



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
LICENCIATURA PLENA EM CIÊNCIAS EXATAS**

NATAN ARAÚJO LIRA

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS: DIFUSÃO NORMAL E ANÔMALA

Patos - PB

2011

NATAN ARAÚJO LIRA

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS: DIFUSÃO NORMAL E ANÔMALA

Trabalho de conclusão de curso apresentado como parte das atividades para obtenção de título de Licenciatura Plena em Ciências Exatas, com habilitação em Física, pela Universidade Estadual da Paraíba.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Carlos de Assis Júnior

Patos - PB

2011

L768pLIRA, Natan Araújo.

Processos estocásticos: Difusão Normal e Anômala
/Natan Araújo Lira. Patos:UEPB,2011.

35f

Monografia(trabalho de conclusão de curso -
(Tcc) - Universidade Estadual da Paraíba).

Orientador: Prof. Dr. Pedro Carlos de Assis Júnior

1.Física 2.Processos estocásticosI. Titulo
II. Assis Júnior, Pedro Carlos de
CDD 530.12



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA – UEPB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS – CCEA
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CURSO DE LICENCIATURA EM CIÊNCIAS EXATAS

ATA DE DEFESA DE TCC

Aos 18 dias do mês de novembro do ano de 2011; às 12:30 horas, no Campus VII da Universidade Estadual da Paraíba, ocorreu a apresentação de Trabalho de Conclusão de Curso, requisito da disciplina TCC, do (a) aluno (a) Natam Araújo Lima tendo como tema "Problemas de otimização: difusão monomodal e Amôniafe".

Constituíram a Banca Examinadora os professores:

Professor (a) Pedro Carlos de Amorim Júnior
Professor (a) Felipe Miguel de Oliveira Júnior
Professor (a) Elvantonio Cavalcante

Após a apresentação e as observações dos membros da banca avaliadora, definiu-se que o trabalho foi Aprovado, com nota 9,5 (Nove e cinco).
Eu, Pedro Carlos de Amorim Júnior, Professor (a) orientador (a), lavrei a presente ata que segue assinada por mim e pelos demais membros da Banca Examinadora.

Pedro Carlos de Amorim Júnior
Professor(a) Orientador(a)
Nome Completo

Felipe Miguel de Oliveira Júnior
Professor(a) Examinador(a) 1
Nome Completo

Elvantonio Cavalcante
Professor(a) Examinador(a) 2
Nome Completo

NATAN ARAÚJO LIRA

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS: DIFUSÃO NORMAL E ANÔMALA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO, APROVADO EM ____ DE ____ 2011.

NOTA: _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Pedro Carlos de Assis Júnior
Orientador
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Esp. Félix Miguel de Oliveira Junior
Examinador
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Msc. Everton Cavalcante
Examinador
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Quero ter a honra de dedicar este trabalho aos meus amigos bibliotecários do campus VII da UEPB, Kebler Trajano de Sousa, Alexandre Souza Araújo, Kepler Trajano de Sousa, que tanto me ajudou durante essa jornada, não tenho palavras para agradecer a vocês pelo apoio nas horas difíceis.

AGRADECIMENTO

Quero agradecer a Deus pela sua misericórdia em minha vida.

A minha família por ter acreditado em mim, pelo incentivo e apoio.

Aos meus colegas de classe, que aprendemos a conviver diariamente e dividir as alegrias, tristezas e vitórias conquistadas.

Ao Professor Dr. Pedro Carlos de Assis Júnior o qual eu tenho um carinho muito especial por ter me ajudado dando oportunidade, confiança, apoio.

Ao Professor Msc. Valdenes Carvalho que também me ajudou muito.

A minha querida Ana Lúcia secretária do curso de exatas, por sua competência, seriedade, atenção, carinho, afeto e singeleza.

Quero agradecer também a todos os meus amigos e dizer que vocês também fazem parte dessa vitória.

RESUMO

A difusão é um fenômeno muito comum na natureza e, em geral, ocorre quando um sistema encaminha-se para o estado de equilíbrio. Portanto, é de importância fundamental em toda a física. Num processo de difusão, um conjunto de partículas microscópicas, move-se randomicamente, realizando um movimento individual altamente irregular, porém o conjunto se difunde. Num nível macroscópico, este comportamento coletivo, contrastando com o movimento individual microscópico, apresentam grande regularidade e segue leis dinâmicas bem definidas. O objetivo desse trabalho é demonstrar a formulação estocástica para o fenômeno de difusão normal e anômala em termos de um caminho aleatório. Essa descrição foi trabalhada por Langevin[3] e Fokker-Planck [7, 11] e faz parte dos conceitos fundamentais na teoria de difusão em geral. A primeira solução da equação de difusão foi realizada por *A. Einstein*[2], em sua tese de doutorado em 1905, quando ele explicou a dança aleatória de pequenas partículas em suspensão num líquido (movimento *browniano*). Em contraste, a difusão anômala, em geral, tem como característica o crescimento não linear da variância no decorrer do tempo. Concluímos nossa demonstração caracterizamos a solução da equação de *Fokker-Planck*, sem termo de força e não linear através de uma distribuição de probabilidade. Mostramos os casos particulares em que o processo de difusão é normal, subdifusivo ou superdifusivo. Esperamos que esse trabalho sirva de fonte inspiradora para futuras pesquisas nessa área da física. Consideramos que nessa área nem sempre é fácil, representando muitas vezes um trabalho árduo. Contudo, deixamos as informações apresentadas como modelo de motivação aos estudos dos processos difusivos.

Palavras chaves: **Difusão normal e Anômala, Tratamento Estocástico, Equação de *Fokker-Planck*.**

ABSTRACT

Diffusion is a very common phenomenon in nature and generally occurs when a system is moving toward the equilibrium state. It is therefore of fundamental importance in all physics. In a diffusion process, a set of microscopic particles moves randomly, making an individual move highly irregular, but the set spreads. On a macroscopic level, this collective behavior, contrasting with the individual movement microscopic, they are more regular and follows well-defined dynamical laws. The aim of this paper is to show the formulation for the stochastic phenomenon of diffusion in normal and anomalous terms of a random walk. This description was first established by Langevin [3] and Fokker-Planck [7, 11] and is part of the fundamental concepts in the theory of diffusion in general. The first solution of the diffusion equation was carried out by A. Einstein [2] in his doctoral thesis in 1905, when he explained the random dance of small particles suspended in a liquid (Brownian motion). In contrast, anomalous diffusion, in general, is characterized by nonlinear growth of variance over time. We conclude our statement characterized the solution of the Fokker-Planck equation, in indefinite and non-linear form through a probability distribution. We show the particular cases in which the diffusion process is normal, subdiffusive or superdiffusive. We hope this work will serve as a source of inspiration for future research in this area of physics. We consider that research is not always easy, often representing a hard work. However, we presented the information as a model of motivation for studies of diffusive processes.

