UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

UM ESTUDO SOBRE AS CÔNICAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

ANTONIO GOMES BARBOSA NETO

CAMPINA GRANDE
2017

Antonio Gomes Barbosa Neto

Um Estudo sobre as Cônicas e algumas Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologias - CCT da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientação da Professora Ms. Joselma Soares dos Santos.

Campina Grande
2017

B238e Barbosa Neto, Antonio Gomes.
Um estudo sobre as cônicas e alguma aplicações [manuscrito] / Antonio Gomes Barbosa Neto. - 2017.
71 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Profa. Ma. Joselma Soares dos Santos, Departamento de Matemática".

1. Curvas cônicas. 2. Parábola. 3. Elipse. 4. Hipérbole. I. Título.

21. ed. CDD 516

Antonio Gomes Barbosa Neto

Um Estudo sobre as Cônicas e algumas Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologias - CCT da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado pela banca examinadora em 03 de agosto de 2017.

Banca Examinadora

Joselma Soares dos Santos

Profª. Ms. Joselma Soares dos Santos
Departamento de Matemática - Campus I/UEPB
Orientadora

Fernando Luiz Tavares da Silva

Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva
Departamento de Matemática - Campus I/UEPB
Examinador

Thiciany Matsudo Iwano

Profª. Ms. Thiciany Matsudo Iwano
Departamento de Matemática - Campus I/UEPB
Examinador

A todos que contribuíram de forma direta ou indireta na construção de minha caminhada acadêmica, dedico.

Agradecimentos

A Deus, pois quando eu estava preso em minhas vergonhas e dores me mostrou, através do Seu imensurável amor, o perdão que eu necessitava para ter coragem de encarar os desafios da minha vida.

Ao meu pai Severino e, em especial, à minha mãe Eulália que por toda a vida se dedicou aos melhores cuidados que eu poderia receber. A ela pertencem as maiores contribuições para as conquistas que já tive nessa vida.

Ao meu irmão Carlos e às minhas irmãs Emmanuela, Ana Carmem, Isabel, Ana Cristina e Roberta. Foram pessoas que sempre me apoiaram. À Emmanuela e Ana Carmem o meu mais sincero reconhecimento por todas as vezes que conseguiram entender as minhas necessidades e assim supriram-na.

À minha orientadora Joselma que se dedicou do começo ao fim em ajudar e contribuir para que o melhor resultado fosse alcançado. Sem ela nada disso teria acontecido.

Ao meu sobrinho Carlos Augusto que me apresentou esta instituição. Ele esteve comigo no início de tudo.

Aos meus amigos de curso que sempre incentivaram e me ajudaram a dar cada passo nessa caminhada. Por vezes foram capazes de entender até meu silêncio.

Aos meus amigos do Novo Mais Educação. Nessas últimas decisões estiveram presentes falando palavras de apoio e revelando uma amizade incrível.

À todos os demais amigos que me estenderam a mão. Tenho por certo que ninguém passou na minha vida de forma vã.

Aos meus alunos da Escola Antônio Vital do Rêgo, em Queimadas. Tive o imenso prazer de, no primeiro ano de trabalho, encontrar pessoas maravilhosas que aprendi a enxergar não por aquilo que eles mostram, mas por aquilo que podem se tornar. Agradeço em especial a Jonathan Lucas (9º A), Eduardo Rogério (8º A), Kauê Pereira (8º A), Erllon Kaique (8º A), Mateus Silva (8º A) e Luiz Henrique (8º A) que me fizeram enxergar a profissão da melhor forma.

À família maravilhosa que Deus me deu de presente. Em especial ao meu sobrinho Enzzo

Emmanuel que, com sua pureza, me fez ver uma luz todas as vezes que havia escuridão.

Aos excelentes professores que tive ao longo do curso.

À José Maricelio, Elaine, Maciel, Mizael e Micael que têm me ajudado a permanecer no caminho de Jesus.

Aos professores Fernando Luiz e Thiciany por aceitarem fazer parte da banca examinadora.

"E Jesus disse-lhe: Se tu podes crer, tudo é possível ao que crê."

Marcos 9:23

Resumo

Neste trabalho estudamos as Cônicas, que são um conjunto de pontos obtidos interceptando por um plano um cone circular reto de duas folhas. Variando a posição deste plano temos uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole. Inicialmente apresentamos um resumo histórico sobre o surgimento das curvas cônicas (parábola, elipse e hipérbole), levando em consideração alguns nomes que contribuíram para o crescimento dos estudos nessa área. Em seguida estudamos a definição de parábola, de elipse e de hipérbole, com o principal objetivo de aplicarmos em algumas situações problemas os resultados estudados, como por exemplo, na engenharia civil, na astronomia e nos sistemas de navegação.

Palavras-chave: Parábola; Elipse; Hipérbole.

Abstract

In this paper we study the conics, which are a set of points obtained by intercepting a straight circular cone of two leaves by a plane. Varying the position of this plane we have a parabola, an ellipse or a hyperbola. We first present a historical summary of the appearance of the conic curves (parabola, ellipse and hyperbola), taking into account some big names that contributed to the growth of the studies in this area. Next we study the definition of parabola, ellipse and hyperbola, with the objective of applying in some situations problems the results studied, such as in civil engineering, astronomy and navigation systems.

Keywords: Parabola; Ellipse; Hyperbola.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de símbolos

Δ	Letra grega maiúscula Delta
α	Letra grega minúscula Alfa
β	Letra grega minúscula Beta
ε	Letra grega minúscula Épsilon
η	Letra grega minúscula Eta
θ	Letra grega minúscula Teta
ι	Letra grega minúscula Iota
λ	Letra grega minúscula Lambda
ν	Letra grega minúscula Nu
o	Letra grega minúscula Ômicron
π	Letra grega minúscula Pi
ρ	Letra grega minúscula Rô
ς	Letra grega minúscula Sigma
ψ	Letra grega minúscula Psi
$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$(\quad)$	Parenteses
$\surd$	Raiz Quadrada
$+$	Adição
$-$	Subtração
$\geq$	Maior ou igual que

$\leq$	Menor ou igual que
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\Rightarrow$	Implica que
$\in$	Pertence
$\pm$	Mais ou menos
$\lvert\ \rvert$	Módulo
$\approx$	Aproximadamente
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\perp$	Perpendicular

Sumário

Introdução

As secções cônicas, também chamadas de cônicas, são obtidas interceptando por um plano um cone circular reto de duas folhas. Variando a posição do plano, tem-se uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole, conforme ilustração abaixo.

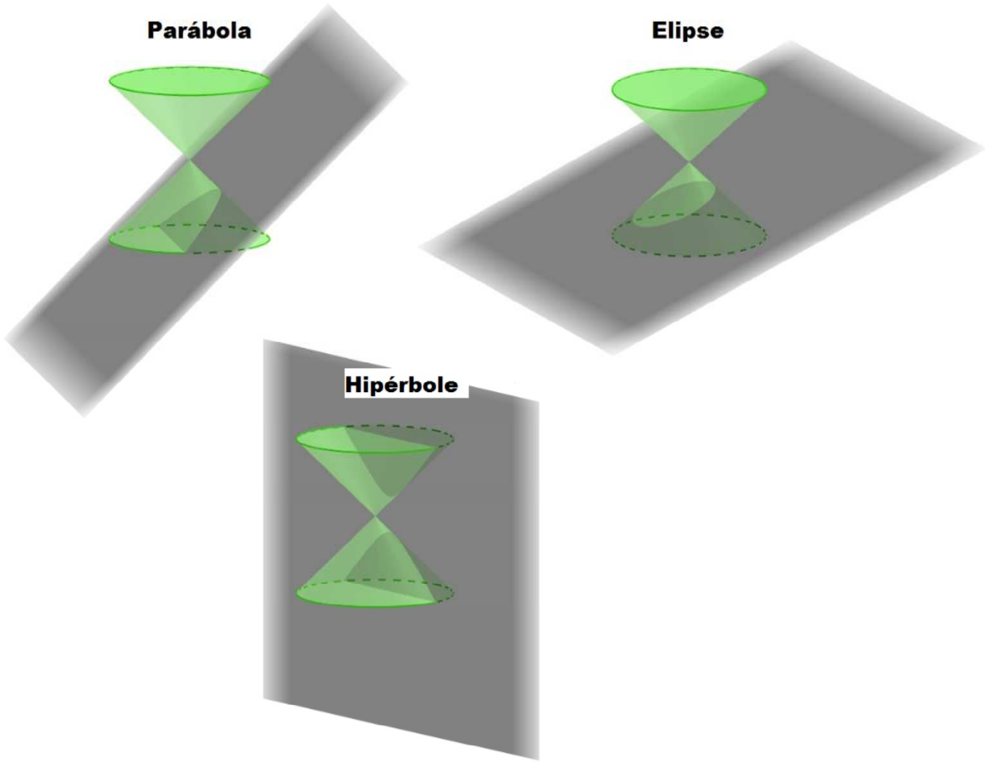

Figura 1 – Secções cônicas

Acredita-se que as secções cônicas tenham se originado em Atenas - GR quando por volta do ano 429 a.C., durante o cerco de Esparta na Guerra do Peloponeso – um conflito entre Atenas e Esparta – uma peste tirou a vida de um quarto dos atenienses, matando até mesmo um dos grandes nomes da história grega, o estratego[1] Péricles (c. 495/492 - 429 a.C.).

A história relata que um grupo de sábios fora enviado até o oráculo de Delfos para descobrir a solução para o problema da peste. Nesse lugar o deus grego Zeus anunciou através do oráculo que a solução para o fim da peste seria a reforma do altar de Apolo,

[1] Grécia Antiga. Designação de cada um dos dez magistrados que, responsáveis por assuntos militares, eram eleitos pelo povo. Fonte: Dicionário Online de Português.

ou seja, a construção que sustentava a estátua dele. Nesse período já existira um altar em forma de cubo, mas a ordem fora dobrar o seu tamanho (volume). Os encarregados rapidamente cumpriram o desejo do também deus, Apolo.

Mesmo com tantos esforços a peste só aumentou. O problema não fora resolvido apenas com os instrumentos matemáticos utilizados na época. Os gregos duplicaram o que podemos chamar de "arestas do cubo" utilizando régua e compasso, mas não tinham se dado conta que ao fazerem isso, inevitavelmente, octuplicaram o volume do cubo[2].

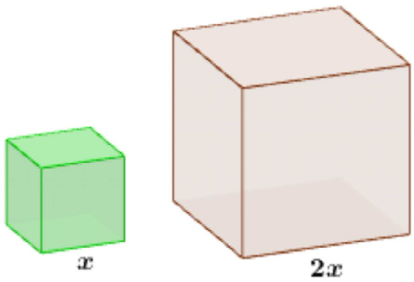

Figura 2 – Duplicação do cubo

Considera-se que a primeira definição de secções cônicas tenha sido apresentada por Menaechmus (380 - 320 a.C.), um conhecido de Platão que nasceu numa cidade onde atualmente se localiza na região da Turquia, quando por volta do ano 360 a.C. descobriu essas três curvas: parábola, elipse e hipérbole, que eram chamadas de *tríade menaechmiana* na época. Ele resolveu o problema com o traçado de uma parábola e de uma hipérbole, encontrando, geometricamente, o ponto de interseção da parábola de equação $x^2 = 2y$ e da hipérbole de equação $y = \frac{1}{x}$. Anteriormente, Hipócrates de Quíos havia mostrado que a duplicação do cubo era equivalente ao problema de encontrar x e y em média proporcional dupla em relação a a e b, de modo que $b = 2a$, mas foi Menaechmus quem obteve o resultado principal. Apesar de Menaechmus ser reconhecido por esse feito, seu trabalho se perdeu e ficou conhecido através de comentários feitos posteriormente por matemáticos.

[2] A duplicação do cubo faz parte dos três problemas clássicos da geometria grega. Esses problemas eram: A Duplicação do Cubo, Trissecção do Ângulo e Quadratura do Círculo.

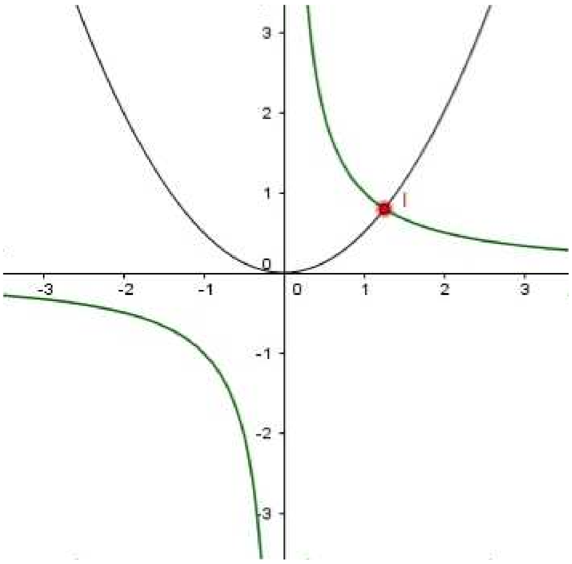

Figura 3 – Interseção

Alguns estudiosos modernos dizem que Euclides (325 - 265 a.C) de Alexandria tenha escrito quatro livros sobre as cônicas que, assim como os de Menaechmus, se perderam. Mas Arquimedes (287 – 212 a.C.), que também contribuiu com o estudo das cônicas, teve parte do seu trabalho preservado.

