



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**SOBRE EQUIVALÊNCIAS DE CAMPOS VETORIAIS
CONSERVATIVOS COM DOMÍNIOS
SIMPLESMENTE CONEXOS**

LUIZ CARLOS GONÇALVES LOPES

CAMPINA GRANDE

Dezembro de 2017

LUIZ CARLOS GONÇALVES LOPES

**SOBRE EQUIVALÊNCIAS DE CAMPOS VETORIAIS
CONSERVATIVOS COM DOMÍNIOS
SIMPLESMENTE CONEXOS**

Trabalho conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Ms. Weiller Felipe Chaves Barboza

CAMPINA GRANDE

Dezembro de 2017

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

L864s Lopes, Luiz Carlos Gonçalves.
Sobre equivalências de campos vetoriais conservativos com domínios simplesmente conexos [manuscrito] : / Luiz Carlos Gonçalves Lopes. - 2017.
64 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação : Prof. Me. Weiller Felipe Chaves Barboza, Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Rotacional nulo. 2. Curvas. 3. Campo conservativo. 4. Teorema das quatro equivalências.

21. ed. CDD 510

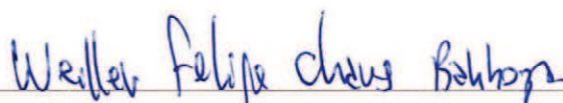
LUIZ CARLOS GONÇALVES LOPES

**SOBRE EQUIVALÊNCIAS DE CAMPOS VETORIAIS
CONSERVATIVOS COM DOMÍNIOS
SIMPLESMENTE CONEXOS**

Trabalho Acadêmico Orientado apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

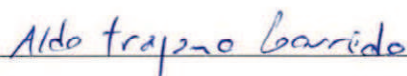
Aprovado em 15/12/2017

COMISSÃO EXAMINADORA



Prof. Ms. Weiller Felipe Chaves Barboza

Dpto. Matemática - CCT/UEPB - ORIENTADOR



Prof. Dr. Aldo Trajano Louredo

Dpto. Matemática - CCT/UEPB - EXAMINADOR



Prof. Dra. Luciana Roze de Freitas

Dpto. Matemática - CCT/UEPB - EXAMINADOR

Dedicatória

Dedico o presente trabalho aos meus pais, José e Eliane, que sempre batalharam para proporcionar-me ótimos estudos. Aos meus filhos Letícia e Eduardo para que tomem como exemplo o interesse em sempre aprender mais. A minha esposa Fabrícia por sempre estar ao meu lado contribuindo incansavelmente para que possamos realizar todos nossos sonhos.

Agradecimentos

O que seria colocar em palavras, toda uma vida de satisfação pelo apoio recebido?

Então tenho a enorme gratidão à Deus por sempre me guiar pela estrada correta dando-me força, coragem e determinação.

Ao meu pai José, que enquanto saúde tinha ensinou-me a lutar pelos meus sonhos com todas as forças possíveis e mostrar para meus filhos que todos podemos ser o que queremos e quando queremos.

À minha rainha suprema, minha mamãezinha Eliane, que sempre deu-me carinho e ensinamentos, tais ensinamentos que levo para toda a vida como cartilha de aprendizado. Mesmo morando longe, sinto sua presença 24 horas ao meu lado, ensinando-me a ser sempre um homem íntegro e de princípios.

Aos meus maravilhosos filhos Letícia e Eduardo pela compreensão de estar longe quase todos os dias para que pudesse estudar e longe alguns momentos importantes de nossas vidas quando participei do programa federal Ciência sem Fronteiras. Espero que saibam que tudo isso e para que possamos crescer sempre juntos na caminhada da vida.

Agradeço também à minha esposa Fabrícia, pessoa de garra, caráter e princípios magníficos. Agradeço pela coragem, força de vontade e dedicação nesses 20 anos de matrimônio. Serei sempre grato à você pelo simples fato de ter dito o "sim". te amo e obrigado por tudo.

Agradeço ao meu Orientador Ms. Weiller Felipe Chaves Barboza pela oportunidade de ser seu primeiro orientando, como também pela compreensão e todo empenho para que eu concluísse o trabalho com êxito.

Agradeço ao professor Vitor Hugo por sempre que encontrava-me nos corredores da UEPB fazia questão de perguntar como estavam indo minhas cadeiras e que focasse logo no mestrado.

Aos professores (Joelson, Luiz Lima, José Luiz e Marciel UEPB - Monteiro, Vandenberg

Lopes Vieira, Leoupoudo Maurício, Luciana Rose, Aldo Trajano, Sibério e Pedro Cesar UEPB - Campina Grande) que tive a grande oportunidade de tê-los como professores, e assim de forma direta ou indireta, contribuíram para uma formação acadêmica de qualidade, principalmente pelos incentivos que recebi de todos..

“De que me irei ocupar no céu, durante toda a Eternidade, se não me derem um infinidade de problemas de Matemática para resolver?”

(Augustin Louis Cauchy)

Resumo

Diante do teorema, "Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 . Se \vec{F} é conservativo, então $\text{rot}\vec{F} = \vec{0}$. O trabalho tem o objetivo de responder quais as condições sobre o domínio D de um campo vetorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $n = 2$ ou $n = 3$ tal que seja verdadeira a recíproca do teorema mencionado anteriormente. Veremos que, a recíproca do teorema é verdadeira apenas quando tomar o domínio D sendo simplesmente conexo. Em seguida, conclui-se o trabalho com a demonstração bem detalhada do Teorema das Quatro Equivalências.

Palavras-chave: Teorema das Quatro Equivalências, Rotacional Nulo, Campo Conservativo, Domínio Simplesmente Conexos.

Abstract

Toward this theorem that say: Let $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (n = 2 \text{ ou } 3)$ a vector field of class C^1 . If \vec{F} is conservative, then $\text{rot}\vec{F} = \vec{0}$. The work has the purpose of answering in conditions on the D domain of a vector field $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ with $n = 2$ or $n = 3$ such that the reciprocal of the theorem mentioned is true. We will see that the reciprocal of the Theorem is true only when to take this D domain if it is simply connected. Next, the work is conclude with a detailed demonstration of the Four Equivalence Theorem.

Keywords: Four Equivalence Theorem, Null Rotational, Field Conservative, Simply Connected.

Sumário

Introdução	12
1 Preliminares	13
1.1 Produto Escalar e Produto Vetorial	13
1.1.1 Propriedades:	13
1.2 Curvas	14
1.2.1 Regras de derivação para funções vetoriais:	15
1.3 Campo Escalar	18
1.4 Campos Vetoriais	18
1.5 Integrais de Linha de Campo Escalar	18
1.5.1 Interpretação Física	23
1.5.2 Trabalho realizado por uma Força ao longo de uma Curva no Espaço	25
1.5.3 Integrais de Escoamento e Circulação para Campos de Velocidade	27
1.5.4 Fluxo através de uma Cuva Plana	28
2 Integrais de Linhas de Campos Vetoriais	30
2.1 Integrais de linha de Campo Vetorial	30
2.1.1 Motivação	30
2.1.2 Propriedades Fundamentais das Integrais de Linha de Campo Vetorial	32
2.2 Gradiente, Divergente e Rotacional de um campo Vetorial	35
2.3 Campos Conservativos ou Campos Gradiente	41

3	Teorema de Green no Plano	45
4	O Teorema das Quatro Equivalências	50
4.1	Motivação	50
4.2	Premissas a serem consideradas	50
	Considerações Finais	56
	Anexos	57

Introdução

O presente trabalho tem como objetivo central abordar conceitos, definições, teoremas, propriedades e exemplos, com intuito de facilitar o entendimento de uma pequena parte da Matemática que estuda o Cálculo Diferencial Vetorial, assunto este tão importante e aplicado de forma maciça em Física.

Com a parte preliminar sobre o assunto presente neste trabalho, será estudado, de forma simples e detalhada, cada processo necessário para que o leitor possa conseguir assimilar os principais requisitos que se relacionam com integrações sobre campos vetoriais conservativos. No decorrer do trabalho serão apresentadas definições importantíssimas sobre assuntos diretamente relacionados à Física, como trabalho realizado por uma partícula ao mover-se sobre uma curva em um intervalo de tempo e também sobre fluxo e escoamento de fluidos. Faremos as demonstrações dos teoremas e visualizações de ilustrações de forma clara. Também não poderia ficar de fora um importante teorema, chamado de **Teorema de Green**, nome este em homenagem ao matemático e físico o inglês George Green (1793 – 1841). Este teorema transforma uma integral de linha sobre uma fronteira em uma integral dupla sobre uma região, facilitando assim os cálculos a serem efetuados, claro que, com condições necessárias para que se possa ser feita tal transformação.

Por fim, será mostrado condições necessárias para que possam valer a volta de um teorema sobre todo campo vetorial conservativo possuir rotacional nulo. Logo estas condições serão necessárias para serem ditas campos vetoriais definidos sobre conjuntos simplesmente conexos, se o rotacional for nulo, então o campo vetorial é conservativo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo será introduzido alguns conceitos e definições importantes que serão úteis no decorrer de todo o trabalho para um melhor entendimento do que se desenrolar-se-á no decorrer do mesmo, com isso possa ter uma maior clareza com as demonstrações necessárias dos principais teoremas. Tais conteúdos são de suma importância para o estudo do Teorema das Quatro Equivalência no Plano e no Espaço.

1.1 Produto Escalar e Produto Vetorial

Definição 1.1 (Produto Escalar). *Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vetores quaisquer pertencentes ao \mathbb{R}^3 . Define-se produto escalar ou produto interno de dois vetores como sendo*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \sum_{i=1}^3 u_iv_i,$$

associando-se assim um único número real para cada par de vetores, também pode-se encontrar em alguns livros a notação $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1.1.1 Propriedades:

Para todo \vec{u}, \vec{v} e \vec{a} vetores do \mathbb{R}^3 e para $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$(p_1) \quad \langle \alpha\vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

$$(p_2) \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle;$$

$$(p_3) \quad \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle;$$

(p4) Sendo $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ então definisse o seguinte número $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ chamado norma de "norma \vec{u} ".

Exemplo 1.1. Dados $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ e $\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{i} + 3\vec{j} - 1\vec{k}$.

Solução: Temos que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) = 1 + 6 - 5 = 2$.

Definição 1.2 (Produto Vetorial). Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vetores quaisquer pertencentes ao \mathbb{R}^3 . Dizemos que o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor dado pelo determinante,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k}.$$

Exemplo 1.2. Dados $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Solução: Temos que

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = (3\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k}) - (6\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}) = (3-6)\vec{i} + (12-8)\vec{j} + (4-2)\vec{k} = (-3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}).$$

1.2 Curvas

Tem-se que uma partícula ao mover-se no espaço no decorrer de um intervalo de tempo I , as equações $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$, $t \in I$ fornecerão as coordenadas desta partícula, formando assim uma curva C .

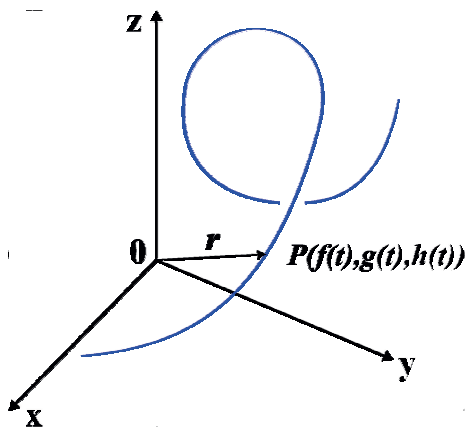


Figura 1.1: Vetor posição \vec{r} de uma partícula em movimento no espaço em função do tempo.

Definição 1.3 (Curva). Uma curva C é a trajetória (caminho) de uma partícula formada pelos pontos $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$ com $t \in I$, onde I é o intervalo de tempo e $f(t), g(t)$ e $h(t)$ são as funções componentes. Podendo ser representadas na forma vetorial

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}.$$

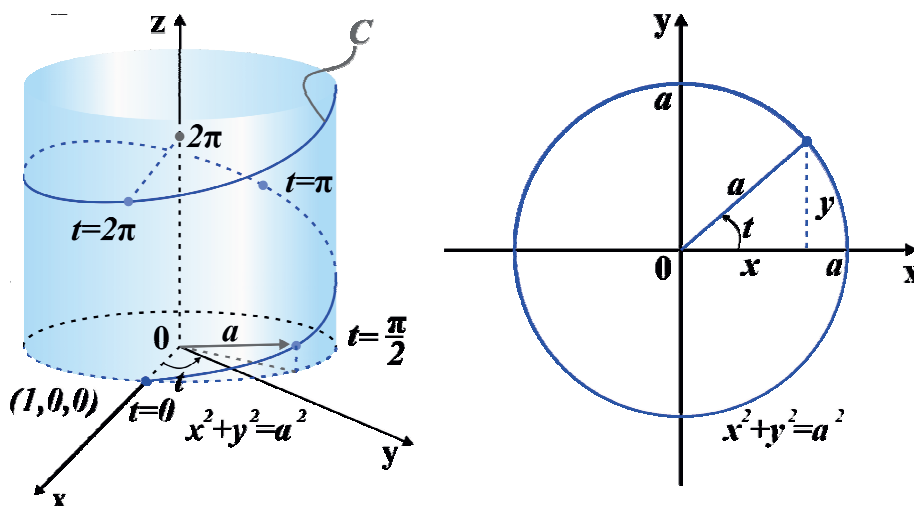


Figura 1.2: Exemplo curva: hélice superior $\vec{r} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}$ e caso onde $z = h(t) = 0$.

