



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CCTS – CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLOGIA E SAÚDE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
CAMPUS VIII ARARUNA

CAMILA MARIA LIRA DE SOUSA

DETERMINAÇÃO DE DESLOCAMENTOS EM TRELIÇAS PLANAS VIA
MÉTODO DA ENERGIA

ARARUNA
Outubro de 2017

CAMILA MARIA LIRA DE SOUSA

**DETERMINAÇÃO DE DESLOCAMENTOS EM TRELIÇAS PLANAS VIA
MÉTODO DA ENERGIA**

Trabalho de conclusão de curso
apresentado como requisito
parcial para obtenção do
certificado de graduação do curso
de Engenharia Civil, da
Universidade Estadual da Paraíba.

Orientador: Mário Cesar Soares Xavier

Co-orientador: Túlio Raunyr Cândido Felipe

ARARUNA

Outubro de 2017

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do Trabalho de Conclusão de Curso.

S725d Sousa, Camila Maria Lira de.
Determinação de deslocamentos em treliças planas via método da energia [manuscrito] / Camila Maria Lira de Sousa. - 2017
46 p. : il. colorido.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde, 2017.
"Orientação : Prof. Me. Mário Cesar Soares Xavier, Coordenação do Curso de Engenharia Civil - CCTS."
1. Método da Energia. 2. Método dos Elementos Finitos. 3. Treliça Plana.

21. ed. CDD 624.182

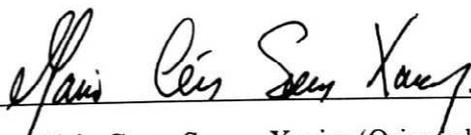
CAMILA MARIA LIRA DE SOUSA

**DETERMINAÇÃO DE DESLOCAMENTOS EM TRELIÇAS PLANAS VIA
MÉTODO DA ENERGIA**

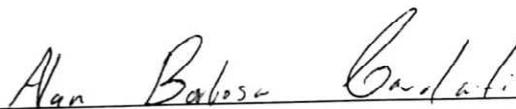
Trabalho de conclusão de curso
apresentado como requisito
parcial para obtenção do
certificado de graduação do curso
de Engenharia Civil, da
Universidade Estadual da Paraíba.

Data da Avaliação: 5 de Outubro de 2017

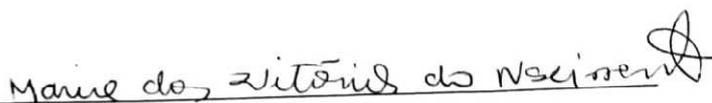
BANCA EXAMINADORA



Mário Cesar Soares Xavier (Orientador)



Alan Barbosa Cavalcanti (Examinador)



Maria das Vitorias do Nascimento (Examinadora)

Dedico este trabalho a minha mãe (Maria de Lourdes Lira de Sousa) e minha Avó (Terezinha Laureano), pela força que me deram nesses últimos anos, sem elas não conseguiria chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me sustentar em todas as dificuldades e tribulações que passei no decorrer do curso.

Agradeço a minha mãe e minha avó, por me encorajar e nunca me deixar desistir dos meus sonhos, por sempre acreditar na minha capacidade.

A meu noivo José Wilker dos Santos Almeida, por toda a dedicação e paciência.

Agradeço aos meus professores por todo o conhecimento adquirido, os quais irei levar comigo, em especial ao meu prof. e orientador Mário Cesar Sores Xavier.

A esse Campus, que acolhe os alunos como se fossemos uma família.

A meus amigos que mesmo poucos, porém verdadeiros. Em especial, meu amigo e co-orientador Túlio Raunyr Cândido Felipe, que sempre me ajudou em tudo que precisei e sempre será minha inspiração.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma análise de confiabilidade estrutural em um treliça metálica plana, onde obedece as verificações de Estado Limite Último (ELU) e Estado Limite de Serviço (ELS). A equação de estado limite é descrita a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), consistindo no trabalho das forças externas com o trabalho de deformação plástica. Assim, para comprovar a importância da verificação dos deslocamentos em estruturas, este trabalho tem como objetivo, utilizar o Método da Energia e o Método dos Elementos Finitos (MEF) para determinar os deslocamentos em treliças planas nos casos em que a estrutura esteja submetida aos estados físicos de carregamento, variação de temperatura e recalque de apoio. Este método foi implementado na linguagem computacional FORTRAN através de um código denominando TRUSS_2D. Sendo possível disponibilizar este código á área de Estruturas, do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Estadual da Paraíba, bem como para a comunidade acadêmica.

Palavras-chave: Treliça plana. Método da Energia. MEF. TRUSS_2D.

ABSTRACT

This work presents a structural reliability analysis on a flat metal lattice where it obeys the State Limit of Last (ELU) and State of Service (ELS) checks. The limit state equation is described from the Principle of Virtual Jobs (PTV), consisting of the work of the external forces with the work of plastic deformation. Thus, in order to prove the importance of verifying the displacements in structures, this work aims to use the Energy Method and the Finite Element Method (MEF) to determine the displacements in flat trusses in cases where the structure is subjected to the physical states of loading, variation of temperature and suppression of support. This method was implemented in FORTRAN computational language through a code denominating TRUSS_2D. It is possible to make this code available in the area of Structures, of the Department of Civil Engineering of the State University of Paraíba, as well as for the academic community.

Keywords: Truss 2D. Energy Method. MEF. TRUSS_2D.

LISTA DE FIGURA

Figura 1: Viga submetida a flexão	14
Figura 2: Aproximação linear por partes	17
Figura 3: Funções bases atreladas aos nós	17
Figura 4: Esquema de Metodologia	20
Figura 5: Contribuição do elemento 'e' para a aproximação	21
Figura 6: Esquema do elemento de treliça submetido a esforços e variação de temperatura	24
Figura 7 – Deformações devido a uma variação de temperatura em um elemento de comprimento dx	24
Figura 8: Treliça plana com carregamentos verticais e força horizontal	26
Figura 9: Arquivo de entrada do programa TRUSS_2D para causa física carregamento	27
Figura 10: Arquivo de saída do programa TRUSS_2D para causa física carregamento.....	29
Figura 11: Visualização dos deslocamentos na direção x no <i>software</i> AcadView para causa física carregamento	30
Figura 12: Visualização dos deslocamentos na direção y no <i>software</i> AcadView para causa física carregamento	30
Figura 13: Arquivo de entrada do <i>software</i> TRUSS_2D para a análise física de carregamento mais recalque de apoio de -3,00 cm no nó 3 (direção y).....	31
Figura 14: Arquivo de saída do <i>software</i> TRUSS_2D para a análise física de carregamento mais recalque de apoio de -3,00 cm no nó 3 (direção y)	32
Figura 15: Visualização dos deslocamentos na direção x no <i>software</i> AcadView para a análise física de carregamento mais recalque de apoio de -3,00 cm no nó 3 (direção y)	32

Figura 16: Visualização dos deslocamentos na direção y no <i>software</i> AcadView para a análise física carregamento mais recalque de apoio de -3,00 cm no nó 3 (direção y)	34
Figura 17: Arquivo de entrada do <i>software</i> TRUSS_2D para a análise física de variação de temperatura	36
Figura 18: Arquivo de saída do <i>software</i> TRUSS_2D para a análise física de variação de temperatura	36
Figura 19: Visualização dos deslocamentos na direção x no <i>software</i> AcadView para a análise física de variação de temperatura	37
Figura 20: Visualização dos deslocamentos na direção y no <i>software</i> AcadView para a análise física de variação de temperatura	37
Figura 21: Visualização dos Esforços Normais no <i>software</i> AcadView para a análise física de variação de temperatura	38
Figura 22: Arquivo de entrada do <i>software</i> TRUSS_2D para a análise física de todos os estados analisados	39
Figura 23: Arquivo de saída do <i>software</i> TRUSS_2D para a análise física de todos os estados analisados	40
Figura 24: Visualização dos deslocamentos na direção x no <i>software</i> AcadView para a análise física de todos os estados analisados	41
Figura 25: Visualização dos deslocamentos na direção y no <i>software</i> AcadView para a análise física de todos os estados analisados	42
Figura 26: Visualização dos esforços no <i>software</i> AcadView para a análise física de todos os estados analisados	43

LISTA DE TABELA

Tabela – 1: Coordenadas dos nós da treliça em estudo	27
Tabela – 2: Propriedades físicas das barras da treliça em estudo	28

SUMARIO

1 INTRODUÇÃO.....	12
1.1 Objetivos	14
2 REVISÃO DA LITERATURA	14
2.1 Método da Energia.....	14
2.1.1 Forma Fraca Pelo Método da Energia	15
2.2 Método da Energia: Soluções Aproximadas.....	18
2.2.1 Método de Rayleigh-Ritz.....	18
2.3 Método dos Elementos Finitos	19
2.3.1 Aproximação com continuidade de ordem zero	20
3 METODOLOGIA	21
4 RESULTADOS E DISCURSÕES.....	22
4.2 Formulação do elemento de barra simples	22
4.2 Análise de treliças planas através da formulação do elemento de barra simples.....	23
4.3 Análise do Elemento de Treliça Com efeito da variação de Temperatura	26
4.4 Aplicação do TRUSS_2D	28
5 CONSIDERAÇÕES	44
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	45

1 INTRODUÇÃO

Na Mecânica dos Sólidos os problemas de interesse para a engenharia estrutural, o qual consiste na avaliação do comportamento das estruturas e sua interação com o meio externo, são modelados matematicamente com o auxílio de Leis da Física. Em que, essas leis devem impor restrições sobre o conjunto de variáveis de interesse, sendo assim o modelo matemático se exprime mediante equações diferenciais ou integrais PROENÇA, S . P. B (2010).

Existem critérios que devem ser obedecidos para o desenvolvimento do modelo matemático, sendo um deles a continuidade do meio. Esta hipótese, exprime que com o meio inicialmente contínuo, quando se aplica um carregamento sobre ele as funções que descreve o campo incógnito devem ser contínuas possuindo uma regularidade quanto a sua ordem de derivadas PROENÇA, S . P. B (2010).

Portanto, ao se analisar uma estrutura, deve ser determinado para todos os seus pontos, os campos de deslocamentos, tensões e deformações. Estes devem ser determinados para cada condição de carregamento externo bem como suas vinculações. Dessa forma, tem-se que existem variáveis necessárias a se determinar para o modelo matemático, como: restrições de equilíbrio, compatibilidade e as leis constitutivas.

Assim, alguns conceitos podem ser apresentados. A condição de equilíbrio, presume que se existir um conjunto de forças equilibrado em uma parte limitada do sólido, se isto estender-se ao todo, o corpo encontra-se equilibrado. Tal condição, impõe uma restrição a sua distribuição de tensões ponto a ponto no sólido. A compatibilidade, exige que as variações de deslocamento devem ser regulares ponto a ponto, preservando-se a continuidade do corpo deformado. As Leis Constitutivas, resulta da resposta do material ao regime de deformações, o qual deve corresponder-se ao regime de tensões internas de modo que sua intensidade depende diretamente das propriedades mecânicas do material PROENÇA, S . P. B (2010). De maneira geral, para o modelo matemático normalmente se utilizam hipóteses simplificada, de modo que atenda ao comportamento estrutural.

Um exemplo simples, seria considerar que os deslocamentos ponto a ponto, são tão pequenos quando se comparado a dimensão da estrutura. Entretanto, não se leva a uma modelagem, conduzindo apenas a uma simplificação do modelo matemático PROENÇA, S . P. B (2010).