Finalmente no período áureo da Grécia, o estudo das cônicas é atribuído ao matemático e astrônomo Apolônio (262 - 190 a.C.), nascido em Pérgamo, na Ásia Menor, mas estudou e ensinou como professor na Escola de Alexandria. Ele resumiu e aplicou todo o conhecimento até seus dias em oito livros, dos quais sete se preservaram, sendo os três primeiros volumes baseados nos estudos de Euclides. Foi ele quem introduziu a ideia atual de obter as curvas cônicas "cortando" o cone com um plano através de inclinações diferentes.

Antes de Apolônio as curvas cônicas eram obtidas como secções de três tipos diferentes de cone circular reto. De acordo com o ângulo do vértice, se o mesmo fosse reto, obteria-se uma parábola; se agudo, uma elipse; se obtuso, uma hipérbole.

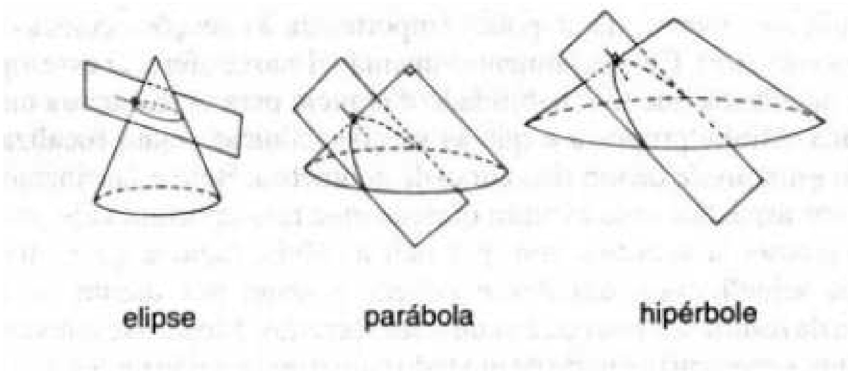

Figura 4 – Antiga forma de se obter as cônicas

Apolônio estudou com os discípulos de Euclides em Alexandria. Ele teve grande parte do seu trabalho perdido, contudo não deixou de ser reconhecido como o matemático que mais estudou e desenvolveu os estudo das cônicas na época. Um dos mais importantes estudos dele, além de ter conseguido gerar todas as curvas através de um único cone, foi o das retas tangentes e normais a uma cônica.

Os nomes das curvas cônicas são palavras de origem grega definidas por Apolônio e tomadas das terminologias pitagóricas associadas a área. São elas $\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\eta$ (*parabole*) que significa comparação, $\varepsilon\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\iota\varsigma$ (*elleipsis*) que significa falta e $\nu\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\eta$ (*hyperbole*) que significa excesso.

Pela influência de Apolônio, Ptolomeu (90 – 168 d.C.) fez algumas observações em Alexandria, do ano 127 à 151 d.C., no campo da astronomia e geografia. Ele introduziu o sistema de latitude e longitude, usado hoje na cartografia, e usou mecanismos de projeção e transformações estereográficas. As cônicas de Apolônio também foram utilizadas por Kepler (1571 - 1630 d.C.) na óptica e construção de espelhos parabólicos.

Em 1609 Kepler apresenta a principal lei da astronomia: "os planetas descrevem órbitas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos". Foco é uma palavra que vem do latim, *foccus* significa fogo ou lareira, usada por ele no sentido de "ponto de convergência".

"Desprezando a resistência do ar, a trajetória de um projétil é uma parábola", afirmação feita por Galileu (1564 - 1642 d.C.) que também fez uso das cônicas em seus estudos. Sendo assim, investigadas extensamente pelos gregos, as secções cônicas revelaram propriedades que nos permitem defini-las em termos de pontos e retas.

Fato importante é que, embora estudadas há mais de dois mil anos, as secções cônicas não se tornaram obsoletas, ao contrário, têm grande importância nas investigações atuais sobre o espaço exterior e no estudo do comportamento das partículas atômicas. Além disso também aplicamos as cônicas para estudos com aviões à jato supersônico, iluminação através de candeeiros, faróis de carro e lanternas, satélites artificiais lançados para o espaço, sistema marítimo de localização, usinas atômicas, astronomia, economia, antenas parabólicas e outros, diversificando o uso dessas curvas.

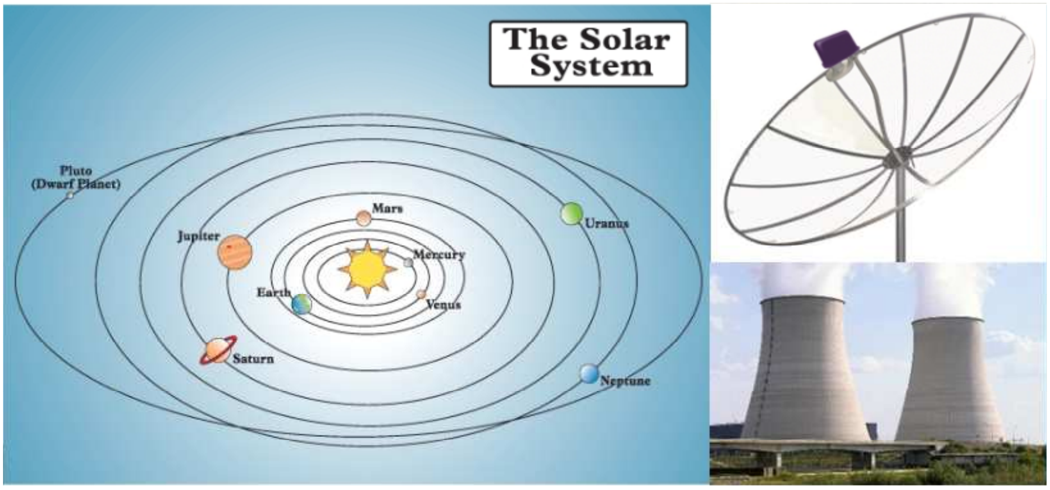

Figura 5 – Exemplos

Este trabalho está organizado em dois capítulos. No capítulo 1, fizemos um estudo das cônicas, isto é, da parábola, elipse e hipérbole. Para cada uma destas cônicas apresentamos inicialmente a sua definição, a representação gráfica e seus elementos, e em seguida deduzimos a partir da definição, a equação reduzida destas cônicas, bem como deduzimos outras formas para esta equação. Além disso, apresentamos alguns exemplos com o objetivo de mostrar de forma prática os conceitos estudados que são pré-requisitos necessários para a continuidade do trabalho, que é aplicar estes conceitos na resolução de problemas. No capítulo 2, finalmente estudamos algumas aplicações das cônicas, em particular na engenharia civil, na astronomia e nos sistemas de navegação, onde apresentamos alguns problemas e usamos as definições estudadas no capítulo 1 para encontrar a solução dos mesmos.

1 Cônicas

Neste capítulo faremos um estudo das cônicas, onde apresentaremos as definições, as representações gráficas, deduziremos suas equações e apresentaremos alguns exemplos.

1.1 Parábola

Definição 1 *Parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistante de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano, em que esse ponto fixo não pertence à reta fixa.*

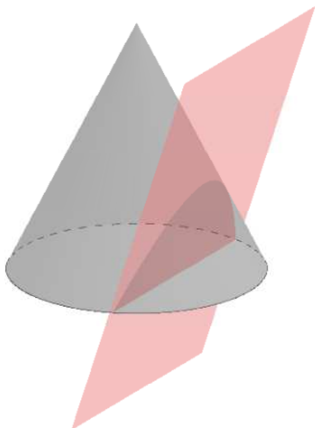

Figura 6 – Parábola

Consideremos um ponto F e uma reta d, de modo que F não pertence a d. Então, um ponto P qualquer pertence à parábola, se e somente se,

$$d(P, F) = d(P, d),$$

onde $d(P, F)$ é a distância[1] entre os pontos P e F e $d(P, d)$ é a distância entre P e a reta d.

Graficamente:

[1] Dados dois pontos, A e B, a distância entre eles, que será indicada por $d(A, B)$, é a medida do segmento de extremidades A e B.

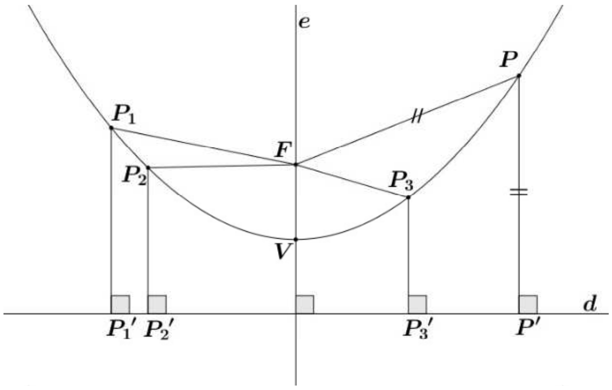

Figura 7 – Distâncias

Desta forma, sendo P' o pé da perpendicular baixa de P sobre a reta d, temos:

$$d(P, F) = d(P, P'), \tag{1.1}$$

1.2 Elementos

Pela Figura 7 pode-se identificar os seguintes elementos:

F é o *foco*;

d é a reta *diretriz*;

e é o *eixo* da parábola, isto é, uma reta que passa por F e é perpendicular a d;

V é o *vértice*, que é o ponto de interseção da parábola com e.

1.3 Equações reduzidas da parábola

Tomemos um sistema cartesiano como o da Figura 8. Seja a parábola de vértice $V(0,0)$, cujo eixo da parábola é o eixo das ordenadas (eixo dos y) passando pelo foco $F\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$ e diretriz de equação $y = -\dfrac{p}{2}$. Consideremos um ponto $P(x, y)$ qualquer da parábola e $P'\left(x, -\dfrac{p}{2}\right)$ um ponto pertencente a d.

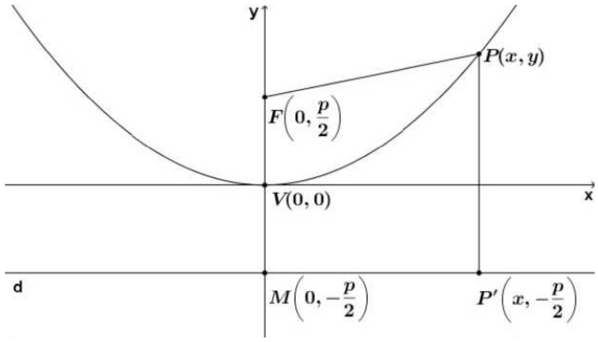

Figura 8 – Parábola com foco no eixo dos y

De acordo com a definição de parábola expressa pela igualdade 1.1 vem,

$$d(P, F) = d(P, d).$$

Usando a fórmula da distância entre dois pontos,

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = (x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

o que resulta em

$$x^2 = 2py, \tag{1.2}$$

que é a *equação reduzida* quando o eixo da parábola é o eixo dos y.

Da equação 1.2 podemos fazer as seguintes considerações:

$a)$ O número real p é chamado parâmetro e p é diferente de 0[2];

$b)$ $py \geq 0$, assim o parâmetro p e a ordenada y de P têm sinais iguais. Se $p > 0$ a parábola tem concavidade para cima e, se $p < 0$, para baixo.

[2] É fácil ver que se $p = 0$, a equação reduzida da parábola não representaria uma parábola.

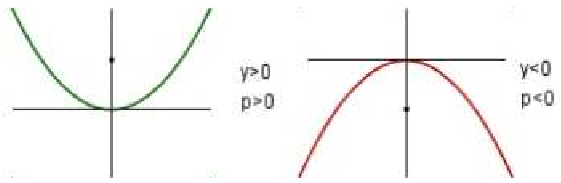

Figura 9 – Concavidade da parábola

c) O gráfico da equação da parábola é simétrico em relação ao eixo Oy, ou seja, se o ponto (x, y) pertence ao gráfico, o ponto $(-x, y)$ também pertence.

Agora, seja a parábola de vértice V(0,0), cujo eixo da parábola é o eixo das abscissas (eixo dos x) passando pelo foco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ e diretriz de equação $x = -\frac{p}{2}$. Consideremos um ponto $P(x, y)$ qualquer da parábola e $P'\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ um ponto pertencente a d.

