UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA EM UMA ESCOLA ESTADUAL DE CAMPINA GRANDE - PB

JANAINA NUNES DE PAULA

CAMPINA GRANDE – PB

2014

JANAINA NUNES DE PAULA

MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA EM UMA ESCOLA ESTADUAL DE CAMPINA GRANDE - PB

Monografia apresentada à Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática Básica.

Orientador: Prof. Dr. José Lamartine da Costa Barbosa

CAMPINA GRANDE – PB

2014.

P324m Paula, Janaina Nunes de.
Modelagem Matemática [manuscrito] : uma experiência em uma Escola Estadual de Campina Grande - PB / Janaina Nunes de Paula. - 2014.
33 p. : il. colorido.

Digitado.
Monografia (Especialização em Educação Matemática Para Professores do Ensino Médio) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação : Prof. Dr. José Lamartine da Costa Barbosa, Departamento de Matemática - CCT."

1. Ensino de Matemática. 2. Modelagem Matemática. 3. Material manipulável.

21. ed. CDD 510.7

JANAINA NUNES DE PAULA

MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA EM UMA ESCOLA ESTADUAL DE CAMPINA GRANDE – PB

Monografia apresentada à Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática Básica.

Aprovada em 02/10/2014

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Lamartine da Costa Barbosa – Orientador

Departamento de Matemática - UEPB

Prof. Dr. Pedro Lúcio Barboza

Departamento de Matemática - UEPB

Prof. Ms . Walber Santiago Colaço

Departamento de Matemática – UEPB

Dedico este trabalho a Deus, que me conduz nas suas asas para que eu voe cada vez mais alto.

AGRADECIMENTOS

Mais uma etapa profissional concluída. E que felicidade! Mais eu não teria chegado aonde cheguei se não fosse a fé e a perseverança que tenho. Por isso, sou grata a Deus que me abençoa e renova minhas forças a cada novo amanhecer.

Agradeço a cada um dos professores do programa de Pós-Graduação de especialização em educação Matemática para Professores do Ensino Médio da UEPB, que transmitiram seus conhecimentos, fazendo com que eu repensasse a respeito do ensino da Matemática em sala de aula, me tornando cada vez melhor como profissional. Em especial agradeço ao professor Dr. José Lamartine da Costa Barbosa, que me orientou durante a realização do meu trabalho de conclusão de curso, com muita dedicação, atenção, responsabilidade e compreensão.

Aos meus amigos de curso, que estavam comigo juntos, batalhando pelo mesmo ideal. A minha família e amigos, que me apoiaram e me incentivaram a realizar mais essa conquista. Enfim, agradeço a todos aqueles que acreditaram no meu potencial e torceram pelo meu sucesso.

"A educação tem raízes amargas, mas os seus frutos são doces."

Aristóteles

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de relatar uma experiência de modelagem matemática no ensino médio de uma Escola Estadual de Campina Grande-PB. O intuito de trabalhar com modelagem foi o de proporcionar ao educando aprender Matemática de forma prazerosa, utilizando o lúdico no dia a dia da sala de aula e promovendo a construção dos conceitos matemáticos, colocando o aluno frente ao problema, para serem capazes de discuti-lo de forma crítica e assim encontrar os meios de resolvê-lo. Criar condições para que os alunos aprendam a fazer modelos matemáticos aprimorando seus conhecimentos, foi outro intuito. A experiência teve também o objetivo de tentar construir metodologias que pudesse auxiliar, futuramente, na tarefa de ensinar Matemática de forma mais interessante e dinâmica, com a capacidade de mostrar ao aluno a importância dessa ciência. Metodologicamente recorremos a uma oficina que foi dividida em duas etapas, tendo como público alvo os alunos do ensino médio e chegamos a alguns resultados, entre eles que a Modelagem Matemática proporciona uma melhor aprendizagem.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Modelagem Matemática; Material Manipulável.

ABSTRACT

This paper has the purpose to describe a mathematical modeling experience accomplished in a State school, in the municipality of Campina Grande, Paraiba. The intention to use modeling is to provide students' learning mathematics in a pleasant way, using the playful day by day in the classroom and promoting the mathematical concepts construction by placing the student with the problem, by being able to critically discuss it in order to find ways to solve it. Another purpose, creating conditions for students to learn to make mathematical models enhancing their knowledge. Experience also had the goal to experience to figure out methodologies that might help in the future in a more interesting and dynamic way. Indeed, showing students this science importance. Through a workshop methodology divided into two phases, and target audience of high school students. Finally the results show that the Mathematical Modeling provides better learning.

Keywords: Mathematics Teaching. Mathematical Modeling. Material manipulable.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Pensar nos conceitos matemáticos, seja na escola ou fora dela, sempre significou frustração e resistência. É comum a opinião de que estudar matemática é uma atividade enfadonha, maçante, realizada sem uma finalidade evidente.

Essa reação torna patente que o processo de ensino/aprendizagem dessa matéria nem sempre se dá de forma motivadora, que possibilite o desenvolvimento da capacidade em realizar problemas matemáticos fora da vida escolar. Paralelamente a esse quadro, as necessidades práticas do dia-a-dia exigem essa habilidade, o que demonstra que a exigência do saber matemático ultrapassa os limites escolares.

Vários estudos desenvolvidos sobre o assunto já apontam para uma nova metodologia de ensino, voltada para as reais necessidades. No entanto, a preocupação, no contexto das práticas escolares, ainda parece ser a de ensinar uma matemática longe da vida real, com técnicas puramente teóricas.

