



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CONSTRUÇÃO E DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO TEOREMA  
FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

RAYLSON JOSÉ DEODATO BERNARDO

CAMPINA GRANDE

Novembro de 2018

Raylson José Deodato Bernardo

**CONSTRUÇÃO E DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO TEOREMA  
FUNDAMENTAL DO CÁLCULO**

Trabalho Acadêmico Orientado apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Aldo Trajano Lourêdo

CAMPINA GRANDE

Novembro de 2018

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

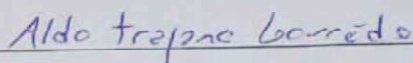
B523c Bernardo, Raylson José Deodato.  
Construção e desenvolvimento histórico do Teorema fundamental do cálculo [manuscrito] / Raylson Jose Deodato Bernardo. - 2018.  
41 p. : il. colorido.  
Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.  
"Orientação : Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Coordenação do Curso de Matemática - CCT."  
1. Cálculo integral. 2. Teorema Fundamental do Cálculo. 3. Integração. I. Título  
21. ed. CDD 515.4

RAYLSON JOSÉ DEODATO BERNARDO

CONSTRUÇÃO E DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO TEOREMA  
FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Aprovado em: 20 / 11 / 2018

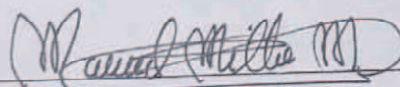
COMISSÃO EXAMINADORA



Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

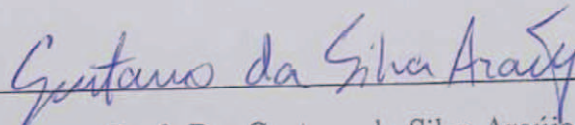
ORIENTADOR



Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADOR



Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADOR

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu Deus pela oportunidade concedida de estar concluindo esta etapa importante na minha vida. Tudo devo à sua misericórdia infinita. A Ele toda honra e toda glória.

Agradeço à algumas pessoas que me ajudaram muito ao longo desse período. Sou grato especialmente aos meus pais, José Rinaldo e Maria do Socorro por todo o suporte para que eu pudesse concluir esta trajetória de maneira digna, sem deixar que me faltasse nada e dando apoio contínuo para que eu chegasse até este momento. Além disso, sou grato à minha irmã Raissa pela alegria na sua chegada, sem dúvidas me motivou mais a continuar nesta jornada. Agradeço ainda à minha companheira Sheila, por todo apoio, motivação, paciência, estímulo e confiança em meus planos.

Agradeço ao meu orientador e professor Dr. Aldo Trajano, pela ajuda, orientação e conselhos em toda minha vida acadêmica. Também deixo meus agradecimentos aos professores que ajudaram a moldar meu caráter profissional e contribuíram na minha formação acadêmica. Em especial, registro meus agradecimentos aos professores Ernesto Trajano, Fernando Luiz, Francisco Sibério, José Ginaldo, Victor Hugo, Milla Miranda, José Elias, Gustavo Araújo, Emanuela Régia, Kátia Suzana, Marcella Lima e Joselma Soares.

Agradeço aos meus amigos especiais que me deram um grande apoio em todo este período, em especial à minha melhor amiga Maria Renally, que sempre me ajudou com tudo. Cito também meus colegas de turma, Geovane, Henrique, Matheus, Saul, Newton, Maurício, Jailson, Jamerson, Rafael, Victor, Nahara, Mariana e Renata, sempre cordiais e prestativos e conseguimos formar uma boa família.

# Resumo

Neste trabalho estudamos conceitos relativos ao Cálculo Integral, especificamente, tratamos da construção histórica que levou ao enunciado conhecido do Teorema Fundamental do Cálculo. Exploramos ainda os conceitos apresentados por Riemann e Lebesgue, onde realizamos uma comparação entre os teoremas vistos à Riemann e à Lebesgue.

**Palavras-chave:** Cálculo Integral, Teorema Fundamental do Cálculo e integração.

# Abstract

In this work we study concepts related to Integral Calculus, specifically, we deal with the historical construction that led to the known statement of the Fundamental Theorem of Calculus. We also explore the concepts presented by Riemann and Lebesgue where we will compare the theorems of Riemann and Lebesgue.

**Keywords:** Integral Calculus, Fundamental Theorem of Calculus and Integration.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 Relações históricas</b>	<b>10</b>
1.1 O Papiro Egípcio de Moscou . . . . .	10
1.2 Quadratura do círculo . . . . .	11
1.2.1 O Papiro de Rhind . . . . .	11
1.2.2 A Quadratriz de Hippias . . . . .	11
1.2.3 O método de Dinóstrato . . . . .	12
1.3 Hipócrates . . . . .	14
1.3.1 Hipócrates e a quadratura do círculo . . . . .	14
1.4 Eudoxo . . . . .	16
1.5 Arquimedes . . . . .	17
1.6 Newton e Leibniz . . . . .	20
<b>2 Riemann e Lebesgue</b>	<b>22</b>
2.1 Riemann . . . . .	22
2.1.1 Funções Integráveis . . . . .	22
2.1.2 Conjuntos de Medida Nula . . . . .	25
2.1.3 Somas de Riemman . . . . .	25
2.1.4 Teorema Fundamental do Cálculo . . . . .	26
2.1.5 Esquemas gráficos . . . . .	28
2.2 Lebesgue . . . . .	31
2.2.1 Função de Dirichlet . . . . .	36
2.2.2 Gráficos . . . . .	38
<b>Considerações Finais</b>	<b>39</b>





# Introdução

A construção do cálculo é atribuída da necessidade que os matemáticos da antiguidade tinham para resolver alguns tipos de problemas, como calcular a área de figuras planas ou volume dos sólidos e traçar retas tangentes em pontos de uma curva no plano. O primeiro tipo de problema desse tipo é datado de 3000 a.C., como mostra o Papiro de *Golonishev* que é o primeiro cálculo do volume de algum sólido já registrado. Esses tipos de problemas serviram de alicerce para a formação do conceito do Cálculo Diferencial e Integral.