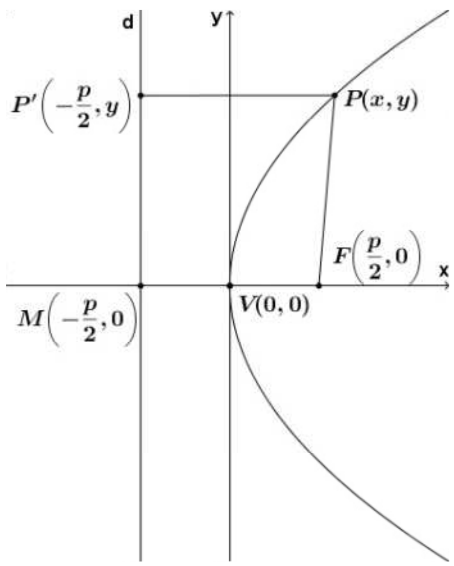

Figura 10 – Parábola com foco no eixo dos x

Obteremos de forma análoga ao caso em que o foco é sobre o eixo dos y, a equação

$$y^2 = 2px \tag{1.3}$$

que é a equação *reduzida* para este outro caso.

Acerca da equação 1.3 conclui-se que: se $p > 0$, a parábola tem concavidade para a direita e se $p < 0$, a concavidade é para a esquerda.

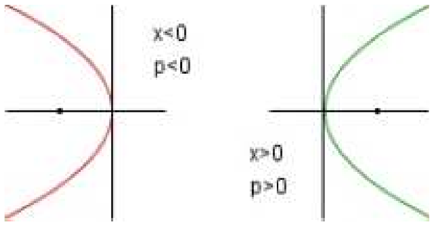

Figura 11 – Abertura

1.3.1 Exemplo

1) Para a parábola de equação $x^2 - 10y = 0$, encontrar o foco e uma equação da diretriz.

Solução:

Podemos reescrever a equação como $x^2 = 10y$, ou seja, a parábola tem foco sobre o eixo Oy. A equação é da forma $x^2 = 2py$, portanto

$$2p = 10$$

$$\Rightarrow p = 5$$

e

$$\frac{p}{2} = \frac{5}{2}.$$

Logo, o foco é

$$F\left(0, \frac{5}{2}\right).$$

Para este caso a equação da diretriz é dada por $y = -\dfrac{p}{2}$, isto é,

$$y = -\frac{5}{2},$$

o que implica,

$$2y + 5 = 0,$$

que é a equação da diretriz.

1.4 Outras formas da equação da parábola

Consideremos um ponto qualquer $O'(s, t)$, do plano cartesiano xOy. É possível introduzir um plano $x'O'y'$ de modo que $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida, a mesma direção e mesmo sentido de Ox e Oy. Assim, todo ponto P do plano tem representações $P(x, y)$ no sistema xOy e $P(x', y')$ no sistema $x'O'y'$. A isso chamamos de translação de eixos.

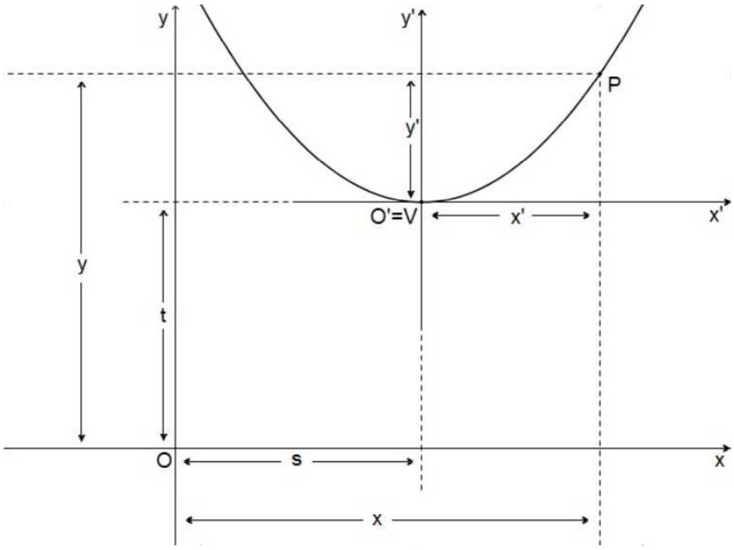

Figura 12 – Translação de eixos

Pela análise da figura 12, temos

$$x = x' + s \qquad \text{e} \qquad \mathrm{y} = y' + t$$

ou

$$x' = x - s \qquad \text{e} \qquad y' = y - t$$

que são as *fórmulas de translação.*

Seja uma parábola de vértice $V(s, t) \neq (0, 0)$. Consideremos que o eixo da parábola é paralelo a um dos eixos coordenados, como na figura 12. Vamos, para este caso, usar um eixo y' paralelo ao eixo dos y, consequentemente, o eixo da parábola é paralela ao eixo dos y. Com origem no ponto V, tracemos o sistema $x'O'y'$ $(O' = V)$.

Em relação a esse novo sistema, a parábola tem vértice na origem e, como vimos anteriormente, a equação reduzida da parábola é

$$x'^2 = 2py' \tag{1.4}$$

substituindo as fórmulas de translação na equação 1.4, temos

$$(x - s)^2 = 2p(y - t) \tag{1.5}$$

que é a *forma padrão* para este caso se observado o sistema xOy.

De modo análogo, consideremos que o eixo x' da parábola é paralelo ao eixo dos x. O sistema $x'O'y'$ também é válido para este caso, desta forma, a equação reduzida da parábola é

$$y'^2 = 2px' \tag{1.6}$$

substituindo as fórmulas de translação na equação 1.6, temos

$$(y-t)^2 = 2p(x-s) \tag{1.7}$$

que é a *forma padrão* para este outro caso.

Observação; Conforme o que vimos até agora, qualquer parábola cujo eixo coincide ou é paralelo aos eixos coordenados, poderá ser representada pela equação

$$ax^2 + cx + dy + f = 0; a \neq 0 \tag{1.8}$$

ou

$$by^2 + cx + dy + f = 0; b \neq 0, \tag{1.9}$$

que são chamadas de *equações gerais* da parábola com eixo sobre os y, ou paralelo, e sobre os x, ou paralelo, respectivamente.

Além disso, isolando y na equação 1.8, com $d \neq 0$, e x na equação 1.9, com $c \neq 0$, temos

$$y = \frac{-ax^2 - cx - f}{d} \Rightarrow y = -\frac{a}{d}x^2 - \frac{c}{d}x - \frac{f}{d}, \quad -\frac{a}{d} \neq 0$$

ou

$$x = \frac{-by^2 - dy - f}{c} \Rightarrow x = -\frac{a}{c}y^2 - \frac{d}{c}y - \frac{f}{c}, \quad -\frac{a}{c} \neq 0,$$

que são chamadas de *equações explícitas* da parábola com eixo sobre os y, ou paralelo, e sobre os x, ou paralelo, respectivamente. Logo, podemos fazer uma generalização dizendo que ambas são da forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

ou

$$x = ay^2 + by + c,$$

com $a \neq 0$ nos dois casos.

1.4.1 Exemplo

1) Determinar uma equação da parábola de vértice $V(4,-3)$, eixo paralelo ao eixo dos x, passando pelo ponto $P(2,1)$.

Solução:

Como o eixo da parábola é o eixo dos x e o vértice é $V(4,-3)$, sua equação é da forma

$$(y-t)^2 = 2p(x-s)$$

e neste caso, como $t=-3$ e $s=4$, temos,

$$(y+3)^2 = 2p(x-4).$$

Mas, como a parábola passa pelo ponto $P(2,1)$, substituindo $x=2$ e $y=1$ na última equação obtemos

$$4^2 = 2p(-2) \Rightarrow p = -4.$$

Portanto, a equação desta parábola é

$$(y+3)^2 = 2(-4)(x-4)$$

isto é,

$$(y+3)^2 = -8(x-4).$$

Desenvolvendo esta equação obtemos

$$y^2 + 6y + 8x - 23 = 0,$$

que é a *equação geral* desta parábola. E, isolando x, obtemos

$$x = -\frac{1}{8}y^2 - \frac{3}{4}y + \frac{23}{8},$$

que é a *equação explícita* desta parábola.

1.5 Equação paramétrica da parábola

Considerando a equação 1.2. Neste caso x pode assumir qualquer valor real, se fizermos $x=k$ (k é o parâmetro) temos $y = \dfrac{1}{2p}k^2$.

Então, as *equações paramétricas*[3] da parábola, para este caso, são dadas por

$$\begin{cases} x = k \\ y = \dfrac{1}{2p}k^2, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

De modo análogo, se considerarmos a equação 1.3 e fizermos $y = k$, temos

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2p}k^2 \\ y = k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Para estes dois casos a parábola tem vértice $V(0,0)$ e $p \neq 0$.

Agora, considerando que o vértice não está sob o ponto $V(0,0)$. Da equação 1.5, fazendo $x - s = k$, temos

$$\begin{aligned} k^2 &= 2p(y-t) \\ \Rightarrow (y-t) &= \frac{k^2}{2p} \\ \Rightarrow y &= \frac{k^2}{2p} + t. \end{aligned}$$

Logo, as equações paramétricas da parábola são, neste caso, dadas por

$$\begin{cases} x = k + s \\ y = \dfrac{k^2}{2p} + t, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Da mesma forma, da equação 1.7, fazendo $y - t = k$, temos

$$\begin{cases} x = \dfrac{k^2}{2p} + s \\ y = k + t, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Estas são as equações paramétricas para este caso.

[3] Equações que representam uma mesma reta por meio de uma incógnita em comum chamada de parâmetro.

1.5.1 Exemplo

1) Obter as equações paramétricas da parábola de equação:

a) $y^2 = -4x$

b) $(x+4)^2 = -2(y-1)$

Solução:

a) Neste caso, temos uma equação da forma $y^2 = 2px$. Fazendo $y = k$, com $k \in \mathbb{R}$, temos

$$k^2 = -4x \Rightarrow x = -\frac{1}{4}k^2.$$

Daí, as equações paramétricas desta parábola são dadas por

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4}k^2 \\ y = k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

b) Neste caso, temos uma equação da forma $(x-s)^2 = 2p(y-t)$. Fazendo $x+4 = k$, $k \in \mathbb{R}$, temos

$$k^2 = -2(y-1)$$
$$\Rightarrow k^2 = -2y + 2$$
$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}k^2 + 1.$$

Daí, as equações paramétricas desta parábola são dadas por

$$\begin{cases} x = k - 4 \\ y = -\dfrac{1}{2}k^2 + 1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

1.6 Elipse

Definição 2 *Elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.*

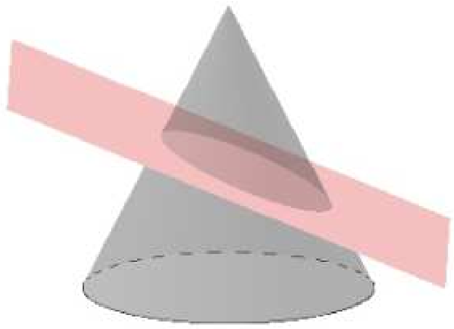

Figura 13 – Elipse

Considerando dois pontos distintos, F_1 e F_2, no plano, com distância $d(F_1, F_2) = 2c$, e um número real positivo a com $2a > 2c$. Associando à definição, podemos chamar de $2a$ a constante nela apresentada. Um ponto P pertence à elipse se, e somente se,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a. \qquad (1.10)$$

Graficamente:

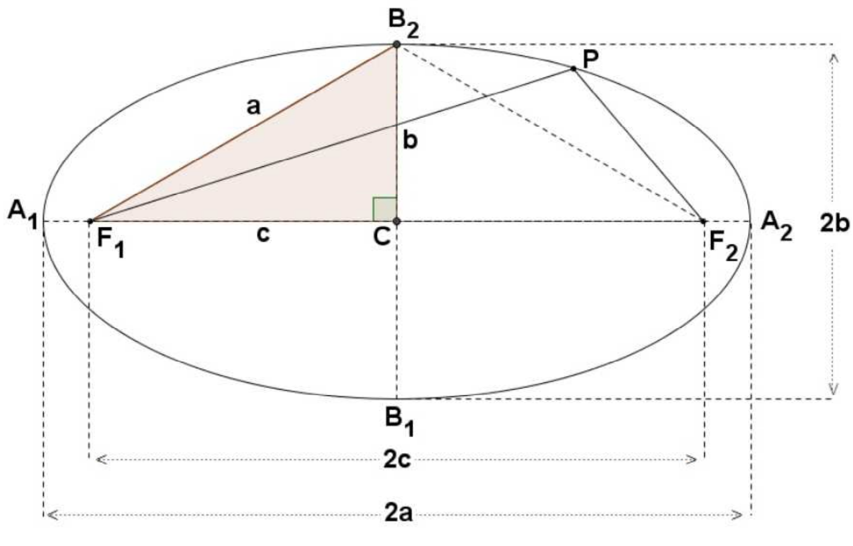

Figura 14 – Distâncias dos focos aos pontos

1.7 Elementos

Pela figura 14 pode-se identificar os seguintes elementos:

os pontos F_1 e F_2 são os *focos*;

a distância $2c$ entre os focos é a *distância focal*;

o ponto médio C é o *centro* do segmento F_1F_2;

o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ é o *eixo maior*;

o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ é o *eixo menor*;

os *vértices* são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2;

a *excentricidade* da elipse é o número real $e = \dfrac{c}{a}$ $(0 < e < 1)$.