Assim, no âmbito educacional, o trabalho docente nos dias atuais é considerado fragmentado. O aluno estuda matemática sem imaginar a riqueza multicultural que pode ser agregada em torno dessa disciplina. Sabendo que a matemática está presente no seu cotidiano, o “aprender a aprender” tão destacado na pedagogia, não é passado para muitos estudantes. A fragmentação dos conhecimentos impede o aluno a chegar à consciência transdisciplinar provocando a separação entre escola e vida.

Biembengut e Hein (2004), declaram que:

> A modelagem matemática, atualmente usada em toda ciência, tem contribuído para a evolução do conhecimento humano, em muitas das atividades do dia a dia, sendo necessário um problema que exija criatividade, intuição e ferramental matemático. Não devendo a modelagem ser descartado no âmbito escolar(BIEMBENGUT e HEIN,2004, p.57).

Trabalhar com Modelagem Matemática faz perceber que pode-se levar a matemática para o aluno de outra forma, mais dinâmica e interessante, que esteja ligada a realidade do aluno como também a outras áreas do conhecimento.

O intuito de trabalhar Modelagem Matemática com os alunos do ensino médio foi o de mostrar que situações reais podem ser modeladas matematicamente. Por meio da modelagem esperasse que o aluno possa desenvolver sua criatividade e o raciocínio lógico, de modo a facilitar sua aprendizagem e a partir daí desenvolver o aluno como cidadão crítico e transformador da sua realidade.

Faz-se necessário utilizar a Modelagem Matemática como metodologia a fim de propor atividades que relacionem os acontecimentos e o mundo, através de análises, reflexões, deduções e predições, tendo em vista que “a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (BASSANEZI, 2004, p.16).

A Modelagem Matemática facilita o aprendizado escolar, proporcionando uma aprendizagem significativa, na qual os alunos serão capazes de criar situações problemas e terem facilidades de resolver, aprimorando os seus conhecimentos. Além de: Desenvolver o raciocínio lógico e dedutivo em geral; Promover a habilidade em formular e resolver problemas; Lidar com temas de interesse; Aplicar o conteúdo matemático; Desenvolver a criatividade; Aproximar outra área do conhecimento da matemática; Enfatizar a importância da matemática para formação do aluno; Despertar o interesse pela matemática ante a aplicabilidade; Melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos; Desenvolver habilidades para resolver problemas; Desenvolver o aluno como cidadão crítico e transformador de sua realidade.

Considerando todos esses fatos, este trabalho, que apresenta os resultados finais desenvolvidos com o estudo da matemática a partir da técnica de modelagem, tem como objetivo descrever como se dá a reflexividade e a mobilização de conhecimentos de alunos de uma turma de ensino Médio a partir do trabalho realizado com tal técnica.

2. DESENVOLVIMENTO

2.1. ASPECTOS TEÓRICOS - METODOLÓGICOS

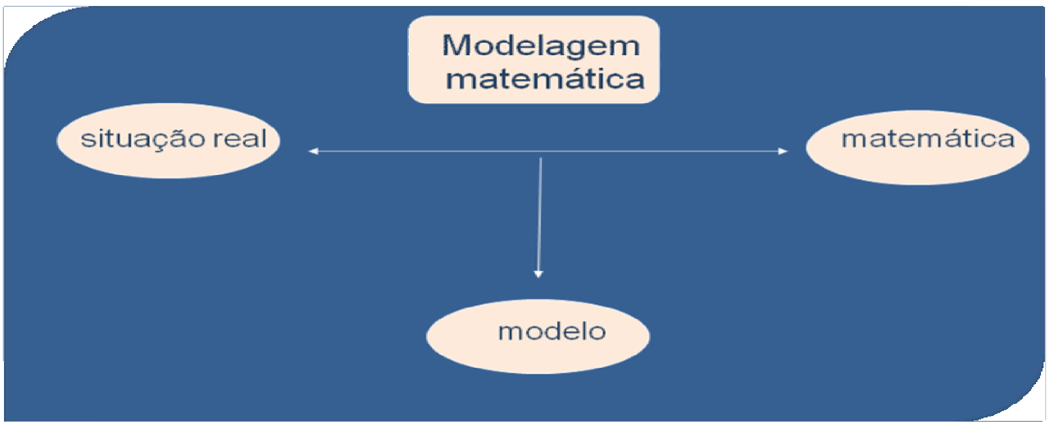
2.1.1. Modelagem matemática e o ensino aprendizagem da matemática

Dar-se o nome de *modelo* às representações que os homens fazem, com o auxílio da matemática, capazes de explicar e interpretar determinados fenômenos em estudo. Modelo matemático consiste, portanto, num conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.

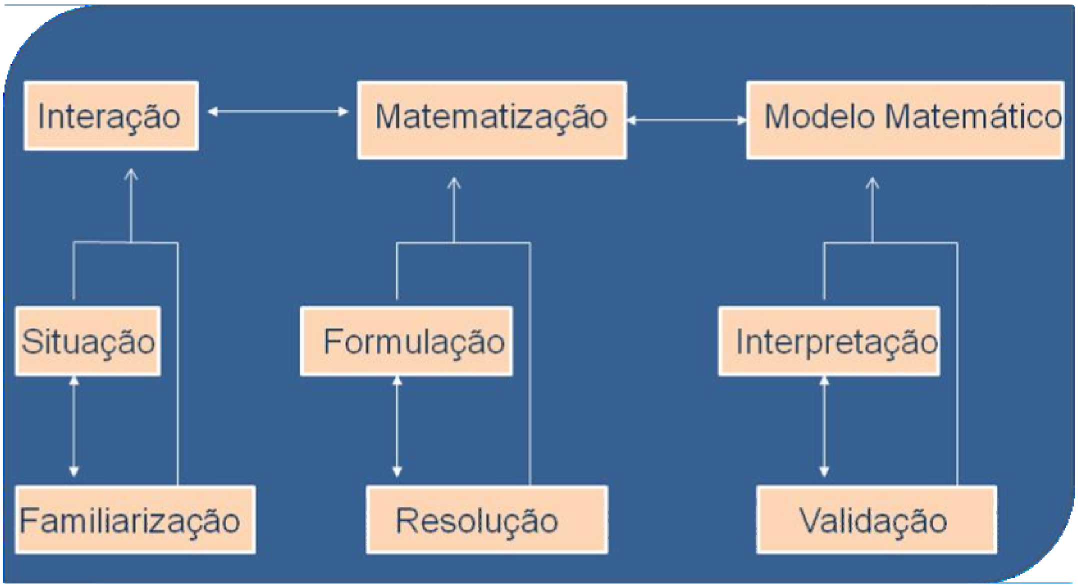
É o processo que envolve a obtenção de um modelo que tenta descrever matematicamente um fenômeno da nossa realidade para tentar compreendê-lo e estudá-lo, criando hipóteses e reflexões sobre tais fenômenos. Os modelos são eficientes na medida em que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade.