Definição 1.4 (Derivadas). Uma curva C (função vetorial) dada por $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ é derivável se $\vec{r}(t)$ for derivável em todos os pontos de seu domínio, ou seja, se $f(t), g(t)$ e $h(t)$ têm derivadas em t . Dada por

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{df}{dt}\vec{i} + \frac{dg}{dt}\vec{j} + \frac{dh}{dt}\vec{k}.$$

Observação 1.1. Caso $f(t), g(t)$ e $h(t)$ possuírem derivadas primeiras contínuas que não sejam simultaneamente 0 dizemos que a curva é lisa ou suave.

1.2.1 Regras de derivação para funções vetoriais:

Sejam \vec{u} e \vec{v} funções vetoriais deriváveis em $t \in I$, \vec{a} um vetor constante, $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer escalar e $f(t)$ qualquer função escalar derivável, vale:

(r₁) Regra da função constante:

$$\frac{d}{dt}\vec{a} = 0.$$

(r₂) Regra da multiplicação por um escalar:

$$\frac{d}{dt}[\alpha \cdot \vec{u}(t)] = \alpha \cdot \frac{d\vec{u}(t)}{dt}.$$

$$\frac{d}{dt}[f(t) \cdot \vec{u}(t)] = \frac{df(t)}{dt} \cdot \vec{u}(t) + f(t) \cdot \frac{d\vec{u}(t)}{dt}.$$

(r₃) Regra da soma:

$$\frac{d}{dt}[\vec{u}(t) + \vec{v}(t)] = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} + \frac{d\vec{v}(t)}{dt}.$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{u}(t) - \vec{v}(t)] = \frac{d}{dt}[\vec{u}(t) + (-\vec{v}(t))] = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} + \left(-\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right) = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} - \frac{d\vec{v}(t)}{dt}.$$

(r₄) Regra do produto escalar:

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{u}(t), \vec{v}(t) \rangle = \left\langle \frac{d\vec{u}(t)}{dt}, \vec{v}(t) \right\rangle + \left\langle \vec{u}(t), \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right\rangle.$$

(r₅) Regra do produto vetorial:

$$\frac{d}{dt}[\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)] = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \frac{d\vec{v}(t)}{dt}.$$

(r₆) Regra da cadeia:

$$\frac{d}{dt}[\vec{u}(f(t))] = \frac{df(t)}{du} \cdot \frac{d\vec{u}(f(t))}{dt}.$$

Definição 1.5 (Curva parametrizada diferenciável). Uma curva parametrizada diferenciável é uma função vetorial localmente injetiva, continuamente diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) de classe C^∞ . A variável $t \in I$ é chamado de parâmetro da curva e o subconjunto do \mathbb{R}^n dos pontos $\alpha(t)$ é o traço da curva.

Exemplo 1.3. Sejam C a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$ e $P = (x, y) \in C$. Seja t em radianos entre o eixo positivo x e a semi-reta OP .

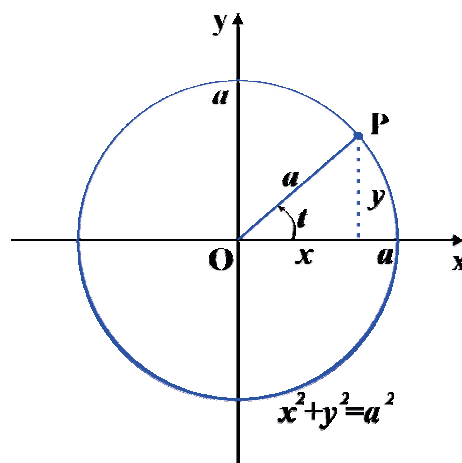


Figura 1.3: Circunferência $x^2 + y^2 = a^2$.

Observe que enquanto t aumenta de 0 a 2π , o ponto $P = (x, y) = (a \cos t, a \sin t)$ se move sobre C no sentido anti-horário partindo do ponto $(a, 0)$. Portanto, uma parametrização de C

é

$$\sigma_1(t) = (a \cos t, a \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Podemos ver também que $\sigma_2(t) = (a \sin t, a \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$, onde o ponto $P(x, y)$ se move sobre C no sentido horário, também é uma parametrização de C .

Definição 1.6 (Vetor Tangente). Se $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n (n = 2 \text{ ou } 3)$ é uma curva parametrizada diferenciável $\alpha(t) = (f(t), g(t), h(t)), t \in \mathbb{R}$ define-se o vetor tangente como sendo

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{df(t)}{dt}, \frac{dg(t)}{dt}, \frac{dh(t)}{dt} \right).$$

Definição 1.7 (Curva Regular). Uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita regular se for diferenciável de classe C_1 e se

$$\frac{d\alpha}{dt} \neq 0, \forall t \in I.$$

Algumas curvas e suas parametrizações:

Pode-se ver a seguir, alguns exemplos de curvas e suas respectivas parametrizações.

Reta: definida por um ponto P_0 conhecido da reta e um vetor \vec{u} . Uma parametrização é:

$$\alpha(t) = P_0 + t\vec{u}, t \in \mathbb{R}.$$

Circunferência: definida por: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2, a > 0$. Uma parametrização é:

$$\alpha(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + a \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Elipse: definida por: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, a \neq 0 \text{ e } b \neq 0$. Uma parametrização é:

$$\alpha(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Hipérbole: definida por: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, a \neq 0 \text{ e } b \neq 0$. Uma parametrização é:

$$\alpha(t) = (x_0 + a \csc t, y_0 + b \cot t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

1.3 Campo Escalar

Uma função real f definida em um certo conjunto do plano xy assume seu valor no ponto (x, y) em um número real designado por $f(x, y)$. Com frequência convém usar a notação vetorial e escreve-se $f(\vec{X})$ no lugar de $f(x, y)$, onde usa-se \vec{X} representa o vetor que une a origem ao ponto (x, y) . Neste caso, se diz que f uma função escalar ou campo escalar.

Definição 1.8. *Um campo escalar é uma função cujo domínio é um subconjunto do \mathbb{R}^n , $n > 1$ e cujo contradomínio é \mathbb{R} , isto é, $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que a cada n -upla de D , f associa um único número real.*

Exemplo 1.4. *Dada $f(x, y, z) = \ln(1 + x + y - z)$, o seu domínio é o conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3; x + y - z + 1 > 0\}$ e a sua imagem é \mathbb{R} .*

1.4 Campos Vetoriais

Quando estuda-se fenômenos físicos, onde tais fenômenos são representados por vetores, usa-se integrais sobre caminhos através de campos vetoriais. Tais campos vetoriais são úteis para representar campos de força, campos de velocidades, campos elétricos de fluxo de fluídos.

Definição 1.9. *Sejam P, Q e R funções reais de x, y e z , definidas em $D \subset \mathbb{R}^3$. Temos que a função vetorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:*

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

é chamada de campo vetorial definido em $D \subset \mathbb{R}^3$. Pode-se encontrar, também, outra notação $\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R)$.

Observação 1.2. *Dizemos que o campo vetorial \vec{F} é contínuo de classe C^k , $k \in \mathbb{N}^*$ ou C^∞ se as funções componentes (P, Q) ou (P, Q, R) são contínuas, de classe C^k ou C^∞ , respectivamente.*

1.5 Integrais de Linha de Campo Escalar

Integrais de Linha são de suma importância tanto em matemática pura como também em matemática aplicada. Usa-se integrais de linha para tratar de problemas relacionados a massas de hastes ou cabos finos ao longo de uma curva no plano ou no espaço. Trata também

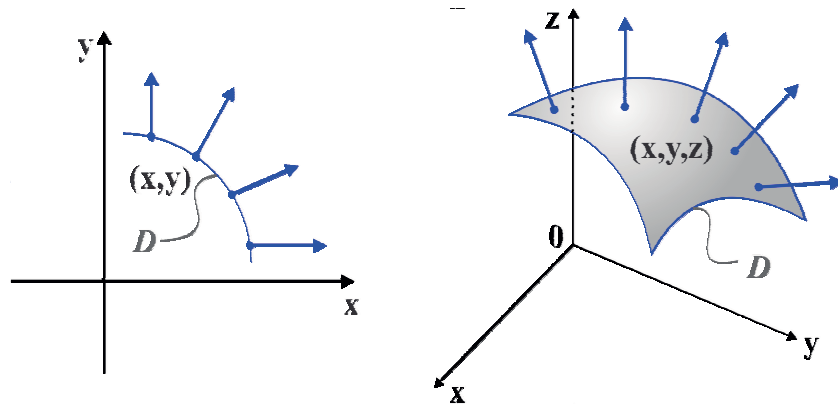


Figura 1.4: Campo Vetorial no \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

de problemas relacionados a trabalho, energia potencial, fluxo e circulação de fluídos por uma superfície e outras questões físicas onde estuda-se o comportamento de um vetor ou campo vetorial sobre uma curva. A integral

$$\int_a^b f(x)dx,$$

se generaliza em outra direção onde intervalo $[a, b]$ é agora uma curva. Essas integrais agora são chamadas integrais de linha, embora "integrais de curva" seja uma nomenclatura mais prática disseminada em alguns autores.

Definição 1.10 (Integral similar à uma integral definida.). *Sejam dados um campo escalar em \mathbb{R}^3 ou uma função real de três variáveis $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e uma curva C em \mathbb{R}^3 , dada por:*

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b], \alpha \in C^1.$$

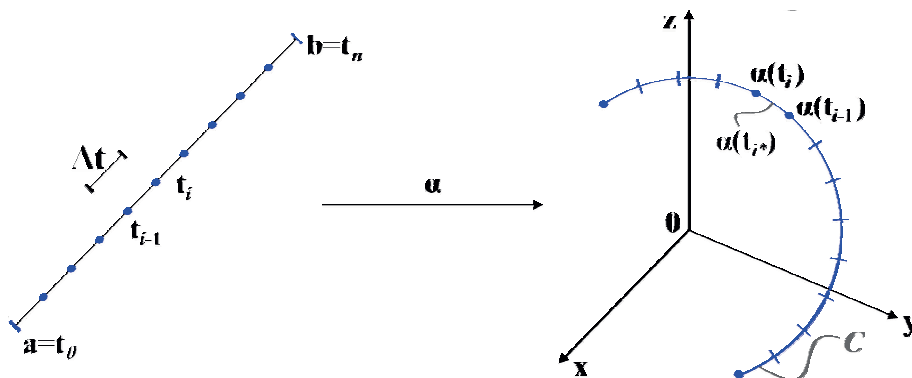


Figura 1.5: Subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ aplicados na função gerando sub-arcos $\alpha([t_{i-1}, t_i])$.

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos I_i , $i = 1, 2, \dots, n$ de mesmo comprimento $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Logo a curva C fica dividida em n subarcos $\Delta_{s1}, \Delta_{s2}, \dots, \Delta_{sn}$ onde $\Delta_{si} \simeq \| \alpha'(t_i^*) \| \Delta t$

para algum $t_i^* \in I_i$. Tendo assim a soma

$$\sum_{i=1}^n f(\alpha(t_i^*)) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(\alpha(t_i^*)) \|\alpha'(t_i^*)\| \Delta t.$$

Definindo a integral de linha de f sobre C por

$$\int_C f ds = \int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\alpha(t_i^*)) \|\alpha'(t_i^*)\| \Delta t,$$

se o limite existir.

Observações:

I. Se f é contínua então o limite existe e portanto

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt,$$

sabendo que $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ e $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$,

logo,

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b f(\alpha(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

II. Se $f(x, y)$ é uma função contínua em \mathbb{R}^2 e C uma curva em \mathbb{R} , dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, com α de classe C^1 , então

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b f(\alpha(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

III. Se $f(x, y, z) = 1$ ou $f(x, y) = 1$, então

$$\int_C ds = \int_C \underbrace{f(x, y, z)}_1 ds = \text{Comprimento do arco.}$$

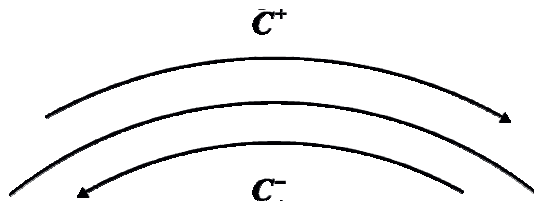


Figura 1.6: Sentindo adotado pela curva.

IV. A integral de linha de um campo escalar f , não depende da parametrização de C e nem de sua orientação, isto é, denotando por C^- a curva percorrida em outro sentido, então

$$\int_C f ds = \int_{C^-} f ds.$$

V. Se C é uma curva dada por uma parametrização $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($n = 2$ ou 3), C^1 por partes, isto é, α é contínua e existe uma partição

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n = b \in [a, b],$$

de modo que $\alpha_i = \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é de classe C^1 , $1 \leq i \leq n$ então

$$\int_C f ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f ds, \text{ onde } C_i = \alpha_i([t_{i-1}, t_i]),$$

ou seja

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds + \int_{C_3} f ds + \dots + \int_{C_n} f ds.$$

Observação 1.3. Para integrar uma função contínua $\beta(x, y, z)$ sobre uma curva C necessitamos seguir os seguintes passos.