Como todos os resultados matemáticos, para chegar até a integral foi necessário um longo período de formação e desenvolvimento, levaram-se séculos para que os conceitos que conhecemos hoje fossem formulados. Credita-se aos grandes matemáticos Isaac Newton e Gottfried Leibniz a responsabilidade pela sistematização e a unificação necessárias para a invenção do Cálculo Diferencial e Integral.

Este trabalho é resultado de um estudo didático realizado com base nas notas de aula do Professor Luiz Adauto sobre os aspectos históricos do Teorema Fundamental do Cálculo [10]. Vamos apresentar algumas partes da construção histórica, mostrando o modo que alguns matemáticos da antiguidade trabalhavam com o Cálculo Integral, antes mesmo do Teorema Fundamental do Cálculo.

Após toda essa construção histórica, serão apresentadas as versões do Teorema Fundamental do Cálculo, vistas à Riemann e à Lebesgue, com base no estudo apresentado pelos professores Luiz Adauto e Eliel Amâncio [11]. Além disso, será feita uma comparação entre os dois teoremas, com finalidade de verificar a abrangência de ambos. Por fim, apresentaremos um exemplo de uma função que é integrável se calculada à Lebesgue e não é integrável se for calculada à Riemann.

O presente trabalho está estruturado da seguinte maneira: no capítulo I, será mostrada a construção histórica por trás do Cálculo, onde abordaremos resultados clássicos e mostraremos como tudo ia convergindo para a formação do Cálculo; no capítulo II,

estudaremos o Teorema Fundamental do Cálculo e apresentaremos suas versões com base na integral de Riemann e Lebesgue.

# Capítulo 1

## Relações históricas

O desenvolvimento de teorias matemáticas é algo bastante complexo que exige uma grande demanda de trabalho e pode levar vários séculos para que o objetivo seja concluído. Levando em conta isso, esse capítulo trata de mostrar a construção histórica por trás do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), que obedece a essa regra e também passou por vários incrementos de diferentes matemáticos até chegar ao resultado apresentado por Lebesgue.

Nesta seção e nas subseções seguintes deste capítulo, faremos uma revisão bibliográfica seguindo as referências [3], [?], [12], [13] e [14].

### 1.1 O Papiro Egípcio de Moscou

Ao contrário do que pensa, o cálculo integral surgiu bem antes do cálculo diferencial, o primeiro registro que existe do que parece ser uma estimativa primitiva da área de uma superfície curva é o Papiro Egípcio de Moscou, também conhecido como Papiro *Golonishev*, em referência ao seu dono, Vladmir Golonishev, o papiro foi escrito aproximadamente em 1890 a.C. Com uma forma de tira, medindo 5,5 cm de comprimento por 8 cm de largura, contém 25 problemas matemáticos gravados com escrita hierática, um deles é o cálculo da área de um tronco de pirâmide.

## 1.2 Quadratura do círculo

Outro problema importante para o desenvolvimento do cálculo da área de figuras é a questão da quadratura do círculo. Datado de 430 a.C., por Antífon (Filósofo grego que teria vivido entre 479 a.C. e 411 a.C.), o problema consistia em criar um quadrado com a mesma área de um dado círculo utilizando apenas régua e compasso em um número finito de etapas.

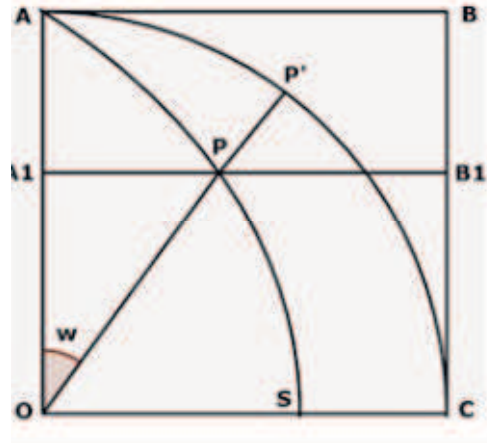
### 1.2.1 O Papiro de Rhind

Na antiguidade os gregos consideravam o problema da quadratura do círculo muito complexo, mas possível de ser solucionado. No Papiro de Rhind ou Ahmes é dada uma solução plana de como construir um quadrado de área próxima a de um círculo. Para isso, seria necessário que o lado do quadrado tivesse  $\frac{8}{9}$  do diâmetro do círculo. Contudo, a solução não era geometricamente precisa, mas é uma boa aproximação, já que  $\pi$  (pi) corresponderia ao valor de 3,1605.