Para o modelo matemático pode-se citar três formas para a sua aplicação, a primeira dita forte ou local, a segunda variacional e a terceira a forma fraca. Assim, conforme, tem-se:

- a) Forma Forte: exige maior regularidade da função solução, além da satisfação das condições de contorno tanto essenciais quanto naturais, de modo que a função atenda a equação diferencial em todos os pontos do domínio.
- b) Forma Variacional: resulta da integração ponderada da equação diferencial, exige ainda uma regularidade da função igualmente a forma forte e a verificação das condições de contorno. Entretanto, pode-se adotar soluções aproximativas que satisfazem a equação diferencial num sentido de média dentro do domínio do problema e não necessariamente ponto a ponto.
- c) Forma Fraca: resulta da integração por partes da forma variacional, engloba as condições de contorno quanto a força e permite que se obtenha uma função solução aproximativa, não sendo necessário que se atenda ponto a ponto, mas sim que seja satisfeita as condições de contorno essenciais impostas pelo problema. Nessa alternativa, aparecerá formas de derivadas menores quando se comparado as presentes na equação diferencial.

Existem algumas maneiras de se gerar a forma fraca, o qual dispensa o conhecimento prévio da equação diferencial do problema. Sendo uma das delas, o emprego dos princípios variacionais. Um outro seria, o conceito de energia que pode ser estabelecido de modo natural ou restrito. Sendo o estabelecido de modo natural, não devendo ser aplicado a todo problema diferente do restrito, desde que se insira novas incógnitas a depender do seu tipo, apresentado pelo problema, como os multiplicadores de Lagrange e fatores de penalização. Outra forma poderia ser, através dos princípios variacionais, para se obter a forma variacional fraca seria o Princípio dos Trabalhos Virtuais. Independente de como se tenha obtido a forma variacional fraca, ela pode ser escrita em dimensão finita como uma combinação linear de uma base de funções com boa capacidade de representação. A chamada técnica dos Elementos Finitos pode então ser empregada para obtenção das funções aproximativas PROENÇA, S . P. B (2010)..

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é bastante comum na engenharia para diversos tipos de problemas, permitindo o estudo dos deslocamentos e tensões em peças mecânicas, barragens, torres, edifícios entre outros. Tal método não se volta apenas a engenharia de estruturas mais também é bastante utilizado para determinação de

percolação, adensamento, pressão neutra, fluxo de calor, entre outras aplicações que a engenharia abrange. Dentre todos os exemplos mencionados tem-se em comum a sua solução, pois são estabelecidas equações diferenciais parciais relacionando variáveis de campo fundamentais dentro de um determinado domínio, tendo que satisfazer condições de restrições para as variáveis fundamentais e suas derivadas na fronteira do domínio MARTHA, M. G. L. S (1994).

Pode-se perceber que os avanços alcançados relacionados a computação vêm sendo um dos grandes responsáveis pelo crescente desenvolvimento das técnicas numéricas voltadas as engenharias. Esses avanços, nos proporcionam análises cada vez mais confiáveis e próximas a realidade, possibilitando assim uma análise mais crítica e detalhada dos problemas de engenharia estrutural SORIANO, H. L. (2003).

1.1 Objetivos

- **Objetivo Geral**

Determinar os deslocamentos em treliças planas, para os seguintes estados físicos: Carregamento, Recalque de apoio e Variação de temperatura.

- **Objetivos Específicos**

- Utilização dos Métodos da Energia e Método dos Elementos Finitos;
- Desenvolvimento de uma rotina computacional em Fortran, a qual determine os deslocamentos em Treliças Planas;

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Método da Energia

A energia potencial total de um sistema elástico é composta de duas parcelas: energia potencial dos esforços internos ou energia de deformação, e a energia potencial das forças externas aplicadas. Onde a energia de deformação é a energia que um dado corpo absorve sobre a influência de um carregamento nele atuante, enquanto que o trabalho das forças externas aplicadas é obtido pelo produto entre a carga e o deslocamento de seu ponto de aplicação SORIANO, H. L. (2003).

De forma que, para sua aplicação faz-se necessário o entendimento das condições de contorno, o qual considera as leis constitutivas, equilíbrio e compatibilidade. Todavia, o Problema de Valor de Contorno (PVC), pode ser expresso pela forma forte e fraca.

Em geral a mais comumente utilizada é forma fraca pois permite um relaxamento da função solução, não sendo necessário que se atenda a todos os pontos, mas que satisfaça as condições de contorno essenciais.

2.1.1 Forma Fraca pelo Método da Energia

Com aplicação dos princípios variacionais a forma fraca pode ser obtida pelo método da energia, onde, considerando um sistema conservativo composto por uma estrutura ou sólido deformável e forças aplicadas, pode-se encontrar a Energia Potencial Total do sistema. Esta é dividida em energia potencial das forças externas aplicadas e outra parcela da energia potencial elástica ou de deformação. Os chamados princípios variacionais determinam que na situação de equilíbrio, a Energia Potencial Total apresenta valor estacionário e que, dentro dos limites da resposta estrutural linear, um mínimo local dessa quantidade é condição necessária e suficiente para a estabilidade do equilíbrio PROENÇA, S . P. B (2010).

A energia de deformação é uma forma de energia interna do sólido de natureza mecânica e movimentada no processo de deformação. Sendo representada por uma função continua do estado atual de deformação, como:

$$\phi = \phi(\varepsilon) \quad (1)$$

Onde, considera-se as componentes de deslocamento linear e angular. Para o caso da isotropia e material de comportamento elástico linear considera-se a forma generalizada da Lei de Hooke:

$$T = D_0 \varepsilon \quad (2)$$

em que, D_0 é o tensor constitutivo elástico linear. Para o caso elástico linear, a Energia Específica de Deformação, torna-se:

$$u_e = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} E\varepsilon d\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} \quad (3)$$

Assim a Energia Potencial de Deformação apresenta-se como uma forma quadrática no tensor das deformações. Por fim, define-se a energia potencial elástica

como uma grandeza específica, ou seja, por unidade de volume. Sendo determinada pela seguinte integral:

$$U = \int_V \phi(\varepsilon(x)) dV \quad (4)$$

Conforme [2], “U é um funcional do campo tensorial $\varepsilon(x)$, ou uma aplicação que associa um escalar a um tensor”.

De forma que a energia potencial das forças aplicadas é definida como a energia externa. Assim quando um sólido passa de sua posição inicial à uma posição deformada, tem-se que ocorreu uma variação da energia potencial de posição, caso se tenha uma força concentrada na estrutura, inclui-se na expressão a parcela referente ao trabalho realizado representada pela última parcela da equação (5), assim tem-se:

$$\delta W_E = \int_V \bar{\mathbf{b}}^T \delta \underline{\mathbf{u}} dV + \int_{S_o} \bar{\mathbf{p}}^T \delta \underline{\mathbf{u}} dS + \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{p}}_i \delta \underline{\mathbf{u}}_i \quad (5)$$

em que, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{p}}$ e $\bar{\mathbf{p}}_i$ são respectivamente, as forças por unidade de volume, as forças por unidade de superfície e as forças concentradas. Quando considerando forças conservativas (forças que independe da posição do ponto de aplicação), sendo $\underline{\mathbf{u}}^a = 0$ e $\underline{\mathbf{u}}^b = \underline{\mathbf{u}}$, a energia potencial externa é dada por:

$$\Omega = - \int_V \bar{\mathbf{b}}^T \delta \underline{\mathbf{u}} dV - \int_{S_o} \bar{\mathbf{p}}^T \delta \underline{\mathbf{u}} dS - \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{p}}_i \delta \underline{\mathbf{u}}_i \quad (6)$$

Conhecendo as parcelas de energia existentes, tem-se que a Energia Potencial Total é obtida a partir da soma dessas parcelas, ou seja:

$$\Pi(\underline{\mathbf{u}}) = U[\varepsilon(\underline{\mathbf{u}})] + \Omega(\underline{\mathbf{u}}) \quad (7)$$

- Teorema 1 (Primeiro Teorema Variacional): Em um sólido elástico sujeito a forças externas conservativas, em sua configuração “real”, ou equilibrada, Π apresenta a primeira variação nula com relação a qualquer variação congruente do campo de deslocamento.
- Teorema 2 (Segundo Teorema Variacional): Em um sólido elástico-linear sujeito a forças externas conservativas, no âmbito das pequenas deformações. Para a sua

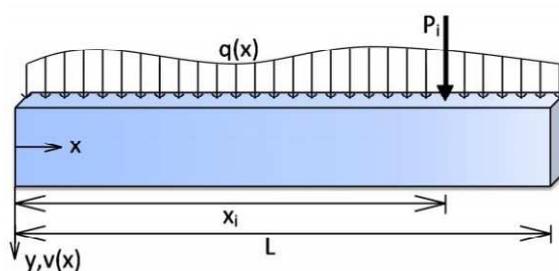
configuração real, o funcional Π apresenta segunda variação positiva com relação a qualquer variação congruente do campo de deslocamentos.

De modo geral existem dois casos, os que a solução realiza uma minimização irrestrita da Energia Potencial Total; e aqueles cuja a minimização é restrita. Quando dita irrestrita, tem-se que a única condição para a solução do problema é que ela obedeça às condições de contorno essenciais. Já para o caso de formulações mais gerais onde se deve atender a uma série de restrições, diz-se que o Princípio Variacional é dito restrito por vários fatores como: variações de geometria, material, vinculação ou carregamento imposto onde exigem uma divisão do domínio de integração em subdomínios nos quais a continuidade da solução seja garantida PROENÇA, S . P. B (2010).

Nos casos sem restrição a solução do problema está baseada no primeiro teorema variacional, nos levando a forma fraca do problema de valor de contorno. Enquanto o segundo teorema variacional se aplica para avaliar a estabilidade do regime de equilíbrio. Podendo ainda, para o caso com restrição, ser resolvido pelo princípio sem restrição, utilizando técnicas de soluções pelo uso dos multiplicadores de Lagrange, Técnicas de Penalização ou ainda de combinação de ambas PROENÇA, S . P. B (2010).

Seja, a viga submetida a flexão mostrada na Figura 1. Logo, considerando as seguintes hipóteses: regime elástico linear, com pequenos deslocamentos e giros de suas seções transversais. Recordando alguns conceitos da Teoria Clássica de Viga, a Energia Potencial Total do problema, torna-se:

Figura 1 – Viga submetida a flexão.



Fonte [5].

$$\Pi = \int_V \frac{E\varepsilon^2}{2} dV - \int_0^L qv dx - \sum_i P_i v_i \quad (8)$$

Utilizando, a hipótese de pequenos giros e deslocamentos pequenos, obtém-se para ε a seguinte relação:

$$\varepsilon_x = -yV'' \quad (9)$$

Substituído (9) em (8), e pela hipótese de Euler-Bernoulli, seção plana permanece plana e ortogonal a linha neutra, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^L \int_A \left(\frac{E(-yV'')^2}{2} dA \right) dx - \int_0^L qv dx - \sum_i P_i v_i \\ \Pi &= \int_0^L \frac{E(V'')^2}{2} \int_A y^2 dA - \int_0^L qv dx - \sum_i P_i v_i \\ \Pi &= \int_0^L \frac{EI}{2} (V'')^2 dx - \int_0^L qv dx - \sum_i P_i v_i \end{aligned} \quad (10)$$

Onde E, I, q e P representam, respectivamente, o módulo de elasticidade, o momento de inércia, a carga distribuída e a carga concentrada.