Passo 1: Encontre uma parametrização suave de C .

$$\vec{\alpha}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}.$$

Passo 2: Calcule

$$\int_C \beta(x, y, z) ds = \int_a^b \beta(f(t), g(t), h(t)) \|\vec{\alpha}'(t)\| dt.$$

Exemplo 1.5. Calcule $\int_C (xy + y + z) ds$ ao longo da curva $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + t\vec{j} + (2 - 2t)\vec{k}$, com $0 \leq t \leq 1$.

Solução: Tendo $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + t\vec{j} + (2 - 2t)\vec{k}$, com $0 \leq t \leq 1$ uma parametrização, então

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k},$$

donde segue que,

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Sabendo que $ds = \|\vec{r}'(t)\| dt$ então $ds = 3dt$. Daí,

$$\begin{aligned}
 \int_C f(x, y, z) ds &= \int_{C_1} (xy + y + z) ds \\
 &= \int_0^1 (2tt + t + (2 - 2t)) 3dt \\
 &= \int_0^1 (2t^2 - t + 2) 3dt \\
 &= \int_0^1 (6t^2 - 3t + 6) dt \\
 &= \left(\frac{6t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 6t \right) \Big|_0^1 \\
 &= \left(2 - \frac{3}{2} + 6 \right) - (0) \\
 &= 8 - \frac{3}{2} \\
 &= \frac{13}{2}
 \end{aligned}$$

Exemplo 1.6. Calcule $\int_C (x + \sqrt{4y}) ds$, onde C é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Solução: Seja o gráfico do triângulo de vértices $O(0, 0)$, $A(0, 1)$ e $B(1, 0)$ representado na Figura 1.7. As parametrizações são:

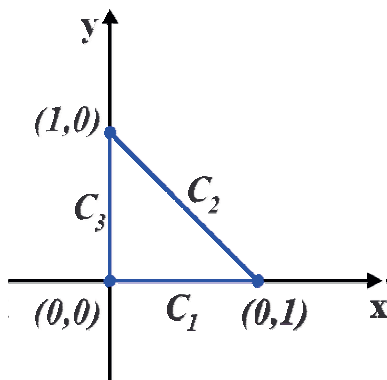


Figura 1.7: Triângulo delimitado pelos pontos $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

$$C_1 = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

assim $\vec{r}(t) = (t, 0)$ então $\vec{r}'(t) = (1, 0)$ e $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$ daí $ds = 1dt$, logo

$$\int_{C_1} (x + \sqrt{4y}) ds = \int_0^1 (t + \sqrt{4 \cdot 0}) 1 dt = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Para a curva C_2 temos,

$$C_2 = \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

assim $\vec{r}(t) = (1 - t, t)$ então $\vec{r}'(t) = (-1, 1)$ e $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ daí $ds = \sqrt{2}dt$, logo

$$\begin{aligned} \int_{C_2} (x + \sqrt{4y})ds &= \int_0^1 (1 - t + \sqrt{4t})\sqrt{2}dt = \int_0^1 (1 - t + 2t)\sqrt{2}dt = \\ &= \int_0^1 (1 + t)\sqrt{2}dt = \left(\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Para a curva C_3 temos,

$$C_3 = \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

assim $\vec{r}(t) = (0, t)$ então $\vec{r}'(t) = (0, 1)$ e $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$ daí $ds = 1dt$, logo

$$\int_{C_3} (x + \sqrt{4y})ds = \int_0^1 (0 + \sqrt{4t})1dt = \int_0^1 2t dt = t^2 \Big|_0^1 = 1.$$

Sabendo que $\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds + \int_{C_3} f ds$, então tendo $\int_{C_1} f ds = \frac{1}{2}$, $\int_{C_2} f ds = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ e $\int_{C_3} f ds = 1$ segue que

$$\int_C (x + \sqrt{4y})ds = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

1.5.1 Interpretação Física

Trata-se molas e fios como massas distribuídas ao longo de curvas suaves no espaço. A distribuição é descrita por uma função de densidade contínua

$$\delta(x, y, z), \text{ (massa por unidade de comprimento),}$$

que também pode ser aplicada à hastes finas.

Se $\delta(x, y, z)$ representa a densidade de um arame $C \subset \mathbb{R}^3$, então

I. Massa:

$$M = \int_C \delta(x, y, z) ds.$$

II. Centro de massa ou centro de gravidade $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é dado por:

$$M\bar{x} = \int_C x\delta(x, y, z) ds \implies \bar{x} = \frac{\int_C x\delta(x, y, z) ds}{M},$$

$$M\bar{y} = \int_C y\delta(x, y, z) ds \implies \bar{y} = \frac{\int_C y\delta(x, y, z) ds}{M},$$

$$M\bar{z} = \int_C z\delta(x, y, z) ds \implies \bar{z} = \frac{\int_C z\delta(x, y, z) ds}{M},$$

III. Momento de inércia de $C \subset \mathbb{R}^3$ em relação a um eixo E . Se $\vec{r}(x, y, z)$ representa a distância de um ponto (x, y, z) de C a uma reta L , é dado por:

$$I_L = \int_C \vec{r}^2(x, y, z)\delta(x, y, z) ds.$$

III.1 Momento de inércia em relação aos eixos x, y e z respectivamente:

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\delta(x, y, z) ds, \quad I_y = \int_C (x^2 + z^2)\delta(x, y, z) ds \quad e \quad I_z = \int_C (x^2 + y^2)\delta(x, y, z) ds.$$

IV. Comprimento do arame:

$$L = \int_C ds.$$

Exemplo 1.7. Um arame fino tem a forma de um semi-círculo $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$. Se a densidade linear é constante e igual a k . Determine o centro de gravidade.

Solução: Deve-se encontrar (\bar{x}, \bar{y}) onde

$$\bar{x} = \frac{\int_C x\delta(x, y) ds}{M} \quad e \quad \bar{y} = \frac{\int_C y\delta(x, y) ds}{M}.$$

Sabemos que $\delta(x, y)$ é a densidade e a curva C é dada por $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$. Uma parametrização de C é $\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ daí,

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} = \sqrt{4} = 2$, assim, $ds = 2dt$, logo

$$M = \int_C \delta(x, y) ds = \int_0^\pi k 2 dt = 2kt \Big|_0^\pi = 2k\pi.$$

Assim,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\pi 2 \cos tk \, dt}{2k\pi} = \frac{4k \sin t \Big|_0^\pi}{2k\pi} = 0,$$

e ainda,

$$\bar{y} = \frac{\int_0^\pi 2 \sin tk \, dt}{2k\pi} = \frac{-4k \cos t \Big|_0^\pi}{2k\pi} = \frac{4k + 4k}{2k\pi} = \frac{8k}{2k\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

Portanto $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{4}{\pi}\right)$.

1.5.2 Trabalho realizado por uma Força ao longo de uma Curva no Espaço

O trabalho realizado por uma força contínua de magnitude $F(x)$ em um certo intervalo $[a, b]$ do eixo x , será analisado de forma similar ao estudo do volume. A curva formada será dividida em pequenos segmentos, aplica-se a força vezes a distância chegando à uma aproximação do trabalho realizado em cada um dos segmentos. Daí, soma-se todos os trabalhos aproximando assim, ao resultado do trabalho em toda a curva.

Supondo que um campo vetorial $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ represente uma força qualquer realizada em uma região de \mathbb{R}^3 e uma curva suave C dada por

$$\vec{r}(t) = \alpha(t)\vec{i} + \beta(t)\vec{j} + \delta(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

chama-se **trabalho realizado** por \vec{F} sobre a curva C de a até b a componente escalar dada pela integral de $\vec{F} \cdot \vec{T}$, onde $\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Definição 1.11 (Trabalho realizado por uma Força.). *Seja C uma curva suave representada por uma função vetorial $\vec{r}(t) = \alpha(t)\vec{i} + \beta(t)\vec{j} + \delta(t)\vec{k}$ em um intervalo $[a, b]$. Suponha $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ um campo de força definido em C e que $\vec{F} \cdot \vec{r}$ seja integrável em $[a, b]$. Então, define-se o trabalho W realizado por \vec{F} ao mover uma partícula desde $\vec{r}(a)$ até $\vec{r}(b)$ ao longo de uma curva C como sendo:*

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \, dt.$$

Observação 1.4. *Como calcular o trabalho W , ao longo de uma curva suave $\vec{r}(t)$.*

Passo 1: Calcule \vec{F} sobre a curva C como sendo uma função de parâmetro t .

Passo 2: Encontre $\frac{dr}{dt}$.

Passo 3: Integre $\vec{F} \cdot \frac{dr}{dt}$ de $t = a$ até $t = b$.

Exemplo 1.8. Um campo de força bidimensional \vec{F} é dado mediante a equação $\vec{F}(x, y) = \sqrt{y}\vec{i} + (x - y)\vec{j}$. Calcule o trabalho realizado por esta força ao mover uma partícula de $(0, 0)$ à $(1, 1)$ sobre:

a) Uma reta $y = x$.

Solução: Sobre o caminho da reta $y = x$ tem-se:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j}, 0 \leq t \leq 1,$$

logo,

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \sqrt{t}\vec{i} + 0\vec{j} = \sqrt{t}\vec{i},$$

e ainda, $\vec{r}'(t) = \vec{i} + \vec{j}$ daí,

$$\int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^1 \sqrt{t} dt = \left. \frac{\sqrt{t^3}}{\frac{3}{2}} \right|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

b) Uma curva $y^2 = x^3$

Solução: Sobre o caminho da curva $y^2 = x^3$ tem-se:

$$\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j}, 0 \leq t \leq 1,$$

logo,

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \sqrt{t^3}\vec{i} + (t^2 - t^3)\vec{j},$$

e ainda $\vec{r}'(t) = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$ daí,

$$\int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^1 2\sqrt{t^5} + 3t^4 - 3t^5 dt = \left. \frac{4}{7}\sqrt{t^7} + \frac{3}{5}t^5 - \frac{18}{6}t^6 \right|_0^1 = \frac{47}{70}.$$

Observação 1.5. Pode-se notar que o trabalho realizado ao mover uma partícula de um ponto a outro depende do caminho tomado.

1.5.3 Integrais de Escoamento e Circulação para Campos de Velocidade

Supondo agora que o campo vetorial \vec{F} seja o campo de velocidade de um fluido que escoa por uma região do \mathbb{R}^3 , assim a integral de $\vec{F} \cdot \vec{T}$ ao longo de uma curva suave na região, fornece o escoamento do fluido ao longo desta curva. NO que segue vamos denotar *Escoamento* por E .

Definição 1.12. Se $\vec{r}(t)$ é uma curva suave no domínio de um campo de velocidade contínuo \vec{F} , o escoamento ao longo desta curva de $t = a$ até $t = b$ é dado por:

$$E = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt,$$

se a curva é fechada, o escoamento é denominado **circulação** ao redor da curva.

Exemplo 1.9. O campo de velocidade de um fluido é $\vec{F}(t) = x\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$. Encontre o escoamento ao longo da hélice $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}, 0 \leq t \leq 1$.

Solução: Calculando \vec{F} sobre a curva tem-se que

$$\vec{F} = x\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k},$$

e ainda,

$$\frac{dr}{dt} = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + \vec{k},$$

agora integrando $\vec{F} \cdot \frac{dr}{dt}$ de $t = 0$ à $t = \frac{\pi}{2}$, Como $\vec{F} \cdot \frac{dr}{dt} = -\cos t \sin t + \sin t \cos t + t$. Temos que,

$$\text{Escoamento} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t \sin t + \sin t \cos t + t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exemplo 1.10. Encontre a circulação do campo $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x\vec{j}$ ao longo da circunferência $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}, 0 \leq t \leq 2\pi$

Solução: Na circunferência, $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x\vec{j} = (\cos t - \sin t)\vec{i} + \cos t\vec{j}$ e ainda $\frac{dr}{dt} = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j}$. Como

$$\vec{F} \cdot \frac{dr}{dt} = -\sin t \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t = 1 - \sin t \cos t,$$

portanto,

$$\int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot \frac{dr}{dt} = \int_0^{2\pi} 1 - \sin t \cos t dt = t - \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

1.5.4 Fluxo através de uma Cova Plana

Fluxo é uma palavra derivada do latim *fluxus*, que significa escoamento ou movimento contínuo de um fluido que segue um curso, uma corrente ou uma descarga. Em física define-se como sendo um campo vetorial, resultado do cálculo do produto escalar entre o vetor associado a cada ponto, o que representa uma grandeza física.

A definição a seguir é usada para vários cálculos de fluxo, onde envolvem movimento. Por exemplo: se \vec{F} for um campo elétrico ou magnético, então a integral de $\vec{F} \cdot \vec{n}$ é chamada de fluxo do campo através de uma curva fechada C no \mathbb{R}^2 , onde \vec{n} é o vetor normal exterior de C . No que segue vamos denotar *Fluxo* por F .