### 1.2.2 A Quadratriz de Hipias

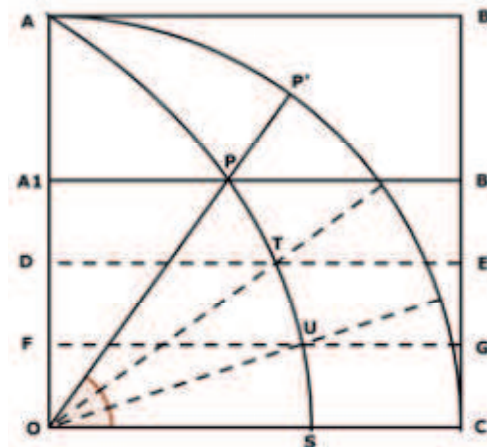
Hipias de Elis foi um filósofo que viveu em 420 a.C. e desenvolveu uma curva mecânica chamada trissectriz ou quadratriz com a finalidade de resolver o problema da trisseção. Essa curva recebeu tal nome, pois serve tanto para trissectar um ângulo, quanto para quadrar um círculo. Em termos geométricos, a Quadratriz de Hipias pode ser obtida da seguinte forma: dado um círculo de centro  $O$  e raio  $a$ , considere os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  de forma que, com o ponto  $O$  seja formado um quadrado de lado  $a$ . Agora, tome o segmento de reta que coincide com  $OA$  e gire em movimento uniforme de rotação em torno de  $O$ , a partir da posição  $OA$  até chegar em  $OC$ . Dessa forma, assim que começa a girar, outro segmento que coincide com  $AB$  passa a se movimentar de forma paralela a si mesmo, em movimento uniforme. Com isso, ambos os segmentos atingem  $OC$  de forma simultânea.

Figura 1.1: Quadratriz de Hípias - Fonte: Wikipédia



A curva  $AS$  é o conjunto dos pontos de intersecção do movimento produzido pelos segmentos que coincidem com  $OA$  e  $AB$ .

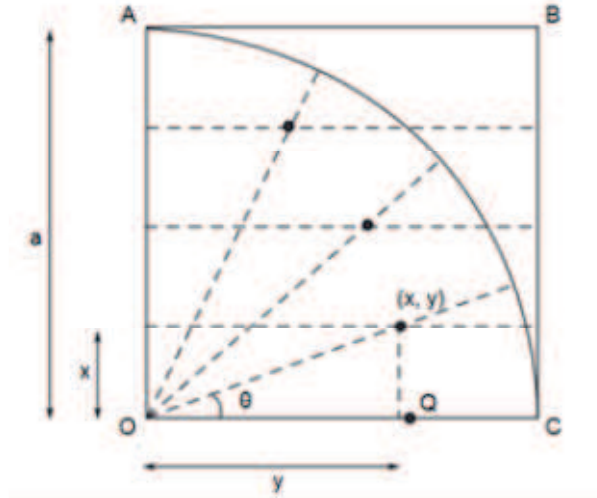
Figura 1.2: Pontos de intersecção - Fonte: PEDROSO e PRECIOSO (2015)



### 1.2.3 O método de Dinóstrato

Dinóstrato de Atenas (viveu entre 390 - 320 a.C.) conseguiu resolver o problema da quadratriz do círculo utilizando a curva mecânica desenvolvida por Hípias, a Quadratriz de Hípias. Conforme foi mostrado na seção 1.2.2, o movimento do segmento  $AB$  tem velocidade constante, com isso, a distância por ele percorrida é proporcional ao tempo gasto no seu percurso. Do mesmo modo que, a amplitude do arco  $AC$  tem a mesma proporção quando relacionado ao tempo gasto pelo percurso do segmento  $OA$ . Como os dois movimentos tem o mesmo início e fim, os tempos gastos por  $OA$  e  $AB$  são iguais e, assim, existe uma relação de proporção entre as distâncias percorridas por eles.

Figura 1.3: Pontos de intersecção - Fonte: PEDROSO e PRECIOSO (2015)



Nesse sentido, chamado  $OA = AB = a$ , pela Figura 1.3, temos um ponto qualquer  $(x, y)$ , pertencente a quadratriz, que satisfaz a relação

$$\frac{y}{a} = \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}}, \text{ ou seja, } \theta = \frac{\pi y}{2a}$$

Como  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ , de modo que a equação cartesiana é dada por

$$x = \frac{y}{\tan \frac{\pi y}{2a}} = y \cot \frac{\pi y}{2a}, \text{ com } y < 0 < a.$$

Levando em consideração a equação cartesiana da quadratriz, o valor de  $OQ$  é igual ao valor de  $x$  quando  $y$  tende a 0. Ou seja,

$$OQ = \lim_{y \rightarrow 0} y \cot \frac{\pi y}{2a} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \cos \frac{\pi y}{2a}}{\sin \frac{\pi y}{2a}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{2a}{\pi} \cos \frac{\pi y}{2a}}{\frac{\sin \frac{\pi y}{2a}}{\frac{\pi y}{2a}}} = \frac{2a}{\pi} < a$$

Concluindo que  $OQ = \frac{2a}{\pi}$  e, assim, a área do círculo de raio  $a$  será igual a área do quadrado de lado  $\sqrt{\pi a}$ , com isso, Dinóstrato conseguiu quadrar o círculo.

## 1.3 Hipócrates

Hipócrates de Quios (viveu entre 470 a.C. - 410 a.C.) foi um mercador em Atenas que, após ser enganado por piratas, tentou recuperar suas finanças como um professor de geometria. Nesse tempo, Hipócrates organizou a geometria da época de um modo lógico e demonstrou o seguinte resultado:

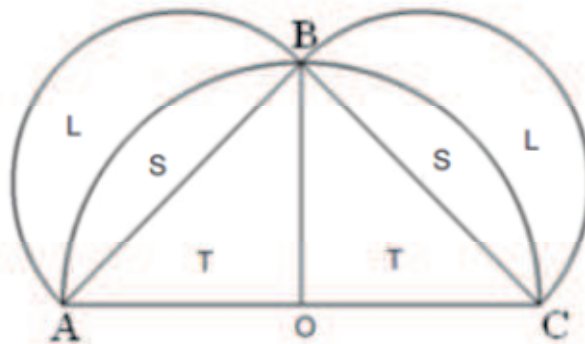
**Proposição 1.1.** As áreas de círculos estão para si, assim como o quadrado de seus diâmetros, ou seja,  $\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$ , onde  $C_1$  e  $C_2$  representam as áreas de dois círculos com diâmetros  $d_1$  e  $d_2$ , respectivamente.