Keywords: Normal diffusion, anomalous diffusion, Fokker-Planck equation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Processo difusivo em membranas celulares.....	11
Figura 2	Difusão anômala (DA) e difusão Normal (DN).....	13
Figura 3	Comportamento da velocidade quadrática média em função do tempo.....	18
Figura 4	Comportamento do desvio quadrático médio em função do tempo.....	20
Figura 5	Evolução temporal da distribuição de probabilidades.....	25
Figura 6	Distribuição de probabilidades para o processo de difusão anômala.....	30
Figura 7	Classificação de difusão anômala.....	31

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	12
CAPÍTULO I - PROCESSOS DIFUSIVOS NORMAIS E ANÔMALOS.....	13
1.1 Difusão normal	13
1.1.1 Difusão normal e o movimento browniano	13
1.1.2 Difusão normal e o tratamento de Langevin e Fokker-Planck	14
1.2 Difusão anômala	15
1.2.1 Classificação da difusão anômala.....	15
1.2.2 Tipos de difusão anômala	16
CAPÍTULO II - PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	17
CAPÍTULO III – TRATAMENTO ESTOCÁSTICO.....	18
3.1 Tratamento de Langevin.....	18
3.1.1 Velocidade quadrática média.....	19
3.1.2 Relação entre B e T.....	20
3.1.3 Deslocamento quadrático médio	20
3.1.4 Relação Einstein-Smoluchowski	22
3.2 Tratamento de Fokker-Planck	22
3.2.1 Equação de Fokker-Planck com termo de força.....	23
3.3 Distribuição de probabilidade sem termo de força	24
3.4 Solução da equação de Fokker-Planck não linear	27
CAPÍTULO IV – RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	31
CAPÍTULO V - CONSIDERAÇÕES FINAIS	33
BIBLIOGRAFIA	34

INTRODUÇÃO

Em um processo de difusão, temos um conjunto de elementos que se movem randomicamente no nível microscópico e como resultado deste movimento errático o conjunto se propaga no decorrer do tempo. Surpreendentemente, apesar do movimento errático no nível microscópico o sistema apresenta uma regularidade ao nível macroscópico. Há isto, chamamos de difusão. A primeira solução da equação de difusão foi realizada por *A. Einstein*, em sua tese de doutorado em 1905, quando ele explicou a dança aleatória de pequenas partículas em suspensão num líquido (movimento *browniano*). Em contraste, a difusão anômala, em geral, tem como característica o crescimento não linear da variância no decorrer do tempo. A difusão anômala pode ser classificada como normal, subdifusiva ou superdifusiva.

No capítulo I apresentamos definições teorias sobre a difusão normal e anômala referenciando diversos trabalhos científicos. No capítulo II apresentamos o procedimento metodológico. No capítulo III demonstramos todo tratamento estocástico desenvolvido por Langevin e Fokker-Planck a obter a equação de difusão normal, que sem a presença do termo de força e na ausência de fontes ou sorvedouros torna-se a equação de difusão de Einstein, no qual ele explicou o movimento browniano. A seguir, trabalhamos a equação de difusão de forma não linear. No capítulo IV apresentamos como resultado o comportamento da distribuição de probabilidades advinda da solução da equação de Fokker-Planck não linear. No limite da difusão normal o comportamento da distribuição é uma gaussiana, como esperado; porém quando a difusão é anômala a distribuição tem comportamento do tipo Lèvy com cauda longa. E finalmente, no capítulo V apresentamos nossas considerações finais.

CAPÍTULO I-PROCESSOS DIFUSIVOS NORMAIS E ANÔMALOS

A seguir faremos um breve estudo sobre a difusão normal e anômala. A difusão anômala pode ser classificada segundo a equação da variância $\langle (\Delta x)^2 \rangle \propto t^\eta$, ($\eta \neq 1$), onde η igual a zero ou maior que um ou menor que um, definirá diferentes comportamentos para função distribuição.

1.1 Difusão normal

A difusão é um fenômeno comum da natureza. Na nossa vida cotidiana estamos nos deparando constantemente com esse fenômeno. Veja alguns exemplos: na dissolução do açúcar no café, na abertura de um frasco de perfume, no espalhamento da fumaça de cigarro, na evolução de uma mistura ou reação química, enfim são inúmeros exemplos do nosso dia a dia. A Fig.(1) mostra um processo difusivo em membranas de células:

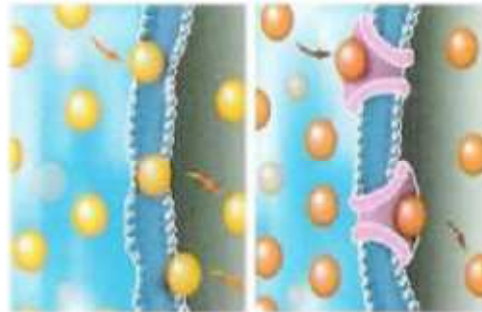


Figura 1: Processo Difusivo em Membranas Celulares

Este fenômeno possui uma frequência relativamente alta em processos de natureza física, química e biológica. No geral, ocorre quando um sistema encaminha-se para o estado de equilíbrio. No momento em que está ocorrendo um processo difusivo, temos um conjunto de elementos que poderão alterar-se constantemente, por exemplo: energia, momento linear, átomos, moléculas, etc., até que então o sistema atinja o estado de equilíbrio, não mais alterando as variáveis microscópicas.

1.1.1 Difusão normal e o movimento browniano

A natureza aleatória das partículas, no nível macroscópico, foi observada inicialmente pelo botânico inglês Robert Brown [1], recebendo assim o nome de “*movimento browniano*” (MB). Posteriormente foi explicado por Albert Einstein em sua tese de doutorado (1905). Ele publicou uma explicação [2] com o título “concerning the motion, as required by the molecular-kinetic theory of heat, of particles suspended in liquids at rest”. As explicações de A. Einstein, para MB, desencadearam uma série de novos trabalhos sobre fenômenos de natureza estocástica. Podemos citar diversos pesquisadores que já contribuíram nesta área do conhecimento, tais como: Langevin [3], Fokker [4], Burger [5], Ornstein [6], Planck [7], Kac [8] e muitos outros.

O tratamento dado por Einstein também forneceu uma boa estimativa do número de Avogadro, a qual foi verificada, com grande precisão, nos experimentos efetuados por Jean Perrin [9]. Um ano após as explicações de Einstein, a mesma explicação foi desenvolvida independentemente por Smoluchowski [10].

1.1.2 Difusão normal e o tratamento de Langevin e Fokker-Planck

No início do século XX, os estudos do MB constituíram um elemento importante para o estabelecimento da matéria em contraposição às visões energeticistas dominantes da Europa. Esses e muitos outros fenômenos que possuem tal comportamento, isto é, um movimento altamente aleatório em nível microscópico com uma regularidade macroscópica pode ser descritos, por exemplo, em termos de equações de Langevin e equações de difusão. Segundo Langevin [3], o MB de uma partícula pode ser entendido com base numa equação diferencial estocástica.

Quando estudamos um processo difusivo e observamos o caráter aleatório das grandezas relevantes desse sistema, notamos que a descrição matemática da difusão baseia-se num conjunto de equações denominadas equações de Langevin. Alternativamente, podemos focar o comportamento médio das grandezas relevantes através do estudo de suas probabilidades. A equação que descreve a evolução das probabilidades é a equação de Fokker-Planck [11].

1.2 Difusão anômala

A difusão anômala tem como característica o crescimento não linear da variância com o tempo $\langle (\Delta x)^2 \rangle \propto t^\gamma, (\gamma \neq 1)$. Um marco no estudo da difusão anômala é o tratado de Richardson sobre difusão turbulenta, de 1926 [12]. A difusão anômala tem sido fundamental na análise de uma grande classe de sistemas físicos, tais como: difusão em plasma [13], difusão em fluidos turbulentos [14], transporte de fluidos em meios porosos [15], difusão em fractal [16], difusão anômala em superfícies líquida [17], análises de histogramas de batidas do coração [18] e etc. A Figura (2) mostra dois tipos de difusão:

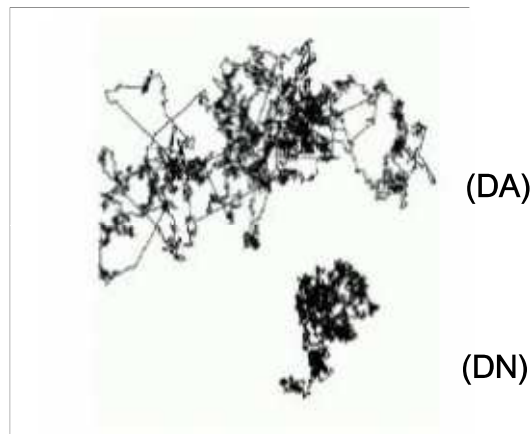


Figura 2: Difusão Anômala (DA) e Difusão Normal (DN)

1.2.1 Classificação da difusão anômala

Na descrição do comportamento anômalo, podemos classificá-lo como: processo subdifusivo: quando $\eta < 1$, processo de difusão normal quando $\eta = 0$ e processo superdifusivo quando $\eta > 1$. Como exemplos da difusão anômala em regime superdifusivo temos: micelas CTAB dissolvidas em águas salgadas [19], dinâmica caótica devido a vôos e aprisionamentos [20], difusão anômala em fluidos bidimensionais [21], em movimentos bacterianos [22], além da difusão transporte em plasmas turbulentos [23]. Como exemplo da difusão normal são todos aqueles sistemas físicos que possuem o comportamento da distribuição do tipo gaussiana. No regime subdifusivo, temos: no transporte de carga em semicondutores amorfos [24,25], difusometria NMR em percolados [26], transporte em geometrias fractais [27,28].

