, onde os neutrinos não teriam massa. Este modelo inclui três tipos distintos de neutrinos: neutrino do elétron (ν_e), neutrino do muón (ν_μ) e neutrino do tau (ν_τ) que são os três “sabores” distintos de neutrinos [10].

O chamado Modelo padrão das partículas elementares não é propriamente um modelo, é uma teoria. E das melhores que temos, aliás, na opinião de muitos físicos a melhor de todas sobre a natureza da matéria. Por exemplo, segundo Gordon Kane, um físico teórico da Universidade de Michigan [10]:

...o Modelo Padrão é na história, a mais sofisticada teoria matemática sobre a natureza. Apesar da palavra "modelo" em seu nome, o Modelo Padrão é uma teoria compreensiva que identifica as partículas básicas e especifica como interagem. Tudo o que acontece em nosso mundo (exceto os efeitos da gravidade) resulta das partículas do Modelo Padrão interagindo de acordo com suas regras e equações.

O modelo solar padrão (MSP) prevê que os neutrinos que chegam a Terra provém das reações de fusão nuclear no sol que produzem um fluxo intenso de neutrinos. Essas reações podem ser representadas pelos processos [11]:



A detecção de neutrinos solares começou pelo experimento Homestake [12] idealizado e realizado por Ray Davis^A. Este experimento está localizado em Dakota do Sul dos Estados Unidos e começou a coletar dados em 1970, apesar de obter sucesso na detecção dos neutrinos provenientes do Sol, seus dados experimentais apresentavam um déficit no fluxo de neutrinos que estavam sendo detectados, então verificou-se que o fluxo de neutrinos do Sol que atinge a terra era menor que o esperado.

Do ponto de vista astrofísico somos tentados a pensar que este déficit poderia indicar alguma propriedade até então desconhecida do Sol. Muitas hipóteses e aproximações foram consideradas no modelo solar, mas algumas estavam equivocadas.

O experimento Homestake se baseia no processo onde um neutrino eletrônico interage com um átomo de cloro (Cl^{37}) produzindo um elétron e um átomo de argônio (${}^{37}\text{Ar}$). Entre 1970 e 2002, a taxa de capturas de neutrino por átomos de cloro-37 no tanque foi de $(2.56 \pm 0.23) \times 10^{-36}$ por segundo ou (2.56 ± 0.23) unidade de neutrino solar (SNU), quando o previsto pelo modelo solar padrão seria (7.6 ± 1.3) SNU. Isto significa uma fração de $(34 \pm 7)\%$ do fluxo esperado [10]. Depois disso, as

^A Prêmio Nobel de Física em 2002

experiências com o Kamiokande [13] também só observaram cerca de 30-50% da expectativa. Os neutrinos são muito difíceis de detectar por não possuírem cargas elétricas e nem número quântico de cor (a carga de interação forte). A única forma de o neutrino interagir é via interação fraca. Para dar continuidade a estes experimentos construíram Super-Kamiokande (Figura 7) mais eficiente e sensível ao neutrino do elétron que apresentou os resultados da medição precisa do fluxo do neutrino solar. Os resultados confirmam cerca de 45% de déficit de neutrinos solares com nível de confiança de 99,9%. O que, como veremos indica que o problema do neutrino solar pode ser explicado pela oscilação dos neutrinos [13].

Este experimento possui um limiar mínimo de energia próximo de 8 MeV. Repare que este corte exclui as reações PP, pep e ${}^7\text{Be}$. Desta forma o fluxo que pode ser visto por Super-Kamiokande é composto apenas dos neutrinos das reações Hep e Boro [11].