### 1.3.1 Hipócrates e a quadratura do círculo

Assim como Hípias e Dinóstrato, Hipócrates também tentou resolver o problema da quadratura do círculo. Ele utilizou a Proposição 1.1. para fazer aplicações, uma delas referente a quadratura de lunas, ou seja, figuras planas delimitadas por dois arcos circulares de raios diferentes.

**Caso 1.** Considere o triângulo retângulo isósceles  $ABC$ , de modo que esteja inscrito em um semicírculo com diâmetro  $AC$ . Agora, trace os semicírculos de diâmetros  $AB$  e  $BC$ .

Figura 1.4: Áreas da luna e do triângulo - Fonte: PEDROSO e PRECIOSO (2015)



Observe que ao proceder com a construção mostrada na Figura 1.4, obtemos as áreas  $L$ ,  $S$  e  $T$ , onde  $L$  é área de uma luna e  $T$  de um triângulo retângulo de base  $AO = a$  e altura  $OB = b$ . Com isso, mostremos o procedimento feito por Hipócrates para a quadratura da luna. Aqui faremos uso da Proposição 1.1. e vamos obter como resultado a igualdade das áreas  $L$  e  $T$ , daí concluiremos que a luna é quadrável. Já que  $ABC$  é um triângulo retângulo e  $AB = BC$ , pelo Teorema de Pitágoras, tem-se  $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + AB^2 = 2AB^2$ ,

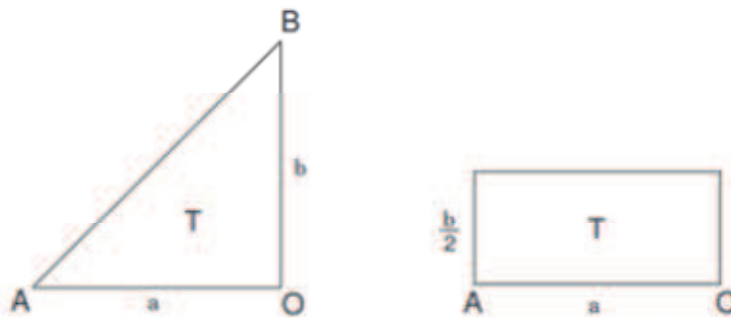


portanto,  $AC^2 = 2AB^2$ . Da Proposição 1.1., temos:

$$\frac{S + L}{2S + 2T} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AB^2}{2AB^2} = \frac{1}{2}$$

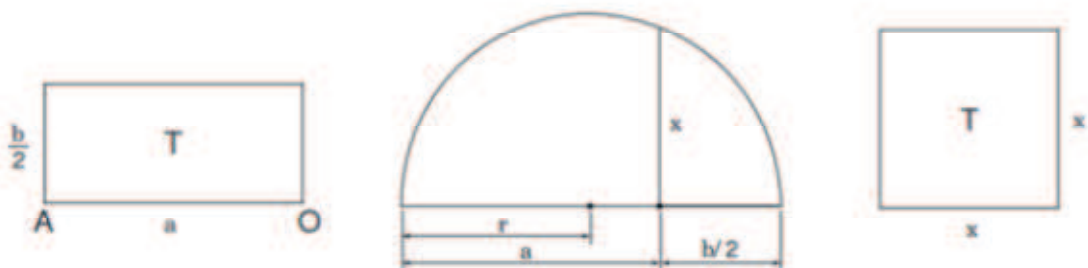
Portanto, temos que  $2S + 2T = 2S + 2L$ , ou seja,  $T = L$ . Agora, vamos mostrar que é possível construir um quadrado que tenha área  $T = L$ . Tome o triângulo  $AOB$ , que nasceu na construção apresentada na Figura 1.4. Perceba que sua área  $T$  é igual a de um retângulo de base  $a$  e altura  $\frac{b}{2}$ .

Figura 1.5: Equivalência das áreas do retângulo e do triângulo - Fonte: PEDROSO e PRECIOSO (2015)



Por fim, para construir o quadrado de lado  $x$  que possua área igual ao retângulo mostrado na Figura 1.5, temos que encontrar a média geométrica entre  $a$  e  $\frac{b}{2}$ , ou seja  $x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$ , conforme fica mostrado na figura abaixo.

Figura 1.6: Construção da média geométrica entre  $a$  e  $\frac{b}{2}$ , onde  $r = \frac{1}{2}(a + \frac{b}{2})$  - Fonte: PEDROSO e PRECIOSO (2015)

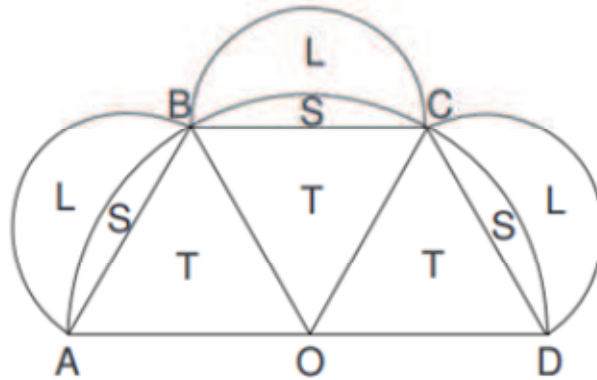


Desse modo, concluímos a prova da quadratura das lunas segundo Hipócrates.

**Caso 2.** Agora, vamos considerar um hexágono regular que esteja inscrito em um círculo e tracemos semicírculos com diâmetros iguais aos lados do hexágono. Diferentemente

do caso anterior, nesse caso vamos mostrar que a área a luna  $L$  será quadrável se, e somente se, o círculo for.