2.2 – Método da Energia: Soluções Aproximadas

2.2.1 – Método de Rayleigh-Ritz

Sendo a Energia Potencial Total representada por:

$$\Pi[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx \quad (11)$$

Sendo $y(x)$ a função procurada, adotando um função aproximativa $\tilde{y}(x)$ expressa por:

$$\tilde{y}(x) = \alpha_i \phi_i(x) + y_0(x) \quad \text{com } i = 1, \dots, n \quad (12)$$

Onde α_i são parâmetros incógnitos, $y_0(x)$ é uma função que satisfaz as restrições essenciais de contorno e as funções $\phi_i(x)$ são homogêneas naquelas restrições. Dessa forma substituindo $\tilde{y}(x)$ no funcional e realizando as integrais, a forma aproximativa passa a ser.

$$\tilde{\Pi} = \Pi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (13)$$

Para as condições de estacionariedade, tem-se:

$$\delta \tilde{\Pi} = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \alpha_1} \delta \alpha_1 + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \alpha_2} \delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \alpha_n} \delta \alpha_n = 0 \quad (14)$$

Em função da arbitrariedade dos $\delta \alpha_i$ tem-se que:

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \alpha_i} = 0 \quad \text{com } i=1, \dots, n \quad (15)$$

Sendo o funcional quadrático, a relação torna-se possível por um sistema de equações lineares. Em alguns casos a dificuldade para se encontrar funções aproximativas admissíveis que possam ser definidas em todo o domínio do problema, induzindo assim definições de subdomínios. Para esses casos deve-se observar as condições de continuidade das fronteiras entre subdomínios. Essa utilização empresta ao método de Rayleigh-Ritz características similares ao Método dos Elementos Finitos.

2.3 Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos (MEF), é uma ferramenta bastante utilizada na engenharia civil, a qual abrange diversas áreas e inúmeras aplicações, nesse estudo iremos voltar a estruturas lineares de treliças planas. Para análise de meios anisotrópicos, sua determinação de esforços e deslocamentos são facilmente determinados, uma vez que sua determinação é bastante complexa. O MEF possui algumas complicações em análises que possuem domínio finito, pois este necessita de uma discretização do método, gerando assim um grande volume de dados.

Para a análise estrutural de sistemas reticulados como em meios contínuos, o objetivo é obter soluções para a distribuição de tensões e deformações bem como o campo de deslocamento em todos os nós da estrutura. Os problemas a serem analisados podem variar desde tirantes, treliças e quadros planos, distribuição de tensão em meios bidimensionais, sólido com simetria axial, placas, quadros espaciais, cascas, até sólidos tridimensionais. Entretanto, para cada estrutura as análises se diferem quanto a natureza de sua geometria em sua aplicação computacional SAVASSI, W. (2000) e SORIANO, H. L. (2003).

A Técnica dos Elementos Finitos fornece uma metodologia para a geração de funções de aproximação de aplicação geral em formas bilineares e lineares, que aparecem tanto nas formas fracas obtidas pelo P.T.V., ou pelo Método da Energia, quanto nas formulações em resíduos ponderados PROENÇA, S . P. B (2010). Assim, primeiro se

estabelece que a aproximação seja construída num espaço de dimensão finita por meio de uma combinação linear de funções bases (ϕ), isto é:

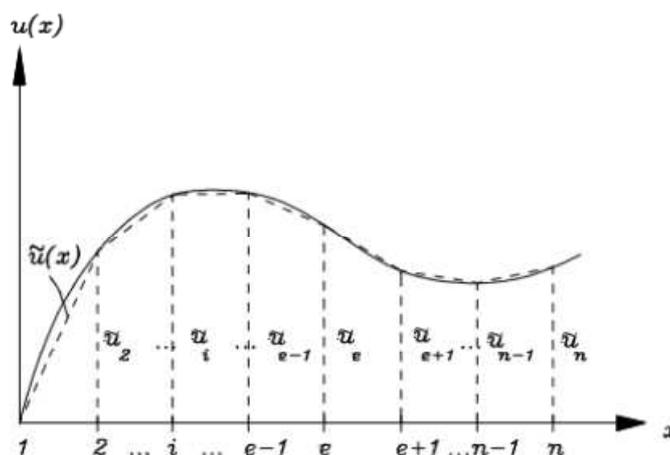
$$\tilde{u}(x) = \alpha_i \phi_i(x) \quad (16)$$

Dessa forma, faz-se necessário uma discretização do domínio fechado da solução, inserindo N pontos denominados nós, assim a cada par considera-se um elemento finito. As funções base são construídas a partir da ideia de que a aproximação seja a mais simples possível, observando-se a compatibilidade com a maior ordem de derivada presente nas integrais que definem as formas bilineares. Justamente a combinação da técnica com a forma bilinear, caracteriza o tipo de aproximação de interesse.

2.3.1 Aproximação com continuidade de ordem zero

Essa aproximação aplica-se a problemas de barras submetidas a força normal, a qual é abordada neste trabalho. Considerando a forma bilinear, observa-se que a solução aproximada compatível e continua, sobre todo domínio é a linear por partes, conforme Figura 2. Garantindo assim, continuidade de ordem zero, em todo domínio da solução. Verifica-se que o valor da aproximação em diferentes pontos é obtido através de interpolação entre os pontos nodais PROENÇA, S . P. B (2010).

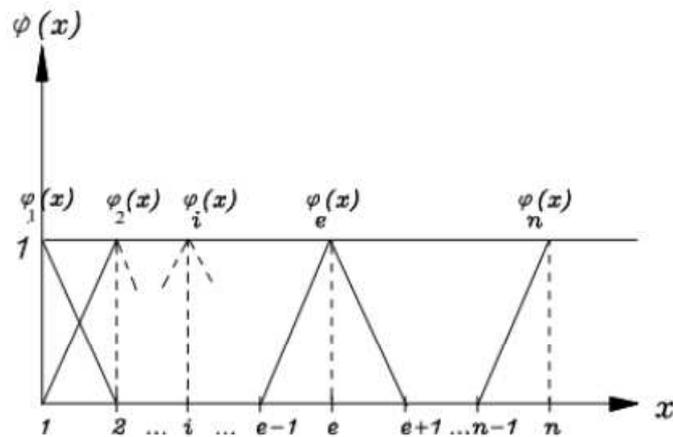
Figura 2: Aproximação linear por partes.



Fonte: [2].

Dessa forma, as funções bases são representadas por relações lineares em forma de “tenda” como ilustra Figura 3.

Figura 3: Funções bases atreladas aos nós.



Fonte: [2].

Dessa forma:

$$\phi_e(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{e-1}}{x_e - x_{e-1}} & \text{para } x_{e-1} \leq x \leq x_e \\ \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e} & \text{para } x_e \leq x \leq x_{e+1} \end{cases} \quad (17a, b)$$

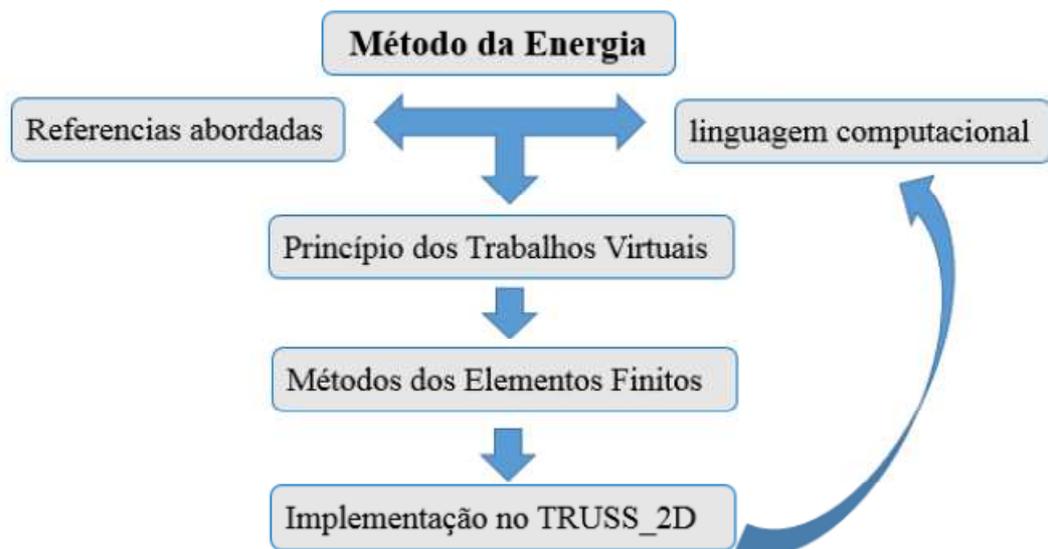
Assim, a forma aproximada da relação de equilíbrio expressa pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), leva a se obter as dimensões da matriz de rigidez (K) e do vetor de forças nodais equivalentes (F) determinados pelo número de pontos nodais. Por possuir formato em tenda, as componentes da matriz de índices iguais i e j, pertencentes ao mesmo elemento serão, nulas. De forma que, os elementos não nulos se acumularam em torno da diagonal principal, formando assim o formato de banda da matriz K. É importante ressaltar que, para a aplicação dos Métodos dos Elementos Finitos a imposição das condições de contorno essenciais, deve ser feita após a geração do sistema resolvente.

3 METODOLOGIA

O presente estudo teve como início estudos sobre o método da energia, os quais foram abordadas várias referências, conciliadas após um tempo com estudos referentes a linguagem computacional adotada, Fortran, para a implementação dos resultados. O estudo, foi de forma continuada, de modo que foi necessário a compreensão do Princípio dos Trabalhos Virtuais para determinação dos deslocamentos e esforços em treliças planas. Assim, pode-se realizar uma revisão suscita da literatura, a qual serviu de base para o desenvolvimento do projeto. Portanto, foi realizado os cálculos de acordo com os

Métodos dos Elementos Finitos (MEF), fez-se necessário assim a sua implementação no TRUSS_2D, para determinação dos deslocamentos segundo os estados físicos abordados neste trabalho. Os resultados obtidos foram realizados primeiramente a partir de uma formulação para barras simples, bem como sua implementação. A partir daí foi desenvolvido os procedimentos necessários para determinação dos deslocamentos em uma treliça plana com carregamentos verticais e carregamentos horizontais, sendo analisado primeiramente para o estado de carregamento, depois considerando um recalque de 3 cm e uma variação de temperatura de 100 °C. Obtido os resultados para os três casos, foi realizado uma comparação entre eles. Assim um esquema do estudo pode ser visto na figura 4.

Figura 4: Metodologia desenvolvida.



4 RESULTADOS E DISCURSÕES

4.1 Formulação do elemento de barra simples

Para o elemento de barra simples, figura 5, com carregamento distribuído axialmente (q), e carregamento concentrado nos nós (N_1 e N_2), temos que a energia potencial total é:

Figura 5: Contribuição do elemento 'e' para a aproximação.