Defende-se a necessidade de conhecimentos matemáticos, bem como uma dose significativa de intuição para se elaborar um modelo, uma vez que é preciso interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

A modelagem matemática é um processo dinâmico, associado a um conjunto de hipóteses, e tem eficiência a partir do momento em que tomamos consciência de que estamos trabalhando sobre representações de um sistema real ou parte dele e também permite a realização de previsões e tendências, uma vez em que é obtido um modelo que forneça possíveis soluções para o problema.



Como um meio de fazer a matemática interagir com a realidade, a modelagem envolve uma série de procedimentos agrupados em três etapas, subdivididas em seis subetapas, a saber, sendo aplicado da seguinte forma:



1) Interação

- Reconhecimento da situação–problema;
- Familiarização.

A partir de uma situação real é identificado o problema a ser estudado. Delineada a situação que se pretende estudar, deve ser feito um estudo sobre o assunto de modo direto ou indireto. Em seguida deve-se obter os dados necessários para sua solução. À medida que se vai interagindo com os dados, a situação problema torna-se cada vez mais clara.

2) Matematização

- Formulação do problema;
- Resolução do problema.

Nesta etapa substitui-se a linguagem em que se encontra o problema para uma linguagem matemática coerente. Em seguida, utilizando-se recursos da Matemática, procura-se uma solução do problema matemático formulado.

3) Modelo matemático

- Interpretação do modelo;

- Avaliação do modelo.

Esta fase é aquela em que a aceitação do modelo encontrado é analisada. Há uma comparação com os dados fornecidos pelo modelo. Sendo o modelo considerado não válido, deve-se retornar à formulação de hipóteses e simplificações e reiniciar o processo.

Uma vez considerado válido, o mesmo é utilizado para compreender, explicar, analisar, prever ou decidir sobre a realidade em estudo. Esta é a fase que possibilita o intervir, o exercitar, o manejar situações associadas ao problema.

Na Modelagem Matemática, o aluno poderá interpretar e compreender as diversidades do nosso cotidiano, proporcionando saberes através das aplicações dos conceitos matemáticos. Sabe-se que o ensino da matemática onde o professor apresenta o conteúdo de forma oral, partindo de definições e exemplos e uma série de exercícios para que o aluno possa reproduzir o que aprendeu, não é uma prática considerada eficaz, mesmo reproduzindo o que aprendeu para o aluno não há significado algum, não conseguindo levar o que aprendeu em sala de aula para o dia a dia da sua realidade.

Chevallard (2001), afirma que:

> Os problemas escolares tendem a ser apresentados, efetivamente como enunciados perfeitamente elaborados, cujos textos costumam esconder a problemática que lhes deu origem. Isso acontece a tal ponto que poderíamos falar de um autêntico“ desaparecimento” das questões ou das tarefas reais que originaram as obras Matemáticas na escola (CHEVALLARD,2001,p.10). (grifo do autor)

Esta limitação realizada pela escola em ensinar técnicas e algoritmos, não corresponde ao que diz os Parâmetros Curriculares Nacionais em relação ao ensino da matemática, por isso muitos professores percebem nos alunos a imensa dificuldade em levar o conteúdo aprendido para sua realidade, fazendo-se necessário o professor buscar alternativas para a melhor aprendizagem dos alunos, a modelagem matemática proporciona aos alunos perceberem a importância da matemática no currículo escolar.

De acordo com Barbosa (2003), a modelagem matemática em sala de aula proporciona um ensino da matemática com muitas razões para uma boa aprendizagem: a motivação leva o aluno se sentir estimulado a estudar matemática; os alunos têm mais facilidades em compreender as ideias matemáticas; possibilidade de utilizar a matemática em diferentes áreas, aplicando em diversas situações do seu dia a dia; desenvolve habilidades gerais de investigação e compreender o papel sociocultural da matemática e como é usada nas práticas sociais, como também desenvolver um pensamento crítico e reflexivo no aluno.

A prática da modelagem matemática permite ao professor transformar sua metodologia de ensino de forma dinâmica levando o aluno a desenvolver seu raciocínio lógico e capaz de levar qualquer situação real e transformar em problemas matemáticos e resolvê-los com mais facilidade, isso torna o aluno aprendiz e com mais competência e menos acúmulo de conhecimento.

Barbosa (2001,2003), afirma que a modelagem matemática é como um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a investigar por meio da matemática, situações com referência na realidade. Diante dessa afirmação percebemos que após as investigações realizadas pelos alunos não se tem esquemas definidos, pois varia de uma situação para outra, a fórmula aplicada dependerá da relação entre a ação e os meios da mediação, sabendo que um depende do outro.