1.2.2 Tipos de difusão anômala

Na difusão anômala podemos ter do tipo *Lévy* [29] ou correlacionada [30]. Na difusão tipo *Lévy*, a variância pode não ser finita. Para descrever a difusão do tipo *Lévy*, pode ser utilizado uma equação de difusão com derivadas de ordem fracionária [31] e suas soluções são as distribuições de *Lévy*. Diferentemente desta, a difusão do tipo correlacionada pode apresentar um segundo momento finito. Em cada uma dessas situações podem ser caracterizadas por equações de difusão, em um contexto estatístico, seja ele descrito pela mecânica estatística extensiva ou pela mecânica estatística não extensiva. A mecânica estatística não extensiva foi proposta por Tsallis (CBPF), que diz que a priori não podemos dizer que a entropia de um sistema é uma variável extensiva. Uma variável extensiva é proporcional ao número de partículas (ou a massa) de um sistema, por exemplo, energia. Já a intensiva independe do número de partículas (ou a massa) de um sistema temos como exemplo, temperatura.

CAPÍTULO II - PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia que empregamos para o desenvolvimento do presente trabalho consiste em fazer um estudo do movimento *browniano* e forças flutuantes segundo a visão de *Langevin*, bem como a evolução temporal de probabilidades. O estudo inicial resulta na obtenção da equação de *Fokker-Planck* com termo de força, usando um procedimento termo estatístico. Em seguida foi estudada a equação de difusão não linear para meios porosos. A solução dessa equação corresponde, a obtenção da distribuição de probabilidades em função de ν , que corresponde ao grau de não linearidade. Para o caso em que ele possui valor 1, retornaremos a equação de difusão normal (*Fokker-Planck*) e para valores de ν diferentes de 1 o comportamento da gaussiana difere daquela obtida para difusão normal. Observamos que essa nova distribuição de probabilidade assemelha-se a do tipo *Lèvy*, que possui calda longa, caracterizando a difusão do tipo anômala. A difusão normal representada pela equação de *Fokker-Planck*, sem termo de força, é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = D \nabla^2 \rho(x, t) \quad (1)$$

No caso da difusão anômala dada pela equação abaixo, introduzimos ν , e ficamos com uma expressão do tipo

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(y, t) = D \nabla^2 [\rho(y, t)]^\nu \quad (2)$$

onde, para $\nu = 1$, retornamos a equação usual de difusão, Eq.(1). Para valores de ν diferentes, a distribuição de probabilidades comporta-se como uma distribuição de *Lèvy*, apresentando uma calda longa.

CAPÍTULO III – TRATAMENTO ESTOCÁSTICO

3.1 Tratamentode Langevin

Partindo da possibilidade de demonstrar a equação de Fokker-Planck, a partir do modelo termo estatístico, iniciaremos da visão de Langevin para uma partícula na presença de uma força aleatória $F(t)$, inserido num fluido.

$$m \frac{dx}{dt} = -\alpha v + F(t) \quad (3)$$

onde, $v = \frac{dx}{dt}$, é a velocidade e x a posição da partícula. A primeira parcela, à direita, da Eq.(3) é a força viscosa, sendo α uma constante, e a segunda parcela, $F(t)$, é a força aleatória que possui as seguintes propriedades:

$$\langle F(t) \rangle = 0 \quad (4)$$

onde, em media, a força aleatória devida aos choques com as moléculas é nula. Para um intervalo pequeno de tempo podemos representar esse comportamento pela expressão a seguir

$$\langle F(t)F(t') \rangle = B\delta(t-t') \quad (5)$$

onde, estamos considerando que os impactos sejam independentes.

A equação, Eq.(3), suplementada pelas propriedades das equações, Eq.(4) e Eq.(5), é denominada de equação de *Langevin*. Dividindo ambos os membros da Eq.(3) por m , obtemos

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + \zeta(t) \quad (6)$$

onde, $\gamma = \alpha/m$ e $\zeta(t) = F(t)/m$. A quantidade estocástica $\zeta(t)$ é chamada de ruído, isto é, uma variável aleatória dependente do tempo, que possui as propriedades

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0 \quad (7)$$

$$\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \Gamma\delta(t-t') \quad (8)$$

onde $\Gamma = B/m^2$. A Eq.(8) representa a força aleatória para pequenos intervalos de tempo.

Considere a Eq.(9) para uma dada função de u , e na sequência integramos u entre o intervalo de u a u_0 .

$$\frac{du}{dt} = -\gamma u + \zeta(t) \quad (9)$$

$$u = u_0 + \int_0^t e^{-\gamma t'} \xi(t') dt' \quad (10)$$

A velocidade em função de u é dada por

$$v(t) = u(t) e^{-\gamma t} \quad (11)$$

Após alguma álgebra, obtemos

$$v = v_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} \xi(t') dt' \quad (12)$$

onde v_0 é a velocidade da partícula instante $t = 0$. Essa solução é válida para qualquer função temporal $\xi(t)$. Em seguida vamos usar as propriedades específicas do ruído para determinar a média e a variância da velocidade. Assim, tomando a média da Eq.(12), temos

$$\langle v \rangle = v_0 e^{-\gamma t} \quad (13)$$

$$v - \langle v \rangle = v_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} \xi(t') dt' - v_0 e^{-\gamma t} \quad (14)$$

Dessa forma

$$v - \langle v \rangle = e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} \xi(t') dt' \quad (15)$$

$$\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle = \langle \left(e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} \xi(t') dt' \right)^2 \rangle \quad (16)$$

$$\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle = e^{-2\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} \xi(t') dt' e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t''} \xi(t'') dt'' \quad (17)$$

$$\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle = e^{-2\gamma t} \int_0^t \int_0^t \xi(t') \xi(t'') e^{\gamma(t'+t'')} dt' dt'' \quad (18)$$

$$\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle = e^{-2\gamma t} \int_0^t \int_0^t e^{-2\gamma t'} dt' \quad (19)$$

3.1.1 Velocidade quadrática média

Efetuada a integral da equação, Eq.(19), obtemos a variância da velocidade

$$\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 = \frac{\Gamma}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \quad (20)$$

Para tempos longos, isto é, no regime estacionário, $\langle v \rangle = 0$, e a velocidade quadrática média se torna

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\Gamma}{2\gamma} \quad (21)$$

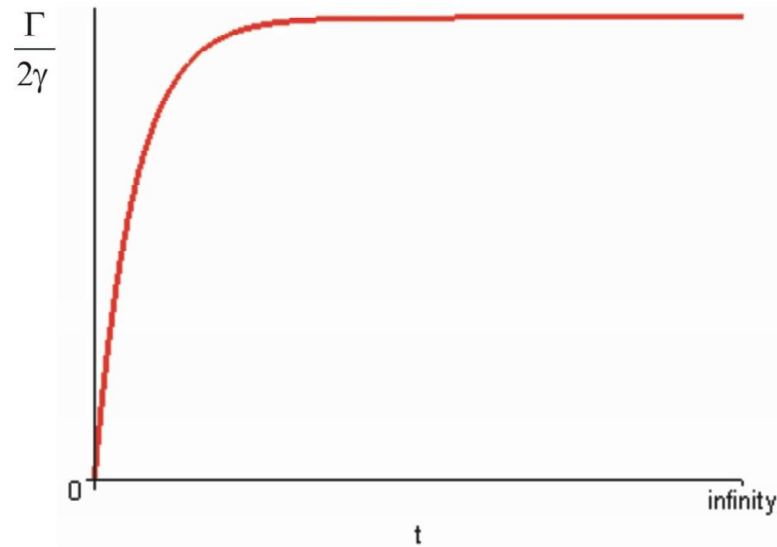


Figura 3: Comportamento da velocidade quadrática média em função do tempo.