É importante observar que a excentricidade dará forma a elipse. Elipses com excentricidade perto de 0 são quase circulares, já as elipses com excentricidade próxima de 1 são bastante “achatadas”. Por outro lado, se considerar infinitas elipses distintas com excentricidade fixada, em por exemplo $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, todas têm a mesma forma com tamanhos diferentes.

Ainda pela figura segue que $B_2F_1 = a = B_2F_2$ pois, pela definição da elipse, $B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$. Logo, pelo triângulo retângulo B_2CF_1 vem que

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{1.11}$$

Desta igualdade concluímos que $a > b$ e $a > c$.

1.8 Equação reduzida da elipse

Tomemos um sistema cartesiano como o da Figura 15. Seja uma elipse de centro $C(0, 0)$, com eixo maior sobre o eixo das abscissas (Eixo dos x), de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Consideremos um ponto $P(x, y)$ qualquer da elipse.

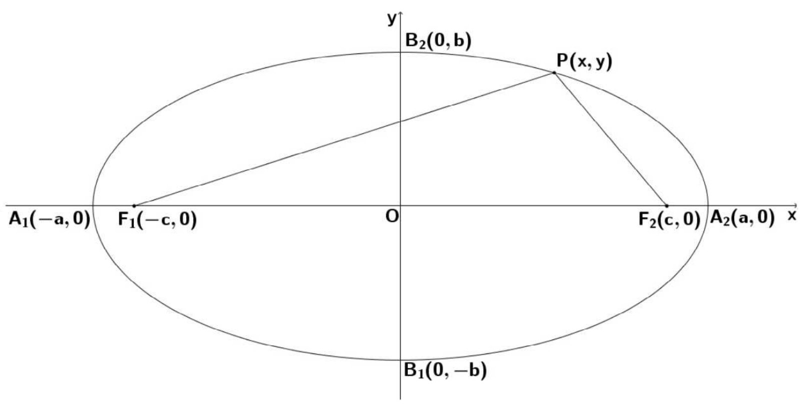

Figura 15 – Elipse com foco no eixo dos x

De acordo com a definição da elipse expressa pela igualdade 1.10 vem,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Usando as fórmulas de distância, obtemos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} = 2a - \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$\Rightarrow a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$\Rightarrow (a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2})^2 = (a^2 - cx)^2$$

$$\Rightarrow a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\Rightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\Rightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Como por 1.11 temos $a^2 = b^2 + c^2$, então $a^2 - c^2 = b^2$, substituindo na última igualdade acima, temos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros desta equação por a^2b^2, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.12}$$

que é a *equação reduzida* da elipse para este caso.

Agora, tomemos um sistema cartesiano como o da Figura 16. Nesse caso, consideremos uma elipse de centro $C(0, 0)$, com eixo maior sobre o eixo das ordenadas (eixo dos

y), de focos $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$. Consideremos um ponto $P(x,y)$ qualquer da elipse, com procedimento análogo ao caso anterior, obtemos a equação

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \tag{1.13}$$

que é a *equação reduzida* da elipse para este caso.

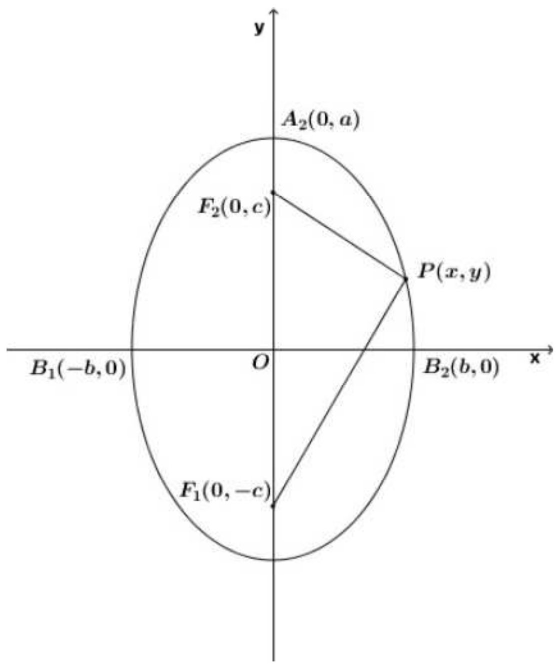

Figura 16 – Elipse com foco no eixo dos y

1.8.1 Exemplo

1) Determine a equação da elipse com centro na origem, que passa pelo ponto $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ e tem um foco $F_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$.

Solução:

Note que a elipse tem eixo maior sobre o eixo dos x, pois $F_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$. Desta forma, obedecendo a simetria da elipse, pois seu centro é a origem, podemos dizer que $F_2\left(\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$ é o outro foco.

Pela equação 1.10, $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2c$, então, considerando $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, temos:

$$\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2}=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{7+2\sqrt{6}}{6}} + \sqrt{\frac{7-2\sqrt{6}}{6}} = 2a.$$

Elevando ambos os membros da última equação ao quadrado,

$$\left(\sqrt{\frac{7+2\sqrt{6}}{6}} + \sqrt{\frac{7-2\sqrt{6}}{6}}\right)^2 = (2a)^2$$

$$\Rightarrow \frac{7+2\sqrt{6}}{6} + \frac{10}{6} + \frac{7-2\sqrt{6}}{6} = 4a^2$$

$$\Rightarrow \frac{24}{6} = 4a^2,$$

$$\Rightarrow 4 = 4a^2$$

$$\Rightarrow 1 = a^2,$$

ou simplesmente,

$$a = \pm 1.$$

Como P pertence à elipse, podemos substituir os valores de x e y na equação 1.12. Sendo assim,

$$\frac{(\frac{1}{2})^2}{a^2} + \frac{(\frac{1}{2})^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{4}}{a^2} + \frac{\frac{1}{4}}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1.$$

Substituindo o valor de a na equação acima, temos

$$\frac{1}{4 \cdot (1)^2} + \frac{1}{4b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4b^2} = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4b^2} = \frac{3}{4}.$$

Multiplicamos os dois membros da igualdade por 4, obtemos

$$\frac{1}{b^2} = 3 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{1}{3}},$$

ou ainda,

$$b = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Substituindo o valor de a e de b na equação 1.12, encontramos $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$, isto é,

$$x^2 + 3y^2 = 1,$$

que é a equação da elipse com os valores dados.

2) Determine a equação da elipse conhecendo os vértices $A_1(5,0)$ e $A_2(-5,0)$ e a excentricidade $e = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Solução: Observe que $A_1(-a,0) = A_1(5,0)$ e $A_2(a,0) = A_2(-5,0)$. Portanto, $a = -5$. Temos que $e = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, daí

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Substituindo o valor de a na igualdade anterior, temos

$$-\frac{c}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow c = -\sqrt{5}.$$

Pela equação 1.11,

$$(-5)^2 = b^2 + (-\sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow 25 = b^2 + 5$$

$$\Rightarrow b^2 = 25 - 5$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{20}$$

$$\Rightarrow b = 2\sqrt{5}.$$

Substituindo estes valores na equação da elipse, obtemos

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{20} = 1.$$

1.9 Outras formas da equação da elipse

Seja uma elipse de centro $O'(s,t) \neq (0,0)$. Consideraremos apenas os casos em que os eixos da elipse são paralelos aos eixos coordenados.

Tomemos uma elipse que possui eixo maior paralelo ao eixo dos x. Utilizando translação de eixos, obtemos um novo sistema $x'O'y'$ como o da figura 17 no qual a elipse tem centro na origem e eixo maior sobre o eixo $O'x'$.

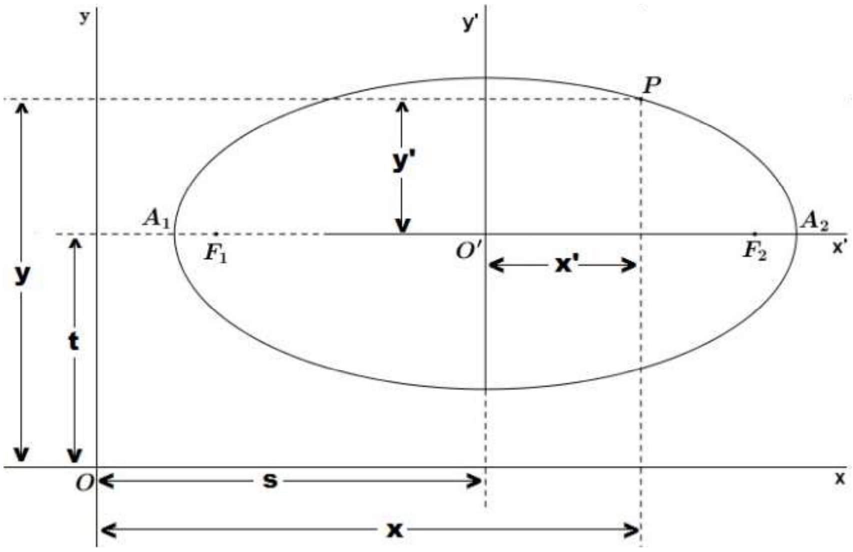

Figura 17 – Translação de eixos (Elipse)

Desta forma, sua equação reduzida é

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \tag{1.14}$$

Essa equação pode ser expressa em relação ao sistema original xOy utilizando as fórmulas de translação $x' = x - s$ e $y' = y - t$, resultando em

$$\frac{(x-s)^2}{a^2} + \frac{(y-t)^2}{b^2} = 1$$

que é a *forma padrão* para este caso.

De modo análogo, tomemos uma elipse que possui eixo maior paralelo ao eixo dos y. Utilizando translação de eixos, obtemos um novo sistema $x'O'y'$ no qual a elipse tem centro na origem e eixo maior sobre o eixo $O'y'$. Desta forma, sua equação reduzida é

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$$

Essa equação pode ser expressa utilizando as fórmulas de translação, resultando em

$$\frac{(x-s)^2}{b^2} + \frac{(y-t)^2}{a^2} = 1$$

que é a *forma padrão* para este caso.

Desenvolvendo a forma padrão da elipse,

$$\frac{(x-s)^2}{a^2}+\frac{(y-t)^2}{b^2}=1,$$

temos

$$(x-s)^2b^2+(y-t)^2a^2=a^2b^2$$

$$\Rightarrow (x^2-2sx+s^2)b^2+(y^2-2ty+t^2)a^2-a^2b^2=0$$

$$\Rightarrow b^2x^2+a^2y^2-2b^2sx-2a^2ty+b^2s^2+a^2t^2-a^2b^2=0.$$

Por abuso de notação, faremos $a=b^2$, $b=a^2$, $c=-2b^2s$, $d=-2a^2t$ e $f=b^2s^2+a^2t^2-a^2b^2$, o que resulta em

$$ax^2+by^2+cx+dy+f=0$$

que é a *equação geral* da elipse, desde que a e b tenham o mesmo sinal.

Se tivermos interesse em desenvolver a equação $\dfrac{(x-s)^2}{b^2}+\dfrac{(y-t)^2}{a^2}=1$, de forma análoga chegaremos e esta mesma equação geral apresentada acima. Assim, qualquer elipse que possui eixos sobre os eixos coordenados ou paralelos a eles, sempre pode ser representada pela equação geral da elipse, desde que a e b tenham o mesmo sinal.

1.9.1 Exemplo

1) Dada a elipse de equação $9x^2+16y^2-36x+96y+36=0$, determinar a sua equação reduzida.

Solução:

Inicialmente escrevemos a equação dada, na forma

$$9x^2-36x+16y^2+96y=-36$$

ou

$$9(x^2-4x)+16(y^2+6y)=-36.$$

Construindo trinômios quadrados nestes dois parênteses, temos

$$x^2-4x=(x-2)^2-4$$

e

$$y^2+6y=(y+3)^2-9,$$

daí, substituindo os parênteses, obtemos

$$9[(x-2)^2-4]+16[(y+3)^2-9]=-36$$

$$\Rightarrow 9(x-2)^2+16(y+3)^2=-36+36+144$$

$$\Rightarrow 9(x-2)^2+16(y+3)^2=144$$

e dividindo ambos os membros por 144, obtemos

$$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1,$$

que é a forma padrão de uma elipse de eixo maior paralelo ao eixo dos x.

Agora, utilizando na última equação as fórmulas de translação

$$x'=x-2 \qquad \text{e} \qquad y'=y+3,$$

obtemos

$$\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{9}=1$$

que é a equação reduzida desta elipse.

1.10 Equação paramétrica da elipse

Considerando uma elipse dada pela equação 1.12, tracemos uma de centro O e raio igual ao semi-eixo maior da elipse (semi-eixo a).