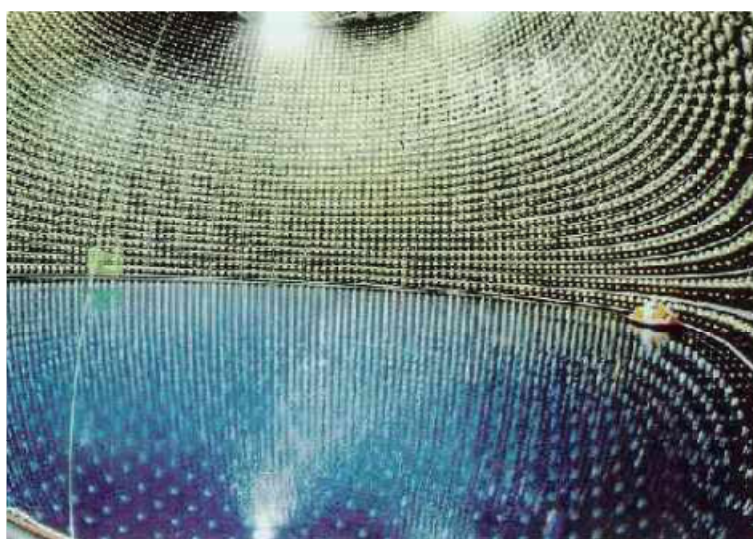


Figura 7. Interior do detector de neutrinos (Super-kamiokande [13]).

O Kamiokande e seu sucessor Super-kamiokande localizados na mina de Kamioka no Japão, utilizaram o método de detecção por radiação Cherenkov^B, de modo que a direção e a energia dos neutrinos também puderam ser investigadas [4]. O Super-Kamiokande possui cerca de 50000 toneladas de água extremamente pura, além de estar a mais de 1 km abaixo da superfície da Terra, de modo que as montanhas que o cercam sirvam como escudo de partículas indesejadas, provenientes dos chuveiros cósmicos, pois em todos os experimentos de neutrinos

^B Não nos aprofundamos nos estudos de radiação Cherenkov.

solares até então, foram encontrados os muóns provenientes de raios cósmicos. Para reduzir sua influência nos detectores, estes são instalados a centenas de metros abaixo do solo [4].

As experiências de detecção de neutrinos solares foram as primeiras a evidenciar a presença do fenômeno da oscilação, dando início a astrofísica de neutrinos.

A hipótese da oscilação dos neutrinos requer que exista além da base de sabor (ν_e, ν_μ e ν_τ) uma base de massa (ν_1, ν_2 e ν_3). Deste modo, usando o princípio da superposição, os sabores dos neutrinos seriam uma superposição da base de massa. Na mecânica quântica, o estado de um sistema físico é definido pelo conjunto de todas as informações que podem ser extraídas desse sistema ao se efetuar alguma medida. Portanto, dados dois estados quaisquer, a soma algébrica (superposição) deles também é um estado.

$$|\nu_e\rangle = U_{e1}|\nu_1\rangle + U_{e2}|\nu_2\rangle + U_{e3}|\nu_3\rangle \quad (29)$$

$$|\nu_\mu\rangle = U_{\mu1}|\nu_1\rangle + U_{\mu2}|\nu_2\rangle + U_{\mu3}|\nu_3\rangle \quad (30)$$

$$|\nu_\tau\rangle = U_{\tau1}|\nu_1\rangle + U_{\tau2}|\nu_2\rangle + U_{\tau3}|\nu_3\rangle \quad (31)$$

Ou na forma de matriz,

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (32)$$

ou ainda de forma mais simplificada:

$$\nu^s = U\nu^{(m)} \quad (33)$$

Os coeficientes da matriz U , também chamada de matriz de mistura, fornecem a já comentada proporção de cada neutrino físico que compõe um neutrino de sabor. Tal matriz é unitária por definição $UU^\dagger = I$, sendo I a matriz identidade. Isto garante a ortonormalidade dos estados físicos, o que implica que os estados de sabor são também ortonormais.