Definição 1.13. Se C for uma curva suave e fechada no domínio de um campo vetorial contínuo $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ no plano e se \vec{n} for o vetor normal exterior a curva C , o fluxo de \vec{F} através de C é

$$F = \int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds.$$

A diferença entre fluxo e circulação tem-se pelo fato de que o fluxo de \vec{F} através de C é usado a componente escalar de \vec{F} na direção da normal \vec{n} ao exterior, enquanto que, a circulação de \vec{F} ao redor de C é usado a componente escalar de \vec{F} na direção do vetor tangente \vec{T} , ou seja, o fluxo é a integral da componente normal \vec{n} de \vec{F} e a circulação é a integral da componente tangencial \vec{T} de \vec{F} .

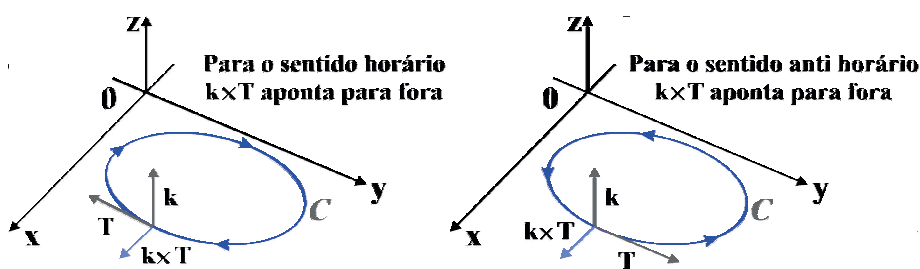


Figura 1.8: Posição no vetor normal em relação ao sentido percorrido.

O vetor normal \vec{n} é dado pelo produto vetorial do vetor tangente \vec{T} com o vetor \vec{k} . Dependendo da maneira pela qual a curva C é percorrida à medida que o tempo t aumenta, pode-se usar no sentido horário $\vec{n} = \vec{k} \times \vec{T}$ e no sentido anti-horário, esse como sendo uma escolha usual, como sendo $\vec{n} = \vec{T} \times \vec{k}$. Assim \vec{n} aponta para fora, tanto no sentido horário quanto no anti-horário.

Em termos de componentes, segue que

$$\vec{n} = \vec{T} \times \vec{k} = \left(\frac{dx}{ds} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \vec{j} \right) \times \vec{k} = \frac{dy}{ds} \vec{i} - \frac{dx}{ds} \vec{j}.$$

Se $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$, então

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = P(x, y) \frac{dy}{ds} - Q(x, y) \frac{dx}{ds}.$$

Portanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_C \left(P \frac{dy}{ds} - Q \frac{dx}{ds} \right) = \oint P dy - Q dx.$$

Onde pode-se ver que não precisa-se de \vec{n} ou ds para encontrar o fluxo. Para calcular essa integral, basta expressar P , dy , Q e dx em termos de t e integrar de $t = a$ à $t = b$.

A fórmula para calcular o fluxo através de uma curva C plana, suave e fechada, ou seja, $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ através de C , é a integral $\oint P dy - Q dx$, e pode ser calculada a partir de qualquer parametrização suave $\vec{r} = \alpha(t)\vec{i} + \beta(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$ que percorre C no sentido anti-horário uma única vez.

Exemplo 1.11. Encontre o fluxo de $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x\vec{j}$ através da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy .

Solução: No início deste trabalho, foi mostrado uma parametrização bastante usada para a circunferência. Seja $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ um parametrização da circunferência que percorre a curva C no sentido anti-horário uma única vez. Usando a parametrização $\vec{r}(t)$ na fórmula para calcular o fluxo através da curva plana, suave e fechada, tem-se:

$$\begin{aligned} P = (x - y) = \cos t - \sin t &\longrightarrow \frac{dy}{dt} = \cos t dt, \\ Q(x) = \cos t &\longrightarrow \frac{dx}{dt} = -\sin t. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int P \frac{dy}{dt} - Q \frac{dx}{dt} &= \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t) \cos t - \cos t (-\sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t \cos t + \sin t \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos^2 t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \Big|_0^{2\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Como o fluxo de \vec{F} através da circunferência é igual a π que é positivo, então o fluxo através da curva é para fora, caso fosse negativo o fluxo através da curva seria para dentro.

Capítulo 2

Integrais de Linhas de Campos Vetoriais

2.1 Integrais de linha de Campo Vetorial

O que foi visto no conceito de trabalho na seção 1.5.2 onde viu-se que em campos gravitacionais e elétricos, o trabalho necessário para mover uma partícula ou uma carga de um à outro lugar depende somente das posições iniciais e finais do objeto analisado e não do caminho entre as posições. A maioria dos trabalhos $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ realizados para mover uma partícula de a até b , onde a e b são pontos de uma região D aberta, depende do caminho percorrido. Entretanto, em alguns campos o valor da integral é o mesmo, ou seja, independe do caminho. Caso esse, que também será estudado a seguir.

2.1.1 Motivação

Considere uma partícula que se move ao longo de uma curva $C : \sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$, sob a ação de um campo vetorial $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Da física, tem-se que o produto escalar $\vec{F} \cdot \vec{AB}$ é o trabalho W realizado quando \vec{F} é constante e \vec{AB} é um segmento de reta.

Em um caso mais geral, seja uma curva C e $[a, b]$ o intervalo onde a curva esta definida, então divide-se o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $t = 1, 2, 3, \dots, n$, todos com comprimento $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, assim encontra-se n sub-arcos $\lambda([t_{i-1}, t_i]) = C_i$ e n segmentos $[A_{i-1}, A_i]$, onde $A_i = \lambda(t_i) = (x(t_i), y(t_i)), i = 1, 2, 3, \dots, n$.

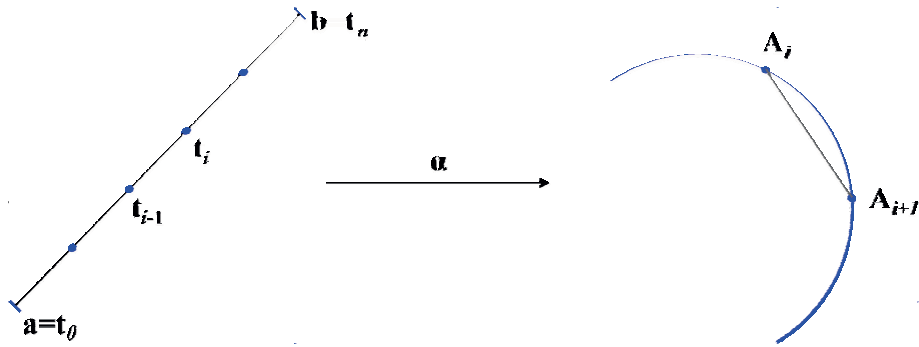


Figura 2.1: \vec{F} constante ao longo do segmento $[A_{i-1}, A_i]$.

Suponha \vec{F} constante ao longo do seguinte segmento $[A_{i-1}, A_i]$, o trabalho W ao longo de C_i é aproximadamente

$$W_i \cong \vec{F}(\lambda(t_i)) \cdot (A_i - A_{i-1}) = P\Delta x + Q\Delta y, \text{ onde}$$

$$\Delta x = x(t_i) - x(t_{i-1}) \text{ e } \Delta y = y(t_i) - y(t_{i-1}).$$

Pelo Teorema 4.5 (**Teorema do Valor Médio**), demonstrado no Anexo, existem t_i^*, t_i^{**} tais que

$$\Delta x = x'(t_i^*)\Delta t \text{ e } \Delta y = y'(t_i^{**})\Delta t.$$

Logo,

$$\begin{aligned} W_i &\cong [P(x(t_i), y(t_i))x'(t_i^*) + [Q(x(t_i), y(t_i))y'(t_i^{**})]\Delta t] \Rightarrow \\ \Rightarrow W &\cong \sum [P(x(t_i), y(t_i))x'(t_i^*) + [Q(x(t_i), y(t_i))y'(t_i^{**})]\Delta t] = Sn. \end{aligned}$$

Assim define-se $W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} Sn$.

Esta motivação sugere a definição que segue.

Definição 2.1 (Integral de Linha de Campo Vetorial). *Seja C uma curva de classe C^1 representada por uma equação \vec{r} definida em um intervalo $[a, b]$. Seja \vec{F} um campo vetorial definido e contínuo em C . A integral de linha de \vec{F} ao longo de C , com notação $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é definida da seguinte forma*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

Sempre que $\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$ seja integrável.

Pode-se encontrar algumas outras notações para integral de linha de campo vetorial. Quando \vec{F} e \vec{r} se expressam em função de suas componentes segue que

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \text{ e } \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

a integral $\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$ fica da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt &= \int_a^b P(\vec{r}(t)) \frac{dx}{dt} + Q(\vec{r}(t)) \frac{dy}{dt} + R(\vec{r}(t)) \frac{dz}{dt} \\ &= \int_a^b P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.1. Se $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, temos que a integral de linha de \vec{F} ao longo da hélice $C : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ é dada por $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi^2$

Solução: Como $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t \cos t - \cos t \sin t + t) dt \\ &= \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{2\pi} = 2\pi^2. \end{aligned}$$

2.1.2 Propriedades Fundamentais das Integrais de Linha de Campo Vetorial

i. Linearidade a respeito ao integrando

$$\int_C (a\vec{F} + b\vec{G}) \cdot d\vec{r} = a \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + b \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}.$$

Demonstração: Seja \vec{F}, \vec{G} campos vetoriais contínuos e $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se que de fato

$$\int_C (a\vec{F} + b\vec{G}) \cdot d\vec{r} = a \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + b \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}.$$

onde $a\vec{F} \cdot d\vec{r} = \langle a\vec{F}, d\vec{r} \rangle$ e por propriedade de produto escalar, visto em Propriedades 1.1.1, temos

$$\langle a\vec{F}, d\vec{r} \rangle = a \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle,$$

Assim $\int_C a\vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C a(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = a \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ de forma análoga $\int_C b\vec{G} \cdot d\vec{r} = b \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$, e portanto

$$\int_C (a\vec{F} + b\vec{G}) \cdot d\vec{r} = a \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + b \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}. \quad \blacksquare$$

ii. Aditiva

Seja $C = C_1 \cup C_2$, onde C_1, C_2 são arcos suaves, então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Demonstração: Seja C uma curva suave definida num intervalo $[a, b]$, e as curvas C_1 e C_2 definidas por $\vec{r}(t)$ quando se faz variar t no intervalo $[a, c]$ e $[c, b]$, respectivamente, para um certo $a < c < b$, segue da definição que

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^c \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt. \quad (2.1)$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt. \quad (2.2)$$

Somando as integrais (2.1) e (2.2) acima tem-se

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^c \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt + \int_c^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.1. *Seja C uma curva de classe C^1 por partes representada por uma função vetorial \vec{r}_1 definida em um intervalo $[a, b]$ e seja \vec{r}_2 outra função vetorial definida em $[c, d]$, suponha \vec{r}_2 e \vec{r}_1 , donde segue*

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1(h(t)) \text{ se } c \leq t \leq d,$$

onde h é uma função real, derivável, estritamente crescente em $[c, d]$ e tal que $h(c) = a$ e $h(d) = b$. Com tais circunstâncias a função vetorial \vec{r}_2 representa a mesma curva C e assim tem-se

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}_2.$$

Demonstração: Como as funções $\vec{r}_1(t)$ e $\vec{r}_2(t)$ representam a mesma curva C então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = \int_c^d \vec{F}(\vec{r}_2(t)) \cdot \vec{r}_2'(t) dt,$$

onde sabe-se que $\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(h(t))$ então $\vec{r}_2'(t) = \vec{r}_1'(h(t))h'(t)$ por conseguinte

$$\int_c^d \vec{F}(\vec{r}_2(t)) \cdot \vec{r}_2'(t) dt = \int_c^d \vec{F}(\vec{r}_1(h(t))) \cdot \vec{r}_1'(h(t))h'(t) dt,$$

fazendo $h(t) = u$ daí $h'(t) = du$, quando t assume valores de c e d , logo

$$\int_c^d \vec{F}(\vec{r}_1(h(t))) \cdot \vec{r}_1'(h(t))h'(t)dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}_1(u)) \cdot \vec{r}_1'(u)du,$$

onde pela definição $\int_a^b \vec{F}(\vec{r}_1(u)) \cdot \vec{r}_1'(u)du = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}_1$. ■

Estendendo o Teorema 2.1 acima e sendo h uma função real, derivável e estritamente decrescente em $[c, d]$ tal que $h(c) = b$ e $h(d) = a$ então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}_1,$$

ou seja, pode-se enunciar que a integral de linha de um campo vetorial \vec{F} dado por $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende da parametrização. Isto é, denotando C^- como sendo a curva C percorrida em sentido oposto, então

$$\int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Exemplo 2.2. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (y, x^2 + y^2)$ e C é formada pelos segmentos que ligam $(-2, 0)$ à $(0, 0)$ e $(0, 0)$ à $(0, 2)$.