Figura 1.7: Uma luna não quadrável - Fonte: PEDROSO e PRECIOSO (2015)



Levando em consideração a construção apresentada na Figura 1.7, perceba que foram geradas as áreas  $L$ ,  $S$  e  $T$ , onde  $L$  é a área de uma luna e  $T$  de um triângulo equilátero com lado  $AO$ . Com isso, temos  $AO = AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$ . Fazendo uso da Proposição 1.1, segue que

$$\frac{S + L}{3S + 3T} = \frac{AB^2}{AD^2} = \frac{1}{4}$$

Assim, chegamos ao resultado de que  $4S + 4L = 3S + 3T$ , ou seja,  $3L + (L + S) = 3T$ . Com essa igualdade chegamos à conclusão de que, como o triângulo é quadrável, a luna só será quadrável se, e somente se, o semicírculo de área  $L + S$  for.

## 1.4 Eudoxo

Eudoxo de Cnido (viveu entre 408 e 355 a.C.) desenvolveu um método para o cálculo da área de figuras, esse método ficou conhecido como método da exaustão e consistia em inscrever a figura em uma sequência de polígonos cuja área converge para a área da figura desejada. Uma forma clássica de ilustrar o método da exaustão é no cálculo da área de um círculo. Para isso, teríamos que inscrever diversos polígonos no círculo, a medida que o número de lados do polígono iria crescendo, a área desse polígono convergia para a área do círculo. Tal resultado é feito com base no axioma de Eudoxo, que pode ser enunciado da seguinte maneira:

**Axioma 1.1.** Se for subtraída de qualquer grandeza uma parte não menor que sua metade, e dessa parte restante for, de novo, subtraída uma parte também não menor que sua metade, e se este processo de subtração continua, então permanecerá uma grandeza menor do que qualquer grandeza pré-determinada da mesma espécie. Utilizando a linguagem matemática, temos: Dados  $N > 0$  e  $\epsilon > 0$ , onde  $0 < \epsilon < N$ , agora considere  $N, N - aN - (1 - a)N, (1 - a)N - a(1 - a)N - (1 - a)^2N, \dots$ , com  $\frac{1}{2} < a \leq 1$ . O Axioma de Eudoxo dá a garantia de que para um  $m$  grande, existe  $M$ , de modo que,  $(1 - a)^M N < \epsilon$ , ou melhor,  $\lim_{m \rightarrow \infty} N(1 - a)^m = 0$ .

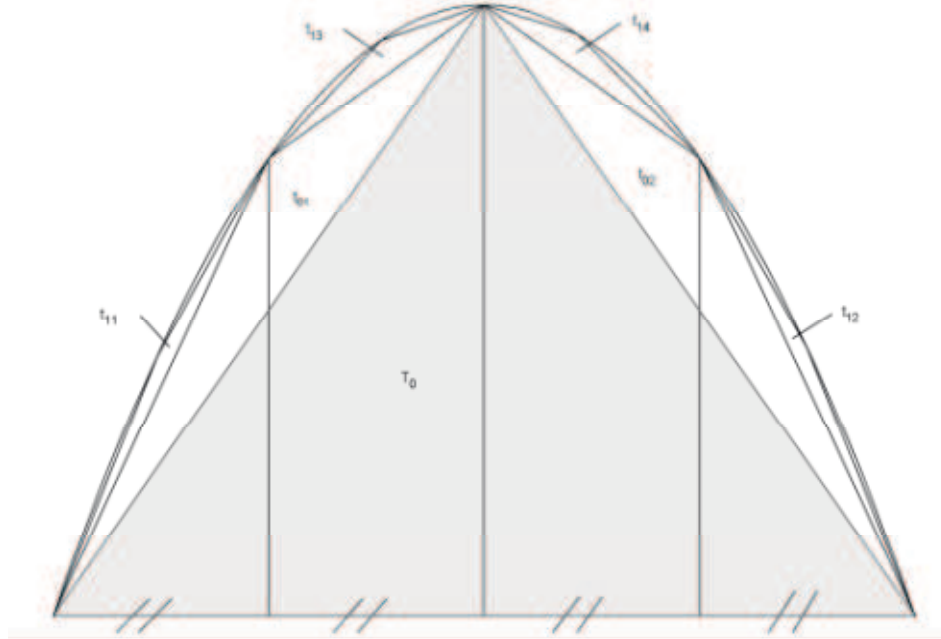
## 1.5 Arquimedes

É atribuído à Arquimedes de Saracusa (viveu entre 408 e 355 a.C.) o posto de maior matemático da antiguidade e um dos maiores intelectuais que já viveu. Um dos seus grandes feitos que será abordado neste trabalho é a resolução da Quadratura da Parábola, especificando melhor, uma parte de parábola, onde ele utiliza o método da exaustão para chegar ao resultado. Arquimedes mostrou que um segmento parabólico de área  $K$  tem  $\frac{4}{3}$  da área de um triângulo inscrito  $T$ , onde esse triângulo tem a mesma base e altura do segmento parabólico.

Seja  $P$  o segmento de parábola e  $T_0$  o triângulo inscrito (ver Figura 1.8); nos dois segmentos restantes são escritos outros dois triângulos,  $t_{01}$  e  $t_{02}$  de mesma base e altura. Seja a soma destes  $T_1$ . Nos quatro segmentos de parábola formados são inscritos os triângulos  $t_{11}, t_{12}, t_{13}$  e  $t_{14}$  cuja soma é  $T_2$ .