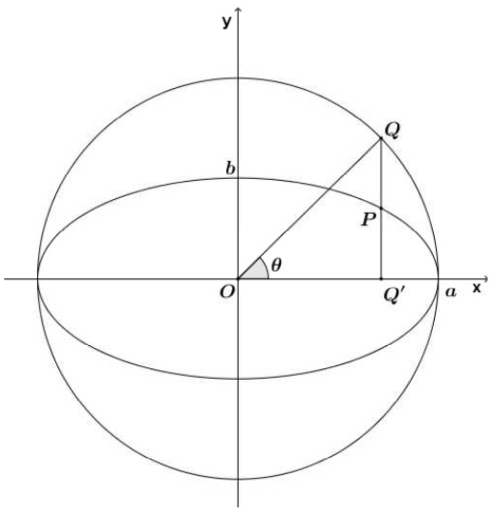

Figura 18 – Parametrização

Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da elipse descrita. A reta que passa por P e é paralela ao eixo das ordenadas, intercepta a circunferência em Q e o raio OQ determina com o eixo dos x um ângulo θ. Desta forma obtemos um triângulo $Q'OQ$ e, usando as razões trigonométricas do triângulo retângulo, temos

$$\cos\theta = \frac{OQ'}{OQ} \qquad \text{ou} \qquad OQ' = OQ \cdot \cos\theta.$$

Note que $OQ = a$. Fazendo $OQ' = x$, temos pela substituição na última igualdade que,

$$x = a\cos\theta.$$

Substituindo esse valor na equação 1.12, temos

$$\begin{aligned} \frac{(a\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \Rightarrow \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \Rightarrow \cos^2\theta + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \cos^2\theta. \end{aligned}$$

Mas usando a identidade trigonométrica $1 - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} = \operatorname{sen}^2\theta \\ \Rightarrow y^2 = b^2\operatorname{sen}^2\theta \\ \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{b^2\operatorname{sen}^2\theta} \\ \Rightarrow y = b\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Observemos que, para cada valor de θ corresponde um, e só um, ponto P da elipse e, quando θ varia de 0 a 2π, o ponto P parte de $(a, 0)$ "traçando" a elipse no sentido anti-horário. Logo, θ é o parâmetro e o sistema apresenta-se da seguinte forma

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

constituindo as *equações paramétricas* dessa elipse.

No caso da elipse ter eixo maior sobre o eixo das ordenadas, suas equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = b\cos\theta \\ y = a\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Quando o centro da elipse for $C(s, t)$, pela translação de eixos, se o eixo maior for paralelo ao eixo Ox, obtemos

$$\begin{cases} x - s = a\cos\theta \\ y - t = b\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} x = s + a\cos\theta \\ y = t + b\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

se o eixo maior for paralelo ao eixo Oy, temos

$$\begin{cases} x = s + b\cos\theta \\ y = t + a\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Seguindo o mesmo processo aqui utilizado, poderemos obter o sistema de equações

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = b\cos\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

desde que o ponto P parta de $(0, b)$ e "trace" a elipse no sentido horário.

1.10.1 Exemplo

1) Obter as equações paramétricas das elipses:

a) $x^2 + 4y^2 = 4$

b) $9(x - 1)^2 + 25(y + 1)^2 = 225$

Solução:

a) Dividindo ambos os membros da equação dada por 4, obtemos a forma reduzida da equação, que é dada por

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

e portanto, o centro da elipse é $(0, 0)$, $a^2 = 4$ e $b^2 = 1$, isto é, $a = 2$ e $b = 1$. Logo,

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \ \operatorname{sen}\theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

são as equações paramétricas desta elipse.

b) Dividindo ambos os membros da equação dada por 225, obtemos a forma padrão da equação, que é dada por

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$

Portanto, o centro da elipse é (1,-1), $a^2 = 25$ e $b^2 = 9$, isto é, $a = 5$ e $b = 3$. Logo,

$$\begin{cases} x = 1 + 5\cos\theta \\ y = -1 + 3\operatorname{sen}\theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

são as equações paramétricas desta elipse.

1.11 Hipérbole

Definição 3 *Hipérbole é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.*

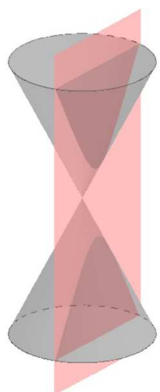

Figura 19 – Hipérbole

Considerando dois pontos distintos, F_1 e F_2, no plano, com distância $d(F_1, F_2) = 2c$, e um número real positivo a com $2a < 2c$. Associando à definição, podemos chamar de $2a$ a constante nela apresentada. Um ponto P pertence à hipérbole se, e somente se,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a. \tag{1.15}$$

Graficamente:

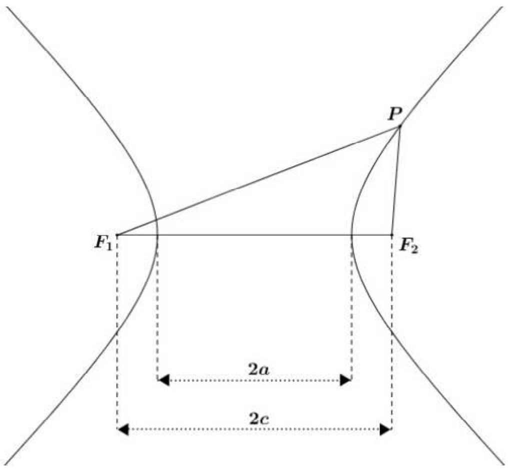

Figura 20 – Distâncias

Pela figura anterior, observamos que a hipérbole é uma curva com dois ramos.

Faz-se necessário então, a apresentação da figura a seguir para fazer considerações mais precisas acerca da hipérbole.

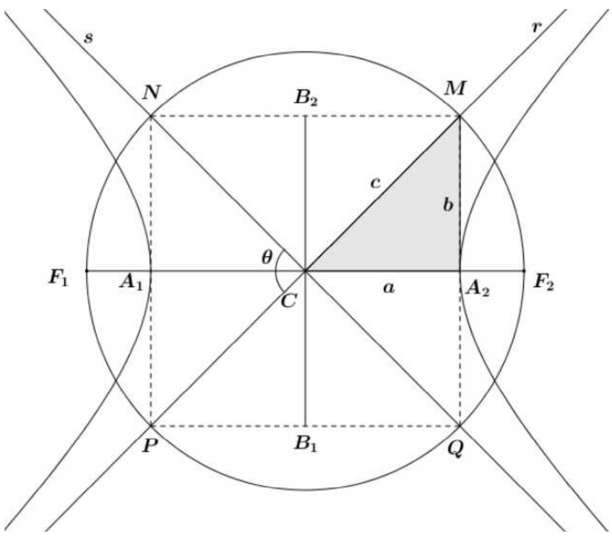

Figura 21 – Elementos da hipérbole

Chamando de C o ponto médio do segmento F_1F_2, tracemos uma circunferência de centro C e raio c. Seja um valor qualquer a, em que $a < c$, e marquemos os pontos A_1 e A_2 distintos, tais que $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$. Por esses pontos tracemos cordas perpendiculares ao diâmetro F_1F_2. As quatro extremidades destas cordas são os vértices do retângulo $MNPQ$ inscrito nesta circunferência. Contendo as diagonais deste retângulo, tracemos as retas r e s e, finalmente, a hipérbole.

1.12 Elementos

Pela figura 21 pode-se identificar os seguintes elementos:

F_1 e F_2 são os focos;

a distância $2c$ entre os focos é a *distância focal*;

o ponto médio C do segmento F_1F_2 é o *centro*;

A_1 e A_2 são os *vértices*;

o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ é o *eixo real ou transverso* (note que os pontos A_1 e A_2, pela definição, pertencem à hipérbole);

o segmento B_1B_2 de comprimento 2b é o eixo *imaginário ou não-transverso*. $B_1B_2 \perp A_1A_2$ em C;

as retas r e s são as assíntotas[4];

θ é o ângulo chamado de *abertura* da hipérbole;

a *excentricidade* da hipérbole é o número real $e = \dfrac{c}{a}$ $(e > 1)$. A excentricidade da hipérbole está inteiramente relacionada à abertura, uma vez que, quanto maior a excentricidade, maior será a abertura (ramos mais abertos).

Veja que, se tomarmos um a menor que o da figura 21, o novo quadrilátero seria mais estreito, como consequência, a abertura θ seria maior. Como $e = \dfrac{c}{a}$, o valor de e aumentaria.

O quadrilátero $MNPQ$ tem dimensões $2a$ e $2b$, sendo a a medida do semi-eixo real e b a medida do semi-eixo imaginário. Ainda é possível obter do triangulo CA_2M, a

[4] Neste caso, assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos vértices. Esta aproximação é "contínua" e "lenta" de forma que a tendência da hipérbole é tangenciar suas assíntotas no infinito.

relação

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{1.16}$$

Quando $a = b$, o retângulo $MNPQ$ é um quadrado e as assíntotas são perpendiculares, ou seja, $\theta = 90°$. Neste caso chamamos a hipérbole de *hipérbole equilátera*.

1.13 Equações reduzidas da hipérbole

Tomemos um sistema cartesiano como o da Figura 22. Seja uma hipérbole de centro $C(0,0)$, com eixo maior sobre o eixo das abscissas, de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$. Consideremos um ponto $P(x,y)$ qualquer da hipérbole.

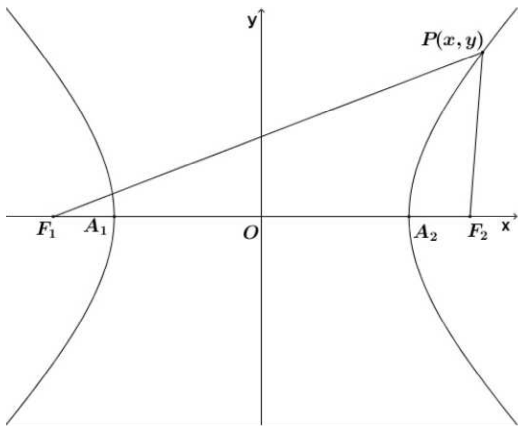

Figura 22 – Hipérbole com foco no eixo dos x

De acordo com a definição da hipérbole expressa pela igualdade 1.15 vem,

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a.$$

Usando a definição de distância, temos:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} - \sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\right| = 2a.$$

Note que $|k| = \pm k$, $\forall k \in \mathbb{R}$. Desta forma,

$$\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} - \sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} = \sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} \pm 2a$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} \pm 2a\right)^2$$
$$\Rightarrow x^2+2cx+c^2+y^2 = x^2-2cx+c^2+y^2 \pm 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}+4a^2$$
$$\Rightarrow 4cx-4a^2 = \pm 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$
$$\Rightarrow cx-a^2 = \pm a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$
$$\Rightarrow (cx-a^2)^2 = \left(\pm a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\right)^2$$
$$\Rightarrow c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$
$$\Rightarrow c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$\Rightarrow c^2x^2-a^2x^2+a^2y^2 = a^2c^2-a^2$$
$$\Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2).$$

Como por 1.16 temos $c^2 = a^2+b^2$, então $c^2-a^2 = b^2$, o que resulta em

$$b^2x^2-a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2, vem

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.17}$$

que é a *equação reduzida* da hipérbole para este caso.

Agora tomemos um sistema cartesiano como o da figura 23.

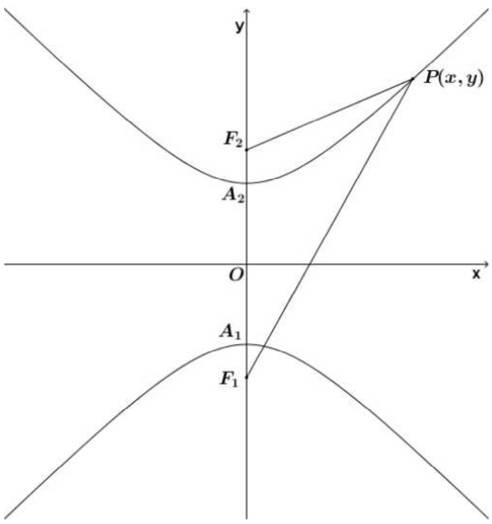

Figura 23 – Hipérbole com foco no eixo dos y

Seja uma hipérbole de centro $C(0,0)$, com eixo maior sobre o eixo das ordenadas, de focos $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$. Consideremos um ponto $P(x,y)$ qualquer da hipérbole, com procedimento análogo ao caso anterior, obtemos a equação reduzida

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{1.18}$$

que é a *equação reduzida* da hipérbole para este caso.

1.13.1 Exemplos

1) Obtenha a distância focal da hipérbole cuja equação é $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Solução:

Como vimos, a distância focal é o valor $2c$.

Observe que a hipérbole tem focos sobre o eixo dos x, portanto tem equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Comparando a equação acima com a equação dada no enunciado, vem $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$.