Solução: Note que $C = C_1 \cup C_2$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.3)$$

Pode-se assumir as parametrizações a seguir

$$C_1 = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, -2 \leq t \leq 0 \quad e \quad C_2 = \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2$$

Em C_1 tem-se $dx = dt$ e $dy = 0$ e em C_2 tem-se $dx = 0$ e $dy = dt$, daí

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_{C_1} ydx + (x^2 + y^2)dy = \int_{-2}^0 0dt = 0. \quad (2.4)$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} Pdx + Qdy = \int_{C_2} ydx + (x^2 + y^2)dy = \int_0^2 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}. \quad (2.5)$$

Substituindo (2.4) e (2.5) em (2.3), tem-se

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}.$$

2.2 Gradiente, Divergente e Rotacional de um campo Vetorial

Antes de Campo Conservativo e do próximo capítulo é preciso noções sobre duas ideias para uma melhor assimilação da noção de que se trata o **Teorema de Green**. A primeira é sobre a densidade do fluxo de um campo vetorial, chamada pelos matemáticos de divergência de um campo vetorial com notação $\text{div}\vec{F}$. A outra ideia é sobre densidade de circulação de um campo vetorial, conhecido pelos matemáticos como rotacional com notação $\text{rot}\vec{F}$. Além disso, o gradiente também é de fundamental importância para essas duas ideias necessárias ao teorema.

A partir de um campo escalar f pode-se sempre construir um campo vetorial chamado gradiente.

Definição 2.2 (Gradiente). *Seja f um campo escalar diferenciável em um conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. O gradiente de f , representado por ∇f , é um campo vetorial de D .*

Considera-se o operador diferenciável vetorial ∇ ("del") como sendo

$$\nabla = \frac{d}{dx}\vec{i} + \frac{d}{dy}\vec{j} + \frac{d}{dz}\vec{k} = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right),$$

este operador converte um campo escalar f em um campo vetorial gradiente f dado por

$$\nabla f = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz} \right).$$

Observação 2.1. *Pode-se visualizar uma propriedade de gradiente.*

$$\nabla(af + bg) = a\nabla f + b\nabla g,$$

onde a, b são constantes e f, g são campos escalares.

Demonstração: De fato, seja os campos vetoriais gradientes f, g , e a, b constantes de \mathbb{R} . Sabe-se que

$$\nabla f = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz} \right) \text{ e } \nabla g = \left(\frac{dg}{dx}, \frac{dg}{dy}, \frac{dg}{dz} \right).$$

Portanto

$$\nabla af = \left(\frac{daf}{dx}, \frac{daf}{dy}, \frac{daf}{dz} \right) = \left(a\frac{df}{dx}, a\frac{df}{dy}, a\frac{df}{dz} \right) = a \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz} \right) = a\nabla f,$$

de forma análoga tem-se que $\nabla bg = \left(b \frac{dg}{dx}, b \frac{dg}{dy}, b \frac{dg}{dz} \right) = b \nabla g$. Daí, segue que

$$\nabla(af + bg) = \nabla af + \nabla bg = a \nabla f + b \nabla g.$$

■

Agora sobre o divergente suponha que um campo vetorial $\vec{F}(x, y) = P\vec{i} + Q\vec{j}$ seja o campo de velocidade do fluido e que suas derivadas parciais de primeira ordem de P, Q sejam contínuas em cada ponto de uma região D . Seja (x, y) um ponto em D e A um retângulo com vértices em (x, y) , e ainda, junto com seu interior estão totalmente contidos em D . Os lados desse retângulo, esse sendo paralelos aos eixos, possui Δx e Δy como comprimentos. Daí encontra-se a taxa pela qual o fluido deixa sair do retângulo

$$\vec{F}(x, y) \cdot (-\vec{j})\Delta x = -Q(x, y)\Delta x,$$

sendo esta equação, a taxa quando o fluido deixa o retângulo pela aresta inferior, ou seja, a componente escalar da velocidade na direção do vetor normal. De forma análoga encontra-se a taxa quando o fluido deixa o retângulo pelas arestas restantes. Onde através da combinação dos pares opostos, chega-se a

$$\text{Fluxo através da fronteira retangular} \approx \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} \right) \Delta x \Delta y.$$

Dividindo a igualdade pela área e depois fazendo a mesma tender à zero, chega-se ao resultado

$$\text{Fluxo através da fronteira retangular} = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}.$$

Definição 2.3. *Seja $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo vetorial diferenciável em um conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^3$. Considera-se o produto interno de ∇ pelo campo vetorial \vec{F} , então o divergente de \vec{F} é um campo escalar definido por*

$$\langle \nabla, \vec{F} \rangle = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right) \cdot (P, Q, R) = \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} \right) = \text{div} \vec{F},$$

se $\vec{F} = (P, Q)$ é de classe C^1 em um aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ então o divergente de \vec{F} é um campo escalar definido por

$$\text{div} \vec{F} = \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} \right) = \langle \nabla, \vec{F} \rangle = \nabla \cdot \vec{F}.$$

A informação de como uma roda de pás gira em um ponto sobre uma dada região plana por onde um fluido escoar. Os físicos costumam chamar de densidade de circulação e os matemáticos

chamam de rotacional, ou seja, o fluido está circulando ao redor dos eixos. Para obter a densidade de circulação segue a mesma analogia do divergente, ou seja

$$\vec{F}(x, y) \cdot \vec{i} \Delta x = P(x, y) \Delta x,$$

sendo esta equação a taxa quando o fluido deixa o retângulo pela aresta inferior, ou seja, a componente escalar da velocidade na direção do vetor tangente. De forma análoga encontra-se a taxa quando o fluido deixa o retângulo pelas arestas restantes. Onde através da combinação dos pares opostos, chega-se a

$$\text{Fluxo no retângulo} \approx \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) \Delta x \Delta y.$$

Dividindo a igualdade pela área e depois fazendo a mesma tender à zero, chega-se ao resultado

$$\text{Fluxo através da fronteira retangular} = \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}.$$

Definição 2.4. Considera-se o produto vetorial de ∇ pelo campo vetorial \vec{F} , então o rotacional de \vec{F} é um campo vetorial definido por

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right) \times (P, Q, R) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} \right) \vec{i} + \left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} \right) \vec{j} + \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) \vec{k} \\ &= \text{rot} \vec{F}. \end{aligned}$$

se $\vec{F} = (P, Q)$ é de classe C^1 em um aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ então o rotacional de \vec{F} é um campo vetorial definido por

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) \vec{k}.$$

Observação 2.2. De forma análoga a propriedade do gradiente tem-se uma propriedade do rotacional, onde

$$\text{rot}(a\vec{F} + b\vec{G}) = a \cdot \text{rot} \vec{F} + b \cdot \text{rot} \vec{G}.$$

Exemplo 2.3. Calcule o rotacional e o divergente do campo vetorial dado por $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$.

Solução: Sabe-se que $\operatorname{div}\vec{F} = \langle \nabla, \vec{F} \rangle$ e $\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ desse modo segue

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{F} &= \langle \nabla, \vec{F} \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right), (xy, yz, zx) \right\rangle \\ &= \frac{d}{dx}xy + \frac{d}{dy}yz + \frac{d}{dz}zx = y + z + x. \end{aligned}$$

Sobre o rotacional segue o desenvolvimento abaixo

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{F} &= \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right) \times (xy, yz, zx) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{d}{dy}zx - \frac{d}{dz}yz \right) \vec{i} + \left(\frac{d}{dz}xy - \frac{d}{dx}zx \right) \vec{j} + \left(\frac{d}{dx}yz - \frac{d}{dy}xy \right) \vec{k} \\ &= (0 - y)\vec{i} + (0 - z)\vec{j} + (0 - x)\vec{k} \\ &= -y\vec{i} - z\vec{j} - x\vec{k} = -(y, z, x). \end{aligned}$$

Observação 2.3. Neste ponto pode-se enunciar algumas propriedades referentes ao rotacional como também ao divergente de um campo vetorial \vec{F} .

Seja uma função f , \vec{F} e \vec{G} campos vetoriais, onde são de classe C^2 e $a, b \in \mathbb{R}$, então segue as seguintes propriedades:

i. $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$ ou ainda $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

Demonstração: Sabe-se que $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ e ainda

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\nabla f) = \nabla \times \nabla f &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \vec{k}, \end{aligned}$$

onde pelo Teorema 4.6 (**Teorema de Scharws**) demonstrado no Anexo diz: Se $f(x, y)$ de classe C^2 , então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla f &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} \\ &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}.\end{aligned}$$

■

ii. $div(rot\vec{F}) = 0$ ou ainda $\langle \nabla, (\nabla \times \vec{F}) \rangle = 0$.

Demonstração: Sabe-se que $div(\vec{F}) = \langle \nabla, \vec{F} \rangle$ como também que $rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$, daí obtém-se o seguinte $div(rot\vec{F}) = \langle \nabla, rot\vec{F} \rangle = \langle \nabla, \nabla \times \vec{F} \rangle$ e ainda, como da definição 2.4 de rotacional temos que

$$rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Então,

$$\begin{aligned}div(rot\vec{F}) &= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] \right\rangle \\ &= \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}\end{aligned}$$

onde pelo Teorema 4.6 (**Teorema de Scharws**) demonstrado no Anexo, que diz: Se $f(x, y)$ de classe C^2 , então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Portanto,

$$div(rot\vec{F}) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

■

iii. $div(\nabla f) = \nabla^2 f$ ¹.

Demonstração: Como $div \vec{F} = \langle \nabla, \vec{F} \rangle$ pode-se seguir que

$$\begin{aligned} div(\nabla f) &= \langle \nabla, \nabla f \rangle \\ &= \left\langle \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right) \right\rangle \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f = \Delta f. \end{aligned}$$

■

iv. $div(\nabla f \vec{F}) = \langle \nabla, f \vec{F} \rangle = f \langle \nabla, \vec{F} \rangle + \langle \nabla f, \vec{F} \rangle = f div(\vec{F}) + \nabla \langle f, \vec{F} \rangle$.

Demonstração: Sabe-se que $f \vec{F} = (fP, fQ, fR)$, logo

$$\begin{aligned} div(f \vec{F}) &= \langle \nabla, f \vec{F} \rangle \\ &= \left\langle \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), (fP, fQ, fR) \right) \right\rangle \\ &= \frac{\partial(fP)}{\partial x} + \frac{\partial(fQ)}{\partial y} + \frac{\partial(fR)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} P + \frac{\partial P}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} Q + \frac{\partial Q}{\partial y} f + \frac{\partial f}{\partial z} R + \frac{\partial R}{\partial z} f \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} P + \frac{\partial P}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} Q + \frac{\partial Q}{\partial y} f + \frac{\partial f}{\partial z} R + \frac{\partial R}{\partial z} f \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} f + \frac{\partial Q}{\partial y} f + \frac{\partial R}{\partial z} f + \frac{\partial f}{\partial x} P + \frac{\partial f}{\partial y} Q + \frac{\partial f}{\partial z} R \\ &= f \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \frac{\partial f}{\partial x} P + \frac{\partial f}{\partial y} Q + \frac{\partial f}{\partial z} R \\ &= f \left\langle \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right), (P, Q, R) \right) \right\rangle + \left\langle \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \right), (P, Q, R) \right) \right\rangle \\ &= f \langle \nabla, \vec{F} \rangle + \langle \nabla f, \vec{F} \rangle. \end{aligned}$$

Portanto $div(f \vec{F}) = f \langle \nabla, \vec{F} \rangle + \nabla \langle f, \vec{F} \rangle$.

■

¹onde $\nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ é dito laplaciano de f.

2.3 Campos Conservativos ou Campos Gradiente

Definição 2.5 (Independência do Caminho de uma Integral de Linha). *Seja \vec{F} um campo vetorial definido em uma região aberta D no espaço e suponha que quaisquer dois pontos a e b em D o trabalho $W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$ realizado para mover uma partícula de a até b seja o mesmo para todos os caminhos de a até b . Então, a integral $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho.*

Definição 2.6 (Campo Conservativo). *Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($n = 2$ ou 3), diz-se que \vec{F} é um campo conservativo ou um campo gradiente se existir um campo escalar $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$ em D .*

Definição 2.7 (Função Potencial). *Se $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($n = 2$ ou 3) e $\vec{F} = \nabla\varphi$ para alguma função escalar φ em uma região D aberta no espaço, então φ é chamada função potencial.*

Exemplo 2.4. *O campo vetorial $\vec{F} = (P, Q, R) = (2x + 3yz)\vec{i} + 3xz\vec{j} + 3xy\vec{k}$ é um campo conservativo em \mathbb{R}^3 , pois existe uma função potencial $\varphi = x^2 + 3xyz$ diferenciável em \mathbb{R}^3 , tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$ em \mathbb{R}^3 , ou seja, $\left(\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}\right) = (P, Q, R)$.*

Exemplo 2.5. *Seja $\vec{F} = (\cos xy - xy \sin xy)\vec{i} - (x^2 \sin xy)\vec{j}$. Encontre a função potencial φ , tal que $\vec{F} = \nabla\varphi$.*

Solução: *Sabe-se $\vec{F} = \nabla\varphi = \left(\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}\right)$. Deve-se encontrar φ , tal que*

$$\nabla\varphi = \begin{cases} \frac{d\varphi}{dx} = \cos xy - xy \sin xy \\ \frac{d\varphi}{dy} = -x^2 \sin xy \end{cases}$$

Daí

$$\int \frac{d\varphi}{dy} \Rightarrow \varphi = x \cos xy + h(x), \tag{2.6}$$

deriva-se (2.6) em relação a x , logo

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= P \\ &= \cos xy - xy \sin xy + h'(x). \end{aligned}$$