Observamos que esta hipótese leva ao fato de não podermos determinar o sabor e a massa do neutrino respectivamente, porque na mecânica quântica, medidas simultâneas são dadas por operadores que comutam, e assim dividem uma

mesma base de autoestados. Uma propriedade útil dos operadores lineares é que podemos representá-los através de uma matriz de dimensão igual à dimensão do espaço vetorial.

Partindo agora da definição de mistura entre as bases de sabor e massa dos neutrinos, vamos investigar no capítulo que segue a necessidade de neutrinos massivos para, por meio da oscilação de sabor, obtemos um modelo simplificado (2-d) que esclareça o déficit de neutrinos eletrônicos nos experimentos.

4 MODELO DE OSCILAÇÃO

4.1 Um modelo de oscilação bidimensional

O mesmo conceito de combinação de estados quânticos aparece quando os autoestados de um Hamiltoniano de interação são descritos como uma superposição quântica de autoestados de massa de um mesmo sistema físico. São criadas, assim, condições para a oscilação do número quântico associado ao Hamiltoniano de interação ao longo de uma propagação espaço-temporal. Para sermos mais precisos no contexto específico do problema de oscilação quântica de sabores, o Hamiltoniano de interação determina uma base de autoestados de sabor ao passo que os autoestados de massa compõem a base determinada por um Hamiltoniano (livre) de propagação. Em particular, as oscilações de sabor surgem quando uma fonte cria uma partícula que corresponde à combinação linear de autoestados de massa. Os principais aspectos dos fenômenos de oscilação quântica de sabores podem ser compreendidos através do estudo de um problema com apenas dois autoestados [14].

Por ser mais simples vamos supor a oscilação apenas entre dois sabores: o neutrino do elétron ($|v_e\rangle$) e um sabor ($|v_\alpha\rangle$) arbitrário [11]:

$$|v_e\rangle = \cos \theta |v_1\rangle + \sin \theta |v_2\rangle \quad (34)$$

$$|v_\alpha\rangle = -\sin \theta |v_1\rangle + \cos \theta |v_2\rangle \quad (35)$$

E sua relação inversa:

$$|v_1\rangle = \cos \theta |v_e\rangle - \sin \theta |v_\alpha\rangle \quad (36)$$

$$|v_2\rangle = \sin \theta |v_e\rangle + \cos \theta |v_\alpha\rangle \quad (37)$$

Adotando uma notação prática usada nos problemas quânticos de dois níveis que são os vetores de duas componentes. Para a base de autoestados de sabor temos:

$$v^{(s)} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_s, \text{ onde } |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = 1 \quad (38)$$

Da mesma forma temos os vetores escritos na base dos autoestados de massa:

$$v^{(m)} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_m, \text{ onde } |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1 \quad (39)$$

Usando a base canônica para um sistema de dois níveis:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s = |v_e\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_s = |v_\alpha\rangle \quad (40)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_m = |v_1\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_m = |v_2\rangle \quad (41)$$

Para a base de sabores temos:

$$\begin{pmatrix} v_e \\ v_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = U |v^{(m)}\rangle \quad (42)$$

Onde θ é o ângulo de mistura do modelo.

Observe que multiplicando a equação (42) por:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (43)$$

temos:

$$\begin{pmatrix} v_e \\ v_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (44)$$

e para a base de massa, temos:

$$|v^m\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_e \\ v_\alpha \end{pmatrix} = U^\dagger |v^{(s)}\rangle \quad (45)$$

Sendo $v^{(m)}$ o vetor de estado das partículas que possuem massa definida e satisfazem a equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |v^m\rangle = H |v^m\rangle = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} |v^{(m)}\rangle \quad (46)$$