Fonte: PAIVA, J. B. (2012).

$$\begin{aligned} \Pi &= U - \Omega \\ \Pi &= \int_0^{l_e} \frac{E \cdot A}{2} \cdot (u'_e)^2 dx - \int_0^{l_e} q \cdot u_e dx - N_1^e \cdot u_1^e - N_2^e \cdot u_2^e \end{aligned} \quad (18)$$

Em que, E e A, são respectivamente o módulo de elasticidade e a área da seção transversal do elemento. Do Primeiro Teorema Variacional, tem-se:

$$\delta \Pi = \int_0^{l_e} E \cdot A \cdot (u'_e) \cdot (\delta u'_e) dx - \int_0^{l_e} q \cdot \delta u_e dx - N_1^e \cdot \delta u_1^e - N_2^e \cdot \delta u_2^e \quad (19)$$

Na condição de equilíbrio, $\delta \Pi = 0$, o que resulta na expressão do P.T.V, escrevendo na forma:

$$\int_0^{l_e} E \cdot A \cdot (u'_e) \cdot (\delta u'_e) dx = \int_0^{l_e} q \cdot \delta u_e dx + N_1^e \cdot \delta u_1^e + N_2^e \cdot \delta u_2^e \quad (20)$$

sendo,

$$u_e(x) = u_1^e \cdot \phi_1^e(x) + u_2^e \cdot \phi_2^e(x) \quad (21)$$

em que, as ϕ_i^e são dada pela equação (17a, b). O campo de deslocamentos virtuais no domínio do elemento finito, δu_e , pode ser considerando, conforme a aproximação de Galerkin, por extensão da (21), o que resulta:

$$\delta u_e(x) = \delta u_1^e \cdot \phi_1^e(x) + \delta u_2^e \cdot \phi_2^e(x) \quad (22)$$

Substituindo (22) e (21) na (20), resulta as formas bilinear e linear, as quais permite deduzir as componentes da matriz de rigidez (K) do elemento. Assim, em decorrência da discretização adotada, a matriz K passa a ter dimensões (2x2), bem como o vetor de esforços nodais (F) resultam ambos com dimensão (2x1). As componentes da K e da F são determinadas das seguintes relações:

$$K_{ij}^e = \int_0^{l_e} E \cdot A \cdot \phi_e^{i'} \cdot \phi_e^{j'} dx \quad (23)$$

$$F_j^e = \int_0^{l_e} q \cdot \phi_e^j dx + N_1^e \cdot \phi_e^j(0) + N_2^e \cdot \phi_e^j(l_e) \quad (24)$$

Partindo da (17a, b), obtém-se:

$$\begin{aligned} K_{11}^e &= \int_0^{l_e} E \cdot A \cdot \phi_e'^1 \cdot \phi_e'^1 dx = \frac{E \cdot A}{l_e} \\ K_{12}^e &= \int_0^{l_e} E \cdot A \cdot \phi_e'^1 \cdot \phi_e'^2 dx = -\frac{E \cdot A}{l_e} \quad \therefore K_{12}^e = K_{21}^e \\ K_{22}^e &= \int_0^{l_e} E \cdot A \cdot \phi_e'^2 \cdot \phi_e'^2 dx = \frac{E \cdot A}{l_e} \end{aligned} \quad (25a,b,c)$$

Como o carregamento q é uniformemente distribuído ao longo do comprimento do elemento, as componentes do vetor F resulta:

$$\begin{aligned} F_1^e &= \int_0^{l_e} q \cdot \phi_e'^1 dx + N_1^e \cdot \phi_e^1(0) + N_2^e \cdot \phi_e^1(l_e) = \frac{q \cdot l_e}{2} + N_1^e \\ F_2^e &= \int_0^{l_e} q \cdot \phi_e'^2 dx + N_1^e \cdot \phi_e^2(0) + N_2^e \cdot \phi_e^2(l_e) = \frac{q \cdot l_e}{2} + N_2^e \end{aligned} \quad (26a,b)$$

Portanto, a matriz de rigidez, o vetor de forças nodais equivalentes e o vetor de deslocamento do elemento genérico, torna-se:

$$K_{ij}^e = \frac{E \cdot A}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad F_i^e = \begin{bmatrix} \frac{q \cdot l_e}{2} + N_1^e \\ \frac{q \cdot l_e}{2} + N_2^e \end{bmatrix}; \quad u_j^e = \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix} \quad (27)$$

Por fim, o sistema resolvente, resulta:

$$K_{ij}^e \cdot u_j^e = F_i^e \quad (28)$$

4.2 Análise de treliças planas através da formulação do elemento de barra simples

Admite-se, que as ligações entre as barras sejam rótulas perfeitas e as forças são aplicadas de forma concentrada nos nós e/ou distribuída de forma axialmente ao longo do seu comprimento. Em relação ao método dos elementos finitos, o conjunto de nós que compõe a barra de treliça já fornece a discretização a ser empregada, pois a mesma pode ser interpretada como um elemento finito com aproximação linear para o campo de deslocamento [8].

Ainda, ressalta-se que para a treliça plana a sua matriz de rigidez é a contribuição de cada uma de sua matriz de rigidez das barras, conforme a equação (23). Assim temos a representação para o sistema global da seguinte forma:

$$K_{ij}^g \cdot U_j^g = F_i^g \quad (29)$$

Ocorre que, a matriz de rigidez do elemento de treliça passa da ordem (2x2) para (4x4). A nova matriz pode ser construída empregando-se a correspondência entre os graus de liberdade, de modo a se distribuir corretamente os graus de liberdade. Assim, temos:

$$K_L^e = \frac{E \cdot A}{I_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Onde, o índice L refere-se ao novo sistema local, enquanto o índice e diz respeito ao elemento arbitrário. Da mesma forma, o vetor de forças nodais também sofre uma expansão ficando (4x1):

$$F_L^e = \begin{Bmatrix} \frac{q \cdot I_e}{2} + N_1^e \\ 0 \\ \frac{q \cdot I_e}{2} + N_2^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Entretanto, como as direções atreladas aos nós precisam passar por uma transformação por rotação conhecida, a qual pode ser escrita para cada nó como:

$$\begin{Bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L^1 \\ v_L^1 \end{Bmatrix} \quad (32 \text{ a,b})$$

$$\begin{Bmatrix} u_x^2 \\ u_y^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L^2 \\ v_L^2 \end{Bmatrix}$$

Podendo, ser expressa por:

$$\begin{Bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ 0 & 0 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L^1 \\ v_L^1 \\ u_L^2 \\ v_L^2 \end{Bmatrix} \quad (32c)$$

Em forma condensada,

$$u_g = R \cdot u_L \quad (33)$$

Em relação ao vetor de forças nodais, tem-se:

$$F_g = R \cdot F_L \quad (34)$$

Portanto, tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} F_x^1 \\ F_y^1 \\ F_x^2 \\ F_y^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ 0 & 0 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ql_e/2 + N_1^e \\ 0 \\ ql_e/2 + N_2^e \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (ql_e/2 + N_1^e) \cos \alpha \\ (ql_e/2 + N_1^e) \text{sen} \alpha \\ (ql_e/2 + N_2^e) \cos \alpha \\ (ql_e/2 + N_2^e) \text{sen} \alpha \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Percebe-se que a matriz R é ortogonal própria, no sentido em que sua inversa coincide com a sua transposta e seu determinante é unitário. Considerando as formas inversas das equações (33) e (34), pode-se obter a relação para o cálculo da matriz de rigidez da barra no sistema global de graus de liberdade.

$$K_L \cdot u_L = F_L \quad (36)$$

Seguindo o desenvolvimento:

$$\begin{aligned} K_L \cdot R^T \cdot u_g &= R^T \cdot F_g \\ R \cdot K_L \cdot R^T \cdot u_g &= R \cdot R^T \cdot F_g \quad \rightarrow \quad I = R \cdot R^T \quad \therefore I = \text{Matriz Identidade} \end{aligned} \quad (37a, b)$$

Da última relação, tem-se:

$$K_g = R \cdot K_L \cdot R^T \quad (38)$$

Fazendo assim as devidas substituições, e desenvolvendo (38), obtém-se:

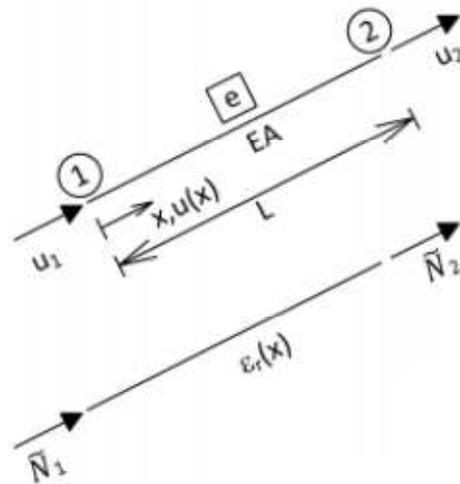
$$K_g = \frac{(E \cdot A)_e}{I_e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -c^2 \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Em que as letras c e s representam, respectivamente, $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$.

4.3 Análise do Elemento de Treliça Com efeito da variação de Temperatura

Considerando o elemento de barra simples, figura 5 o qual encontra-se uma variação linear de temperatura, atuando na face inferior uma temperatura (ΔT_i) e na face superior uma temperatura (ΔT_s), temos:

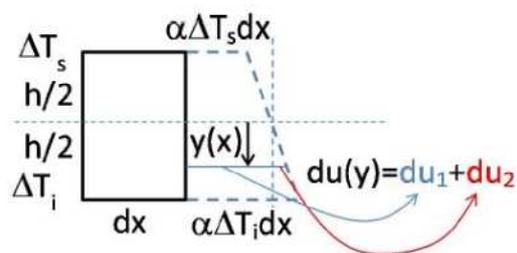
Figura 6 – Esquema do elemento de treliça submetido a esforços e variação de temperatura



Fonte PACCOLA, R. R. (2015).

Partindo assim, de uma seção de comprimento dx podemos determinar a deformação total que a treliça está submetida, fazendo:

Figura 7 – Deformações devido a uma variação de temperatura em um elemento de comprimento dx .



Fonte PACCOLA, R. R. (2015).

$$\varepsilon_{total} = \varepsilon_{elástico} + \varepsilon_{residual}$$

$$\varepsilon_{elástico} = \varepsilon_{total} - \varepsilon_{residual} = \varepsilon - \varepsilon_r \quad (40)$$

Combinando (40) e a Lei de Hooke, a energia específica de deformação, torna-se:

$$u_e = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \int_0^\varepsilon E(\varepsilon - \varepsilon_r) d\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2} - E\varepsilon\varepsilon_r \quad (41)$$

A deformação residual é dada pela relação de compatibilidade o que resulta em:

$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_r = \frac{\alpha}{2}(\Delta T_i + \Delta T_s) \quad (42)$$

Em que, α é o coeficiente de dilatação. Logo, a Energia de Deformação é dada combinando (42), (41) e (6) obtém-se:

$$U = \int_V \frac{E\varepsilon^2}{2} dV - \int_V E\varepsilon\varepsilon_r dV \quad (43)$$

Assim, para o caso em estudo a Energia Potencial Total, torna-se:

$$\pi = \int_0^L \frac{EA}{2} (u')^2 dx - \int_0^L EA\varepsilon_r(u') dx - N_1 u(0) - N_2 u(L) \quad (44)$$

Portanto, a função solução é da forma:

$$v(x) = \phi_1(x)u_1 + \phi_2(x)u_2 \quad (45)$$

Sendo,

$$\phi_1' = -\frac{1}{L} \quad (46 \text{ a, b})$$

$$\phi_2' = \frac{1}{L}$$

Assim, pode-se chegar a força equivalente residual, a qual fornece:

$$\{F\} = EA\varepsilon_r \int_0^L \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{Bmatrix} \quad (47)$$

Para uma variação uniforme de temperatura, tem-se que a energia residual pode ser expressa por:

$$\varepsilon_r = \alpha\Delta T \quad (48)$$

Substituindo as equações (48) e (46) em (47), tem-se:

$$\{F_{eq}\}_{\varepsilon_r} = EA\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (49)$$

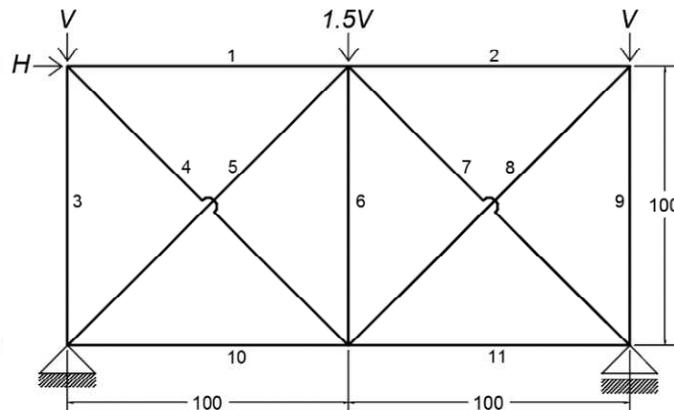
Quando considerado o efeito do carregamento, a força característica é:

$$\{F_{eq}\}_{Carr} = \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix} \quad (50)$$

4.4 Aplicação do TRUSS_2D

A treliça hiperestática formada por 6 nós e 11 barras ilustrada na figura 5 é submetida a uma carga vertical (V) com 100 kN, bem como a uma força horizontal (H) de 30 kN. A treliça é metálica com todas as barras de seção transversal circular com diâmetro de 10 cm. A tabela 1 apresentada as coordenadas dos nós e a tabela 2 as propriedades físicas de cada elemento (barra).