Portanto, pode-se ver que $h'(x) = 0$ e integrando esta igualdade segue que

$$\int h'(x) = \int 0 \Rightarrow h(x) = 0 + c,$$

Deste modo de (2.6), obtemos $\varphi = x \cos xy + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.2. *Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 . Se \vec{F} é conservativo, então $\text{rot}\vec{F} = \vec{0}$.*

Demonstração: Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sendo \vec{F} conservativo (hipótese) deve-se demonstrar que $\text{rot}\vec{F} = \vec{0}$. De fato, da definição 2.4 de $\text{rot}\vec{F}$, tem-se $\text{rot}\nabla f = \nabla \times \nabla f$ do item (i) demonstrado na observação 2.3, logo $\text{rot}\vec{F} = \text{rot}(\nabla f) = \nabla \times \nabla f = \vec{0}$. ■

Exemplo 2.6. *O campo vetorial $\vec{F}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2}\vec{j}$ é conservativo, pois $\nabla\varphi = \vec{F}$ já que $\varphi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ com $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$ e $\frac{d\varphi}{dy} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$. Calculando $\text{rot}\vec{F}$ tem-se*

$$\text{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) \right) \vec{k} = \vec{0}.$$

Observação 2.4. *Pode-se reescrever o Teorema 2.2 como sendo: Se $\text{rot}\vec{F} \neq \vec{0}$ em D , então o campo vetorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($n = 2$ ou 3) **não** é conservativo.*

Exemplo 2.7. *Mostre que o campo $\vec{F}(x, y) = -2y\vec{i} + 2x\vec{j}$ não é conservativo.*

Solução: *De fato, pois $\text{rot}\vec{F} = \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) \vec{k}$ como $P = -2y$ e $Q = 2x$, daí segue que $\frac{dQ}{dx} = 2$ e $\frac{dP}{dy} = -2$. Portanto $\text{rot}\vec{F} = (2 - (-2)) = 4$ como $\text{rot}\vec{F} = 4 \neq 0$ então $\vec{F}(x, y)$ não é conservativo.*

Teorema 2.3 (Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha). *Seja \vec{F} um campo conservativo em um aberto D , isto é, existe uma função potencial φ tal que $\vec{F} = \nabla\varphi$ em D . Se C é qualquer curva regular por partes situada em D com ponto inicial a e ponto final b então o valor da integral é*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Demonstração: De fato, pela Definição 2.1, tem-se

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt, \text{ sempre que seja integrável, logo}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla\varphi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt, a \leq t \leq b.$$

Portanto assumindo $g(t) = \varphi(\vec{r}(t))$ derivando a igualdade, logo $g'(t) = \nabla\varphi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$ assim segue

$$\int_a^b \nabla\varphi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b g'(t) dt = g(t) \Big|_a^b = g(b) - g(a) = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Portanto $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(b) - \varphi(a)$. ■

Exemplo 2.8. Encontre o trabalho realizado pelo campo conservativo

$$\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k} = \nabla(xyz).$$

ao longo de qualquer curva suave C que ligue $A(-1, 3, 9)$ e $B(1, 6, -4)$.

Solução: Com $f(x, y, z) = xyz$, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \nabla f \cdot d\vec{r} \\ &= f(b) - f(a) \\ &= xyz \Big|_{(1,6,-4)} - xyz \Big|_{(-1,3,9)} \\ &= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9) \\ &= -24 + 27 = 3. \end{aligned}$$

Teorema 2.4 (Propriedade da curva fechada de campos conservativos). As informações a seguir são equivalentes.

i. $\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ ao redor de toda curva fechada em D .

ii. O campo \vec{F} é conservativo em D .

Demonstração:

(1) \Rightarrow (2) Deve-se mostrar que, para quaisquer dois pontos a e b em D , a integral de $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ tem o mesmo valor sobre quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 de a até b . Inverte-se a direção de C_2 para obter o caminho C_2^- de b até a . Juntos, C_1 e C_2^- formam uma curva fechada C e

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

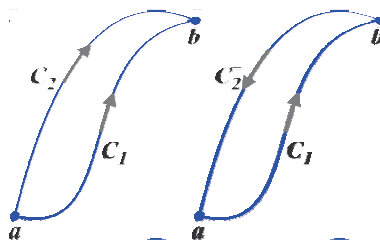


Figura 2.2: Tendo dois caminhos entre a e b um deles poderá ser invertido.

Assim, as integrais sobre C_1 e C_2 resultam no mesmo valor. Observa-se que a definição de integral de linha mostra que alterar a direção ao longo de uma curva inverte o sinal da integral.

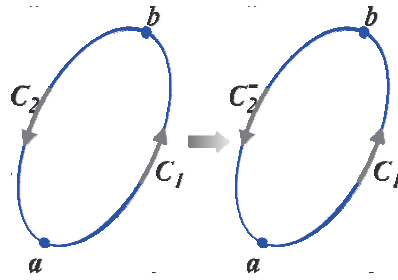


Figura 2.3: Pode-se inverter parte da curva para formar dois caminhos.

(2) \Rightarrow (1) Deve-se mostrar que a integral de $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ é zero sobre qualquer curva fechada. Escolhe-se dois pontos a e b em C e usa-se para quebrar C em dois pedaços: C_1 de a a b seguido por C_2 a partir de b de volta a . Então,

$$\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

■

Capítulo 3

Teorema de Green no Plano

Em homenagem ao matemático inglês *George Green (1793-1841)* que estudou as aplicações matemática em diversas áreas de física. O teorema que possui seu nome aparece em investigações de *Carl Friedrich Gauss (1777-1855)* e *Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)*.

Para o estudo que relaciona-se com integrais de linha, o Teorema de Green é um resultado importantíssimo onde converte um integral de linha em uma integral dupla de uma região limitada, onde esta integral de linha não está, necessariamente, associada a um campo conservativo.

Para que seja válido o uso do teorema é necessário algumas premissas, ou seja, dado um campo vetorial $\vec{F}(P, Q)$ é essencial que P e Q sejam deriváveis, como também que da uma região D , sua fronteira ∂D seja uma curva de Jordan definição 4.3 visto no Anexo.

Teorema 3.1 (Teorema de Green no Plano). *Seja D uma região fechada e limitada de \mathbb{R}^2 , cuja fronteira $\partial D = C$ é uma curva de Jordan e C^1 por partes, duas a duas disjuntas, de modo que ∂D seja percorrida apenas uma vez no sentido anti horário. Se $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ é um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto aberto U tal que $D \subset U$. Então,*

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3.1)$$

Demonstração: Seja C uma curva fechada, simples e suave no plano xy com a propriedade de que retas paralelas aos eixos não cortem em mais de dois pontos. Seja O a região limitada por C e supondo que P e Q e suas derivadas parciais de primeira ordem sejam contínuas em todos os pontos de alguma região aberta que contenha C e O . Deve-se provar a forma da circulação rotacional do Teorema de Green.

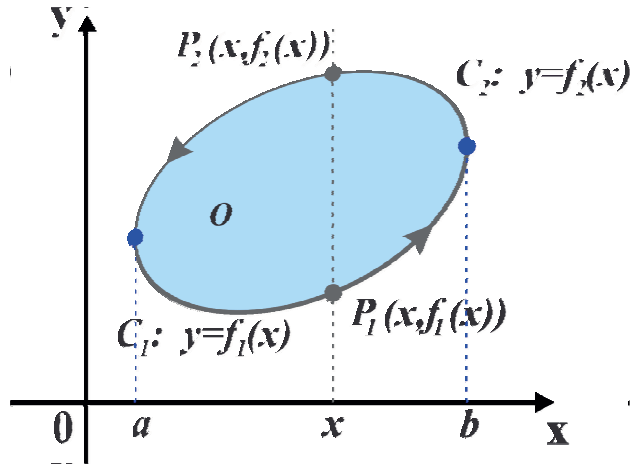


Figura 3.1: A curva de fronteira C e formada por $C_1: y = f_1(x)$ e $C_2: y = f_2(x)$.

Da figura (3.1) pode-se notar que $C = C_1 \cup C_2$, logo tem-se duas partes orientada no sentido anti-horário

$$C_1 : y = f_1(x) \text{ e } C_2 : y = f_2(x), \text{ com } a \leq x \leq b.$$

Para qualquer $x \in [a, b]$, pode-se integrar $\frac{\partial P}{\partial y}$ em relação a y de $y = f_1(x)$ a $y = f_2(x)$ e obter

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, y) \Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} = P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x)). \quad (3.2)$$

Integrando (3.2) em relação a x de a até b , obtém-se

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx &= \int_a^b \left[P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x)) dx \right] \\ &= \int_a^b P(x, f_2(x)) dx - \int_a^b P(x, f_1(x)) dx \\ &= - \int_b^a P(x, f_2(x)) dx - \int_a^b P(x, f_1(x)) dx \\ &= \int_{C_2} P dx - \int_{C_1} P dx \\ &= \oint_C P dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\oint_C P dx = \iint_O \left(- \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3.3)$$

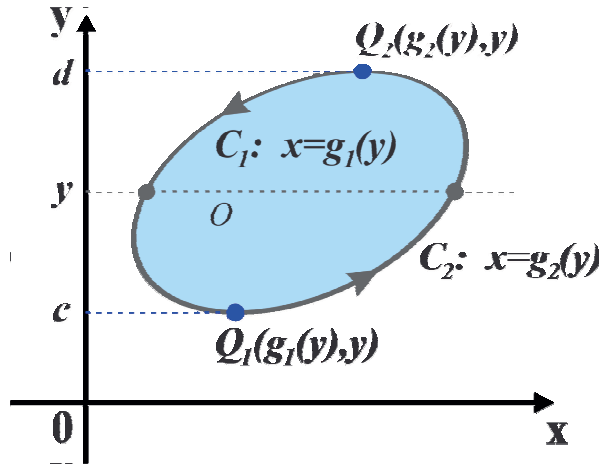


Figura 3.2: A curva de fronteira C é formada por $C_1: y = f_1(x)$ e $C_2: y = f_2(x)$.

Da figura (3.2) pode-se notar que $C = C_1 \cup C_2$, logo tem-se duas partes orientadas no sentido anti-horário

$$C_1 : x = g_1(y) \text{ e } C_2 : x = g_2(y), \text{ com } c \leq y \leq d.$$

Para qualquer $y \in [c, d]$, pode-se integrar $\frac{\partial Q}{\partial x}$ em relação a x de $x = g_1(y)$ a $x = g_2(y)$ e obter

$$\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(x, y) \Big|_{g_1(y)}^{g_2(y)} = Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y). \quad (3.4)$$

Integrando (3.4) em relação a y de c até d obtém-se

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \left[Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y) \right] dy \\ &= \int_c^d Q(g_2(y), y) dy - \int_c^d Q(g_1(y), y) dy \\ &= \int_c^d Q(g_2(y), y) dy + \int_d^c Q(g_1(y), y) dy \\ &= \int_{C_2} Q dy + \int_{C_1} Q dy \\ &= \oint_C Q dy. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\oint_C Q dy = \iint_O \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy. \quad (3.5)$$

Somando (3.5) e (3.3) obtem-se

$$\begin{aligned}
 \oint_C Qdy + \left(- \oint_C Pdx \right) &= \iint_{\partial O} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy + \left(- \iint_{\partial O} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \right) \\
 &= \iint_{\partial O} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \iint_{\partial O} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \\
 &= \iint_{\partial O} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.
 \end{aligned}$$

■

Caso C não seja simples, então C pode ser descrita como a soma de regiões simples, ou seja, $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$, onde cada curva C_i é fechada, simples e suave como também P e Q possuam suas derivadas parciais de primeira ordem contínuas em todos os pontos da região aberta que contenha $\bigcup_{i=1}^n C_i$ e O .

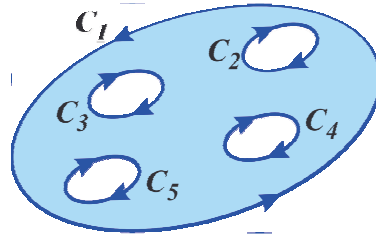


Figura 3.3: $\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$.

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_3^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_4^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_5^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Assim pode-se aplicar o Teorema de Green em cada região simples

$$\iint_O \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{O_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} Pdx + Qdy.$$

Pode-se notar na figura (3.4) que o Teorema de Green também se aplica a região O formada pelas regiões O_1 e O_2 . O teorema aplicado em C_1 e C_2 segue que

$$\oint_{C_1} Pdx + Qdy = \iint_{O_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy; \tag{3.6}$$

$$\oint_{C_2} Pdx + Qdy = \iint_{O_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \tag{3.7}$$

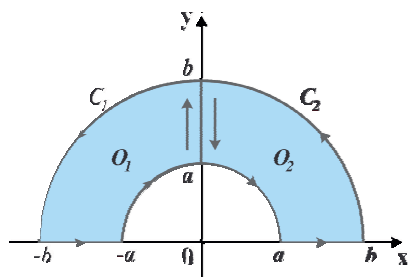


Figura 3.4: Uma região O que é formada por regiões O_1 e O_2 .