Observe que o hamiltoniano atuando na base de massa já é diagonal, uma vez que E_1 e E_2 são as massas de repouso dos neutrinos físicos dadas pela relação de Einstein:

$$E = mc^2 \quad (47)$$

Na mecânica quântica temos vários exemplos de oscilação. Talvez o mais conhecido, embora não muito lembrado, seja o que ocorre com os sistemas de acoplamento de spin. Tanto neste como em outros casos, a “oscilação” é o nome que se dá a dependência periódica das soluções no tempo ou no espaço. Em linguagem técnica, este tipo de solução é obtida quando medimos um observável que não é diagonal na base dos auto-estados da Hamiltoniana. Tentando vencer a barreira da linguagem técnica, podemos dizer que algumas grandezas físicas não podem ser determinadas simultaneamente. Nestes casos, cada vez que se mede o valor de uma grandeza perde-se completamente a informação que se tinha sobre as outras [11]. Temos que ampliar nosso conceito de partícula para que possamos ter em mente que o estado de superposição também é uma partícula, assim como o estado físico. Devemos dizer que o neutrino ν_e é “tão neutrino” quanto ν_1 . São apenas partículas com propriedades diferentes, a saber: podemos interagir com os neutrinos da base de sabor, mas não temos informação sobre suas massas, por outro lado não podemos interagir diretamente com os neutrinos da base de massa mas estes têm massas bem definidas.

Vale, no entanto lembrar que o experimento do Super-Kamiokande interage apenas com a base de sabor, que é uma função da base de massa dada por:

$$\nu^{(m)} = U^\dagger \nu^{(s)} \quad (48)$$

Substituindo a equação (48) na equação (46) e assumindo a hipótese de que o ângulo de mistura é constante no vácuo, temos:

$$i\hbar \frac{d}{dt} U^\dagger |\nu^s\rangle = H U^\dagger |\nu^{(s)}\rangle \quad (49)$$

multiplicando por U :

$$i\hbar \frac{d}{dt} U U^\dagger |\nu^s\rangle = U H U^\dagger |\nu^{(s)}\rangle \quad (50)$$

e usando a propriedade da ortogonalidade obtemos:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |v^s\rangle = U H U^\dagger |v^{(s)}\rangle \quad (51)$$

obtemos então o hamiltoniano na base de sabor:

$$H_s = U H U^\dagger \quad (52)$$

$$H_s = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (53)$$

Resolvendo a multiplicação de matrizes:

$$H_s = \begin{bmatrix} E_1 \cos^2 \theta + E_2 \sin^2 \theta & (E_2 - E_1) \cos \theta \sin \theta \\ (E_2 - E_1) \cos \theta \sin \theta & E_1 \sin^2 \theta + E_2 \cos^2 \theta \end{bmatrix} \quad (54)$$

Observamos que como a matriz H_s não é diagonal existe a probabilidade de transição entre $|v_e\rangle$ e $|v_\alpha\rangle$. Temos que a base de sabor evolui no tempo como um autoestado qualquer:

$$|v^s(t)\rangle = e^{\frac{-iH_s t}{\hbar}} |v^s(0)\rangle \quad (55)$$

Supondo que no estado inicial o neutrino seja o neutrino do elétron:

$$|v^s(0)\rangle = |v_e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

temos:

$$|v^s(t)\rangle = e^{\frac{-iH_s t}{\hbar}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

Contudo é possível verificar que:

$$H_s = \frac{E_1 + E_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{E_1 - E_2}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sin 2\theta - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos(2\theta) \right] \quad (58)$$

Agora usando a propriedade [11]:

$$e^{-i\alpha \sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos \alpha - i \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sin \beta - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sin \alpha \right] \quad (59)$$

Onde σ_1 e σ_3 são matrizes de Pauli [1], encontram-se no apêndice A.