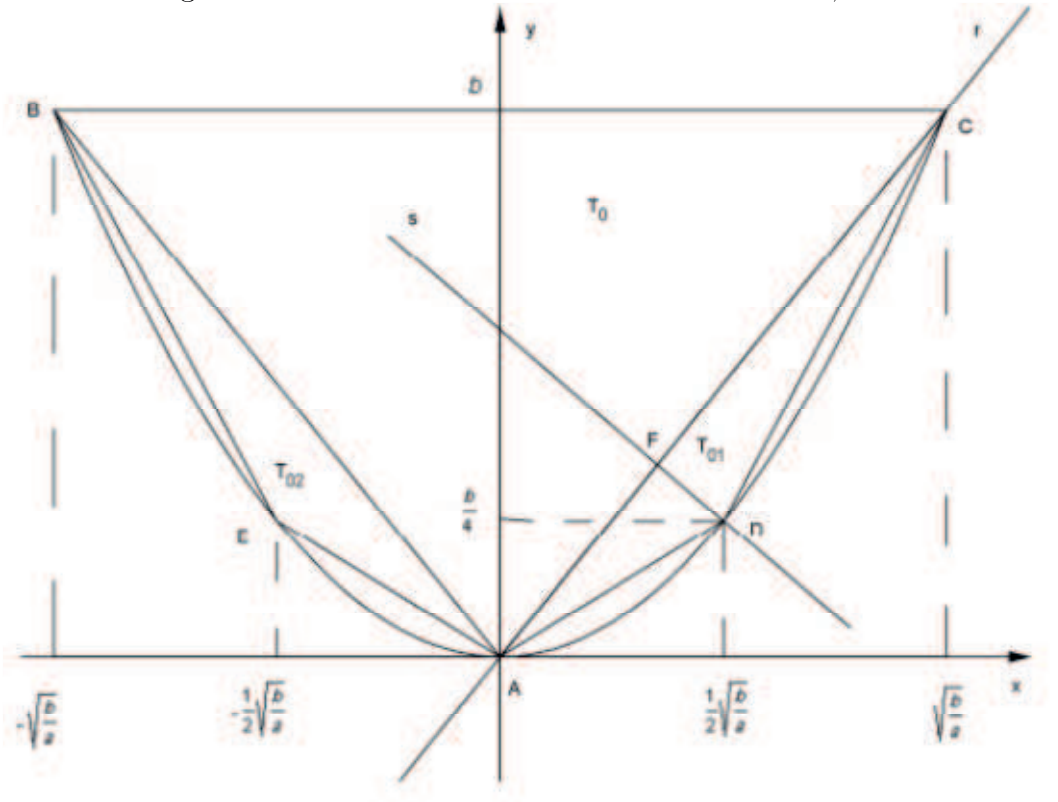
Devemos mostrar, utilizando propriedades da parábola, que  $T_1 = \frac{T_0}{4}$ ,  $T_2 = \frac{T_1}{4}$  e assim por diante, isso significa que as partes que são acrescentadas no triângulo se tornam  $\frac{1}{4}$  do triângulo anterior.

Figura 1.8: Fonte: Scientific American Brasil nº 7, 2005.



Conforme a Figura 1.9, podemos assumir que toda parábola assume a forma  $y = ax^2$ , com  $a > 0$ . Suponha um segmento parabólico limitado pela reta  $y = b$ ,  $b > 0$ . Nosso objetivo é mostrar que  $T_1 = \frac{1}{4}T_0$  (os demais triângulos seguem os mesmos cálculos): da Figura 1.9 temos que  $T_0 = \frac{2b\sqrt{\frac{b}{a}}}{2} = b\sqrt{\frac{b}{a}}$ . Em  $D$  temos  $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}$  e  $y = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$ , ou  $y = \frac{b}{4}$ . Daí,  $D \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{b}{4}\right)$ . A reta  $r$  que passa pelos pontos **A** e **C** é de forma  $r : y = mx$ , onde ( $A$  é a origem)  $m = \frac{b}{\sqrt{\frac{b}{a}}} = \sqrt{ab}$ . Assim,  $r : y = \sqrt{ab}x$ .

Figura 1.9: Fonte: Scientific American Brasil nº 7, 2005.



Considere  $s$  como uma reta perpendicular à reta  $r$  que passa pelo ponto  $D$ . Tem-se que  $s : y = -\frac{1}{m}x + k$ , ou seja,  $s : y = -\frac{x}{\sqrt{ab}} + k$ . Como  $D$  é um ponto pertencente a reta, temos que  $\frac{b}{4} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt{ab}} + k$ , segue agora que  $k = \frac{2+ab}{4a}$ . Assim,  $s : y = -\frac{x}{\sqrt{ab}} + \frac{2+ab}{4a}$ . Agora, tomando o ponto  $D$ , que é o ponto de interseção entre as retas  $r$  e  $s$ . Ou seja,  $\sqrt{ab}x = -\frac{x}{\sqrt{ab}} + \frac{2+ab}{4a} \rightarrow x = \frac{(2+ab)\sqrt{ab}}{4a(1+ab)}$ . Desse modo, temos

$$F \left( \frac{(2+ab)\sqrt{ab}}{4a(1+ab)}, \frac{b(2+ab)}{4(1+ab)} \right).$$

Agora, vamos calcular a área do triângulo  $t_{01}$ . Sua altura  $h$  é dada pela distância entre os pontos  $D$  e  $F$ :

$$h = d(D, F) = \sqrt{\left[ \frac{(2+ab)\sqrt{ab}}{4a(1+ab)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}} \right]^2 + \left[ \frac{b(2+ab)}{4(1+ab)} - \frac{b}{4} \right]^2}.$$

Donde segue que  $h = \frac{b}{4\sqrt{1+ab}}$ . Já a base é dada pela distância entre os pontos  $A$  e

C. Logo,

$$d(A, C) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 + b^2} = \sqrt{\frac{b + ab^2}{a}}.$$

Dessa forma, a área do triângulo  $t_{01}$  é:  $A_{t_{01}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b + ab^2}{a}} \cdot \frac{b}{4\sqrt{1 + ab}}$ . Com isso, a área do triângulo  $T_1$  é igual a soma das áreas dos triângulos  $t_{01}$  e  $t_{02}$ , temos que

$$T_1 = \sqrt{\frac{b + ab^2}{a}} \cdot \frac{b}{4\sqrt{1 + ab}} = \frac{b}{4} \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{T_0}{4}.$$

De modo análogo prova-se que  $T_2 = \frac{T_1}{4}$ .