Figura 8: Treliça plana com carregamentos verticais e força horizontal.



Fonte: FELIPE, T. R. C. (2017).

Tabela – 1: Coordenadas dos nós da treliça em estudo.

Nó	Coordenada x (cm)	Coordenada y (cm)
1	0.00	0.00

2	100.00	0.00
3	200.00	0.00
4	200.00	100.00
5	100.00	100.00
6	0.00	100.00

Tabela – 2: Propriedades físicas das barras da treliça em estudo.

Barra	Área (cm ²)	Módulo de Elasticidade (kN/cm ²)
1	78.50	21000.00
2	78.50	21000.00
3	78.50	21000.00
4	78.50	21000.00
5	78.50	21000.00
6	78.50	21000.00
7	78.50	21000.00
8	78.50	21000.00
9	78.50	21000.00
10	78.50	21000.00
11	78.50	21000.00

Figura 9: Arquivo de entrada do programa TRUSS_2D para causa física carregamento.

```

1 -----
2                               ARQUIVO DE ENTRADA: TRUSS_2D
3 -----
4 NNOS  NELEM  NDVINC  NDCARG
5 6      11     3       4
6 -----
7 COORDENADAS
8 NÓ
9      X      Y
10 -----
11 1      0.00  0.00
12 2     100.00  0.00
13 3     200.00  0.00
14 4     200.00 100.00
15 5     100.00 100.00
16 6      0.00 100.00
17 -----
18 CONECTIVIDADE      PROPRIEDADES FÍSICAS      CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO
19 ELEM
20 NOI  NOF      E      A      Q
21 -----
22 1    6    5      21000.00  78.50  0.00
23 2    5    4      21000.00  78.50  0.00
24 3    1    6      21000.00  78.50  0.00
25 4    2    6      21000.00  78.50  0.00
26 5    1    5      21000.00  78.50  0.00
27 6    2    5      21000.00  78.50  0.00
28 7    3    5      21000.00  78.50  0.00
29 8    2    4      21000.00  78.50  0.00
30 9    3    4      21000.00  78.50  0.00
31 10   1    2      21000.00  78.50  0.00
32 11   2    3      21000.00  78.50  0.00
33 -----
34
35 NÓ
36 DIREÇÃO  DESLOCAMENTO PRESCRITO
37 -----
38 1      1      0.00
39 1      2      0.00
40 3      2      0.00
41 -----
42
43 NÓ
44 DIREÇÃO (x = 1; y = 2)  CARREGAMENTO CONCENTRADO
45 -----
46 4      2      -100.00
47 5      2      -150.00
48 6      1      30.00
49 6      2      -100.00
50 -----

```

A figura 9 apresenta o arquivo de entrada para o código computacional TRUSS_2D. Nos campos NNOS, NELEM, NDVINC e NDCAR, o usuário deve informar, respectivamente, o número de nós, o número de elementos (barras), o número de direções vinculadas (a direção x e y de cada nó, em que é prescrito o deslocamento) e o número de forças concentradas que atua na estrutura. Para cada nó, o usuário deve fornecer suas respectivas coordenadas na direção x e y. Já para cada elemento (barra), o mesmo deve informar a sua conectividade, isto é, a incidência dos nós de cada elemento (NOI = nó inicial e NOF = nó final). Nas propriedades físicas o valor do módulo de elasticidade (E) e área da seção transversal (A). Além disso, caso o elemento tenha um carregamento uniformemente distribuído ao longo do seu comprimento (Q), também necessita-se ser fornecido tal valor. No campo, deslocamento prescrito, deve-se de acordo com o NDVINC, informar os nós e as respectivas direções dos deslocamentos, em que, a direção x recebe o código 1 e a direção y o código 2. Por fim, o usuário informa o nó, a direção e o valor do carregamento concentrado.

Após o processamento, o código disponibiliza um arquivo de saída com os deslocamentos nodais e os esforços normais, respectivamente, nos nós e barras, conforme ilustrado na figura 10.

Figura 10: Arquivo de saída do programa TRUSS_2D para causa física carregamento.

```

1 =====
2 UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
3 DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
4 =====
5
6 PROGRAMA MEF TRELIÇA PLANA: TRUSS_2D
7
8 AUTORES: TÚLIO RAUNYR CANDIDO FELIPE
9 CAMILA MARIA LIRA DE SOUSA
10 MÁRIO CESAR SOARES XAVIER
11 =====
12 DESLOCAMENTOS
13 =====
14 NÓ X Y
15 =====
16 1 0.00E+00 0.00E+00
17 2 4.80E-03 -1.21E-02
18 3 8.79E-03 0.00E+00
19 4 4.36E-03 -7.53E-03
20 5 5.83E-03 -1.42E-02
21 6 8.31E-03 -6.73E-03
22 =====
23 ELEMENTO FORÇA NORMAL
24 =====
25 1 -4.09E+01
26 2 -2.42E+01
27 3 -1.11E+02
28 4 1.55E+01
29 5 -6.94E+01
30 6 -3.51E+01
31 7 -9.31E+01
32 8 3.42E+01
33 9 -1.24E+02
34 10 7.91E+01
35 11 6.58E+01
36 =====

```

Ademais, o código fornece um arquivo de pós-processamento para ser visualizado no *software* AcadView, programa para pós-processamento em elemento finito 2D e 3D, desenvolvido por Paccola e Coda [6], e disponibilizado gratuitamente no site do Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. Na figura 11 e figura 12 são mostrados, respectivamente, os deslocamentos nas direções x e y para a treliça em estudo.

Figura 11: Visualização dos deslocamentos na direção x no software AcadView para causa física carregamento.

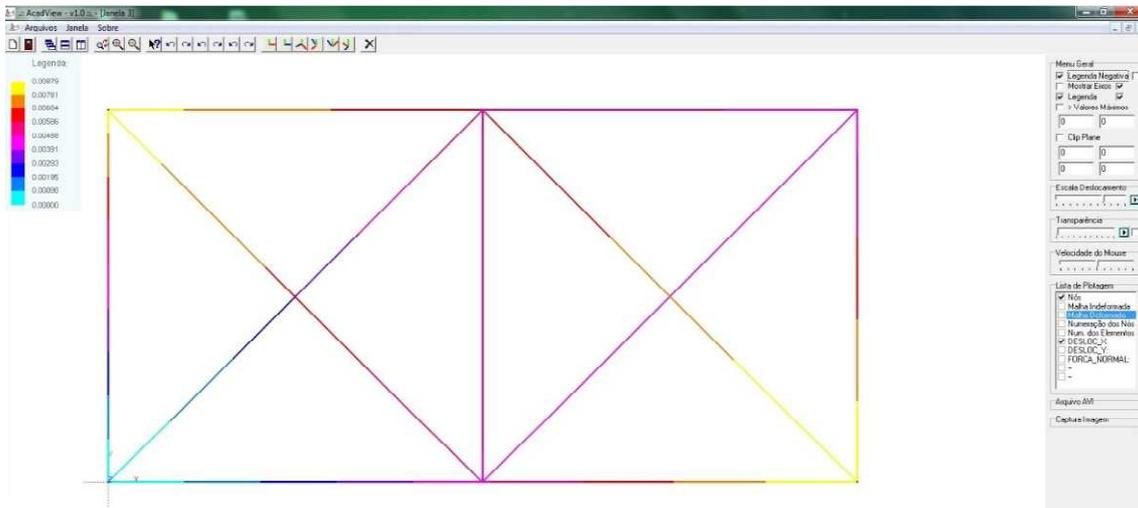
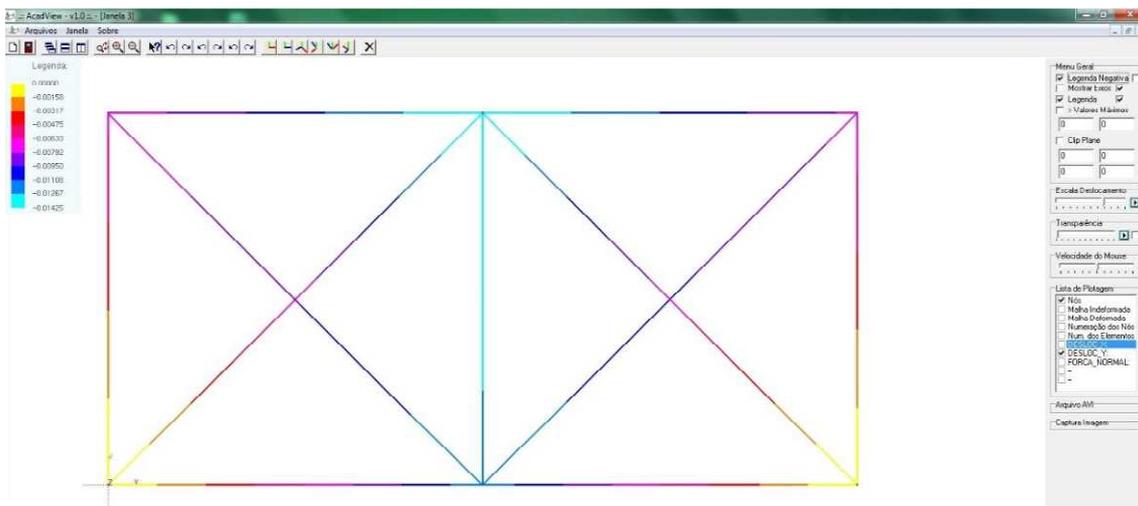


Figura 12: Visualização dos deslocamentos na direção y no software AcadView para causa física carregamento.



A simplificação adotada para modelos estruturais de treliças planas é que não existem deslocamentos na direção transversal ao plano (direção Z) e rotações em torno de eixos do plano da estrutura. Isso significa que duas barras que se liguem em um nó possuem deslocamentos compatíveis na ligação.

Portanto, uma treliça plana apresenta somente as seguintes componentes de deslocamentos:

$\Delta x \rightarrow$ deslocamento na direção do eixo global x;

$\Delta y \rightarrow$ deslocamento na direção do eixo global y.

Na análise de uma treliça plana as cargas atuantes são transferidas para os seus nós. A consequência disso, em conjunto com a hipótese de ligações articuladas, é que uma treliça apresenta apenas esforços internos axiais, esforços normais de tração ou compressão, conforme mostrado na figura 11 e 12, em que, os esforços normais positivos têm a tendência de alongar a barra (tração), enquanto os esforços normais negativos tendem comprimir o elemento (compressão).