Segundo D'Ambrósio, (1986), Modelagem Matemática pode ser definida da seguinte forma:

> O indivíduo é parte integrante e ao mesmo tempo, observador da realidade. Sendo que ele recebe informações sobre determina da situação e busca, através da reflexão, a representação dessa situação em grau de complexidade. Para se chegar ao modelo é necessário que o indivíduo faça uma análise global da realidade na qual tem sua ação, onde define estratégias para criar o mesmo, sendo esse processo caracterizado de modelagem(D'AMBRÓSIO, 1986,p123).

Em síntese, defendemos que, as escolas que desenvolvem suas atividades curriculares considerando essa perspectiva, estarão cumprindo seu papel social, qual seja ajudar a formar cidadãos capazes de desempenhar o papel de gerentes de informação e não meros acumuladores de informações.

Dessa forma, apontar na direção de criar novos ambientes de aprendizagem em que a participação do professor seja de orientador das atividades -e não detentor do conhecimento- e os alunos com a liberdade de propor, desenvolver, criar, elaborar, modelar, as idéias na construção dos conhecimentos – e não mero receptor de informação-, é o que se espera das novas tendências de ensino.

2.2. Relato da oficina de Modelagem Matemática

Pensando em como mostrar aos vários alunos que a Matemática não é “um bicho de sete cabeças” como muitos tem essa concepção, e como responder aos vários questionamentos do tipo “para que serve isto?”, propomos uma oficina de Modelagem Matemática em 2010 para alunos do ensino médio. Os alunos contemplados foram os da Escola Estadual de Ensino Médio Dr. Elpídio de Almeida. Foram dois dias de oficina, com uma carga horária total de 4h.

Muito tempo levou para readaptar o trabalho para alunos desse nível de ensino, com uma preocupação em tornar as oficinas bastante interessantes e produtivas. No primeiro encontro, fizemos uma explanação do que é a Modelagem Matemática, quais os objetivos e as etapas do processo. Percebemos o quanto os alunos estavam concentrados e surpresos, já que muitos nunca tinham escutado sobre Modelagem Matemática. A partir daí nossa motivação aumentou, e a preocupação em atingir nossos objetivos também.

Ainda no primeiro encontro, tentamos mostrar por meio de dois problemas como a Matemática é interessante e faz parte do nosso cotidiano. O estudo dos problemas partiu de um caso geral para um caso específico. O primeiro problema tratava de determinar o número de casquinhas que podiam ser servidas com sorvete armazenado em um recipiente cheio, dados o diâmetro e a profundidade da casquinha e do recipiente, e o diâmetro da bola de sorvete. Neste problema foram abordados conteúdos da Geometria Espacial, tais como volume do cone, volume da esfera e volume do cilindro. O segundo problema tratava da construção de uma clínica de área máxima em um terreno retangular, sabendo o seu perímetro. Os conteúdos abordados no problema foram cálculo de perímetro e área, e função polinomial do segundo grau.

No nosso segundo encontro tentamos motivar mais ainda os alunos, apresentando dois problemas, que também partiu do estudo de um caso geral para um caso específico. O primeiro problema tratava da construção de uma torre de energia, que consistia em dimensionar a viga que seria colocada em diagonal para dar estabilidade à estrutura, dados a altura da torre, a largura da base da torre e a largura da viga. Esse problema abordou tais conteúdos: Medidas e Ângulos; Teorema de Pitágoras; Relações Trigonométricas; Equações do Segundo Grau. No segundo problema tratamos da construção de uma caixa retangular de modo que o seu volume fosse máximo, conhecendo as medidas dos lados. Os conteúdos abordados no problema foram: Volume de Paralelepípedo; Gráfico; Domínio de uma Função. Após o estudo de um caso geral, dividimos os alunos em grupos e propomos que eles construíssem uma caixa.

Ao termino da oficina percebemos que atingimos os nossos os objetivos. Os alunos saíram satisfeitos, e com outro olhar sobre a Matemática. Os conteúdos matemáticos que eles não davam importância, agora terão uma atenção redobrada, pois eles perceberam que fazer Modelagem Matemática não é fácil e requer um amplo conhecimento dos conteúdos matemáticos. Como afirma Biembengut (2007):

> "(...) para elaborar um modelo, além de conhecimento apurado de Matemática, o modelador deve ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas"(BIEMBENGUT,2007)

2.2.1. A Confecção da Caixa

O intuito em o aluno realizar essa atividade foi de que a oficina ficasse mais interativa e o aluno através das aplicações e do manuseio do material concreto pudesse criar hipóteses e chegar as suas próprias conclusões.

<u>MATERIAL UTILIZADO</u>

Cola

Tesoura

Régua

Cartolina guache (30 cm x 40 cm)

Lápis grafite

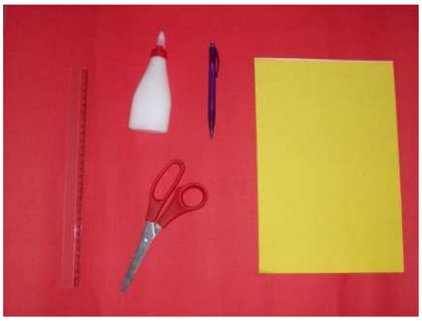


Figura 1. Material utilizado

<u>PROCEDIMENTOS</u>

Dividimos os alunos em grupos e a cada grupo especificamos a medida do corte dos cantos da folha, no intuito que eles percebessem na socialização qual a caixa de volume máximo.

Figura 2.

Ao termino da confecção da caixa, sugerimos que os alunos respondessem as seguintes perguntas:

- Qual o comprimento dos lados do quadrado que você recortou? E quais as dimensões (comprimento, largura e altura) da caixa que você construiu?
- Calcule o volume V dessa caixa em função da medida x do lado dos quadrados dos cantos.
- Calcule o volume V da caixa para os seguintes valores de x: 3, 4, 5, 6 e 7.
- Estime um valor de x para que o volume V seja máximo.