Pela equação 1.16,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Substituindo os valores encontrados, temos

$$c^2 = 16 + 9$$

$$\Rightarrow c^2 = 25$$

$$\Rightarrow c = \pm\sqrt{5}.$$

$$\Rightarrow c = \pm 5.$$

Portanto, a distância focal $2c = 10u.m.$.

2) Determine as coordenadas dos focos da hipérbole cuja equação é $144y^2 - 25x^2 = 3600$.

Solução:

Dividindo todos os membros da equação por 3600, da seguinte forma

$$\frac{144y^2}{3600} - \frac{25x^2}{3600} = \frac{3600}{3600},$$

obtemos a equação

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1,$$

que é a equação reduzida da hipérbole.

Observe que a hipérbole tem focos sobre o eixo dos y. Assim, a equação é dada por

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

e tem focos $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$.

Comparando esta equação com a equação encontrada ao dividir todos os membros por 3600, temos $a^2 = 25$ e $b^2 = 144$.

De acordo com a equação 1.16,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Substituindo os valores encontrados, temos

$$c^2 = 25 + 144$$

$$\Rightarrow c^2 = 169$$

$$\Rightarrow c = \pm\sqrt{169}.$$

$$\Rightarrow c = \pm 13.$$

Logo, $F_1(0, -13)$ e $F_2(0, 13)$.

1.14 Outras formas da equação da hipérbole

Seja uma hipérbole de centro $C'(s, t) \neq (0, 0)$. Consideraremos apenas os casos em que os eixos da hipérbole são paralelos aos eixos coordenados.

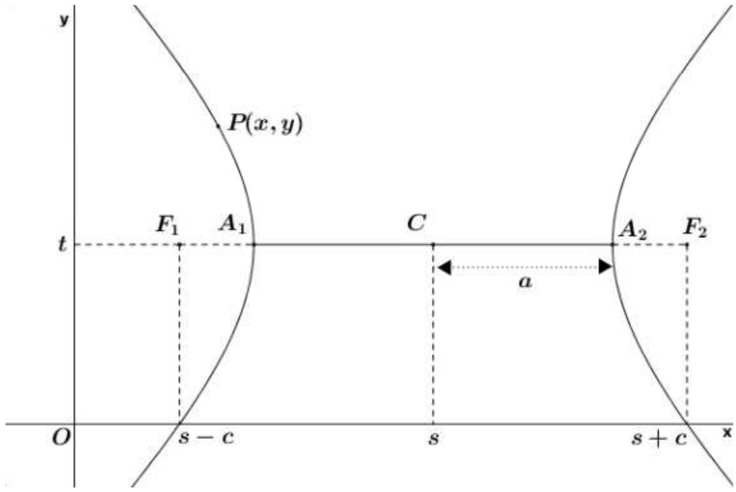

Figura 24 – Translação de eixos (Hipérbole)

Tomemos uma hipérbole que possui eixo real paralelo ao eixo dos x. Com procedimento análogo ao que foi visto para elipse, resulta a equação

$$\frac{(x-s)^2}{a^2} - \frac{(y-t)^2}{b^2} = 1$$

que é a *forma padrão* para este caso.

De modo análogo ao anterior, tomando uma hipérbole que possui eixo real paralelo ao eixo dos y temos a equação

$$\frac{(y-t)^2}{a^2} - \frac{(x-s)^2}{b^2} = 1$$

que é a *forma padrão* para este caso.

Agora, desenvolvendo a forma padrão da hipérbole,

$$\frac{(x-s)^2}{a^2} - \frac{(y-t)^2}{b^2} = 1,$$

temos,

$$(x-s)^2b^2 - (y-t)^2a^2 = a^2b^2$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2sx + s^2)b^2 - (y^2 - 2ty + t^2)a^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2sx + 2a^2ty + b^2s^2 - a^2t^2 - a^2b^2 = 0.$$

Por abuso de notação, faremos $a = b^2$, $b = -a^2$, $c = -2b^2s$, $d = 2a^2t$ e $f = b^2s^2 - a^2t^2 - a^2b^2$. O que resulta em

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0$$

que é a *equação geral* da hipérbole, desde que a e b tenham sinais contrários.

Se tivermos interesse em usar a outra forma padrão, de forma análoga chegaremos na mesma equação geral, ou seja, toda hipérbole pode ser escrita desta forma.

Assim como nos casos anteriores, utilizando as fórmulas de translação $x' = x - s$ e $y' = y - t$, vale lembrar que a *equação reduzida* da hipérbole é

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

se o eixo real for paralelo ao eixo dos x e

$$\frac{y'^2}{b^2} - \frac{x'^2}{a^2} = 1$$

se o eixo real for paralelo ao eixo dos y.

1.14.1 Exemplos

1) Determinar a equação geral da hipérbole de vértice $A_1(3, -2)$ e $A_2(5, -2)$ e um foco em $F(7, -2)$.

Solução:

Sendo o eixo real A_1A_2 paralelo ao eixo Ox, a equação da hipérbole é da forma

$$\frac{(x-s)^2}{a^2} - \frac{(y-t)^2}{b^2} = 1,$$

cujo centro é o ponto médio de A_1A_2, isto é, $\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2-2}{2}\right) = (4, -2)$. Segue das definições estudadas que $a = d(C, A_1)$ e $c = d(C, F)$, onde C é o centro da hipérbole, daí, usando a fórmula de distância, temos

$$a = \sqrt{(4-3)^2 + (-2-(-2))^2} = 1 \text{ e } c = \sqrt{(7-4)^2 + (-2-(-2))^2} = 3$$

e como $c^2 = a^2 + b^2$, também temos

$$9 = 1 + b^2 \Rightarrow b^2 = 8 \Rightarrow b = 2\sqrt{2}.$$

Logo, uma equação da hipérbole é

$$\frac{(x-4)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{8} = 1,$$

que é a equação padrão.

Desenvolvendo a última equação obtemos:

$$8(x^2 - 8x + 64) - (y^2 + 4y + 4) = 8$$

de onde segue que

$$8x^2 - y^2 - 64x - 4y + 116 = 0,$$

que é a equação geral desta hipérbole.

1.15 Equações paramétricas da hipérbole

Considerando uma hipérbole dada pela equação 1.17 (com eixo maior sobre o eixo das abscissas), escrevendo esta equação como

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \tag{1.19}$$

queremos dizer que $\frac{x}{a}$ e $\frac{y}{b}$ são número reais cuja diferença de seus quadrados é sempre igual a 1.

Da igualdade $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Dividindo ambos os membros por $\cos^2\theta \neq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} &= \frac{1}{\cos^2\theta} \\ \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 &= \frac{1}{\cos^2\theta} \\ \Rightarrow \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 &= \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2. \end{aligned}$$

Como $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ e $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$, vem que

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1.$$

Comparando-a com a equação 1.19, podemos fazer

$$\frac{x}{a} = \sec\theta$$

e

$$\frac{y}{b} = \tan\theta.$$

Daí concluímos que

$$\begin{cases} x = a \sec \theta \\ y = b \tan \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

constituindo as *equações paramétricas* dessa hipérbole.

Caso a hipérbole possua eixo real sobre o eixo dos y, de modo análogo, concluímos que suas equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = b \tan \theta \\ y = a \sec \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Quando o centro da hipérbole for $C(s,t)$, pela translação de eixos obtemos as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = s + a \sec \theta \\ y = t + b \tan \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ou

$$\begin{cases} x = s + b \tan \theta \\ y = t + a \sec \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

conforme o eixo real seja paralelo a Ox ou Oy, respectivamente.

Quando θ percorre o intervalo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ será descrito o ramo direito da hipérbole $(x \geq a)$ e quando percorre o intervalo $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, o ramo esquerdo $(x \leq -a)$.

1.15.1 Exemplo

1) Obter as equações paramétricas das hipérboles:

a) $3y^2 - x^2 = 9$

b) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 50y - 241 = 0$

Solução:

a) Dividindo ambos os membros da equação dada por 9, obtemos a forma reduzida da equação, que é dada por

$$\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{9} = 1,$$

e portanto, o centro da hipérbole é $(0,0)$, $a^2 = 3$ e $b^2 = 9$, isto é, $a = \sqrt{3}$ e $b = 3$. Logo,

$$\begin{cases} x = 3\tan\theta \\ y = \sqrt{3}\sec\theta, \end{cases} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

são as equações paramétricas desta hipérbole.

b) Iniciemos escrevendo a equação na forma

$$(9x^2 - 18x) - (25y^2 + 50y) = 241$$

ou

$$9(x^2 - 2x) - 25(y^2 + 2y) = 241$$

onde agrupamos os termos de mesma variável e colocamos em evidência os fatores 9 e 25, além de subtrairmos 241 em ambos os membros da equação. Então, temos

$$9(x^2 - 2x + 1) - 25(y^2 + 2y + 1) = 241 + 9(1) - 25(1)$$

ou

$$9(x-1)^2 - 25(x+1)^2 = 225.$$

Dividindo ambos os membros da equação dada por 225, obtemos a forma padrão da equação, que é dada por

$$\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$

Portanto, o centro da hipérbole é (1,-1), $a^2 = 25$ e $b^2 = 9$, isto é, $a = 5$ e $b = 3$. Logo,

$$\begin{cases} x = 1 + 5\sec\theta \\ y = -1 + 3\tan\theta, \end{cases} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

são as equações paramétricas desta hipérbole.

Tudo o que foi estudado até aqui, as fórmulas reduzidas, a excentricidade, as coordenadas dos focos e vértices etc., serve de suporte para as aplicações que serão apresentadas no próximo capítulo.

2 Aplicações

Diversas vezes em nosso dia a dia nos deparamos com o uso das cônicas. Neste capítulo iremos abordar algumas aplicações corriqueiras que estão presentes em várias áreas e usaremos os conceitos estudados no Capítulo 1 para resolver estes problemas. Esses objetos matemáticos dão suporte para muitos estudos e não será possível falar de todos aqui, contudo foram escolhidos alguns para dar ênfase ao vasto uso.

2.1 Aplicações da Parábola

Encontram-se diversas aplicações da parábola na construção civil. De acordo com o livro Educação Profissional do Ministério da Educação "a área de Construção Civil abrange todas as atividades de produção de obras. Estão incluídas nesta área as atividades referentes às funções planejamento e projeto, execução e manutenção e restauração de obras em diferentes segmentos, tais como edifícios, estradas, portos, aeroportos, canais de navegação, túneis, instalações prediais, obras de saneamento, de fundações e de terra em geral[...]", entre elas podemos destacar o uso de parábolas na construção de pontes.

Além da questão estética, a parábola dá suporte na construção de pontes de grande porte pois faz com que esse tipo de construção fique estabilizada, já que elas são frequentemente suspensas acima das águas ou em alturas muito elevadas.

Figura 25 – Gateshead Millennium Bridge, Inglaterra. Fonte: Enciclopédia Culturama.

A seguir será descrito um exemplo contextualizado desse tipo de situação.

Uma seção de pontes suspensa tem seu peso distribuído uniformemente entre duas torres distantes 120 metros uma da outra e situadas a 27 metros acima da rodovia horizontal. Um cabo suspenso entre os topos das torres tem a forma de uma parábola, com o ponto central a 3 metros acima da rodovia. Introduzido um sistema de eixos coordenados, conforme figura abaixo:

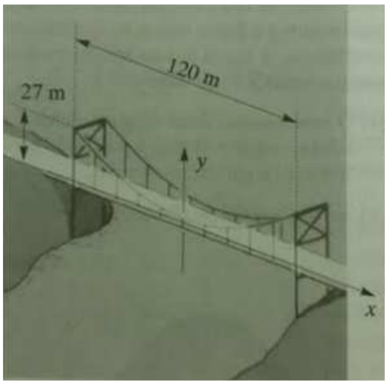

Figura 26 – Ilustração 1

(a) Achar a equação da parábola.

Solução: Supondo que a parábola tem foco sobre o eixo y, obtemos o vértice V(0,3). Obedecendo a simetria da parábola e sabendo que a distância entre as duas torres é 120 metros, supomos que o eixo y está exatamente no meio do espaço compreendido entre as duas torres de modo que os pontos A(-60,27) e B(60,27) são pontos da parábola. De fato,

$$d(A, B) = 120.$$

Pela equação,

$$(x - s)^2 = 2p(y - t),$$

com V=(s,t) e considerando o ponto A da parábola, obtemos

$$(-60 - 0)^2 = 2p(27 - 3) \Rightarrow 3600 = 48p \Rightarrow p = 75.$$

Fazendo a substituição em $(x - s)^2 = 2p(y - t)$, com (s,t)=(0,3) e $p = 75$, obtemos

$$x^2 = 2 \cdot 75(y - 3) \Rightarrow x^2 = 150(y - 3) \Rightarrow x^2 = 150y - 450$$

que é a equação da parábola que descreve a ponte.