Assumindo um recalque para baixo de 3,00 cm no apoio da direita (nó 3), de acordo com a figura 12, o TRUSS_2D, realiza a montagem da matriz de rigidez, o vetor de esforços nodais equivalentes, aplica as condições de contorno e resolve os sistemas de equações, o que resulta nos novos deslocamentos, conforme ilustrado na figura 14.

Figura 13: Arquivo de entrada do software TRUSS_2D para a análise física de carregamento mais recalque de apoio de -3,00 cm no nó 3 (direção y).

```

1
2          ARQUIVO DE ENTRADA: TRUSS_2D
3
4 NNOS   NELEM   NDVINC   NDCARG
5 6       11      3         4
6
7          COORDENADAS
8 NÓ
9          X       Y
10
11 1       0.00    0.00
12 2       100.00  0.00
13 3       200.00  0.00
14 4       200.00  100.00
15 5       100.00  100.00
16 6       0.00    100.00
17
18          CONECTIVIDADE   PROPRIEDADES FÍSICAS   CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO
19 ELEM
20 NOI   NOF       E       A       Q
21
22 1     6     5       21000.00  78.50  0.00
23 2     5     4       21000.00  78.50  0.00
24 3     1     6       21000.00  78.50  0.00
25 4     2     6       21000.00  78.50  0.00
26 5     1     5       21000.00  78.50  0.00
27 6     2     5       21000.00  78.50  0.00
28 7     3     5       21000.00  78.50  0.00
29 8     2     4       21000.00  78.50  0.00
30 9     3     4       21000.00  78.50  0.00
31 10    1     2       21000.00  78.50  0.00
32 11    2     3       21000.00  78.50  0.00
33
34
35 NÓ
36 DIREÇÃO   DESLOCAMENTO PRESCRITO
37
38 1         1           0.00
39 1         2           0.00
40 3         2          -3.00
41
42
43 NÓ
44 DIREÇÃO (x = 1; y = 2)   CARREGAMENTO CONCENTRADO
45
46 4         2           -100.00
47 5         2           -150.00
48 6         1            30.00
49 6         2           -100.00
50

```

Figura 14: Arquivo de saída do *software* TRUSS_2D para a análise física de carregamento mais recalque de apoio de -3,00 cm no nó 3 (direção y).

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL			
PROGRAMA MEF TRELIÇA PLANA: TRUSS_2D			
AUTORES: TÚLIO RAUNYR CANDIDO FELIPE CAMILA MARIA LIRA DE SOUSA MÁRIO CESAR SOARES XAVIER			
DESLOCAMENTOS			
NÓ	X	Y	
1	0.00E+00	0.00E+00	
2	4.80E-03	-1.51E+00	
3	8.79E-03	-3.00E+00	
4	1.50E+00	-3.01E+00	
5	1.51E+00	-1.51E+00	
6	1.51E+00	-6.73E-03	
ELEMENTO	FORÇA NORMAL		
1	-4.09E+01		
2	-2.42E+01		
3	-1.11E+02		
4	1.55E+01		
5	-6.94E+01		
6	-3.51E+01		
7	-9.31E+01		
8	3.42E+01		
9	-1.24E+02		
10	7.91E+01		
11	6.58E+01		

Figura 15: Visualização dos deslocamentos na direção x no *software* AcadView para a análise física de carregamento mais recalque de apoio de -3,00 cm no nó 3 (direção y).

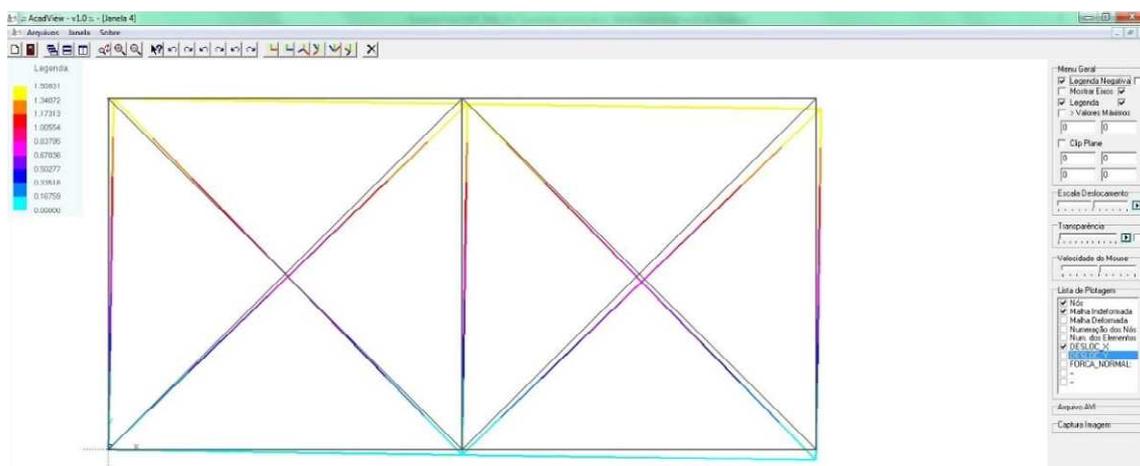
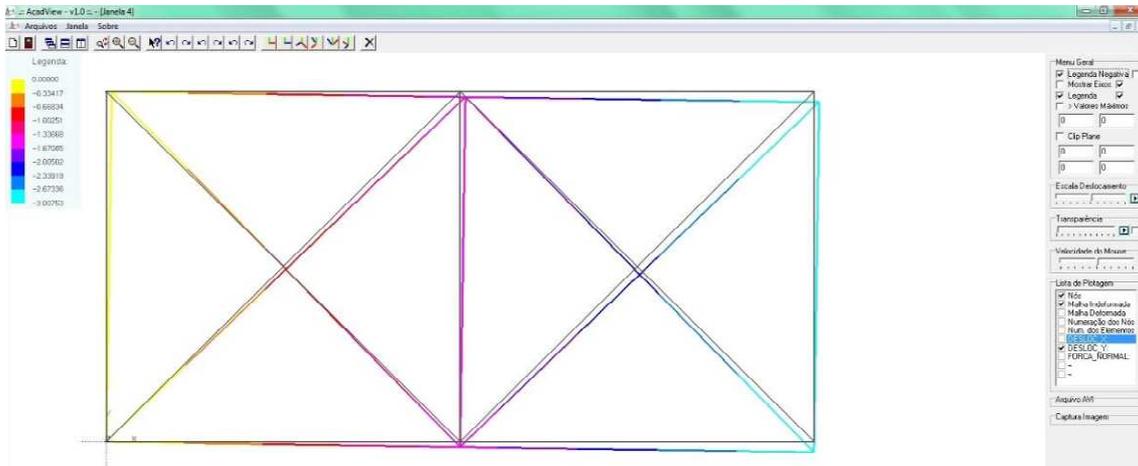


Figura 16: Visualização dos deslocamentos na direção y no software AcadView para a análise física carregamento mais recalque de apoio de -3,00 cm no nó 3 (direção y).



Pode-se perceber pela análise da treliça estudada que, a estrutura no nó 1 não sofre deslocamentos, pois o vínculo (apoio fixo) impede o deslocamento nas direções x e y, enquanto que ao se observar a partir do nó 2, a estrutura passa a ter um deslocamento considerável ao se analisar apenas com a influência do carregamento o qual a estrutura será submetida, e ao considerar o recalque de -3,00 cm, o qual se encaixa dentro dos limites pré-determinados segundo a ABNT NBR 6122 [2]. Ao analisar a figura 13, tem-se que nos nós 2 e 3 os deslocamentos em x, encontra-se constantes (em comparação com os resultados apresentados na figura 9), enquanto sua deformação nos outros nós e em y varia. Isso mostra que após o recalque do nó 3, tem-se um deslocamento acentuado nos nós da face superior da treliça.

Em outras palavras, uma vez feitas considerações sobre a geometria da estrutura, cargas e solicitações, condições de suporte ou ligação com outros sistemas e sobre as leis constitutivas dos materiais, a análise estrutural passa a ser um procedimento matemático de cálculo que só se altera se as hipóteses e simplificações adotadas forem revistas ou reformuladas.

Considerando apenas o peso próprio da estrutura, e uma variação de temperatura de 100°C, o programa realiza o mesmo procedimento mencionado quanto aos outros estados físicos, montando a matriz de rigidez e o vetor de esforços nodais equivalentes, nos fornecendo os deslocamentos na treliça conforme a figura 18.

Figura 17: Arquivo de entrada do *software* TRUSS_2D para a análise física de variação de temperatura.

```

1 -----
2 ARQUIVO DE ENTRADA: TRUSS_2D
3 -----
4 NNOS   NELEM   NDVINC   NDCARG
5 6       11      3         0
6 -----
7 COORDENADAS
8 NÓ -----
9       X       Y
10 -----
11 1      0.0     0.0
12 2      1.0     0.0
13 3      2.0     0.0
14 4      2.0     1.0
15 5      1.0     1.0
16 6      0.0     1.0
17 -----
18 CONECTIVIDADE   PROPIEDADES FÍSICAS   VAR. TEMPERATURA   CARGA DIST.
19 ELEM -----
20 NOI   NOF       E       A       ALFA       T       Q
21 -----
22 1     6     5       2.1D+8   7.85D-4   1.0D-05   1.0D+02   0.61
23 2     5     4       2.1D+8   7.85D-4   1.0D-05   1.0D+02   0.61
24 3     1     6       2.1D+8   7.85D-4   1.0D-05   1.0D+02   0.61
25 4     2     6       2.1D+8   7.85D-4   1.0D-05   1.0D+02   0.61
26 5     1     5       2.1D+8   7.85D-4   1.0D-05   1.0D+02   0.61
27 6     2     5       2.1D+8   7.85D-4   1.0D-05   1.0D+02   0.61
28 7     3     5       2.1D+8   7.85D-4   1.0D-05   1.0D+02   0.61
29 8     2     4       2.1D+8   7.85D-4   1.0D-05   1.0D+02   0.61
30 9     3     4       2.1D+8   7.85D-4   1.0D-05   1.0D+02   0.61
31 10    1     2       2.1D+8   7.85D-4   1.0D-05   1.0D+02   0.61
32 11    2     3       2.1D+8   7.85D-4   1.0D-05   1.0D+02   0.61
33 -----
34
35 NÓ -----
36 DIREÇÃO (x = 1; y = 2)   DESLOCAMENTO PRESCRITO
37 -----
38 1     1                       0.00
39 1     2                       0.00
40 3     2                       0.00
41 -----
42
43 NÓ -----
44 DIREÇÃO (x = 1; y = 2)   CARREGAMENTO CONCENTRADO
45 -----
46 2     2                       0.00
47 -----

```

Figura 18: Arquivo de saída do *software* TRUSS_2D para a análise física de variação de temperatura.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA			
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL			
PROGRAMA MEF TRELIÇA PLANA: TRUSS_2D			
AUTORES: TÚLIO RAUNYR CANDIDO FELIPE			
CAMILA MARIA LIRA DE SOUSA			
MÁRIO CESAR SOARES XAVIER			
DESLOCAMENTOS			
NÓ	X	Y	
1	0.00E+00	0.00E+00	
2	1.00E-03	1.27E-05	
3	2.00E-03	0.00E+00	
4	2.01E-03	1.00E-03	
5	1.01E-03	1.01E-03	
6	5.84E-06	1.01E-03	
ELEMENTO	FORÇA NORMAL		
1	4.42E-01		
2	6.54E-01		
3	1.05E+00		
4	-6.25E-01		
5	1.53E+00		
6	-4.29E-01		
7	3.70E-01		
8	-6.16E-02		
9	6.54E-01		
10	7.47E-01		
11	-2.61E-01		

Quando considera-se a variação de temperatura de 100°C em um elemento estrutural, como por exemplo, o aço, verifica-se pequenos deslocamentos no conjunto da estrutura. Entretanto, como a resistência do aço é função da temperatura, se a estrutura vier a sofrer uma variação de temperatura muito brusca, acima de 100C , a uma redução de sua resistência, o que pode levar o colapso da mesma. Assim, pode-se perceber um pequeno deslocamento no conjunto da estrutura. Com os dados obtidos, pode-se perceber que os deslocamentos ocorrentes na treliça para essa variação de temperatura é cerca de 30% á 50 % menor em relação ao efeito de carregamento mais recalque de apoio. Entretanto tais variações devem ser consideradas, garantindo uma segurança na estrutura. Os deslocamentos podem ser verificados nas figuras 19 e 20.