Respondida as perguntas, fizemos uma socialização e assim os alunos puderam perceber qual grupo estava com a caixa de volume máximo.

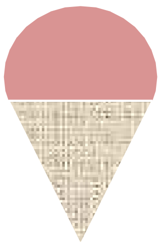
Figura 3.

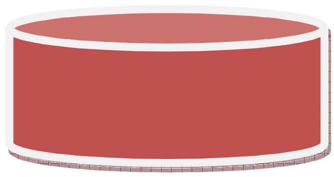
Foi muito satisfatório trabalhar com materiais manipuláveis. Os alunos ficaram bastante empolgados, e fizeram aquela "bagunça saudável" no momento que estavam interagindo com os colegas. Percebemos também que trabalhar com materiais concretos despertam mais o interesse dos alunos, bem como a compreensão do que está sendo trabalhado.

2.2.2 . Exemplos de Modelos Matemáticos trabalhados com os alunos

Problema 1

Um sorveteiro vende sorvetes em casquinhas de biscoito que tem a forma de cone cuja base tem diâmetro **a** e profundidade **b**. As casquinhas são totalmente preenchidas de sorvete e, ainda nelas é superposta uma meia bola de sorvete de mesmo diâmetro do cone. Os recipientes onde é armazenado o sorvete têm forma cilíndrica de **c** de diâmetro e **d** de profundidade. Determine o número de casquinhas que podem ser servidas com o sorvete armazenado em um recipiente cheio.





Dados:

Volume do cone: V = $\frac{1}{3}\pi r^2$h

Volume da esfera: V = $\frac{4}{3}\pi r^3$

Volume do cilindro: V = πr^2h

<u>Resolução:</u>

1º Passo: Vamos calcular o volume da casquinha (*Vc*) e o volume da meia bola de sorvete (Vs).

$$Vc = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 b$$

$$Vs = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3\right]$$

Agora, vamos calcular o volume das casquinhas com o sorvete (*Vcs*). Somando os dois volume *Vc* e *Vs* obtemos:

Vcs $=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 b+\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3\right]$

Vcs $=\frac{1}{12}\pi a^2 b+\frac{1}{12}\pi a^3$

Vcs $=\frac{1}{12}\pi a^2(b+a)$

Calculando o volume do recipiente (Vr), obtemos:

Vr $=\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 d$

Vr $=\frac{1}{4}\pi c^2 d$

Logo, o número de casquinhas que podem ser servidas com o sorvete armazenado em um recipiente cheio será (Ncs):

Ncs $=\frac{Vr}{Vcs}$

Ncs $=\frac{\frac{1}{4}\pi c^2 d}{\frac{1}{12}\pi a^2(b+a)}$

Ncs $=\frac{3\,c^2 d}{a^2(b+a)}$

2º Passo: Vamos fazer um estudo em um caso particular

Um sorveteiro vende sorvetes em casquinhas de biscoito que tem a forma de cone cuja base tem **3 cm** de diâmetro e **6 cm** de profundidade. As casquinhas são totalmente preenchidas de sorvete e, ainda nelas é superposta uma meia bola de sorvete de mesmo diâmetro do cone. Os recipientes onde é armazenado o sorvete têm forma cilíndrica de **18 cm** de diâmetro e **5 cm** de profundidade. Determine o número de casquinhas que podem ser servidas com o sorvete armazenado em um recipiente cheio.

Resolução:

Temos: a=3cm, b=6cm, c=18cm e d=5cm.

Ncs $=\frac{3\,c^2 d}{a^2(b+a)}$

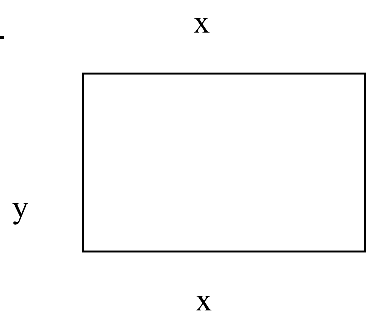
$$Ncs = \frac{3 \cdot 18^2 \cdot 5}{3^2 (6+3)}$$

Ncs = 60 casquinhas

Problema 2

1º Passo: Um engenheiro civil deseja construir uma clínica num terreno retangular de perímetro ***a.*** Nesta construção o engenheiro aproveita o máximo possível do terreno para edificar a clínica. De acordo com o contexto acima, qual é a área máxima que o engenheiro pode usar para construí-la.

<u>Resolução:</u>



$S = x \cdot y$

$p = y + x + y + x$

Dado p = a temos:

$2x + 2y = a$

$2y = a - 2x$

$y = \frac{a}{2} - x$

Como $S = x \cdot y$ e $y = \frac{a}{2} - x$ temos:

$S = x\left(\frac{a}{2} - x\right)$

$S = -x^2 + \frac{a}{2}x$ (Função Área)

2º Passo: Vamos fazer um estudo em um caso particular.

Um engenheiro civil deseja construir uma clínica num terreno retangular de perímetro de 80m**.** Nesta construção o engenheiro aproveita o máximo possível do terreno para edificar a clínica. De acordo com o contexto acima, qual é a área máxima que o engenheiro pode usar para construí-la.