Sabemos, a partir da teoria cinética dos gases, que a relação entre a energia cinética média e a energia de Boltzmann é dada por

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} K_B T \quad (22)$$

onde K_B é a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta. Comparando essas duas equações, obtemos a relação entre o coeficiente Γ e a temperatura

$$\Gamma = \frac{2\gamma K_B T}{m} \quad (23)$$

3.1.2 Relação entre B e T

Lembrando que $B = \Gamma m^2$ e que $\gamma = \gamma m$, obtemos a relação entre B e a temperatura T .

$$B = 2\alpha K_B T \quad (24)$$

3.1.3 Deslocamento quadrático médio

O deslocamento quadrático médio da partícula é calculado pela função $x(t)$ dado por

$$x = x_0 + \int_0^t v(t') dt' \quad (25)$$

onde, x_0 é a posição da partícula no instante $t = 0$.

Usando equação, Eq.(12), para velocidade e a Eq.(25) para posição, obtemos

$$x = x_0 + v_0 \int_0^t e^{-\gamma t'} dt' + \int_0^t e^{-\gamma t'} \int_0^{t'} e^{\gamma t''} \xi(t'') dt'' dt' \quad (26)$$

Efetuada a primeira integral e invertendo a ordem das integrais da ultima parcela, temos

$$x = x_0 + v_0 \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + \int_0^t e^{\gamma t''} \xi(t'') \int_{t''}^t e^{-\gamma t'} dt' dt'' \quad (27)$$

Integrando em t'

$$x = x_0 + v_0 \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{\gamma} \int_0^t \xi(t'') (1 - e^{\gamma(t''-t)}) dt'' \quad (28)$$

Usando a propriedade da Eq.(7), e integrando em t'' , obtemos o deslocamento médio da partícula

$$\langle x \rangle = x_0 + v_0 \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \quad (29)$$

O desvio quadrático médio se calcula, a partir da Eq.(28) e Eq.(29). Assim, a diferença entre esses valores é dada por

$$x - \langle x \rangle = \frac{1}{\gamma} \int_0^t \xi(t'') (1 - e^{\gamma(t''-t)}) dt'' \quad (30)$$

Contudo, obtemos

$$(x - \langle x \rangle)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \int_0^t \int_0^t \xi(t'') \xi(t''') (1 - e^{\gamma(t''-t)}) (1 - e^{\gamma(t'''-t)}) dt'' dt''' \quad (31)$$

Tomando a média da Eq.(31), finalmente temos

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{\Gamma}{\gamma^2} \int_0^t (1 - e^{\gamma(t''-t)})^2 dt'' \quad (32)$$

Integral em t'' , obtemos o deslocamento quadrático médio da partícula dada pela expressão a seguir.

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\Gamma}{\gamma^2} \left\{ t - \frac{2}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \right\} \quad (33)$$

Tomando o limite assintótico da Eq.(33), para tempos longos, o termo dominante é o primeiro, de modo que nesse regime o desvio quadrático médio é proporcional a t , isto é, dado pela expressão

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = Dt \quad (34)$$

onde $D = \Gamma/\gamma^2 = B/\alpha^2$ é o coeficiente de difusão. O gráfico abaixo é da equação Eq.(33) para o deslocamento quadrático médio.

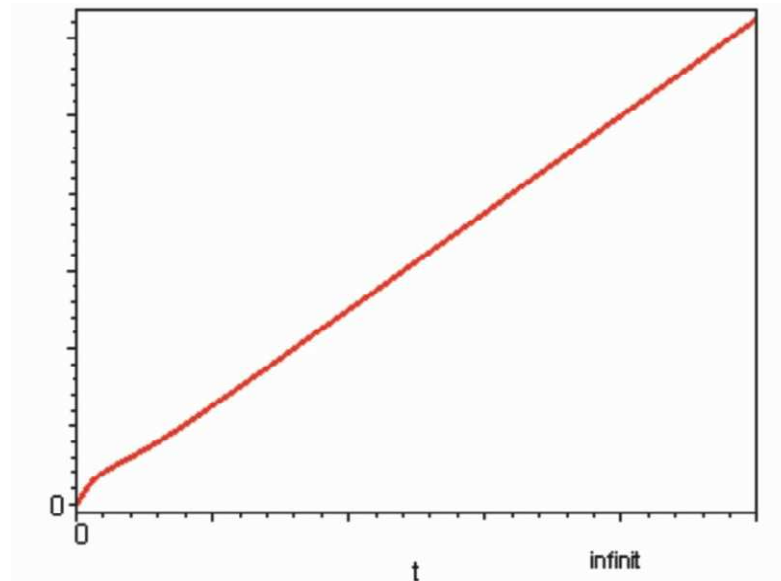


Figura 4: Comportamento do desvio quadrático médio em função do tempo.

3.1.4 Relação Einstein-Smoluchowski

Inicialmente, notamos um comportamento não linear, contudo, no limite de tempos longos o comportamento é linear, em acordo com a equação, Eq.(34). Usando a equação, Eq.(23), podemos escrever a seguinte relação entre o coeficiente de difusão e a temperatura

$$D = \frac{2k_B T}{\zeta} \quad (35)$$

conhecida como relação de *Einstein-Smoluchowski*.

3.2 Tratamento de Fokker-Planck

Seja $P_N(x_N)$ a distribuição de probabilidade da variável x_N e $\varphi_N(k)$ a correspondente função característica dada por

$$\varphi_N(k) = \langle e^{ikx_N} \rangle = \int e^{ikx_N} P_N(x_N) dx_N \quad (36)$$

Considere as seguintes definições

$$x_{N+1} = x_N + \Delta x_N \quad (37)$$

$$\varphi_N = P(x_N) + \zeta_N \quad (38)$$

Inserindo a Eq.(38) na Eq.(37), obtemos

$$x_{n+1} = x_n + \tau F(x_n) + \tau \zeta_n \quad (39)$$

Considerando a função característica $g_{n+1}(k)$ dada por

$$g_{n+1}(k) = \langle e^{ikx_{n+1}} \rangle = \langle e^{ik[x_n + \tau F(x_n) + \tau \zeta_n]} \rangle \quad (40)$$

onde, substituímos a Eq.(39). Tendo em vista que x_n e ζ_n são independentes, reescrevemos a Eq.(40), da forma

$$g_{n+1}(k) = \langle e^{ik[x_n + \tau F(x_n)]} \rangle \langle e^{ik\tau \zeta_n} \rangle \quad (41)$$

Expandindo a função $g_{n+1}(k)$, até termos em primeira ordem em τ , obtemos

$$\langle e^{ik[x_n + \tau F(x_n)]} \rangle = \langle e^{ikx_n} \rangle \langle e^{ik\tau F(x_n)} \rangle \quad (42)$$