Voltando ao cálculo da área do segmento parabólico, percebe-se que o polígono da Figura 1.8 vai de encontro ao segmento parabólico e, podemos concluir que  $T_0 + T_1 + T_2 + \dots + T_n + \dots = \frac{4}{3}T_0$ , ou melhor,  $T_0 + \frac{T_0}{4} + \frac{T_0}{4^2} + \dots + \frac{T_0}{4^n} + \dots \rightarrow \frac{4}{3}T_0$ .

Até agora, mostramos alguns trabalhos de matemáticos da antiguidade que já utilizavam conceitos parecidos com o Cálculo Integral para calcular áreas de algumas figuras. A partir dessa seção, começaremos a introduzir o conceito do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), que é o objetivo de estudo do trabalho.

## 1.6 Newton e Leibniz

Ao falar da construção histórica do Cálculo, devemos lembrar das figuras que tiveram uma contribuição magnífica para conseguir uma conexão entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Essa conexão é exatamente o Teorema Fundamental do Cálculo.

Isaac Newton (viveu entre 1642- 1723) foi um grande físico e matemático inglês, Gottfried Leibniz (viveu entre 1646- 1716) foi um filósofo e matemático alemão, os dois, de forma independente, desenvolveram o TFC e são tidos como os inventores do Cálculo Diferencial.

Formalmente, podemos enunciar o TFC da seguinte maneira:

**Teorema 1.1.** Considere  $f$  uma função contínua de valores reais, definida em um intervalo fechado  $[a, b]$ . Se  $F$  for a função definida para  $x$  em  $[a, b]$  por  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , então  $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$ .

**Demonstração:** Considere  $f$  contínua em  $c$ . Então, dado  $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $x \in [a, b], |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$ .

Se  $0 < h < \delta$  e  $c + h \in [a, b]$ , então

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| = \frac{1}{h} \left| \int_c^{c+h} [f(x) - f(c)] dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} |f(x) - f(c)| dx \leq \frac{1}{h} \cdot \epsilon \cdot h = \epsilon$$

Sendo assim,

$$F'_+(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Análogo para  $F'_-(c)$ . Portanto,  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$ .

■

# Capítulo 2

## Riemann e Lebesgue

No capítulo anterior mostramos a construção histórica que culminou na criação dos conceitos de integral e derivada. Uma consequência imediata disso foi a formulação do primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, que, como foi mostrado, relaciona uma derivada com sua integral.

Neste capítulo, vamos construir o segundo teorema fundamental do cálculo, que foi formulado por Riemann. Além disso, vamos analisar o TFC visto à Lebesgue e comparar os dois resultados para mostrar a abrangência que possui o resultado mostrado por Lebesgue.

Nesta seção e nas subseções seguintes, seguiremos as referências [1], [2], [4], [6],[7], [8], [9], [10] e [11].

### 2.1 Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann foi um matemático alemão que viveu entre os anos de 1826 à 1866, teve notáveis contribuições em várias áreas da matemática, ficou famoso com a *integral de Riemann* e suas consequências.

#### 2.1.1 Funções Integráveis

**Definição 2.1.** Uma *partição* de um intervalo  $[a, b]$  é um subconjunto finito  $P = t_0, t_1, \dots, t_n \subset [a, b]$  tal que  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ . A *norma* de  $P$  é definida por  $|P| = \max(t_i - t_{i-1})$ . Dizemos que a partição  $P$  *refina* a partição  $Q$  se  $Q \subset P$ . O conjunto de todas as partições de  $[a, b]$  será denotado por  $\mathcal{P}([a, b])$  ou simplesmente por  $\mathcal{P}$ .

**Notação:** Dadas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada e  $P = t_0, t_1, \dots, t_n$  partição de  $[a, b]$ , usamos as



notações:

$$I_k = [t_{k-1}, t_k], m = \inf f, M = \sup f,$$

$$m_k = \inf f |_{I_k}, M_k = \sup f |_{I_k} \text{ e } \omega_k = M_k - m_k$$

**Definição 2.2.** Definimos a *soma inferior* e *superior* de uma função limitada  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  relativamente a partição  $P = t_0, t_1, \dots, t_n$  de  $[a, b]$  respectivamente por

$$s(f; P) = \sum_{k=1}^n m_k(t_k - t_{k-1}) \text{ e } S(f; P) = \sum_{k=1}^n M_k(t_k - t_{k-1}).$$

Por conseguinte, definimos a *integral inferior* e *superior* de  $f$  respectivamente por

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \sup \sigma(f) \text{ e } \int_a^{\underline{b}} f(x) dx = \inf \Sigma(f),$$

onde  $\sigma(f) = s(f; P); P \in \mathcal{P}$  e  $\Sigma(f) = S(f; P); P \in \mathcal{P}$ .