Usando as equações (59) e (58) em (57) temos:

$$\begin{aligned}
 |v^s \ t \rangle = e^{-i \frac{E_1 + E_2}{2} t} & \left[\cos \frac{\Delta E}{2} t + i \cos(2\theta) \operatorname{sen} \frac{\Delta E}{2} t \right] |v_e \rangle - i \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen} \frac{\Delta E}{2} t |v_\alpha \rangle \\
 & - i \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen} \frac{\Delta E}{2} t |v_\alpha \rangle
 \end{aligned} \quad (60)$$

Percebemos que a solução possui uma parte que representa a propagação no estado inicial $|v_e \rangle$ e outra que representa $|v_\alpha \rangle$ e observamos também que os coeficientes de mistura são oscilantes no tempo, alternando entre os autoestados de sabor. Essa oscilação entre $|v_e \rangle$ e $|v_\alpha \rangle$ é justamente o que determina o déficit dos neutrinos solares. Isso porque, uma vez saindo do sol um neutrino do elétron ($|v_e \rangle$), o mesmo tem uma certa probabilidade de chegar neutrino do elétron e outra de chegar neutrino do “ α ” ($|v_\alpha \rangle$).

4.2 Probabilidades de transição

Finalmente podemos obter a probabilidade de *conversão* $p_{e \rightarrow \alpha}$, ou seja, a probabilidade de um neutrino produzido como v_e ser detectado como v_α após um certo tempo t . Esta é dada por [5]:

$$p_{e \rightarrow \alpha} = \left| \int \psi_\alpha^* \psi_e dx \right|^2 \quad (61)$$

ou,

$$p_{e \rightarrow \alpha} = |\langle v_\alpha | v_e(t) \rangle|^2 = \operatorname{sen}^2 2\theta \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta E}{2} t \quad (62)$$

Nesta Equação (62) temos uma probabilidade de 50% do sabor do neutrino do elétron v_e oscilar para o sabor do neutrino v_α .

Já a probabilidade de sobrevivência do neutrino é dada por:

$$p_{e \rightarrow e} = 1 - p_{e \rightarrow \alpha} \quad (63)$$

$$p_{e \rightarrow e} = 1 - |\langle v_\alpha | v^s \ t \rangle|^2 = \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta E}{2} t \quad (64)$$

Nesta Equação (64) também temos uma probabilidade de 50% do neutrino do elétron ν_e sobreviver, ou seja, sair neutrino do elétron ν_e da fonte emissora, tendo como exemplo o Sol e chegar a Terra ainda como neutrino do elétron ν_e .

Observamos também nas Equações (62) e (64) que a probabilidade de oscilação de sabor ou de sobrevivência do neutrino eletrônico é oscilante no tempo com um período:

$$\frac{\Delta E}{2} t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{\Delta E} \quad (65)$$

que vai com o inverso da diferença de massa entre os sabores ν_α e ν_e .

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho discorreremos brevemente sobre a evolução das descobertas dos neutrinos. Mostramos como surgiram os mistérios que envolvem os neutrinos começando pelo problema do neutrino Solar e as ideias desenvolvidas para explicar este fenômeno, onde foram criados vários experimentos detectores de neutrinos. Vimos que o Super Kamiokande, um detector de neutrinos instalado no Japão, foi muito importante para ajudar a solucionar o problema do déficit de neutrinos detectado pelo modelo solar padrão. Nas literaturas era abordada a existência de neutrinos não massivos, mas através dos experimentos realizados percebemos que o neutrino não desaparecia e sim oscilava para um outro sabor que não era detectado pelo detector, pois este detector não era sensível a este outro sabor. Para que a hipótese de oscilação ocorresse percebeu-se que era necessária a presença de neutrinos massivos neste fenômeno.

Mostramos no segundo capítulo o desenvolvimento dos cálculos da oscilação entre apenas dois sabores (ν_e) e (ν_α), associados a duas massas m_1 e m_2 . Percebemos que a equação(60), solução final possui uma parte que representa a propagação no estado inicial $|\nu_e\rangle$ e outra que representa $|\nu_\alpha\rangle$ e observamos também que os coeficientes de mistura são oscilantes no tempo, ou seja, alternando entre os autoestados de sabor.