Expandindo a função exponencial

$$\langle e^{ik\tau \zeta_n} \rangle = 1 + ik\tau \langle \zeta_n \rangle - \frac{1}{2} k^2 \tau^2 \langle \zeta_n^2 \rangle \quad (43)$$

Usamos as propriedades $\langle \zeta_n \rangle = 0$ e $\langle \zeta_n^2 \rangle = \frac{\Gamma}{\tau}$, temos

$$\langle e^{ik\tau \zeta_n} \rangle = 1 - \frac{1}{2} k^2 \tau \Gamma \quad (44)$$

Finalmente, a função característica se torna

$$g_{n+1}(k) = g_n(k) + \tau \left\{ ik \langle f(x_n) e^{ikx_n} \rangle - \frac{\Gamma}{2} k^2 \langle e^{ikx_n} \rangle \right\} \quad (45)$$

Usamos as seguintes propriedades

$$ik \langle f(x) e^{ikx} \rangle = \langle f(x) \frac{d}{dx} e^{ikx} \rangle = - \int e^{ikx} \frac{d}{dx} [f(x) P_n(x)] dx \quad (46)$$

$$-k^2 \langle e^{ikx} \rangle = \langle \frac{d^2}{dx^2} e^{ikx} \rangle = \int e^{ikx} \frac{d^2}{dx^2} \rho_n(x) dx \quad (47)$$

Logo, a distribuição de probabilidade é dada por

$$\rho_{n+1}(x) - \rho_n(x) = -\tau \frac{d}{dx} [f(x) \rho(x, t)] + \tau \frac{\Gamma}{2} \frac{d^2}{dx^2} \rho_n(x) \quad (48)$$

3.2.1 Equação de Fokker-Planck com termo de força

Dividimos ambos os membros por τ e tomamos o limite $\tau \rightarrow 0$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} [f(x) \rho(x, t)] + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) \quad (49)$$

Esta é a equação de *Fokker-Planck* na presença do termo de força. No caso particular, na ausência do termo de força, ficamos

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \frac{\Gamma \partial^2 \rho(x,t)}{2 \partial x^2} \quad (50)$$

que é conhecida como equação de difusão normal. Assim, reescrevemos

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \frac{D \partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} \quad (51)$$

onde D é o coeficiente de difusão.

3.3 Distribuição de probabilidade sem termo de força

Deste modo, podemos empregar em vários contextos a equação de *Fokker-Planck* ou a equação de difusão, indistintamente. Encontrar a solução desta equação significa resolver a equação de *Langevin* em tempos longos. Para isso, usaremos os mesmos procedimentos usuais utilizados na resolução das equações diferenciais parciais. Consideremos a seguinte condição inicial

$$\rho(x, t=0) = N \delta(x) \quad (52)$$

onde N representa o número de partículas contido no meio. Utilizando a transformada de Fourier, teremos

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(k, t) e^{ikx} dk \quad (53)$$

e a transformada inversa será dada por

$$\tilde{\rho}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', t) e^{-ikx'} dx' \quad (54)$$

Derivando a equação, Eq. (53), em relação à t , encontramos o seguinte resultado

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(k,t) e^{ikx} dk \quad (55)$$

Por outro lado, a derivada segunda da eq.(53) em relação à x , será dada por

$$\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{k^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(k,t) e^{ikx} dk \quad (56)$$

e substituindo as equações, Eq.(55) e Eq.(56), na equação Eq.(51), obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(k,t) e^{ikx} dk = -D \frac{k^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(k,t) e^{ikx} dk \quad (57)$$

Logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} I \left[\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(k, t) + DK^2 \tilde{\rho}(k, t) \right] e^{ikx} dk = 0 \quad (58)$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(k, t) + DK^2 \tilde{\rho}(k, t) = 0 \quad (59)$$

Resolvendo a Eq.(59) e utilizando o método da separação de variáveis. Podemos definir assim a Eq.(60)

$$\tilde{\rho}(k, t) = \tilde{\rho}(k, 0) e^{-DK^2 t} \quad (60)$$

substituindo a equação, Eq.(54), na equação, Eq.(60), temos que

$$\tilde{\rho}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(k, 0) dx' e^{-DK^2 t} e^{ikx} dk \quad (61)$$

A equação, Eq.(61), no instante $t = 0$, pode ser reescrita da seguinte forma

$$\tilde{\rho}(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', 0) e^{-ikx'} dx' \quad (62)$$

Finalmente, substituindo as equações, Eq.(61) e Eq.(62), na equação, Eq.(53), obtemos a seguinte expressão

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', 0) e^{-ikx'} dx' \right] e^{-DK^2 t} e^{ikx} dk \quad (63)$$

Portanto

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', 0) e^{-DK^2 t} e^{ik(x-x')} dk dx' \quad (64)$$

Vamos introduzir a função $g(x-x')$ na distribuição de probabilidade, equação Eq.(64), obtendo

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', 0) g(x-x', t) dx' \quad (65)$$

onde

$$g(x-x', t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-DK^2 t} e^{ik(x-x')} dk \quad (66)$$

Utilizando o teorema de *Euler* para os números complexos, temos

$$e^{ik(x-x')} = \cos[k(x-x')] + i \sin[k(x-x')] \quad (67)$$

Portanto, a equação, Eq.(66), pode ser reescrita da seguinte forma

$$g(x-x',t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk^2t} \{\cos[k(x-x')] + i \sin[k(x-x')]\} dk \quad (68)$$

Nesse caso, a segunda parcela da integral é nula, pois seu integrando é composto pelo produto de uma função par por uma função ímpar. Com isso, obtemos

$$g(x-x',t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk^2t} \cos[k(x-x')] dk \quad (69)$$

que é a função de Green da equação de difusão. Integrando a Eq.(69), obtemos a seguinte solução

$$g(x-x',t) = \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-(x-x')^2/4Dt} \quad (70)$$

Logo, substituindo a equação, Eq.(70), na equação, Eq.(65), teremos

$$\rho(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x',0) \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-(x-x')^2/4Dt} dx' \quad (71)$$

Isso implica que

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x',0) e^{-(x-x')^2/4Dt} dx' \quad (72)$$

Aplicando a condição inicial imposta pela equação, Eq.(51), na equação, Eq.(72), encontramos a seguinte expressão

$$\rho(x,t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') e^{-(x-x')^2/4Dt} dx' \quad (73)$$

e considerando que

$$f(x') = e^{-(x-x')^2/4Dt} \quad (74)$$

Usando a propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') f(x') dx' = f(0) \quad (75)$$

Finalmente, obtemos a solução da distribuição de probabilidade dada por

$$\rho(x,t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt} \quad (76)$$

esta é a solução da equação de *Fokker-Planck*, sem termo de força. O comportamento de $P(x,t)$ está representando graficamente na Fig.(5) a seguir.

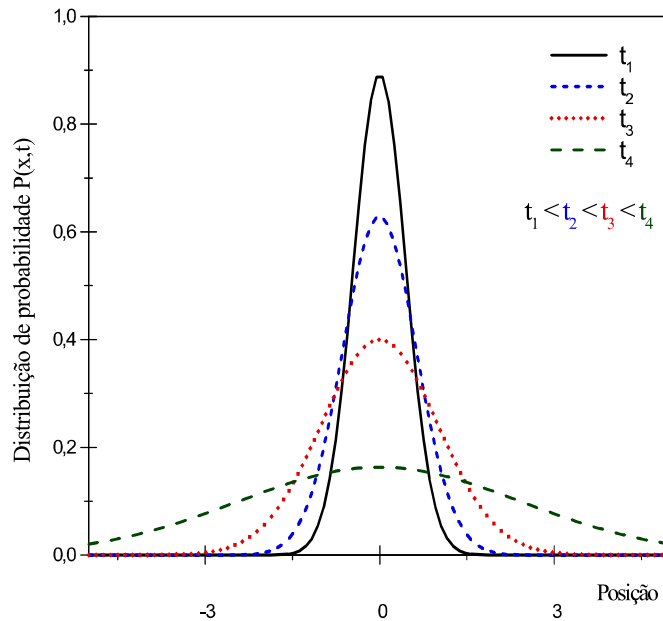


Figura 5: Evolução temporal da distribuição de probabilidades.