Somando (3.6) e (3.7) pode-se observar que a integral de linha ao longo do eixo y de b até a de C_1 e de a até b de C_2 , onde $C_1 = C_2^-$ se cancelam, assim

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_O \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad (3.8)$$

Exemplo 3.1. A fronteira de O consiste na circunferência

$$C_1 : x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi,$$

percorrida no sentido anti horário à medida que t aumenta, a circunferência

$$C_2 : x = h \cos \theta, y = h \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

percorrida no sentido horário a medida que θ aumenta. As funções P e Q e suas derivadas parciais são contínuas em O .

Solução: Pode-se notar que, sendo $P = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$ e $Q = \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$, então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad e \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

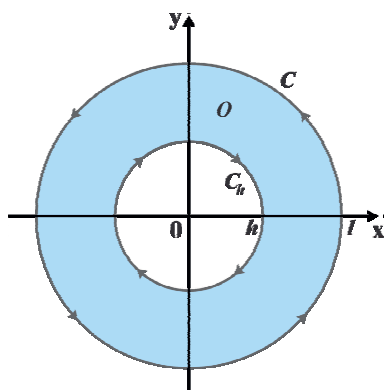


Figura 3.5: O Teorema de Green pode ser aplicado à região anular O .

Portanto, pelo Teorema de Green, segue que

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_O \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_O 0dxdy = 0. \quad (3.9)$$

Capítulo 4

O Teorema das Quatro Equivalências

4.1 Motivação

Neste capítulo será introduzido condições para que se possa valer a recíproca do Teorema 2.2. Tais condições são de suma importância para o estudo e demonstração do Teorema das Quatro Equivalências.

Além disso, este teorema garante de forma necessária e suficiente de uma forma simples que se uma função vetorial em um conjunto simplesmente conexo e o seu rotacional for igual a zero, então esse campo vetorial é conservativo. Com isso pode-se encontrar uma função potencial para calcular a integral através do Teorema 2.3 (**Teorema Fundamental do Cálculo**).

Observação 4.1. *Devemos estudar condições sobre o domínio de \vec{F} para que a recíproca do teorema acima seja verdade, isto é: Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 . Se $\text{rot}\vec{F} = \vec{0}$, então \vec{F} é conservativo.*

4.2 Premissas a serem consideradas

- I. Seja um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto ver Definição 4.2 no Anexo.
- II. D é conexo ver Definição 4.4 no Anexo.
- III. D é sem buracos, isto é, quaisquer curva de Jordan ver Definição 4.3 no Anexo, ou seja, $C \subset D$ delimita uma região contida em D .

Um conjunto que satisfaça *I*, *II* e *III* e denominado como *Conjunto Simplesmente Conexo* ver Definição 4.5 no Anexo em.

Teorema 4.1. *Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($n = 2$ ou 3) um campo vetorial de classe C^1 em um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$, simplesmente conexo. Se $\text{rot}\vec{F} = \vec{0}$, então \vec{F} é conservativo.*

Observação 4.2. *Nesse ponto, pode-se enunciar o próximo teorema com base no Teorema 2.2 e no Teorema 4.1.*

Teorema 4.2. Teorema das Quatro Equivalências

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo vetorial de classe C^1 em D . Se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto simplesmente conexo, então as seguintes afirmações são equivalentes:

I. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

II. $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ qualquer que seja a curva C fechada de D .

III. $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ não depende do caminho da curva C por partes de D .

IV. \vec{F} é um campo conservativo de alguma função potencial $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Demonstração:

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo vetorial de classe C^1 em um conjunto D simplesmente conexo. Então,

(I) \Rightarrow (II) De fato, tem-se que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ onde pelo Teorema 3.1 (**Teorema de Green**) que

por simplicidade $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

(II) \Rightarrow (III) Como $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para qualquer curva C fechada de um conjunto simplesmente conexo D , seja C_1 e C_2 dois caminhos de C ligando pontos a e b , assim tem-se que $C = C_1 \cup C_2^-$ onde C_2^- é denotado o caminho contrário de C_2 , segue que,

$$0 = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

logo

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \implies \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

Portanto, da Definição 2.5 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é irrotacional, ou seja $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende do caminho.

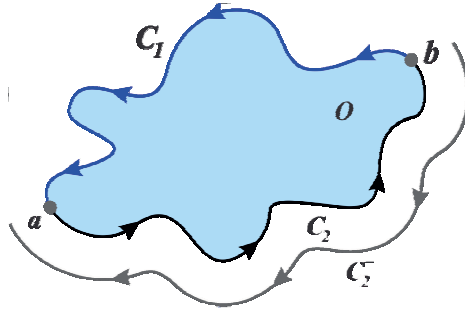


Figura 4.1: Curva fechada C onde C_1 e C_2 são dois caminhos.

(III) \Rightarrow (VI) Agora, fixando $(x_0, y_0) \in D$ e para cada $(x, y) \in D$ define

$$f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy,$$

sendo bem definida, pois não depende do caminho que liga (x_0, y_0) a (x, y) .

Sendo Δx tendendo a 0 ($\Delta x \rightarrow 0$) temos:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y) - f(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} Pdx + Qdy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} Pdx + Qdy + \int_{(x, y)}^{(x_0, y_0)} Pdx + Qdy \\ &= \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} Pdx + Qdy. \end{aligned}$$

Como a coordenada y é uma constante, tem-se pelo Teorema 4.5 (**Teorema do Valor Médio para Integrais**) demonstrado no Anexo, que:

$$\int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} Pdx = \Delta x P(x + t\Delta x, y), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Logo, podemos afirmar que

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \Delta x P(x + t\Delta x, y) \implies \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = P(x + t\Delta x, y),$$

tomando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$ segue que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + t\Delta x, y),$$

logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y). \quad (4.1)$$

De forma análoga, define-se $f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$ onde $\Delta y \rightarrow 0$ e chega-se em

$$\int_{(x, y)}^{(x, y + \Delta y)} Qdx = \Delta y Q(x, y + t\Delta y), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

tomando o limite quando $\Delta y \rightarrow 0$ segue que

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} Q(x, y + t\Delta y),$$

logo,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y). \quad (4.2)$$

Portanto de (4.1) e (4.2) existe um campo escalar diferenciável $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$.

Podemos concluir que \vec{F} é um campo conservativo (gradiente).

(VI) \Rightarrow (I) De fato, se D é simplesmente conexo e $rot\vec{F} = \vec{0}$ tem-se pelo Teorema 3.1 (**Teorema de Green**) que por simplicidade $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ pois, seja $\vec{F} = (P, Q)$ um campo vetorial em um conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexo, sabe-se que o rotacional é o campo vetorial definido por

$$rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F} \text{ onde } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j},$$

dai,

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k},$$

como $rot\vec{F} = \vec{0}$ então

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

■

Exemplo 4.1. Mostre que campo vetorial $\vec{F}(x, y) = \frac{xy^2}{2} \vec{i} + \frac{x^2y}{2} \vec{j}$ é conservativo.

Solução: De fato, como o campo vetorial é definido em $D \subset \mathbb{R}^2$ que é simplesmente conexo, pois é aberto, conexo e sem buracos, tem-se também que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = xy \text{ e } \frac{\partial P}{\partial y} = xy, \text{ como } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Portanto, $rot\vec{F} = 0$, através destas condições fica provado que \vec{F} é conservativo e a função potencial é $\varphi = \frac{x^2y^2}{4}$.

Exemplo 4.2. Considere a integral de linha $\int_C (kxe^y)dx + (x^2e^y + x - ky)dy$.

- a) Determine a constante k para que esta integral seja independente do caminho.
- b) Calcule o valor da integral de $A = (0,0)$ e $B(1,1)$ para o valor de k encontrado no item (a)

Solução:

- a) Como o campo vetorial \vec{F} é definido no \mathbb{R}^2 que é um campo simplesmente conexo. Pelo Teorema das Quatro Equivalências é necessário que $rot\vec{F} = \vec{0}$ para que a integral não dependa do caminho.

Então,

$$\begin{aligned} rot\vec{F} = \vec{0} &\iff \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ em } \mathbb{R}^2 \iff 2xe^y + 1 = ke^y + 1 \iff 2xe^y = ke^y \iff \\ &\iff 2x = kx, \text{ pois } e^y \neq 0 \forall y \in \mathbb{R} \iff k = 2. \end{aligned}$$

Portanto para $k = 2$ segue que $rot\vec{F} = \vec{0}$ e assim, pelo Teorema das Quatro Equivalências, tem-se que a integral independe do caminho.

- b) Temos que:

$$k = 2 \implies \vec{F}(x, y) = (2xe^y + y)\vec{i} + (x^2e^y + x - 2y)\vec{j},$$

pelo Teorema das Quatro Equivalências \vec{F} é conservativo, isto é, existe $\varphi(x, y)$ definido em \mathbb{R}^2 , tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 2xe^y + y, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= x^2e^y + x - 2y, \end{aligned}$$

integrando ambos, tem-se

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= x^2e^y + xy + f(y), \\ \varphi(x, y) &= x^2e^y + xy - y^2 + g(x). \end{aligned}$$

Devemos tomar $f(y) = -y^2$ e $g(x) = 0$. Assim, $\varphi(x, y) = x^2e^y + xy - y^2$ é uma função potencial de \vec{F} . Logo,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(1,1) - \varphi(0,0) = e + 1 - 1 - 0 + 0 - 0 = e.$$

Observação 4.3. O *Teorema das Quatro Equivalências* assegura que se uma das quatro afirmações (I), (II), (III) ou (IV) seja válida, então as outras três restantes também serão. Porém, se uma das quatro **não** for válida todas as outras também não serão válidas.

Exemplo 4.3. Dado um campo vetorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ onde $\vec{F}(x, y) = -2y\vec{i} + 2x\vec{j}$. Mostre que \vec{F} não é conservativo.

Solução: De fato, pode-se notar que D é simplesmente conexo.

Todavia, tem-se que $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2$ e $-2 = \frac{\partial P}{\partial y}$, logo $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$. Portanto, como uma das equivalências não é válida, então, \vec{F} não é conservativo.

Observação 4.4. Porém o caso em que o domínio não seja simplesmente conexo, não significa dizer que \vec{F} não seja conservativo.

Exemplo 4.4. Seja $\vec{F}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2}\vec{j}$ em $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Verifique se \vec{F} é conservativo.

Solução: Pode-se notar que D , não é simplesmente conexo, pois a origem não faz parte do conjunto, logo possui buraco. Porém, existe uma função potencial $\varphi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$. Portanto, \vec{F} é conservativo.

Considerações Finais

O presente trabalho atinge objetivo central ao mostrar que a recíproca de todo campo vetorial conservativo possuir rotacional nulo, ou seja, dadas condições necessárias sobre o domínio para que o campo vetorial seja definido em conjunto simplesmente conexo, se o rotacional for nulo, então o campo vetorial é conservativo. Finalmente, o estudo no decorrer das definições, teoremas, observações e exemplos possa levar o leitor à uma leitura simples e adquira um entendimento, de forma intuitiva e clara, que Teorema das Quatro Equivalências, enunciado a seguir, assegura que se uma das quatro equivalências sejam válidas, então as outras três restantes também serão. Portanto, o campo vetorial \vec{F} será conservativo.

Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo vetorial de classe C^1 em D . Se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto simplesmente conexo, então as seguintes afirmações são equivalentes:

I. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

II. $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ qualquer que seja a curva C fechada de D .

III. $\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ não depende do caminho da curva C por partes de D .

IV. \vec{F} é um campo conservativo de alguma função potencial $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Anexo

Teorema 4.3 (Teorema de Rolle). *Considere uma função f satisfazendo as seguintes condições:*

- i. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$;
- ii. f é derivável no intervalo aberto (a, b) ;
- iii. $f(a) = f(b)$.

Então, existe um número c em (a, b) , tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração: Como f é contínua em $[a, b]$, f assume um valor máximo e um valor mínimo em $[a, b]$. Sejam m e n os pontos de $[a, b]$ onde estes valores são atingidos, isto é, sejam m e n tais que $f(n) \leq f(x) \leq f(m)$, para todo x em $[a, b]$. Existem dois casos a serem considerados: (i) A função f é constante em $[a, b]$. Neste caso, $f(x) = f(a) = f(b)$ para todo $x \in [a, b]$. Assim, $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$. (ii) $f(x) \neq f(a) = f(b)$ para algum $x \in (a, b)$. Neste caso, ou m ou n é diferente das extremidades a e b do intervalo considerado. Sem perda de generalidade, suponha que seja m este ponto. Como m é um ponto de máximo e está no intervalo aberto (a, b) onde f é derivável, tem-se $f'(m) = 0$. Logo, o ponto $c = m$ satisfaz a conclusão do teorema. ■

Teorema 4.4 (Teorema do Valor Médio de Lagrange). *Seja $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração: De fato, considera-se uma reta s que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ ou seja $y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ onde s é o gráfico da função $h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$. Seja g a função onde $g(x) = f(x) - h(x)$, logo

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right].$$

Seja $x = a$ segue que

$$g(a) = f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) + f(a) \right] = f(a) - f(a) = 0.$$

De forma análoga tem-se para $x = b$

$$g(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a) \right] = f(b) - [f(b) - f(a) + f(a)] = 0.$$

Como g é a diferença entre duas funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) , então é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Logo pode-se usar o Teorema 4.3 (**Teorema de Rolle**) para g assumindo $c \in [a, b]$, ou seja $c < a < b$, tal que

$$g'(c) = 0 \text{ e como } g'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right],$$

segue

$$g'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] = 0.$$

Portanto $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

Teorema 4.5 (Teorema do Valor Médio para Integrais). *Se f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) = f(b)$, então existe c pertencente ao intervalo aberto (a, b) tal que*

$$\int_a^c f(t) dt = (c - a)f(c).$$

Demonstração: Sendo f contínua no intervalo $[a, b]$ e seja $c \in [a, b]$ o valor mínimo em $[a, b]$ e seja $d \in [a, b]$ o valor máximo em $[a, b]$ então pode-se afirmar que $f(c) \leq f(t) \leq f(d)$, para todo $t \in [a, b]$ segue por propriedade de integral definida que

$$f(c)(b - a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq f(d)(b - a),$$

dividindo a equação acima por $(b - a)$ segue que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t) dt}{b - a} \leq f(d).$$

Portanto pelo Teorema do Valor Médio pode-se garantir que existe uma função

$$f(x_0) = \frac{\int_a^b f(t) dt}{b - a} \Rightarrow f(x_0)(b - a) = \int_a^b f(t) dt, \forall x_0 \in [a, b].$$

■

Definição 4.1 (Bola). *Seja X um espaço métrico. Dados $a \in X$ e $\delta > 0$ considera-se o conjunto $B(a, \delta) = \{x \in X; d(x, a) < \delta\}$ onde $d(x, a)$ é a distância do ponto x até a .*

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto fixado. Então uma e somente uma das três possibilidades deve ocorrer.