Analisamos também a possibilidade de “sobrevivência” do neutrino e percebemos que probabilidade do neutrino permanecer com o mesmo sabor durante o seu trajeto é $\cong 50\%$, a mesma probabilidade deste oscilar para outro sabor.

Os estudos nessa área de pesquisa são muito importantes, pois partículas tão pequenas como os neutrinos puderam causar grandes mudanças, como as alterações ocorridas com o modelo padrão (MP) que era baseado na teoria de neutrinos não massivos.

As pesquisas realizadas com neutrinos têm provocado o desenvolvimento tecnológico com a criação de experimentos sofisticados que atenda os objetivos dos pesquisadores com resultados esperados.

As perspectivas futuras para este trabalho são ampliar as equações obtidas para a oscilação de sabores de três neutrinos distintos e também estudar a

possibilidade de novas interações, já que os estudos nessa área são recentes, havendo a possibilidades da criação de novos experimentos e novas descobertas.

6 REFERÊNCIAS

- [1] TIPLER, P.A & LLEWELLYN, R. A. **Física Moderna**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [2] UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA. Site desenvolvido como trabalho final para a disciplina metodologia e prática no ensino de física, ministrada pelo professor Vinicius Jacques. Disponível em: <http://www.ced.ufsc.br/men5185/trabalhos/63_lampadas/incand/funciona04.htm>. Acesso em: 25 mai. 2012.
- [3] TORRES, C.M.A, *et. al.* **Física-Ciência e Tecnologia**, vol. 3. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010.
- [4] ROSA. P. S. **Louis De Broglie e as ondas de matéria**. Campinas: IFGW-UNICAMP, 2004. Dissertação de mestrado.
- [5] YOUNG, H.D. **Ótica e Física Moderna**. Tradução de Claudia Martins, 12 ed. São Paulo: Pearson, 2009.
- [6] GRIFFITHS, D.J. **Mecânica quântica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.
- [7] ARFKEN, G.B. & WEBER, J.H. **Física Matemática para Engenharia e Física**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- [8] ZETTLI, Nouredine. **Quantum Mechanics: concepts and applications**. 2. ed. Jacksonville (USA): Jacksonville State University, 2009.
- [9] LICCIARDI, C. A. P. B. **Estudo Analítico das Probabilidades de Oscilação de Neutrinos na Matéria em Três Gerações**. IF-USP; (dissertação de mestrado), 2007.
- [10] MOREIRA, M. A. **O Modelo Padrão de Física de Partículas**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, nº 1, 1306 (2009).
- [11] VALDIVIESSO, G. A. & GUZZO, M. M. **Compreendendo a Oscilação dos Neutrinos**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v.27, nº 4, 2005.
- [12] CLEVELAND, B.T. **“Measurement of the Solar Electron Neutrino flux with the Homestake Chlorine Detector”**. Astrophysical Journal, 496:505-526.
- [13] SITIO OFICIAL. **Super-Kamiokande**. Site onde são divulgadas as novidades dos experimentos realizados neste detector de neutrinos. Disponível em: <<http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/index-e.html>>. Acesso em: 25 mai. 2012.
- [14] BERNADINI, A. E. & DE LEO, S. **Oscilação quântica de sabores com pacotes de ondas**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 26, nº 4, p. 335-350, 2004.

APÊNDICE

APÊNDICE A

✓ Equações Fundamentais

Equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

Equação de Schrödinger independente do tempo

$$H\psi = E\psi, \quad \psi = \psi e^{-iEt/\hbar}$$

Operador Hamiltoniano

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$$

Operador momento

$$p = -i\hbar \nabla$$

Dependência do tempo de um valor esperado

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, Q] \rangle + \left\langle \frac{\partial Q}{\partial t} \right\rangle$$

Princípio de incerteza generalizada

$$\sigma_A \sigma_B \geq \left| \frac{1}{2i} \langle [A, B] \rangle \right|$$

Princípio de incerteza de Heisenberg

$$\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$$

Comutador canônico

$$[x, p] = i\hbar$$

Momento angular

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z,$$

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x,$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

Matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

APÊNDICE B

✓ Efeito Compton

Para analisar o Efeito Compton, é necessário levar em conta que o efeito é relativístico já que o fóton é uma partícula relativística e viaja à velocidade da luz. Então devemos usar as equações da relatividade para a variação da massa, da energia e do momento linear. A massa m de uma dada partícula é dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ sendo } m_0 \text{ a massa de repouso, } c \text{ a velocidade da luz.}$$

As energias totais antes e depois do choque são dadas respectivamente por:

$$E = hv + mc^2 \quad \text{e} \quad E = hv' + mc^2$$

Aplicando a conservação da energia e o momento linear, obtém-se:

- Sobre a conservação da energia

$$hv + m_0c^2 = hv' + mc^2$$

$$h\frac{c}{\lambda} + m_0c^2 = h\frac{c}{\lambda'} + mc^2$$

Reorganizando a equação acima e elevando ambos os lados ao quadrado obtém-se:

$$\left[hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) + m_0c^2 \right]^2 = m^2c^4$$

ou,

$$h^2c^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right)^2 + 2hc^3m_0 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) + m_0^2c^4 = m^2c^4$$

- Sobre a conservação do momento linear

Conservação do momento linear componente x e componente y respectivamente:

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \phi + mv \cos \theta \quad e \quad 0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \phi + mv \sin \theta$$

Eliminando os termos contendo θ nas equações acima. Para isto faz-se o quadrado de ambos os lados das duas equações acima.

$$h^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cos \phi}{\lambda'} \right)^2 = m^2 v^2 \cos^2 \theta \quad e \quad \frac{h^2}{\lambda'^2} \sin^2 \phi = m^2 v^2 \sin^2 \theta$$

Somando ambas as equações:

$$h^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cos \phi}{\lambda'} \right)^2 + \frac{h^2}{\lambda'^2} \sin^2 \phi = m^2 v^2 \cos^2 \theta + m^2 v^2 \sin^2 \theta = m^2 v^2$$

Multiplicando por c^2 ambos os lados da equação acima, obtém-se:

$$c^2 h^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cos \phi}{\lambda'} \right)^2 + \frac{c^2 h^2}{\lambda'^2} \sin^2 \phi = c^2 m^2 v^2$$

$$\frac{c^2 h^2}{\lambda^2} - \frac{2 c^2 h^2 \cos \phi}{\lambda \lambda'} + \frac{c^2 h^2}{\lambda'^2} = c^2 m^2 v^2$$

Subtraindo as duas equações acima:

$$-\frac{2 c^2 h^2}{\lambda \lambda'} + m_0^2 c^4 + 2 h c^3 m_0 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) + \frac{2 c^2 h^2}{\lambda \lambda'} \cos \phi = m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2$$

O segundo membro da equação acima pode ser reescrito:

$$m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m^2 c^2 (c^2 - v^2) = \frac{m_0^2 c^2}{\frac{(c^2 - v^2)}{c^2}} (c^2 - v^2) = m_0^2 c^4$$

Com isto a equação acima assume a forma

$$\frac{2 c^2 h^2}{\lambda \lambda'} (1 - \cos \phi) = 2 h c^3 m_0 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) = 2 h c^3 m_0 \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda \lambda'}$$

Simplificando ambos os lados da equação acima:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{cm_0} (1 - \cos \phi) = \frac{2h}{cm_0} \text{sen}^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)$$

Onde foi usada a relação trigonométrica:

$$1 - \cos \phi = 1 - \cos \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{2} \right) = 1 - \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) + \text{sen}^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)$$

Definido $\lambda_0 = \frac{2h}{cm_0}$ como sendo o comprimento de onda de Compton, temos
que:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_0 \text{sen}^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)$$