Figura 19: Visualização dos deslocamentos na direção x no software AcadView para a análise física de variação de temperatura.

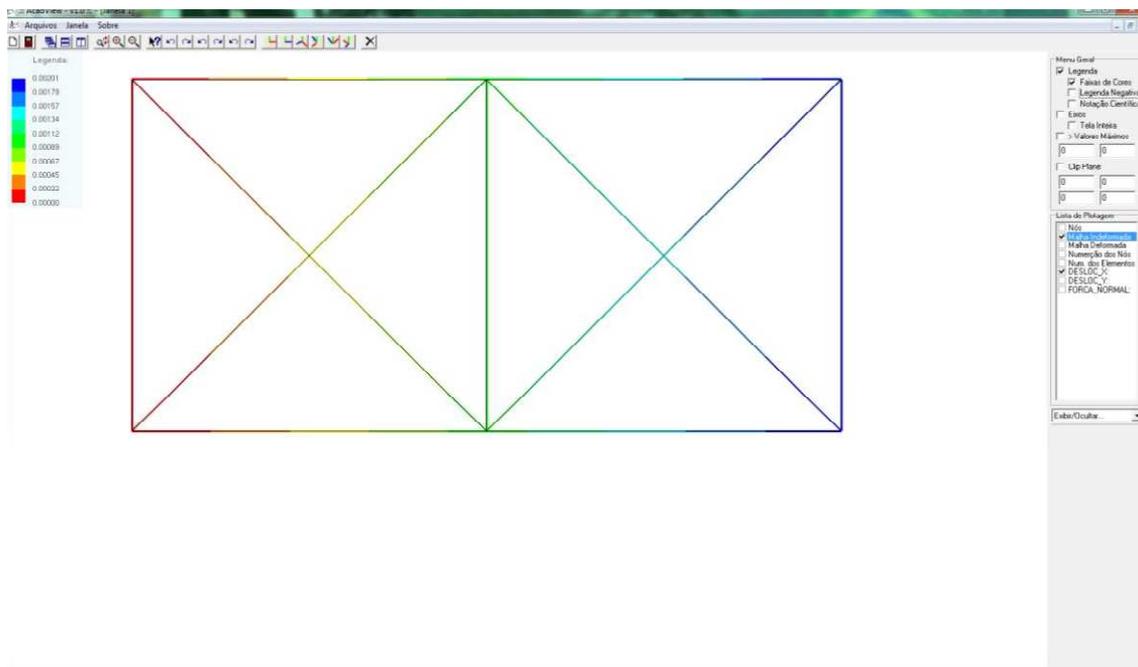
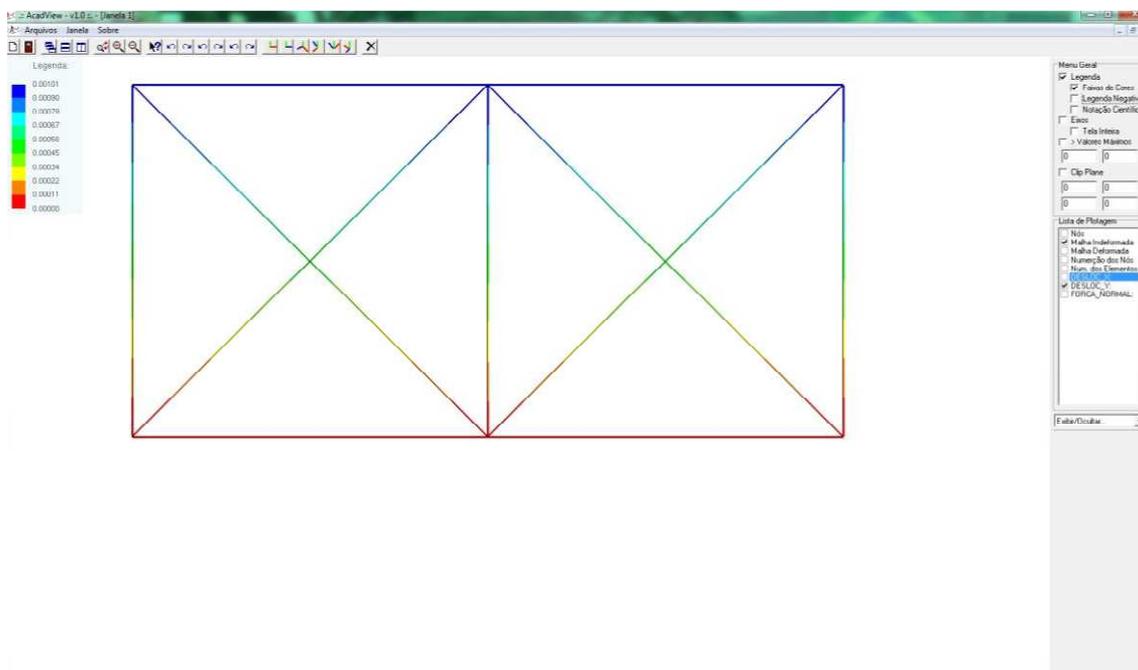


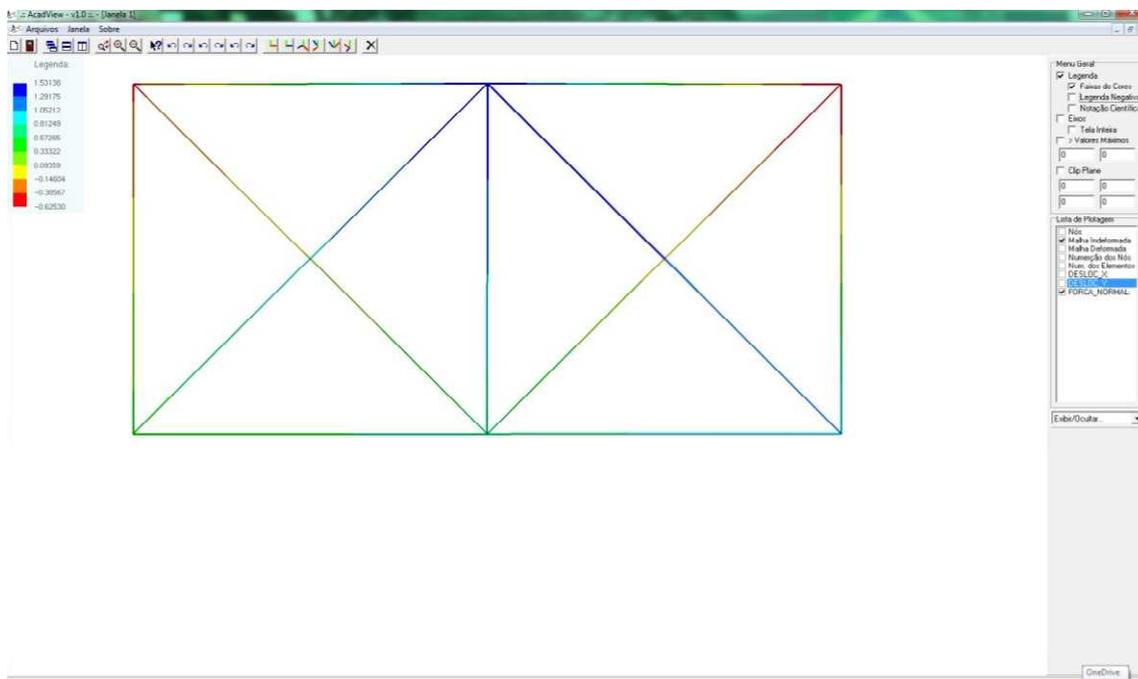
Figura 20: Visualização dos deslocamentos na direção y no software AcadView para a análise física de variação de temperatura.



Quanto aos esforços normais, a estrutura apresenta uma variação em todos os elementos da estrutura, o que difere dos casos abordados anteriormente, o qual os esforços permanecem constante mesmo com o acréscimo do recalque de 3cm na direção y do nó

3. Portanto, pode-se perceber de acordo com a figura 18 e 21, que os esforços são consideravelmente menor dos casos apresentados anteriormente.

Figura 21: Visualização dos Esforços Normais no *software* AcadView para a análise física de variação de temperatura.



Ao considerar todos os estados físicos analisados neste trabalho, pode-se chegar uma conclusão mais precisa dos deslocamentos e esforços atuantes na estrutura, o que nos garante uma segurança e um melhor desempenho do projeto estrutural.

Figura 22: Arquivo de entrada do *software* TRUSS_2D para a análise física de todos os estados analisados.

```

1 =====
2                               ARQUIVO DE ENTRADA: TRUSS_2D
3 =====
4 NNOS   NELEM   NDVINC   NDCARG
5 6       11      3         4
6 =====
7                               COORDENADAS
8 NÓ =====
9                               X           Y
10 =====
11 1       0.0     0.0
12 2       1.0     0.0
13 3       2.0     0.0
14 4       2.0     1.0
15 5       1.0     1.0
16 6       0.0     1.0
17 =====
18 CONECTIVIDADE      PROPRIEDADES FÍSICAS      VAR. TEMPERATURA      CARGA DIST.
19 ELEM
20 NOI   NOF           E           A           ALFA           T           Q
21 =====
22 1     6     5           2.1D+8       7.85D-4       1.0D-05       1.0D+02       0.61
23 2     5     4           2.1D+8       7.85D-4       1.0D-05       1.0D+02       0.61
24 3     1     6           2.1D+8       7.85D-4       1.0D-05       1.0D+02       0.61
25 4     2     6           2.1D+8       7.85D-4       1.0D-05       1.0D+02       0.61
26 5     1     5           2.1D+8       7.85D-4       1.0D-05       1.0D+02       0.61
27 6     2     5           2.1D+8       7.85D-4       1.0D-05       1.0D+02       0.61
28 7     3     5           2.1D+8       7.85D-4       1.0D-05       1.0D+02       0.61
29 8     2     4           2.1D+8       7.85D-4       1.0D-05       1.0D+02       0.61
30 9     3     4           2.1D+8       7.85D-4       1.0D-05       1.0D+02       0.61
31 10    1     2           2.1D+8       7.85D-4       1.0D-05       1.0D+02       0.61
32 11    2     3           2.1D+8       7.85D-4       1.0D-05       1.0D+02       0.61
33 =====
34
35 NÓ =====
36 DIREÇÃO (x = 1; y = 2)      DESLOCAMENTO PRESCRITO
37 =====
38 1       1                       0.00
39 1       2                       0.00
40 3       2                       -0.03
41 =====
42
43 NÓ =====
44 DIREÇÃO (x = 1; y = 2)      CARREGAMENTO CONCENTRADO
45 =====
46 4       2                       -100.0
47 5       2                       -150.0
48 6       1                       30.0
49 6       2                       -100.0
50 =====