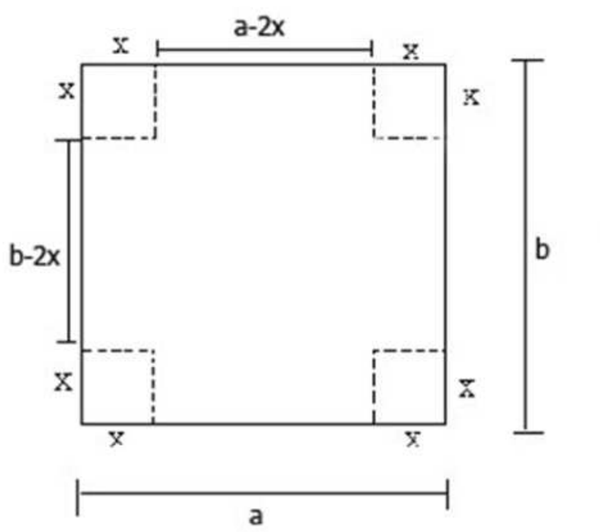
Resolução:

S = $-x^2+40x$

x	$S(x) = -x^2+40x$
5	$S(5) = -(5)^2+40x = 175$
10	$S(10) = -(10)^2+40x = 300$
15	$S(15) = -(15)^2+40x = 375$
20	$S(20) = -(20)^2+40x = 400$
25	$S(25) = -(25)^2+40x = 375$
30	$S(30) = -(30)^2+40x = 300$
40	$S(40) = -(40)^2+40x = 0$

Problema 3

Construir uma caixa a partir de uma folha de papelão retangular de lados a e b ($a \leq b$) de modo que o volume seja máximo.



Esta caixa que queremos construir é um paralelepípedo retângulo. Sabemos que a fórmula para calcular o paralelepípedo retângulo é

V= (área da base)x(altura) (I)

Onde área da base é igual = (lado1)x(lado2)

Resolução

1° passo: Vamos expressar o volume (V) da caixa em função de x.

Usando a formula (I), temos:

$$V(x) = (a-2x)(b-2x)x$$

$$V(x) = (ab-2ax-2bx+4x^2)x$$

$$V(x) = [ab-2x(a+b)+4x^2]x$$

$$V(x) = 4x^3-2x^2(a+b)+abx$$

$$Dom(V) = \left\{a,b,x \in \Re_+^* \, / \, 0 < x < \frac{a}{2}\right\}.$$

Se $a \geq b$ então, teríamos

$Dom(V) = \left\{ a, b, x \in \Re_+^* / 0 < x < \frac{b}{2} \right\}.$

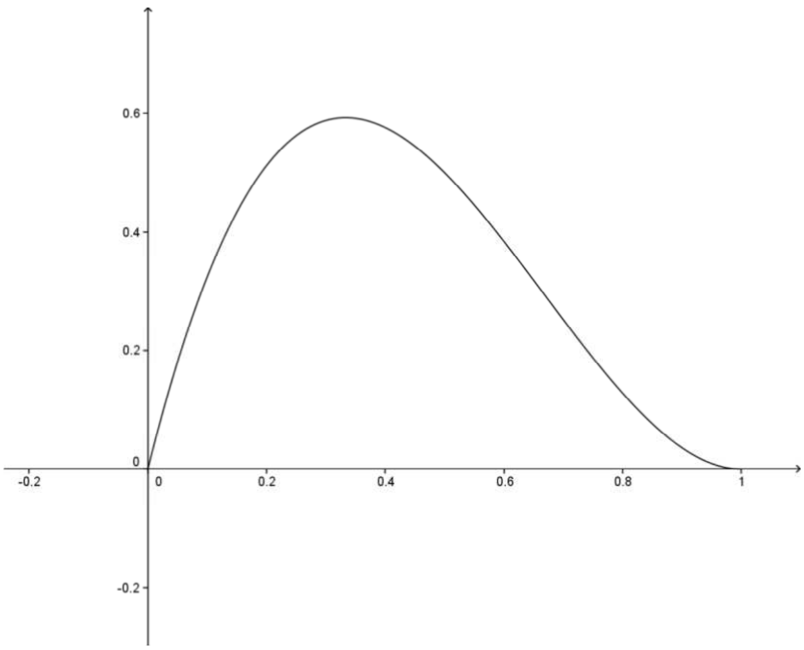
2° passo: Vamos fazer o estudo em um caso particular e determinar o valor de x de modo que o volume seja máximo. Considere $a = 2$ e $b = 2$. Assim, temos:

$V(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x$

Portanto, $Dom(V) = \{x \in \Re / 0 < x < 1\}$

Para fazer o esboço do gráfico da função volume da caixa, primeiro verificamos quais são as raízes da função e encontramos 0 e 1 (raiz dupla). Com isso sabemos que a função corta o eixo 0x em x = 0 e o tangencia em x = 1.

Para $x < 0$, $V(x)$ é negativo, entre as raízes é positivo e para $x > 1$ também. Agora é só traçar o gráfico (traçado usando o GeoGebra).



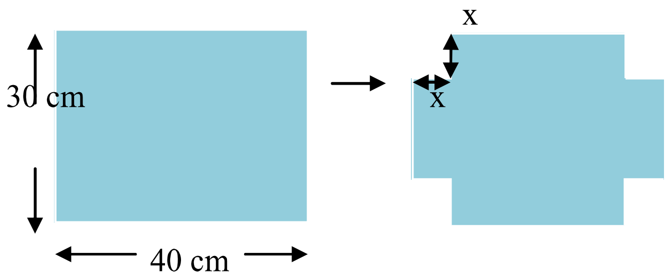
Com esse gráfico temos uma idéia de qual é o ponto de máximo, ou seja, o maior volume que a caixa pode ter. Este ponto tem a primeira coordenada entre 0 e 1. Tão somente com a visualização do gráfico obtemos uma melhor aproximação verificando que o ponto de máximo encontra-se entre as abscissas 0,2 e 0,4. Fazendo uso de estimativa construímos a seguinte tabela:

x	V(x)
0,3	0,5880
0,32	0,5919
0,34	0,5924
0,36	0,5898
0,38	0,5843
0,4	0,5760

Portanto, o valor de x para que o volume da caixa seja máximo deve ser aproximadamente 0,34.