Esse gráfico mostra a evolução temporal da distribuição de probabilidades para o caso simples de um movimento unidimensional. Para pequenos intervalos de tempo a distribuição representa uma função delta centrada na origem $x = 0$, mas, com o passar do tempo, a distribuição evolui como uma gaussiana de largura variável.

Comparando a equação, Eq.(34), com a distribuição de probabilidade gaussiana

$$\rho(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (77)$$

onde a média $\langle x \rangle = 0$ e a variância $\sigma^2 = 2Dt$.

3.4 Solução da equação de Fokker-Planck não linear

A difusão anômala tem sido a motivação de diversos cientistas nestes últimos anos. Especificamente, o que tem sido feito é uma investigação de um conjunto de equações não lineares e suas respectivas soluções. Estas equações são estudadas incorporando a não linearidade, dependência espacial o coeficiente de difusão e dependência temporal. Fizemos uma análise da equação de difusão na presença de força externa, com um coeficiente de difusão que apresenta dependência espacial e temporal. A presença do termo não linear nesta equação é devido à generalização da lei de Darcy não linear. Obtemos uma solução exata e

investigamos os efeitos não lineares produzidos nesta solução por esses termos. Os resultados encontrados aqui são escritos dentro do formalismo da mecânica estatística não extensiva.

Investigando uma solução dependente do tempo para a equação

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D(x, t, \rho, \partial_x \rho) \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) \right\} - \frac{\partial}{\partial x} [F(x, t) \rho(x, t)] \quad (78)$$

Nesta direção, limitamos nossa análise a encontrar uma solução que possa ser expressa como uma forma escalar do tipo

$$\bar{\rho}(x, t) = \frac{1}{\Phi(t)} \bar{\rho} \left[\frac{x}{\Phi(t)} \right] \quad (79)$$

Estas soluções devem satisfazer as condições de contorno iniciais e de normalização quando $\Phi(t) = 1$. Antes de analisar a solução da equação, Eq.(78), consideramos que a solução dessa equação seja dada por

$$\rho(x, t) = \exp \left[- \int_0^x dt \bar{\alpha}(t) \right] \bar{\rho}(x, t) \quad (80)$$

onde $\bar{\rho}(x, t)$ é uma função a ser determinada. Usando o tratado acima, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}(x, t) = \bar{D}(t) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ |x|^{-\beta} \left| \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho}(x, t) \right|^{\nu} \right\} - \frac{\partial}{\partial x} [\bar{F}(x, t) \bar{\rho}(x, t)] \quad (81)$$

Consideraremos ausência da força externa e a presença de uma força externa linear e depois incorporamos a lei de potencia para a força externa. Neste caso, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}(x, t) = \bar{D}(t) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ |x|^{-\beta} \left| \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho}(x, t) \right|^{\nu} \right\} \quad (82)$$

onde ν é o coeficiente da não linearidade. Esta equação também pode ser formulada no contexto de difusão de calor. Para isto, precisamos considerar a condutividade térmica dependente da temperatura [32] e da lei de Fourier [33] generalizada não linear.

Fazendo mudanças de variável $z = x/\Phi(t)$, onde $|x| = x$, na Eq.(79), obtemos

$$\bar{\rho}(x, t) = \frac{1}{\Phi(t)} \bar{\rho}[z] \quad (83)$$

Tomando a derivada temporal dada Eq.(83), encontramos

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}(x, t) = - \frac{1}{\Phi^2(t)} \frac{d}{dt} \Phi(t) \bar{\rho}(z) + \frac{1}{\Phi(t)} \frac{d}{dt} \bar{\rho}(z) \quad (84)$$

Artifício matemático

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mu}(z) = \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \bar{\mu}(z) = -\frac{1}{\Phi(t)} \Phi'(t) \frac{\partial}{\partial z} \bar{\mu}(z) \quad (85)$$

Substituindo Eq.(85) na equação, Eq.(84), expressamos

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mu}(z, t) = -\frac{1}{\Phi^2(t)} \frac{d}{dt} \Phi(t) \bar{\mu}(z) + \frac{1}{\Phi(t)} \frac{z}{\Phi}$$

Por outro lado

$$\frac{d}{dz} [z\bar{\mu}(z)] = \bar{\mu}(z) + z \frac{d}{dz} \bar{\mu}(z) \quad (87)$$

Finalmente, podemos reescrever a equação, Eq.(84), da forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mu}(z, t) = -\frac{1}{\Phi^2(t)} \frac{d}{dt} \Phi(t) \bar{\mu}(z) \frac{d}{dz} [z\bar{\mu}(z)] \quad (88)$$

Partindo da Eq.(82) e usando as definições posteriores, determinamos as expressões

$$\frac{d}{dz} \left\{ |z|^{-\vartheta} \left| \frac{d}{dz} \bar{\mu}(z) \right|^u \left| \bar{\mu}(z) \right|^v \right\} = -\bar{k} \frac{d}{dz} [\bar{\mu}(z)] \quad (89)$$

$$[\Phi(t)]^{\xi} \frac{d}{dt} \Phi(t) = -\bar{k} \bar{D}(t) \quad (90)$$

onde $\xi = 2u + v + \nu$ e \bar{k} é uma constante arbitrária. A Eq.(89) representa a parte espacial e a Eq.(90) a parte temporal.

Resolvendo a equação referente à parte temporal, temos

$$\Phi(t) = \frac{\Phi_0}{(1 + \xi t)^{\bar{k}}}$$

onde $\bar{k} = (1 + \xi) \bar{k}$ determinado pela condição de normalização. Executando uma integração na Eq.(89), obtemos,

$$|z|^{-\vartheta} \left| \frac{d}{dz} \bar{\mu}(z) \right|^u \left| \bar{\mu}(z) \right|^v = -\bar{k} z \bar{\mu}(z) + C \quad (92)$$

onde C é uma constante de integração. Para encontrar a solução da Eq.(92), considerando a seguinte “chute”: $\bar{\mu}(z) = (1 - \alpha z^\lambda)^{\beta}$ e para simplificar, escolhemos $C = 0$ para satisfazer a $\bar{\mu}(z \rightarrow \pm \infty, t) \rightarrow 0$. Estas considerações conduzem a

$$\frac{d}{dz} \bar{\mu}(z) = -\alpha \beta \lambda z^{\lambda-1} (1 - \alpha z^\lambda)^{\beta-1} \quad (93)$$

$$\frac{d}{dz} [\bar{\mu}(z)]^v = -\alpha \beta v z^{\lambda-1} (1 - \alpha z^\lambda)^{\beta v-1} \quad (94)$$

Substituindo Eq.(93) e Eq.(94) em Eq.(92), obtemos a expressão:

$$\left(\frac{\alpha\beta\lambda}{1-\alpha z^{\frac{1}{k}}}\right)^{\alpha+1} z^{(\nu(\lambda+1)-(2+\theta+\kappa))\left(\frac{\nu}{k}\right)} (1-\alpha z^{\frac{1}{k}})^{\nu(\nu+\kappa+1)} = 1 \quad (95)$$

Escolhendo os valores de β e λ como sendo

$$\beta = \frac{\nu+1}{\nu+\kappa-1} \quad \lambda = \frac{2+\theta+\kappa}{\nu+1} \quad (96)$$