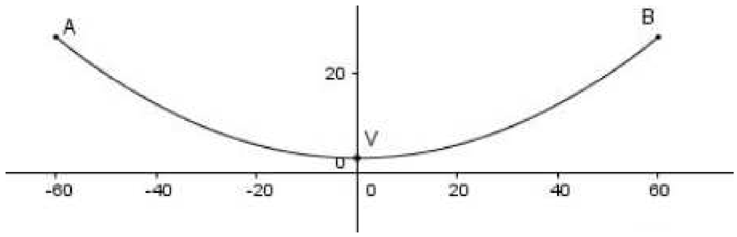

Figura 27 – Gráfico da equação que representa a ponte

(b) Se o cabo parabólico é apoiado em nove cabos verticais equiespaçados, ache o comprimento total desses cabos de apoio.

Solução: Note que ao apoiarmos o cabo parabólico em nove cabos de apoio, teremos dez espaços equidistantes entre eles. Dividindo a distância de 120 metros entre as duas torres, cada espaço será de 12 metros. Pela equação da parábola encontrada no item (a), temos:

para $x = 0$, $y = 3$ (1 cabo de comprimento 3 metros);

para $x = 12$, $y = 3,96$ (2 cabos de comprimento 3,96 metros);

para $x = 24$, $y = 6,84$ (2 cabos de comprimento 6,84 metros);

para $x = 36$, $y = 11,64$ (2 cabos de comprimento 11,64 metros);

para $x = 48$, $y = 18,36$ (2 cabos de comprimento 18,36 metros).

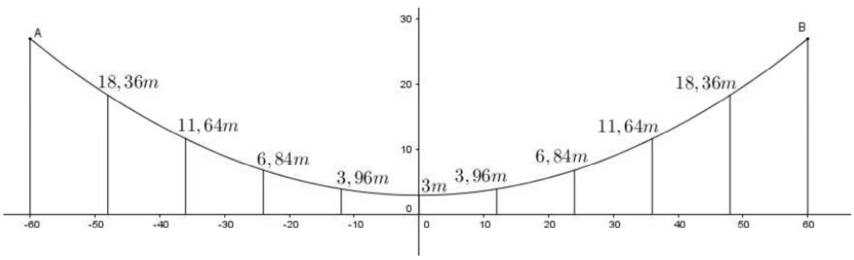

Figura 28 – Cabos verticais

Logo, o comprimento total desses cabos de apoio é 84,6 metros.

Observação: Os valores de x utilizados acima foram obtidos a partir da posição $x = -60$ somando 12 ao valor anterior, o que corresponde ao espaçamento entre os cabos de apoio.

2.2 Aplicações da Elipse

Assim como no caso da parábola, a elipse possui propriedades que a permite ser usada em diversas áreas, em particular na construção civil.

Figura 29 – Estádio Beira-Rio, Porto Alegre - RS. Fonte: ClicRBS.

No exemplo a seguir faremos uso de uma semi-elipse, que nada mais é que uma elipse "cortada" exatamente ao meio.

O arco de uma ponte é semi-elíptico, com eixo maior horizontal. A base do arco tem 10 metros e a parte mais alta está a 3 metros acima da rodovia, conforme figura. Determinar a altura do arco a 2 metros do centro da base.

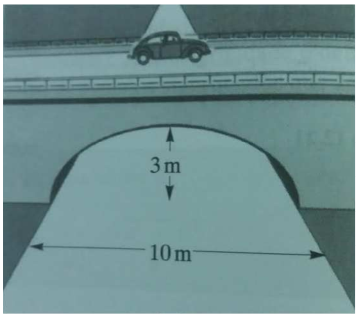

Figura 30 – Ilustração 2

Solução. Para resolver este problema poderíamos considerar uma elipse com centro diferente da origem, mas para facilitar o processo usaremos o caso específico em que a elipse tem centro na origem. Supondo que a elipse que representa essa semi-elipse tem centro na origem, devemos encontrar a equação da elipse.

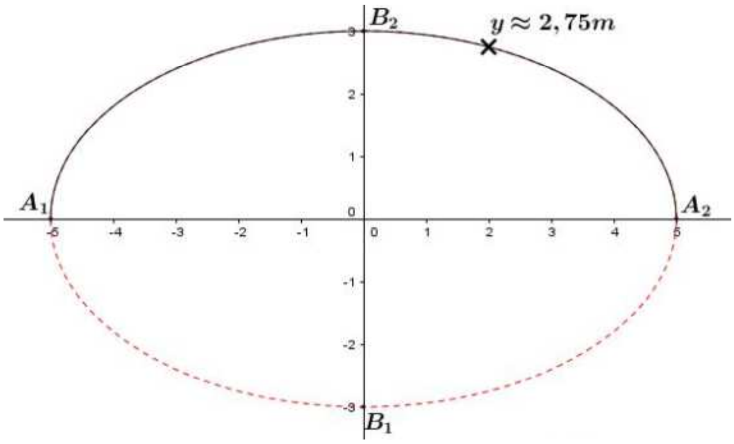

Figura 31 – Representação do problema

Pela figura 31, temos $A_1(-5, 0)$ e $A_2(5, 0)$ como pontos que definem o eixo maior da elipse e $B_1(0, -3)$ e $B_2(0, 3)$ como pontos que definem o eixo menor da elipse. Daí, a equação da elipse é

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Como queremos a altura do arco a $2m$ do centro da base, fazendo $x = 2$ na equação acima, obtemos,

$$\frac{4}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{4}{25} \Rightarrow \frac{y^2}{9} = \frac{21}{25} \Rightarrow y^2 = \frac{189}{25} \Rightarrow y \approx 2,75m,$$

que é a altura pedida.

Esse tipo de problema, assim como outros, auxilia em construções, reparos em determinados pontos, rapidez na detecção de pontos isolados, além de garantir economia e padrões que se adequem às necessidades cotidianas.

As elipses também são de fundamental importância em estudos relacionados à astronomia e astrofísica. No século XVI um grande passo foi dado na astronomia através do polonês Nicolaus Copernicus ao afirmar que os planetas giram em torno do Sol, e não era o Sol quem girava em torno da Terra como acreditava-se. Embora ele tenha se aproximado o máximo possível da realidade ocorrida no movimento dos planetas até então, a ideia que ele defendia se apoiava em movimentos circulares dos planetas em torno do Sol. Este problema foi resolvido pelo matemático alemão Johannes Kepler que afirmou na primeira de suas três leis relacionadas ao movimento dos planetas: “Cada planeta revolve em torno do Sol em uma órbita[1] elíptica, com o Sol ocupando um dos focos da elipse." Hoje sabemos que a órbita elíptica não está presente apenas no Sistema Solar, mas em todos os casos em que um corpo celeste orbita um outro corpo sob influência da gravitação.

A seguir será mostrada uma tabela com a excentricidade dos oito planetas do Sistema Solar. Como estudado no Capítulo 1, os valores variam entre 0 e 1, não podendo ultrapassar esses limites.

Planetas	e
Mercúrio	0,206
Mercúrio	0,206
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,049
Saturno	0,059
Urano	0,047
Netuno	0,009

Tabela 1 – Excentricidade das órbitas planetárias

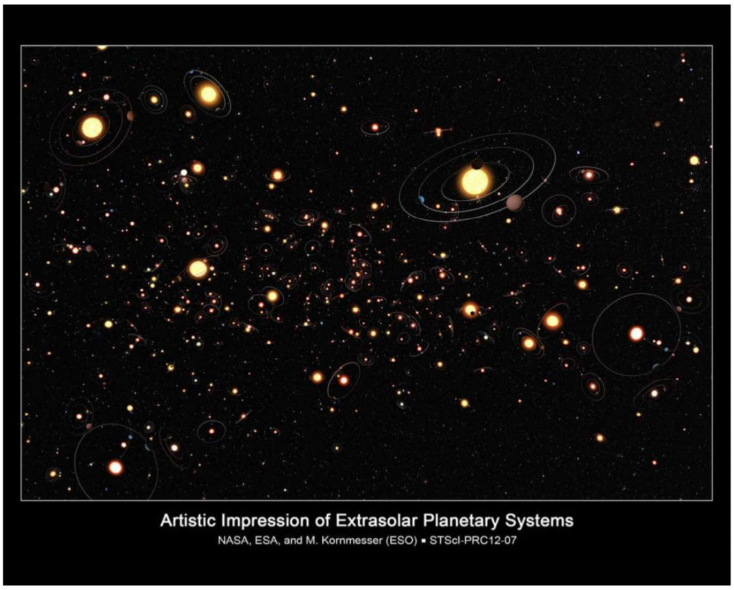

Figura 32 – Órbita de corpos celestes

O exemplo a seguir trata-se de uma situação envolvendo a forma elíptica que a Terra "desenha" ao orbitar o Sol como foco.

[1] Uma órbita é um caminho regular e repetitivo que um objeto no espaço percorre em torno de outro. Fonte: NASA - National Aeronautics and Space Administration.

Suponha que o comprimento do eixo maior da órbita da Terra seja de 186.000.000 milhas, com excentricidade de $0,017$. Determine, a menos de 1.000 milhas[2], as distância máxima e mínima da Terra ao Sol.

Solução. Note que 186.000.000 milhas é a distância entre A_1 e A_2. Isso é equivale a dizer que o comprimento do eixo maior A_1A_2 é

$$2a = 186.000.000.$$

Portanto,

$$a = \frac{186.000.000}{2}$$
$$\Rightarrow a = 93.000.000,$$

onde a é o valor que representa a distância entre o ponto médio C do segmento F_1F_2, sendo F_1 e F_2 os focos da elipse, aos pontos A_1 e A_2.

Nosso objetivo agora será encontrar o valor c e descobrirmos o ponto onde o Sol se localiza. Partindo do pre-suposto de que a elipse tem eixo maior sobre o eixo dos x, representemos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, assim como, $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$.

A excentricidade da elipse é o número $e = \dfrac{c}{a}$ representada pelo valor $0,017$ dado no enunciado. Substituindo o valor de a e este valor nesta igualdade, temos

$$0,017 = \frac{c}{93.000.000}$$
$$\Rightarrow c = 1.581.000.$$

Logo, a distância mínima da Terra ao Sol é dada por

$$a - c = 93.000.000 - 1.581.000 = 91.419.000 \text{ milhas}$$

e a distância máxima é

$$a + c = 93.000.000 + 1.581.000 = 94.581.000 \text{ milhas}.$$

Observação: Os valores aqui apresentados não descrevem com precisão as distâncias reais, mas foi feita uma aproximação para que se tenha uma experiência quase real.

[2] Unidade de comprimento, cujo nome provém das palavras latinas milia passuum, que significam mil passos. Foi utilizada primeiramente pelos romanos, que lhe atribuíram o comprimento de mil passos. Na atualidade, são utilizados principalmente dois tipos de milha, a milha terrestre e a milha marítima. Fonte: Dicionário Online de Português.

A figura abaixo representa a órbita descrita no exemplo considerando-se que o Sol ocupa a posição em que se encontra o foco F_2.

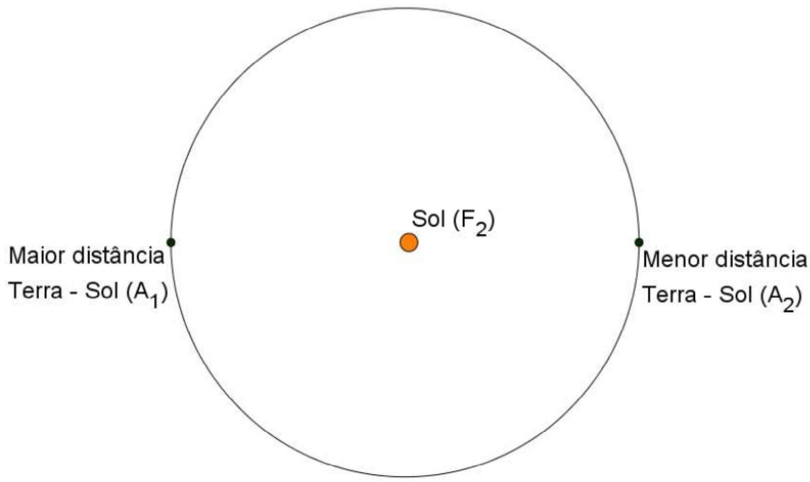

Figura 33 – Órbita da Terra

Observe que a excentricidade e próxima de 0 faz com que a elipse se pareça com uma círculo e o foco fique próximo do centro.

O próximo exemplo também vai tratar da órbita de um dos planetas do Sistema Solar.

Sabendo que a órbita de Mercúrio em torno do Sol tem excentricidade 0,206; que o Sol é sempre um dos focos da elipse das órbitas planetárias; que a unidade astronômica (UA) vale 1 para a distância média entre o Sol e a Terra; que o ponto da órbita em que o planeta está mais afastado do Sol chama-se afélio e, no afélio, Mercúrio está a 0,47 UA do Sol; e que o ponto da órbita em que o planeta está mais próximo do Sol chama-se periélio, obtenha, em unidades astronômicas, a distância de Mercúrio ao Sol no periélio.