Agora é com você

Construa uma caixa a partir de uma folha de cartolina com dimensões 30 cm e 40 cm, cortando quadrados dos cantos da folha, como mostra a figura.



a) Qual o comprimento dos lados do quadrado que você recortou? E quais as dimensões (comprimento, largura e altura) da caixa que você construiu?

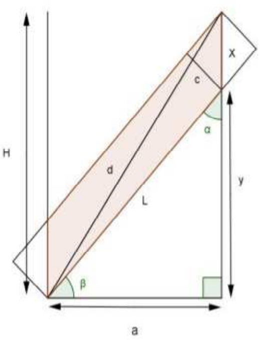
b) Calcule o volume V dessa caixa em função da medida x do lado dos quadrados dos cantos.

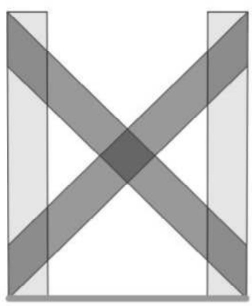
c) Calcule o volume V da caixa para os seguintes valores de x: 3, 4, 5, 6 e 7.

d) Estime um valor de x para que o volume V seja máximo.

Problema 4

Vamos construir uma torre de energia. Essa estrutura utiliza um elemento de engenharia chamado treliça. A questão consiste em dimensionar a viga que será colocada em diagonal (que dá estabilidade à estrutura). Para isso, precisamos encontrar as dimensões da viga (área pintada), bem como os valores dos ângulos α e β, para que haja o encaixe perfeito. Observe a figura:





Vista lateral da torre com as vigas inclinadas que dão estabilidade a estrutura

Sejam:

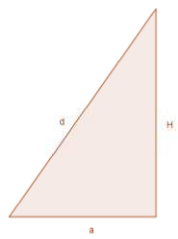
- a: largura da base da torre (quadrada):
- H: altura das quatro vigas fixas nos vértices da base
- c: largura da viga
- d: a diagonal
- L: o comprimento total da viga
- x: altura menor das vigas
- y: altura maior das vigas.

Dados:

H, a e c.

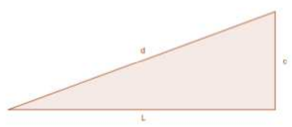
Podemos determinar d pelo teorema de Pitágoras, onde:

$d^2 = a^2 + H^2$ (I)



Ainda pelo Teorema de Pitágoras podemos determinar L, onde:

$d^2 = c^2 + L^2$ (II)



Igualando as equações (I) e (II), temos:

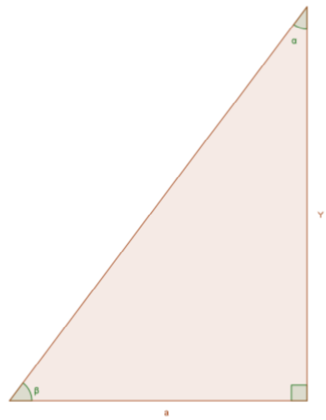
$a^2 + H^2 = c^2 + L^2$

$L^2 = a^2 + H^2 - c^2$

Logo,

$$L = \sqrt{a^2 + H^2 - c^2}$$

→ Cálculo do ângulo



- Soma dos ângulos internos de um triângulo:

$$\beta + \alpha + 90^0 = 180^0$$

$$\beta = 90^0 - \alpha$$

- Relações Trigonométricas:

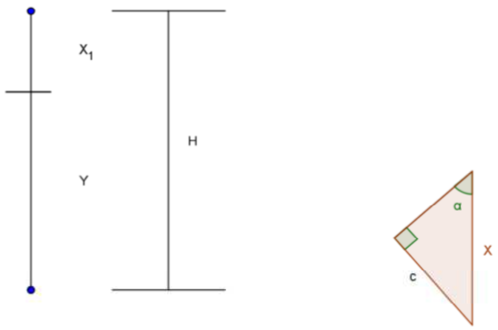
$$\frac{y}{a} = tg\,\beta$$

$$y = a\,tg\,\beta = a\frac{sen(90^0 - \alpha)}{\cos(90^0 - \alpha)}$$

$$y = a\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

Obs.: O seno do complementar de um ângulo é igual ao cosseno do ângulo;

O cosseno do complementar de um ângulo é igual ao seno do ângulo.



$$x = H - a\frac{\cos\alpha}{sen\alpha} \quad (\text{ I })$$

$$\frac{c}{x} = sen\alpha$$

$$x = \frac{c}{sen\,\alpha} \qquad (\text{II})$$

De (I) e (II), temos:

$H - a\dfrac{\cos\boldsymbol{\alpha}}{sen\boldsymbol{\alpha}} = \dfrac{c}{sen\,\boldsymbol{\alpha}}$, multiplicando por $sen\boldsymbol{\alpha}$, obtemos

$$H\,sen\alpha - a\cos\alpha = c$$

Obs.: $sen\,\boldsymbol{\alpha} = \sqrt{1-\cos^2\boldsymbol{\alpha}}$

$$\sqrt{1-\cos^2\boldsymbol{\alpha}} = \frac{c + a\cos\boldsymbol{\alpha}}{H}$$

$$1-\cos^2 = \frac{c^2 + 2ac\cos\boldsymbol{\alpha} + a^2\cos^2\boldsymbol{\alpha}}{H^2}$$