Reduzimos a Eq.(95) a expressão

$$(\alpha\beta\lambda)^{\alpha+1} \left(\frac{\nu}{k}\right) = 1 \quad (97)$$

onde o termo α é dado por

$$\alpha = \frac{\nu+\kappa-1}{2+\theta+\kappa} \left(\frac{k}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} \quad (98)$$

Finalmente, podemos expressar $\tilde{\rho}(z)$ como

$$\tilde{\rho}(z) = \left[1 - \frac{\nu+\kappa-1}{2+\theta+\kappa} \left(\frac{k}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} z^{\frac{2+\theta+\kappa}{\nu+1}} \right]^{\frac{\nu+1}{\nu(\nu+1)}} \quad (99)$$

Que é a solução da Eq.(94). A expressão para $\tilde{\rho}$ fica

$$\tilde{\rho}\left[\frac{|x|}{\Phi(\tau)}\right] = \left[1 - \frac{\nu+\kappa-1}{2+\theta+\kappa} \left(\frac{k}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} \left(\frac{|x|}{\Phi(\tau)}\right)^{\frac{2+\theta+\kappa}{\nu+1}} \right]^{\frac{\nu+1}{\nu(\nu+1)}} \quad (100)$$

onde substituímos o valor da variável z . Tomando $q = 2 - (\nu + \kappa)$, obtemos

$$\tilde{\rho}\left[\frac{|x|}{\Phi(\tau)}\right] = \left\{ \left[1 - \frac{(1-q)}{2+\theta+\kappa} \left(\frac{k}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} \left(\frac{|x|}{\Phi(\tau)}\right)^{\frac{2+\theta+\kappa}{\nu+1}} \right]^{\frac{1}{1-q}} \right\}^{\alpha+1} \quad (101)$$

ou ainda

$$\tilde{\rho}\left[\frac{|x|}{\Phi(\tau)}\right] = \left\{ [1 + (1-q)X]^{\frac{1}{1-q}} \right\}^{\alpha+1} = (\text{exp}_q[X])^{\alpha+1} \quad (102)$$

com

$$X = \left[1 - \frac{(1-q)}{2+\theta+\kappa} \left(\frac{k}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} \left(\frac{|x|}{\Phi(\tau)}\right)^{\frac{2+\theta+\kappa}{\nu+1}} \right] \quad (103)$$

onde a $\text{exp}_q[x]$ é a q -exponencial que emerge do formalismo *Tsallis* [34]. Assim, a solução da Eq.(83) tem a forma

$$\tilde{\rho}(x, \tau) = \frac{1}{\Phi(\tau)} \left\{ \text{exp}_q \left[-\frac{1}{2+\theta+\kappa} \left(\frac{k}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} \left(\frac{|x|}{\Phi(\tau)}\right)^{\frac{2+\theta+\kappa}{\nu+1}} \right] \right\}^{\alpha+1} \quad (104)$$

CAPÍTULO IV – RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir da Eq.(104) construímos a Fig. (6) que mostrou o comportamento de $\rho(x,t) \Phi(t)$ versus $x/\Phi(t)$ para valores típicos de ν, θ e n para $\alpha(t) = 0$. Para $\nu = 1$ e $\theta = n = 0$ retornamos a distribuição Gaussiana. Dependendo dos valores dos parâmetros ν, θ e n a distribuição poder tornar-se compacta ou alongada.

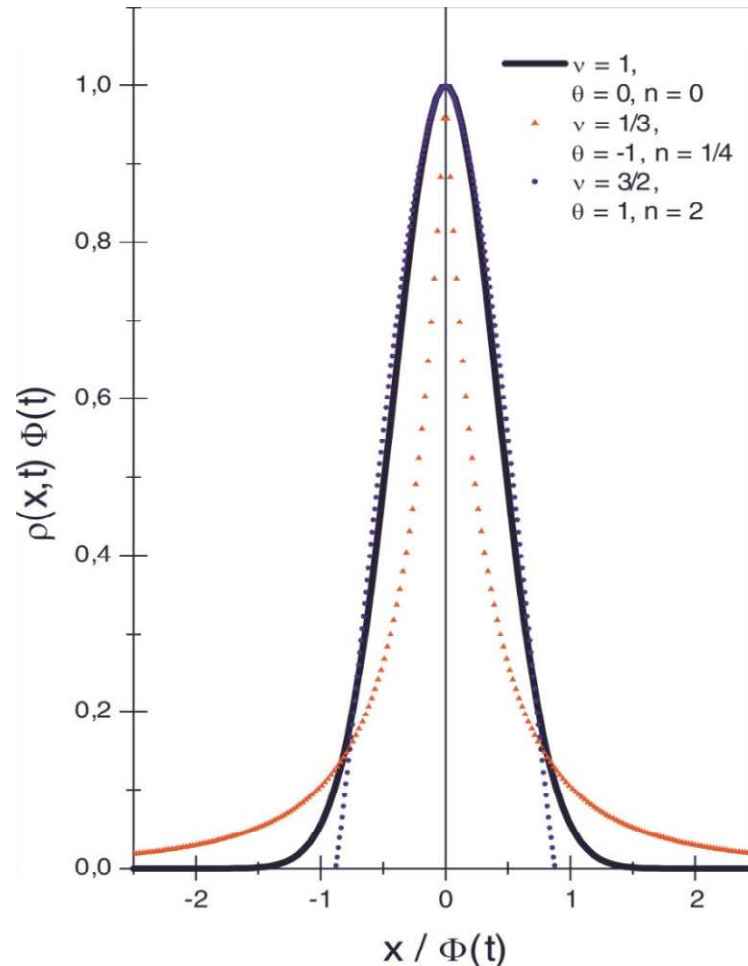


Figura 6: Distribuição de probabilidades para o processo de difusão anômala.

A maximização da entropia de *Tsallis* é dada pela expressão

$$S_q = \frac{1 - \int_{-\infty}^{\infty} dx [\rho(x)]^q}{q - 1} \quad (105)$$

Em particular, $\exp_q[x] = [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}$ para $1 + (1 - q)x \geq 0$ e $1 + (1 - q)x = 0$ para $1 + (1 - q)x \leq 0$. É interessante notar, que na solução acima, podemos ter um comportamento compacto ou longo dependendo dos parâmetros ν, θ e n . Naturalmente, para um comportamento longo, podemos relacionar a solução com a

distribuição de *Levy*. De fato, o limite assintótico da Eq.(104), para x grande e $\psi + \nu < 1$ temos:

$$\bar{\rho}(x, t) \propto \frac{1}{\Gamma(\xi)} \left(\frac{|x|}{\Gamma(\xi)} \right)^{-\frac{1+\psi+\nu}{1-\psi-\nu}} \quad (106)$$

Agora, quando comparamos os resultados acima com o limite assintótico que emerge da distribuição de *Levy* para x grande, isto é, $\rho \propto 1/|x|^{1+\mu}$, conduz a

$$\mu = \frac{1 + \psi - \nu}{1 + \psi + \nu} \quad (107)$$

Assim, mostramos ser satisfatório para os parâmetros, tal que, $0 < \mu < 2$, logo a Eq.(106) comporta-se semelhante à distribuição de *Levy*. De fato, para este caso, o segundo momento é dado por $\langle x^2 \rangle \propto t^{2/(1+\xi)}$ onde $2/(1+\xi) < 1, = 1, > 1$ caracteriza o comportamento sub, normal ou superdifusivo como mostrou a Fig.(6).