```

Figura 23: Arquivo de saída do *software* TRUSS_2D para a análise física de todos os estados analisados.

```

1  =====
2  UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
3  DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
4  =====
5
6  PROGRAMA MEF TRELIÇA PLANA: TRUSS_2D
7
8  AUTORES: TÚLIO RAUNYR CANDIDO FELIPE
9           CAMILA MARIA LIRA DE SOUSA
10          MÁRIO CESAR SOARES XAVIER
11 =====
12          DESLOCAMENTOS
13 =====
14          NÓ          X          Y
15 =====
16          1          0.00E+00      0.00E+00
17          2          1.48E-03      -1.62E-02
18          3          2.88E-03      -3.00E-02
19          4          1.74E-02      -2.97E-02
20          5          1.66E-02      -1.54E-02
21          6          1.58E-02      3.33E-04
22 =====
23          ELEMENTO  FORÇA NORMAL
24 =====
25          1          -4.05E+01
26          2          -2.35E+01
27          3          -1.10E+02
28          4          1.48E+01
29          5          -6.79E+01
30          6          -3.55E+01
31          7          -9.27E+01
32          8          3.42E+01
33          9          -1.24E+02
34          10         7.98E+01
35          11         6.55E+01
36 =====

```

De acordo com os resultados gerados no TRUSS_2D, constata-se um aumento considerado nos deslocamento e esforços na estrutura. O que permite analisar que, considerando o recalque de apoio e a variação de temperatura os deslocamentos chegam a ter um aumento de 15%, enquanto os esforços apenas 5%. Pode-se assim avaliar os deslocamentos e esforços conforme as figuras 24, 25 e 26.

Figura 24: Visualização dos deslocamentos na direção x no software AcadView para a análise física de todos os estados analisados.

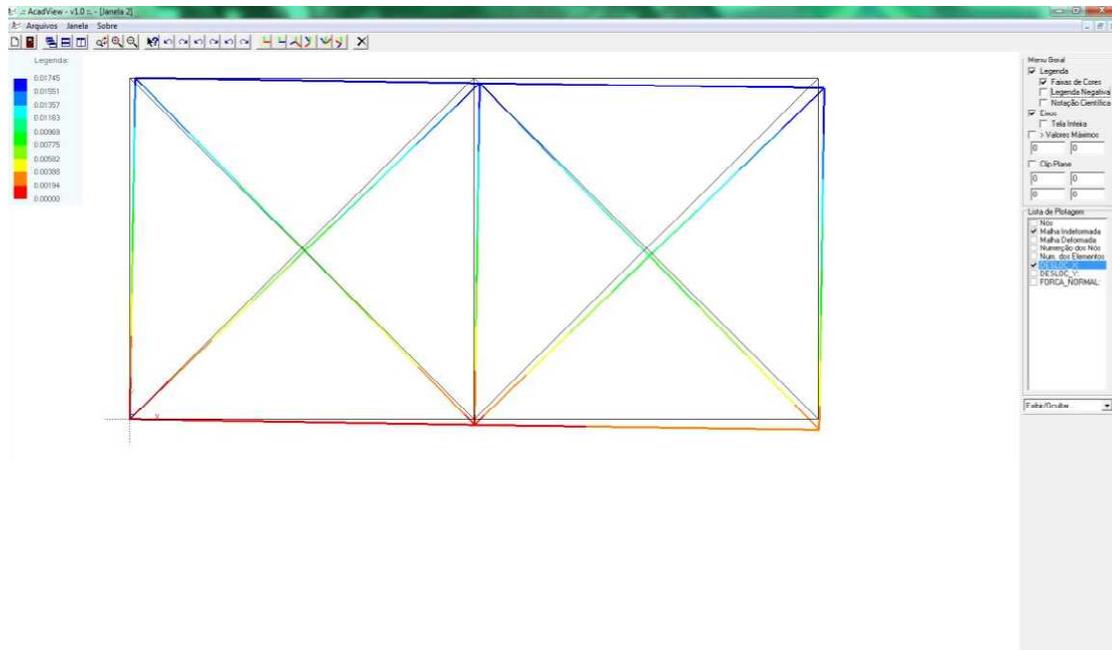


Figura 25: Visualização dos deslocamentos na direção y no software AcadView para a análise física de todos os estados analisados.

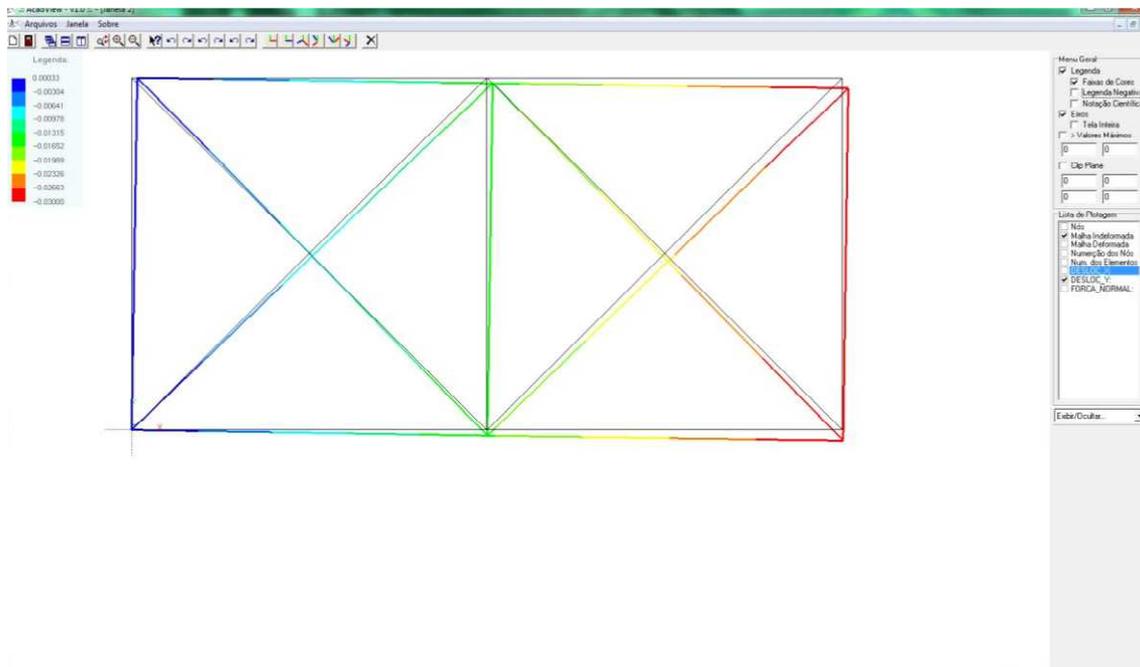
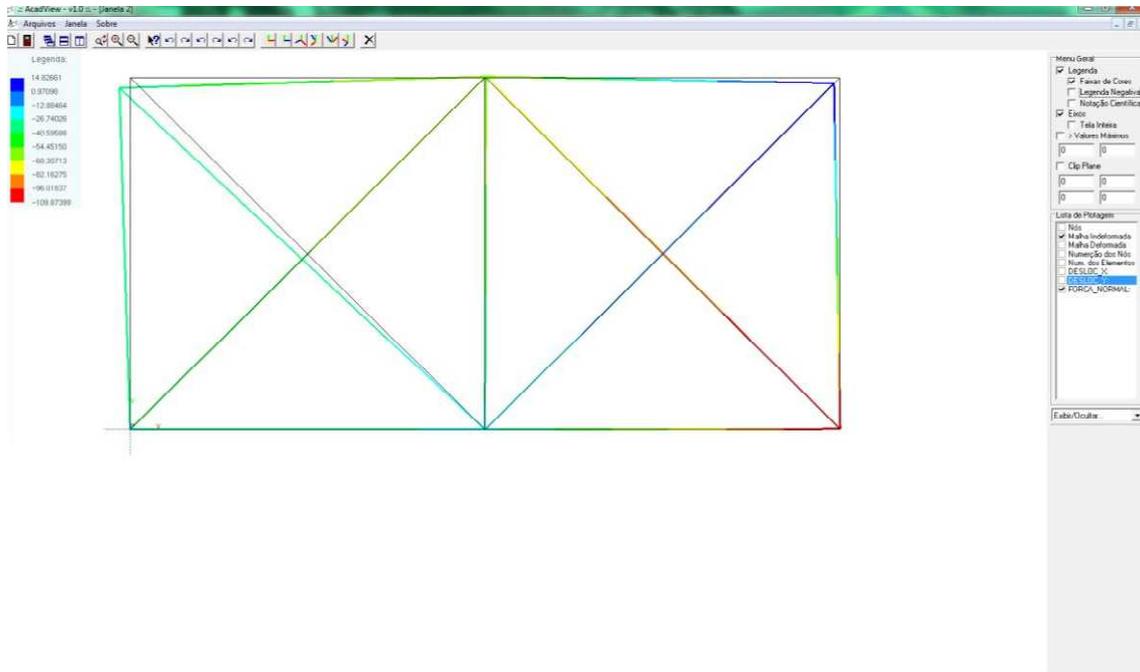


Figura 26: Visualização dos esforços no software AcadView para a análise física de todos os estados analisados.



5 CONSIDERAÇÕES

- Este trabalho foi feito devido à importância, de se garantir uma vida útil e uma maior segurança a estrutura, bem como uma melhor compreensão dos modelos de cálculos mais utilizados na mecânica dos sólidos.
- Diante do exposto, a estrutura mesmo recebendo um considerado deslocamento devido ao conjunto de estados físicos analisados, a estrutura apresentou variação nos esforços normais atuantes nas barras se comparado a influência apenas do carregamento e seu peso próprio.
- Assim, estrutura passa a sofrer um deslocamento considerável quando submetida aos estados físicos. Conclui-se que à medida que se consideram ações nas estruturas, a tendência é que ela sofra deformações mais acentuadas, levando assim a uma análise mais realista, garantindo uma melhor confiabilidade no projeto.
- Portanto, percebe-se que o método desenvolvido é bastante útil na vida acadêmica e profissional, podendo ser aplicado a algumas disciplinas no curso como Estabilidade das Estruturas e Concreto.
- Dessa forma, seria plausíveis considerações de outros agentes físicos atuantes na estrutura, como a ação do vento, pois estes podem exercer potenciais esforços em estruturas oriundas de obras de engenharia.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8681 – Ações e segurança nas estruturas, Rio de Janeiro, 2004.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6122 – Projeto e execução de fundações, Rio de Janeiro, 2010.

FELIPE, T. R. C. Novo método para a avaliação do risco do colapso progressivo em edifícios de alvenaria estrutural. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

MARTHA, M. G. L. S. Método dos Elementos Finitos. Rio de Janeiro, PUC-Rio, 1994.

PACCOLA, R. R. Método da energia. São Carlos, EESC-USP, 2015.

PACCOLA, R. R; CODA, H. B. Software AcadView. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

PAIVA, J. B. Introdução ao método dos elementos finitos. São Carlos, EESC-USP, 2012.

PROENÇA, S . P. B. Introdução aos métodos numéricos. São Carlos, EESC-USP, 2010.

SAVASSI, W. Introdução ao método dos elementos finitos em análise linear de estruturas. São Carlos, EESC-USP, 2000.

SORIANO, H. L. Método dos elementos finitos em análise de estruturas. São Paulo, EDUSP, 2003.