Tomando $\cos\boldsymbol{\alpha} = z$, temos:

$$1 - z^2 = \frac{c^2 + 2acz + a^2z^2}{H^2}$$

$$H^2 - H^2z^2 = c^2 + 2acz + z^2a^2$$

$$a^2z^2 + 2acz + c^2 - H^2 + H^2z^2 = 0$$

$$z^2(a^2 + H^2) + 2acz + c^2 - H^2 = 0$$

Cálculo da equação do 2° grau:

$$\Delta = 4a^2c^2 - 4(a^2 + H^2)(c^2 - H^2)$$

$$\Delta = 4\left[a^2c^2 - (a^2 + H^2)(c^2 - H^2)\right]$$

$$z = \frac{-2ac + 2\sqrt{a^2c^2 - (a^2 + H^2)(c^2 - H^2)}}{2(a^2 + H^2)}$$

$$z = \frac{-ac + \sqrt{a^2c^2 - (a^2 + H^2)(c^2 - H^2)}}{(a^2 + H^2)}$$

Logo, o ângulo procurado é:

$$\alpha = arc\cos z$$

Exemplo: Dados $H = 7{,}9cm$; $a = 4{,}5cm$ e $c = 1cm$, vamos calcular o comprimento L e o ângulo α para construção da torre.

Comprimento:

$$L = \sqrt{a^2 + H^2 - c^2}$$

$$L = \sqrt{4{,}5^2 + 7{,}9^2 - 1^2}$$

$$L = \sqrt{20{,}25 + 62{,}41 - 1}$$

$$L = 9{,}03cm$$

Ângulo:

$$z = \frac{-ac + \sqrt{a^2c^2 - (a^2 + H^2)(c^2 - H^2)}}{(a^2 + H^2)}$$

$$z = \frac{-4{,}5 + \sqrt{20{,}25 - (20{,}25 + 62{,}41)(1 - 62{,}41)}}{(20{,}25 + 62{,}41)}$$

$$z = \frac{-4{,}5 + \sqrt{20{,}25 + 5076{,}1506}}{82{,}66}$$

$$z = \frac{-4{,}5 + 71{,}39}{82{,}66}$$

$$z = \frac{66{,}89}{82{,}66}$$

$$z = 0{,}81$$

$$\alpha = arc\cos z$$

$$\alpha = arc\cos 0{,}81$$

$$\alpha = 35{,}98^\circ$$

$$\alpha \cong 36^\circ$$

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A experiência relatada neste trabalho nos mostrou evidências de uma possibilidade real de ensinar Matemática de outra forma, mais dinâmica e interessante, que esteja ligada a realidade do aluno como também a outras áreas do conhecimento.

Utilizar a Modelagem Matemática em sala de aula é um desafio, e o professor como mediador do conhecimento deve fazer uma atividade em sala de aula que envolva esta metodologia.

A oficina proveu de uma especial experiência didática, colocando-o em contato com alunos e com as questões do ensino da Matemática, construindo assim um repertório de experiências metodológicas, que auxiliará futuramente na tarefa de ensinar Matemática de forma mais interessante e mostrar ao aluno a importância dessa disciplina como parte importante da sua atuação profissional e no exercício pleno da sua cidadania.

Todas as informações obtidas com esta experiência foram mais ricas do que foi possível descrever. Mostramos aos alunos qual o verdadeiro sentido da Matemática, e respondemos a pergunta que tanto atrapalha o processo de ensino da Matemática “Porque tenho que aprender isto?”.

A análise revelou que, no desenrolar das aulas de matemática, os alunos, que antes detinham um conhecimento muito limitado quanto aos conceitos matemáticos, desenvolveram progressivamente a capacidade em compreender seu funcionamento, bem como em empregá-los no processo de produção das modelagens.

Embora, alguns dos alunos não tenham conseguido atingir integralmente os objetivos da atividade culminante do nosso trabalho, avaliamos como positivos os resultados obtidos, tendo em vista o evidente progresso alcançado em relação às primeiras atividades.

Diante disto, a principal conclusão a que chegamos, após a experiência, diz respeito à importância de um estudo da matemática que seja pautado na funcionalidade, conforme focalizamos na elaboração de nossa sequência de aulas, pois, considerando as limitadas experiências anteriores demonstradas pelos alunos com os quais trabalhamos e o pouco tempo destinado às aulas, a partir do momento em que oferecemos condições, mesmo que parcialmente, os aprendizes responderam, dentro de suas possibilidades, ao esperado.

Assim conclui-se que o trabalho foi bastante produtivo. Ao trabalhar com modelagem, a professora deu oportunidade aos alunos de conhecer mais sobre os conceitos matemáticos, e de tomar gosto pelo estudo dos conceitos com uma finalidade real. Além disso, consistiu numa prática inovadora para os alunos participantes do projeto, permitindo que os mesmos se desenvolvessem melhor, não apenas no rendimento no componente Matemática, como também em outras disciplinas.

4. REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. *Modelagem Matemática na sala de aula*. Perspectiva, Erechim (RS),v. 27, n. 98, p. 65-74, junho/2003a.

BARBOSA, J. C; Caldeira, A. D; Araújo, J. L. *Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira: pesquisa e práticas educacionais*. SBEM. Recife, 2007.

BASSANEZI, R. C. *Ensino aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. 3 ed. – São Paulo: Contexto, 2004.

BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. - *Modelagem matemática no ensino*. 4 Ed. 1º reimpressão – São Paulo: Contexto, 2007.

______; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Estudar Matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.* Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CHEVALLARD, Y. El análisis de lasprácticas docentes enlateoría antropológica de lo didáctico. RecherchesenDidactiquedesMathématiques, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999 (Versãoemespanhol não paginada).

D`AMBRÓSIO, U. *A matemática nas escolas*. Educação Matemática em Revista, ano 9 no 11A, edição especial, abril 1986, pp29-33.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. *Matemática completa.* 2 Ed. Renov. – São Paulo: FTD, 2005.

SILVEIRA, J. C; RIBAS, J. L. D. *Discussões sobre modelagem matemática e o ensino-aprendizagem*. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br>