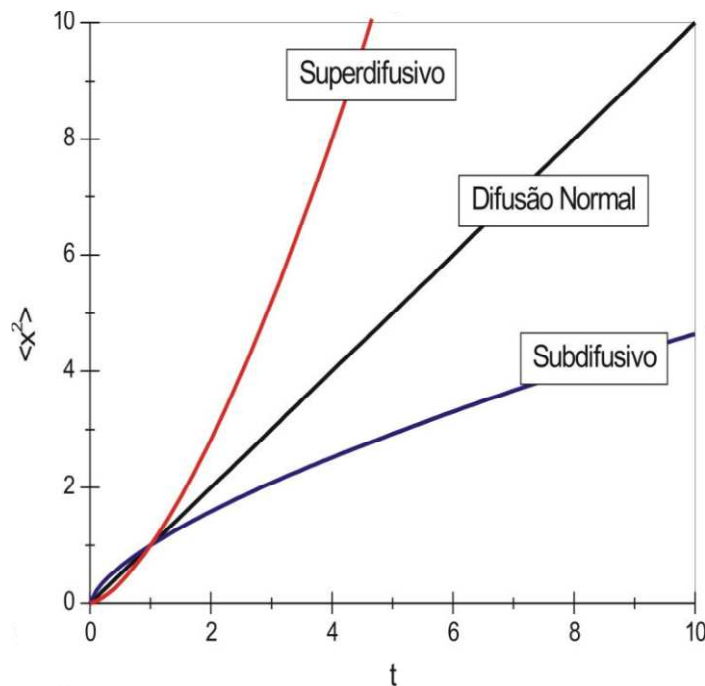


Figura 7: Classificação da difusão anômala.

A difusão normal varia linearmente com o tempo, enquanto a difusão anômala varia de acordo com as curvas apresentadas na Fig.(7), aquelas para o caso subdifusivo e superdifusivo.

CAPÍTULO V - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final desse trabalho caracterizamos a solução da equação de *Fokker-Planck*, sem termo de força e não linear através de uma distribuição de probabilidade, como mostrou as figuras, Fig.6 e Fig.7. Esse comportamento está diretamente relacionado aos processos difusivos anômalos, diferentemente do comportamento da distribuição de probabilidade apresentado na figura Fig. 5, para difusão normal. Além disso, na Fig.7 mostramos os casos particulares em que o processo de difusão é normal, subdifusivo ou superdifusivo, fazendo relação à distribuição de *Lévy*. Esperamos que esse trabalho possa ser relevante para futuras pesquisas na área e que possamos caracterizar sistemas físicos com índices ν bem definidos. Compreendemos que esse último nem sempre é fácil, representando muitas vezes um trabalho árduo. Contudo, deixamos as informações apresentadas como modelo de motivação aos estudos dos processos difusivos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BROWN, R. Phil. Ma. **4**, 161 (1828).
- [2] EINSTEIN, Albert. Investigations on the Theory of the Brownian Movement. Dover Publications (1970), contém os artigos originais de Einstein dedicados a este tema.
- [3] LANGEVIN, Paul. Compt. Rend. **146**, 530 (1908).
- [4] SILVA, J.M. and LIMA, J.A.S.. **Quatro abordagens para o movimento browniano**. *Rev. Bras. Ensino Fís.* [online]. 2007, vol.29, n.1, p. 25-35. ISSN 1806-1117.
- [5] BURGER, H. C. Versl. Acad. Amst. **25**, 1482 (1917).
- [6] ORNSTEIN, L. S. Versl. Acad. Amst. **26**, 1005 (1917).
- [7] PLANCK, M. Berl, Ber. p. 324 (1927).
- [8] KAC, M. Am. Math. Month. **54**, 369 (1947).
- [9] PERRIN, Jean. Ann. Chem. Phys. **18**, 1 (1909).
- [10] SMOLUCHOWSKI, M. V. Phys. Zeits. **17**, 557 (1916).
- [11] FOKKER, A. Tese de Doutorado, (1913).
- [12] RICHARDSON L. F. *Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph*. Proc. R. Soc. London Ser. A, **110**, 709 (1926).
- [13] BERRYMAN, J. G. *Evolution of a stable profile or a class of nonlinear diffusion equations with fixed boundaries*. J. Math. Phys. **18**, 2108 (1997).
- [14] SHLESINGER, M. F.; WEST, B. J. and KLAFTER, J. *Lévy dynamics of enhanced diffusion: application to turbulence*. Phys. Rev. Lett. **58**, 1100 (1987).

- [15] SPOHN, H. *Surface dynamics below the roughening transition*. J. Phys. (France) I **3**, 69 (1993).
- [16] STEPHENSON, J. *Some non-linear diffusion equations and fractal diffusion*. Physica A **222**, 234 (1995).
- [17] BYCHUK O. V.; SHAUGHNESSY O' B. *Anomalous diffusion at liquid surfaces*. Phys. Rev. Lett. **74**, 1785 (1995).
- [18] PENG, C. K. et al. *Long range anticorrelations and non-gaussian behavior of the heartbeat*. Phys. Rev. Lett. **70**, 1343 (1993).
- [19] OTT, A.; BOUCHAUD, J. P.; LANGEVIN D. *Anomalous diffusion in living polymers: a genuine Lévi flight?* Phys. Rev. Lett. **65**, 2201 (1990).
- [20] GEISEL, T.; NIERWETBERG J.; ZACHERL A. *Accelerated diffusion in Josephson junctions and related chaotic systems*. Phys. Rev. Lett. **54**, 616 (1985).
- [21] SOLOMON, T. H.; WEEKS, E. R.; SWINNEY, H. L. *Observation of anomalous diffusion and Lévy flight in a two-dimensional rotating flow*. Phys. Rev. Lett. **71**, 3975 (1993).
- [22] NOSSAL, R. *Stochastic aspects of biological locomotion*. J. Stat. Phys. **30**, 391 (1983).
- [23] BALESCU, R. *Anomalous transport in turbulent plasmas and continuous time random walks*. Phys. Rev. E **51**, 4807 (1995).
- [24] VISWANATHAN, G. M. et al. *Lévy flight search patterns of wandering albatrosses*. Nature **381**, 413 (1996).
- [25] ZUMOFEN, G.; BLUMEN, A.; KLAFTER, J. *Current flow under anomalous diffusion conditions: Lévy walks*. Phys. Rev. A **41**, 4558 (1990).

- [26] SCHER, H.; MONTROLL, E. *Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids*. Phys. Rev. B **12**, 2455 (1975).
- [27] KLEMM, A.; MÜLLER, H. P.; KIMMICH, R. *Evaluation of fractal parameters of percolation model objects and natural porous media by means of NMR microscopy*. Physica A **266**, 242 (1999).
- [28] HAVLIN, S. et al. *Probability densities for the displacement of random walks on percolation clusters*. J. Phys. A **18**, 1719 (1985).
- [29] SHLESINGER, M. F.; KLAFTER, F. J.; WEST, B. J. *Lévy walks with applications to turbulence and chaos*. Physica A **140**, 212, (1986).
- [30] Futer, R, Ann d. Physik 53, 177(1917).
- [31] Ornstein, L.S. Versl. Acad. Amst. 26, 1005(1917).
- [32] D.D. Joseph and L. Preziosi, Rev. Mod. Phys. **61**, 41, 1989; Y. Zeldovich and Yu. Raizer, *Physics of Shock waves And High-Temperature Hydrodynamic Phenomena* (Academic Press, New York, 1967).
- [33] J.P. Pascal and H. Pascal, int. J. Non-Linear Mech. **28**, 641,(1993).
- [34] S. R. A. Salinas and C. Tsallis, *Nonextensive Statical Mechanics and Thermodynamics*, Braz. J. Phys. **29**, 1, (1999); S. Abe and Y. Okamoto, *Nonextensive Statical Mechanics and Its Applications*, Lecture Notes in Physics (Springer-Verlag, Heidelberg, 2001); P. Grigolini, C. Tsallis and B. J. West, *Classical and Quantum Complexity and Nonextensive Thermodynamics, Chaos, Solitons and Fractals* **13**, Number 3 (Pergamon-Elsevier, Amsterdam, 2002).