- i. Existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset A$, o ponto x_0 é dito ponto de interior de A com notação $int(A)$;
- ii. Existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset A^C = \mathbb{R}^n - A$, o ponto x_0 é dito ponto de exterior de A com notação $ext(A)$;
- iii. Para qualquer $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta)$ contém pontos de A e pontos de A^C , o ponto x_0 é dito ponto de fronteira com notação ∂A .

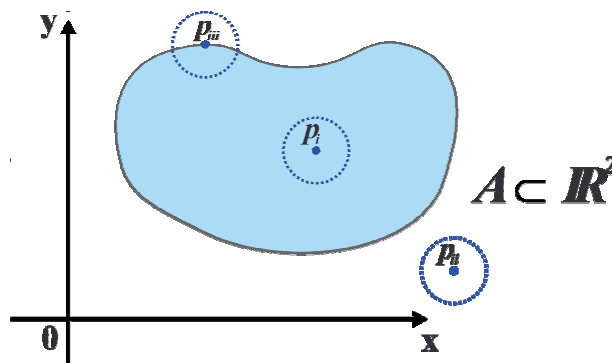


Figura 4.2: P_i ponto de interior; P_{ii} ponto de exterior e P_{iii} ponto de fronteira.

Definição 4.2 (Conjunto Aberto). *$A \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto se $int(A) = A$, isto é, todos os pontos de A são interiores. Quando $\partial A \subset A$, dizemos que A é fechado.*

Curva Simples: Uma curva que não possui interseção com ela própria é chamada curva simples, um exemplo trivial pode-se dizer que seja uma circunferência. Caso uma curva possua interseção com ela própria denota-se uma curva não simples.

Definição 4.3 (Curva de Jordan:). *Supondo que uma curva C seja descrita por uma função vetorial contínua \vec{r} definida em um intervalo $[a, b]$. Se $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, a curva C é fechada. Uma curva fechada tal que $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$ para todos valores $t_1 \neq t_2$ pertencentes ao intervalo semi aberto $(a, b]$ se chama curva fechada simples. Curvas fechadas simples são chamadas curvas de Jordan em homenagem ao matemático francês Camille Jordan (1838-1922).*

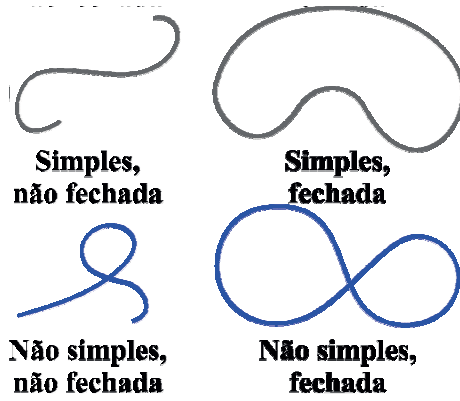


Figura 4.3: Exemplos curvas simples e Não Simples.

Teorema 4.6 (Teorema de Schwars ou Teorema de Clairout). *Dado $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, ou seja, suas derivadas parciais são funções contínuas e seja D um aberto, então*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Demonstração: Seja D um aberto e $(x_0, y_0) \in D$.

Dado $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ suficientemente pequenos tal que $(x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k) \subset D$

Seja a expressão $\Delta(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$. Fixando um k , defini-se $\beta(t) = f(x_0 + t, y_0 + k) - f(x_0 + t, y_0)$.

Tendo $\Delta(h, k) = \beta(h) - \beta(0) = \beta'(c)(h - 0) = \beta'(c)h, c \in [0, h]$, pelo Teorema 4.4 (**Teorema do Valor Médio de Lagrange**) demonstrado acima. Assim

$$k\beta'(c) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c, y_0) \right] h,$$

$$\alpha(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + x, y_0 + t) \text{ onde } \beta'(c) = \alpha(h) - \alpha(0).$$

Existe d tal que $\beta'(c) = \alpha(k) - \alpha(0) = \alpha'(d)(k - 0) = \alpha'(d)k, d \in [0, k]$, donde segue

$$k\beta'(c) = \alpha'(d)kh = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + c, y_0 + d) \right] kh, \text{ logo}$$

$$\Delta(h, k) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + c, y_0 + d) \right] kh. \quad (4.3)$$

Analogamente, define-se $\varphi(t) = f(x_0 + h, y_0 + t) - f(x_0, y_0 + t)$ encontra-se

$$\Delta(h, k) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + c_1, y_0 + d_1) \right] kh. \quad (4.4)$$

Portanto limite de 4.3 tem-se $\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{\Delta(h,k)}{kh} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ e limite de 4.4 tem-se

$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{\Delta(h,k)}{kh} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$, pois $c < h, d < k$ e também $c_1 < h, d_1 < k$. Portanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

■

Definição 4.4 (Conjuntos Conexos). Um conjunto de $D \subset \mathbb{R}^n$ é dito conexo se os únicos subconjuntos de D os quais são abertas e fechados simultaneamente em D são \emptyset e E .

Teorema 4.7. Um subconjunto aberto $E \neq \emptyset$ de \mathbb{R}^n é conexo se, e somente se, quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por uma poligonal contida em D .

Demonstração:

(\Rightarrow) Suponha D conexo e fixa-se $a \in D$. Deve-se mostrar que a pode ser ligado a qualquer ponto de uma poligonal contida em D . Para $a \in D$ fixado define-se

$$A = \{b \in D; \text{ existe uma poligonal } P \subset D \text{ de } a \text{ a } b\}.$$

Mostrando que A é aberto e fechado em D e que $A = D$.

Para mostrar que A é aberto, seja $b \in A$ e $P = a, z_2, \dots, z_n, b$ uma poligonal de a a b com $P \subset E$ como D é aberto existe $\delta > 0$ tal que $B(b, \delta) \subset D$, mas se $Z \in B(b, \delta)$, então $[b, z] \subset B(b, \delta)$. Portanto a poligonal $Q = P \cup [b, z]$ está contida em D e vai de a a z . Isto mostra que $B(b, \delta) \subset A$ e portanto A é aberto.

Para mostrar que A é fechado, supõe-se que exista $z \in D - A$ e seja $\delta > 0$ tal que $B(z, \delta) \subset D$. Se existe um ponto $b \in A \cap B(z, \delta)$, então, pode-se construir uma poligonal de a a z . Assim, tem-se que ter $B(z, \delta) \cap A = \emptyset$ ou $B(z, \delta) \subset D - A$. Isto é, $D - A$ é aberto, de modo que A é fechado.

(\Leftarrow) Suponha que D satisfaz a condição da poligonal e vamos supor que D não é conexo e obtem-se uma contradição. Por definição, $D = A \cup B$, onde A e B são abertos com $A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset$. Seja $a \in A$ e $b \in B$. Por hipótese, existe uma poligonal P ligando a e b tal que $P \subset D$. Assumindo que $P = [a, b]$ e define-se:

$$S = \{s \in [0, 1]; sb + (1 - s)a \in A\} \quad \text{e} \quad T = \{t \in [0, 1]; tb + (1 - t)a \in B\}.$$

Então, $S \cap T = \emptyset, S \cup T = [0, 1], 0 \in S$ e $1 \in T$. Além disso, S e T são abertos, contradizendo a conexidade de $[0, 1]$. Portanto D é conexo.



Definição 4.5 (Conjunto Simplesmente Conexo). *Seja O um conjunto plano poligonalmente conexo. O conjunto O é simplesmente conexo se, para toda curva de Jordan C situada em O , a região interior a C é também um subconjunto de O .*

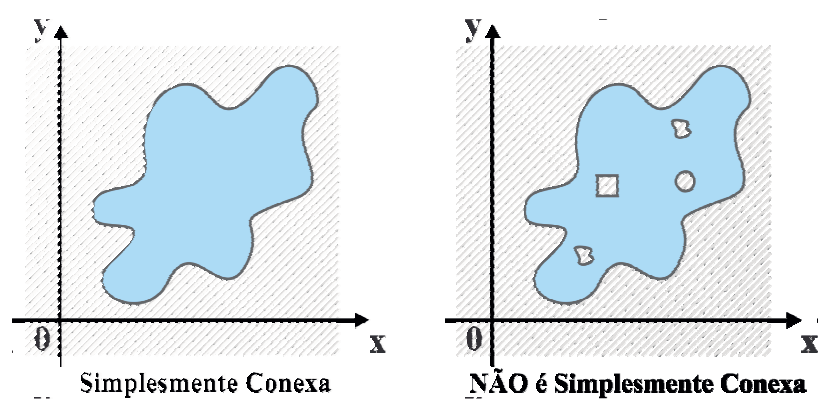


Figura 4.4: Exemplos de Conjunto Simplesmente Conexo e Não Simplesmente Conexo.

Lista de Figuras

1.1	Vetor posição \vec{r} de uma partícula em movimento no espaço em função do tempo.	14
1.2	Exemplo curva: hélice superior $\vec{r} = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}$ e caso onde $z = h(t) = 0$.	15
1.3	Circunferência $x^2 + y^2 = a^2$.	16
1.4	Campo Vetorial no \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .	19
1.5	Subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ aplicados na função gerando sub-arcos $\alpha([t_{i-1}, t_i])$.	19
1.6	Sentido adotado pela curva.	20
1.7	Triângulo delimitado pelos pontos $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$.	22
1.8	Posição no vetor normal em relação ao sentido percorrido.	28
2.1	\vec{F} constante ao longo do segmento $[A_{i-1}, A_i]$.	31
2.2	Tendo dois caminhos entre a e b um deles poderá ser invertido.	43
2.3	Pode-se inverter parte da curva para formar dois caminhos.	44
3.1	A curva de fronteira C e formada por $C_1: y = f_1(x)$ e $C_2: y = f_2(x)$.	46
3.2	A curva de fronteira C e formada por $C_1: y = f_1(x)$ e $C_2: y = f_2(x)$.	47
3.3	$\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$.	48
3.4	Uma região O que é formada por regiões O_1 e O_2 .	49
3.5	O Teorema de Green pode ser aplicado à região anular O .	49
4.1	Curva fechada C onde C_1 e C_2 são dois caminhos.	52
4.2	P_i ponto de interior; P_{ii} ponto de exterior e P_{iii} ponto de fronteira.	59
4.3	Exemplos curvas simples e Não Simples.	60

4.4 Exemplos de Conjunto Simplesmente Conexo e Não Simplesmente Conexo. . . . 62

Referências Bibliográficas

- [1] APOSTOL, Tom M.. *Calculus - Calculus en Varias Variables con Aplicaciones a las Probabilidades y al Análisis Vectorial*. VolumeII, Barcelona - Buenos Aires - México. Editorial Reverté, S. A., 1967.
- [2] FEMMING, Diva Marilia, GONÇALVES, Mirian Buss. *Cálculo A*, 6ª Edição. Florianópolis: Perason, 2006.
- [3] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 2013.
- [4] LOUREDO, Aldo Trajano. OLIVEIRA, Alexandro Marinho. LIMA, Osmundo Alves. *Cálculo Avançado*, Campina Grande: Eduepb, 2010.
- [5] MICHAELIS. *Moderno Dicionário da Língua Portuguesa*. Disponível em: <<http://michaelis.uol.com.br/busca?id=oOPY>>. Acesso em: 10 nov. 2017.
- [6] THOMAS, George B.. *Cálculo*. Volume 2, 11ª Edição. São Paulo, Pearson Education do Brasil Ltda., 2008.
- [7] SHOKOWSKI, Earl W. *Cálculo com Geometria Analítica*, Rio de Janeiro: Makron Books do Brasil Editora Ltda. 1995.
- [8] SOTOMAYOR, Jorge. *Equações Diferenciais Ordinárias*, São Paulo, Textos Universitários do IME USP 2011.