APÊNDICE C

✓ Autovalores e Autofunções

Para esclarecer estes novos conceitos serão mostrados que a função $\psi = Ae^{ikx}$ é uma autofunção do operador momento linear (\hat{p}) e que a função $\psi = Ae^{ikx^2}$ não é autofunção de \hat{p} . Para verificar isto basta aplicar o operador \hat{p} na função de onda, como podemos observar a seguir. Por definição o operador momento é igual a:

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$$

Portanto;

$$\hat{p}_x \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (Ae^{ikx}) = \frac{\hbar}{i} ikAe^{ikx} = \hbar k (Ae^{ikx}) = \hbar k \psi$$

Que pode ser escrita na forma;

$$\hat{p}_x \psi = \hbar k \psi = p \psi$$

Assim é possível dizer que a função de onda $\psi = Ae^{ikx}$ é autofunção do operador \hat{p} com autovalor $\hbar k$. Como o número de onda k pode ser escrito em termos do comprimento de onda λ , temos que:

$$p = \hbar k = \frac{\hbar}{2\pi} k = \frac{\hbar}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\hbar}{\lambda}$$

Que é equivalente ao resultado obtido por Bohr na quantização do átomo de hidrogênio. Agora será verificando que a função $\psi = Ae^{ikx^2}$ não é autofunção do operador \hat{p} .

$$\hat{p}_x \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (Ae^{ikx^2}) = \frac{\hbar}{i} 2ikx (Ae^{ikx^2}) = (2\hbar kx) \psi$$

Analisando o último termo entre parêntese na equação acima nota-se que ele não é uma constante, mas sim depende da posição. E se esta equação fosse escrita por:

$$\hat{p}_x \psi = (2\hbar kx)\psi = (2\hbar kx)\psi'$$

Ela seria uma equação de autovalor? Não, mesmo nesta forma ela não é uma equação de autovalor por que as funções ψ e ψ' são diferentes.

APÊNDICE D

✓ Espaço de Hilbert

As operações no espaço de Hilbert seguem as seguintes regras: H é um conjunto de objetos, com uma operação de soma de vetores definida de tal forma que:

- Se dois vetores $|f\rangle$ e $|g\rangle \in H$ então a soma $|f\rangle + |g\rangle$ também é um vetor de H .
- A soma é comutativa e associativa: $|f\rangle + |g\rangle = |g\rangle + |f\rangle$ e $(|f\rangle + |g\rangle) + |h\rangle = |f\rangle + (|g\rangle + |h\rangle)$.
- Existe em H um vetor chamado nulo de tal forma que: $|f\rangle + 0 = |f\rangle$ para qualquer $|f\rangle \in H$.

Também está definida uma operação de produto escalar de tal forma que, se α e β pertencem ao conjunto dos complexos, e $|f\rangle$ e $|g\rangle$ são elementos de H então:

- $\alpha|f\rangle \in H$
- $(\alpha\beta)|f\rangle = \alpha(\beta|f\rangle)$
- $(\alpha + \beta)|f\rangle = \alpha|f\rangle + \beta|f\rangle$
- $\alpha(|f\rangle + |g\rangle) = \alpha|f\rangle + \alpha|g\rangle$
- $|f\rangle = |f\rangle$

Onde temos que H tem um produto interno, ou seja, pode-se definir uma operação entre dois vetores $|f\rangle$ e $|g\rangle$ que fornece um escalar, denotada por, $\langle f | g \rangle$, sendo que ele possui as seguintes propriedades:

- $\langle f | g \rangle = (\langle g | f \rangle)^*$
- $\langle f | g \rangle + \langle f | h \rangle = \langle f | g + h \rangle$
- $\langle f | \alpha g \rangle = \alpha \langle f | g \rangle$
- $\langle \alpha f | g \rangle = \alpha^* \langle f | g \rangle$

$\langle f | f \rangle \geq 0$ e $\langle f | f \rangle = 0$ se e somente se $|f\rangle = 0$ (vetor nulo)