Solução. Consideremos que a elipse está com o foco sobre o eixo do x e tem centro na origem. Foi dado que a distância do Sol até Mercúrio, no afélio, é de 0,47 UA. Considerando que o Sol está na posição $F_1(-c, 0)$ e no afélio Mercúrio se encontra na posição $A_2(a, 0)$, temos, da excentricidade $e = \dfrac{c}{a}$, que $\dfrac{c}{a} = 0,206$, então $c = 0,206a$.

Substituindo no ponto que indica a posição do Sol, temos $F_1(-0,206a; 0)$. Pela fórmula de distância,

$$d(F_1, A_2) = 0,47$$
$$\Rightarrow \sqrt{(-0,206a - a)^2 + (0 - 0)^2} = 0,47$$

$$\Rightarrow 1,206a = 0,47$$

$$\Rightarrow a \approx 0,39.$$

Veja que o outro vértice é o lugar que acontece o periélio e é indicado pelo ponto $A_1(-a, 0)$, ou seja, $A_1(-0,39; 0)$. Calculando a distância entre este ponto e a posição do Sol $F_1(-0,08; 0)$, temos

$$d(A_1, F_1) = \sqrt{(-0,39 - 0,08)^2 + (0 - 0)^2}$$

$$d(A_1, F_1) = \sqrt{(-0,31)^2}$$

$$d(A_1, F_1) = 0,31.$$

Logo, a distância de Mercúrio até o Sol, no periélio, é de 0,31 UA.

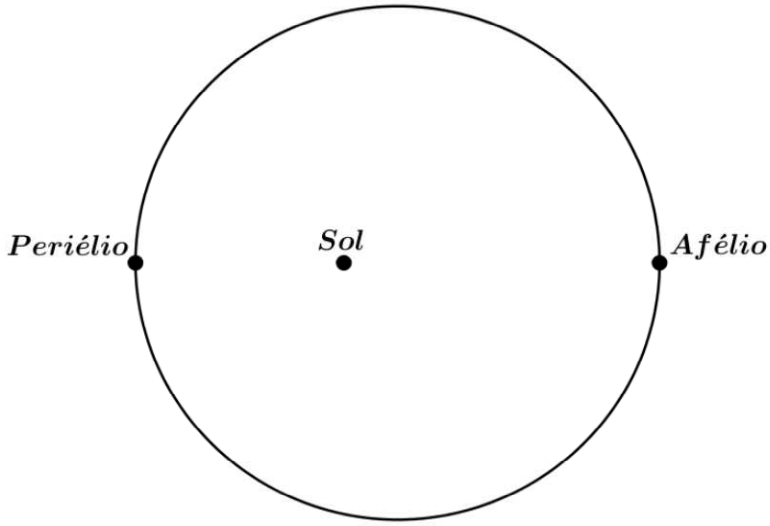

Figura 34 – Afélio e periélio

2.3 Aplicações da Hipérbole

São muitas as aplicações da hipérbole no nosso cotidiano. Um dos casos mais usuais é no sistema de navegação, denominado de **LORAN** (*Long Range Navigation - Navegação de Longa Distância*). Este sistema possibilita ao navegante de um navio ou ao piloto de um avião achar sua posição de forma rápida e precisa. O sistema utiliza hipérboles com focos em comum, onde se localizam estações de rádio que emitem sinais. Estas estações de rádio são denominadas de F_1 e F_2 e emitem sinais que são percebidos por alguém que se localiza em um ponto qualquer P. Usando o conceito de lugar geométrico o navegante ou o piloto mede o intervalo

$$\Delta t = t_2 - t_1,$$

onde t_2 é o instante em que ele recebe o sinal enviado por F_2 e t_1 é o instante em que ele recebe o sinal enviado por F_1.

Sendo T_1 o intervalo de tempo que o sinal emitido por F_1 leva para alcançar a posição do navegante, e T_2 o intervalo de tempo que o sinal emitido por F_2 leva para alcançar a posição do navegante, então a diferença entre a distância da posição do navegante a F_1 e a distância da posição do navegante a F_2 é

$$PF_1 - PF_2 = c\Delta t,$$

onde c é a velocidade que o som alcança no ar.

Desta forma, o navegante ou o piloto pode localizar sua posição se ele receber sinal de três estações de rádio localizadas em posições diferentes que podem ser representadas por F_1, F_2 e F_3.

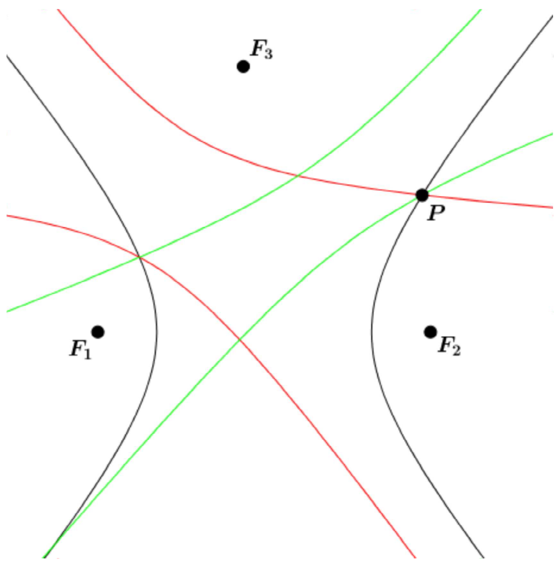

Figura 35 – Sistema de navegação de LORAN

A cada par de estações, ou seja, a cada par de focos temos uma hipérbole que abrange a posição do navegante, estas hipérboles estão representadas na figura acima pelas linhas nas cores preta, verde e vermelha. O ponto em que elas se intersectam é a posição exata dele. O exemplo a seguir apresenta uma situação deste tipo, embora não seja necessário utilizar três hipérboles, mas o objetivo é que a ideia seja representada.

Um navio segue um curso paralelo a uma costa retilínea, a 100 km desta. O navio emite um pedido de socorro, que é recebido pela Guarda Costeira na estação A e B, localizadas à distância de 200 km uma da outra, conforme figura. Medindo a diferença entre os instantes de recepção dos sinais, constata-se que o navio está 160 km mais próximo de B do que de A. Onde está o navio?

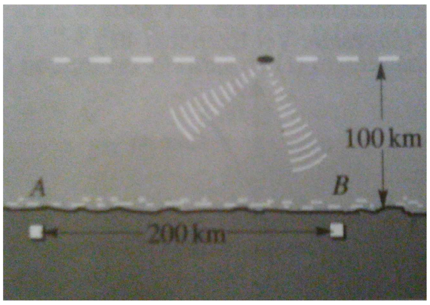

Figura 36 – Ilustração 3

Solução. Podemos considerar a situação como um sistema de coordenadas, onde indicaremos $y = 100$ km, que é a distância que o navio está da costa. Pela definição de hipérbole, diremos que

$$d_1 - d_2 = 160,$$

de modo que 160 é a diferença, em quilômetros, entre os receptores de sinais nas estações A e B. De acordo com a equação 1.15, $d_1 - d_2 = 2a$, portanto

$$2a = 160$$

$$\Rightarrow a = 80.$$

Consideremos A e B como os focos. Sabendo que a distância focal da hipérbole é igual a $2c$, então, como a distância de A e B é 200 km, temos

$$c = 100.$$

Substituindo os valores de a e c na equação 1.16, temos

$$100^2 = 80^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 10000 = 6400 + b^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 10000 - 6400$$

$$\Rightarrow b^2 = 3600$$

$$\Rightarrow b = 60.$$

Daí, a equação da hipérbole é:

$$\frac{x^2}{6400} - \frac{y^2}{3600} = 1.$$

Para $y = 100$, temos

$$\frac{x^2}{6400} - \frac{100^2}{3600} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{6400} - \frac{10000}{3600} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{6400} = 3,78$$

$$\Rightarrow x^2 = 24177,78$$

$$\Rightarrow x \approx 155,5.$$

Portanto, o navio está a aproximadamente 155,5 km da Guarda Costeira, ou seja, as coordenadas do navio são $(155,5; 100)$.

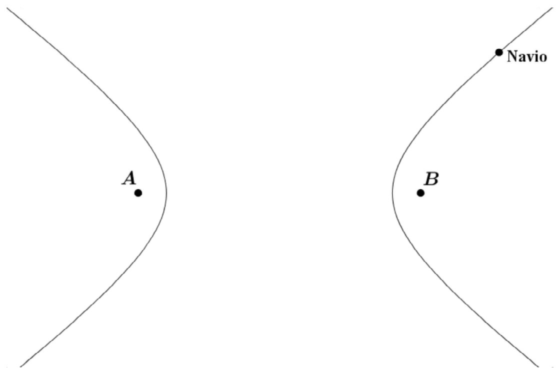

Figura 37 – Esquema do problema

3 Considerações Finais

As definições, aplicações e resultados apresentados neste trabalho, mostra-se como uma base matemática que têm como objetivo aprofundar-se nos conceitos primordiais dos estudos sobre as cônicas.

Mostramos, em primeiro lugar, um resumo histórico do surgimento das cônicas e falamos sobre alguns matemáticos que contribuíram no desenvolvimento das mesmas. O acontecimento que deu início a essa descoberta foi apresentado dando ênfase ao local e à situação que foi vivenciada até obter os primeiros resultados. A duplicação do cubo alavancou uma série de tentativas, acarretando alguns erros e acertos, até chegarmos nos resultados atuais sobre as cônicas. Apolônio destacou-se por estudá-las da forma mais minuciosa até a época, dando uma nova "roupagem" ao método de obtenção das curvas, além de nomeá-las com os nomes pelos quais conhecemos cada uma delas na atualidade, os quais são: parábola, elipse e hipérbole.

Utilizando o contexto atual destas curvas, apresentamos, para cada uma delas, a definição, os elementos, as equações que representam-nas e alguns exemplos. As curvas cônicas, de modo geral, compõem um conjunto de objetos matemáticos extremamente necessários na formação dos alunos e até mesmo dos professores da área.

Se considerarmos as cônicas em termos de aplicações, perceberemos que o seu uso é frequente em várias áreas e em diversas situações. Alguns casos, como os que foram mostrados no trabalho, nos faz perceber que as pessoas têm uma certa necessidade destas curvas, seja na construção civil, astronomia e sistemas de navegação, como foi mostrado, ou em vários outros campos que não foram apresentados nesse trabalho.

Fazendo uso de uma linguagem simples e clara, este trabalho poderá ser utilizado por alunos que estiverem tendo o primeiro contado com o assunto e que isso possa ser feito levando em consideração o fato de poderem buscar em outras referências, detalhes que podem ser acrescentados e, facilmente, uma infinidade de aplicações que podem ser estudadas a partir do que aqui foi mostrado. Além disso, para os alunos da graduação, esse estudo pode ser melhor entendido fazendo a relação entre a parte conceitual e a representação geométrica. Utilizando softwares como o Geogebra (usado neste trabalho), é possível usar as fórmulas que foram apresentadas para uma melhor visualização das mesmas.

Vale lembrar que tudo o que foi mostrado neste trabalho se resume a um pequeno estudo que pode se expandir e ir de encontro com outros assuntos mais avançados. Seria possível buscar muitas outras aplicações para acrescentas às já mencionadas, entretanto, que essa busca seja um estímulo para pesquisas futuras.

Referências

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações, vol. 3. São Paulo: Editora Ática, 2010.

Educação Profissional: Referenciais Curriculares Nacionais da Educação Profissional de Nível Técnico. Brasília, 2000.

FILHO, Kepler de S. O.; SARAIVA, Maria de Fátima O., **As Três Leis de Kepler sobre o Movimento dos Planetas**. Disponível em: <http://http://astro.if.ufrgs.br/Orbit/orbits.htm> Acesso em: 01 de abril de 2017.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol. 7. São Paulo: Atual Editora LTDA, 1977-78.

MACHADO, Nílson J., **Um passeio pelas Cônicas**. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20100914.pdf> Acesso em: 15 de março de 2017.

MOL, Rogério S.. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: Editora CAED-UFMG, 2013.

POERSCHKE, Nelson, **Cônicas - história - apresentação - aplicações**. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAesbYAB/conicas-historia-apresentacao-aplicacoes> Acesso em: 13 de março de 2017.

SATO, Jocelino. **As Cônicas e suas aplicações**. Disponível em: <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/CursoConicasAplicacoes.html> Acesso em: 08 de abril de 2017.

SWCKOWSKI, Earl William. **Cálculo com Geometria Analítica.** 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

TALAVERA, L.M.B.; BROLEZZI, A.C., **Da História das Cônicas à Geometria Di-**

nâmica. Disponível em: <http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais.../of-31.doc> Acesso em: 06 de março de 2017.

VENTURI, Jacir J., **O segundo problema clássico da Geometria:** a duplicação do cubo. Disponível em: <http://www.educacional.com.br/articulistas/imprimirOutros.asp...> Acesso em: 15 de março de 2017.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Editora Pearson Markron Books, 2000.