Dizemos que  $f$  é *integrável* se a integral superior e inferior de  $f$  coincidem. Neste caso, definimos a *integral* de  $f$  por

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\underline{b}} f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx.$$

**Exemplo 2.1.** Toda função constante  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável e

$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$

**Solução.** Dada  $p \in \mathcal{P}[a, b]$ , temos que  $m_i = c$  e  $M_i = c$ .

Daí,

$$s(f; P) = \sum c(t_i - t_{i-1}) = c \sum (t_i - t_{i-1}) = c(b - a)$$

Assim,

$$S(f; P) = \sum c(t_i - t_{i-1}) = c(b - a).$$

Logo,

$$T(f) = c(b - a) = \sum(f).$$

Desse modo,

$$\int_a^b c \, dx = \sup \sigma(c) = c(b - a) \text{ e } \int_a^b c \, dx = \inf \Sigma(f) = c(b - a)$$

Logo,  $c$  é integrável e

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a).$$

**Teorema 2.1.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. São equivalentes:

- (i)  $f$  é integrável;
- (ii) Para qualquer  $\epsilon > 0$  dado, existem  $P, Q \in \mathcal{P}$  tais que  $S(f; Q) - s(f; P) < \epsilon$ ;
- (iii) Para qualquer  $\epsilon > 0$  dado, existe  $P = t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathcal{P}$  tal que

$$S(f; P) - s(f; P) = \sum_{i=1}^n w_i(t_i - t_{i-1}) < \epsilon.$$

**Demonstração:** (i)  $\rightarrow$  (ii): Seja  $f$  integrável, isto é,  $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$ . Temos que  $x \leq y, \forall x \in \sigma(f)$  e  $y \in \Sigma(f)$ . Daí, dado  $\epsilon > 0$ , existem  $s(f; P) \in \sigma(f)$  e  $S(f; Q) \in \Sigma(f)$  tais que

$$S(f; Q) - s(f; P) < \epsilon$$

(ii)  $\rightarrow$  (iii): Dado  $\epsilon > 0$ , de (ii) existem  $P_0$  e  $Q_0 \in \mathcal{P}$ , tais que  $S(f; Q_0) - s(f; P_0) < \epsilon$ .

Sendo  $P = P_0 \cup Q_0 \in \mathcal{P}$ , temos que  $P_0, Q_0 \subset P$ , assim,

$$s(f; P_0) \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq S(f; Q_0) \text{ desse modo,}$$

$$S(f; P) - s(f; P) \leq S(f; Q_0) - s(f; P_0) < \epsilon.$$

(iii)  $\rightarrow$  (i): Temos que  $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$ . Logo,  $f$  é integrável. ■

## 2.1.2 Conjuntos de Medida Nula

**Definição 2.3.** Dizemos que  $X \subset \mathbb{R}$  tem *medida nula* e escrevemos  $\mu(X) = 0$ , quando dado  $\epsilon > 0$  existem intervalos abertos  $I_n \subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ , tais que

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon,$$

onde  $|I|$  denota o comprimento do intervalo  $I$ .

**Observação:** Se  $Y \subset X \subset \mathbb{R}$  e  $\mu(X) = 0$ , então  $\mu(Y) = 0$ .

**Teorema 2.2.** Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável se, e somente se,  $\mu(D_f) = 0$ .

Dado o caráter introdutório do curso e a complexidade da demonstração, omitiremos e deixaremos para um estudo posterior.

## 2.1.3 Somas de Riemman

**Definição 2.4.** Uma *partição pontilhada* de uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é um par  $P^* = (P, \xi)$  onde  $P = t_0, t_1, \dots, t_n$  é uma partição de  $[a, b]$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  e  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ . Uma soma da forma

$$\sum(f; P^*) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

chama-se *soma de Riemman*.

**Lema 2.1.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada.

(i) Para todo  $\epsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que

$$|P| < \delta \Rightarrow S(f; P) < \int_a^b f(x)dx + \epsilon;$$

$$(ii) \lim_{|P| \rightarrow 0} S(f; P) = \int_a^b f(x)dx.$$

$$(iii) \lim_{|P| \rightarrow 0} s(f; P) = \int_a^b f(x)dx.$$

**Teorema 2.3.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. Existe o limite  $L = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f; P^*)$  se, e somente se,  $f$  é integrável. Neste caso,

$$L = \int_a^b f(x)dx.$$

**Demonstração:**  $\Rightarrow$  Seja  $f$  integrável. Dada  $P \in \mathcal{P}$ , temos que

$$s(f; P) \leq \sum(f; P^*) \leq S(f; P).$$

Pelo lema anterior,  $\lim_{|P| \rightarrow 0} s(f; P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} S(f; P) = \int_a^b f(x) dx$ . Desse modo, pelo Teorema do Sanduíche,  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f; P^*) = \int_a^b f(x) dx$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $L = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f; P^*)$ . Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$|P| < \delta \rightarrow |\sum(f; P^*) - L| < \frac{\epsilon}{4}$ . Seja  $P = t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathcal{P}$  com  $|P| < \delta$ .

Para cada  $i \in 1, \dots, n$ , existem  $\xi_i, \eta_i \in [T_{i-1}, T_i]$  tais que

$$f(\xi_i) < m_i + \frac{\epsilon}{4n(T_i - T_{i-1})} \text{ e } f(\eta_i) > M_i - \frac{\epsilon}{4n(T_i - T_{i-1})}.$$

Seja  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n), P_1^* = (P, \xi)$  e  $P_2^* = (P, \eta)$ . Daí,

$$\begin{aligned} S(f; P) - s(f; P) &= \sum_{i=1}^n M_1(T_i - T_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_1(T_i - T_{i-1}) < \\ &= \sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) \left[ f(\eta_i) + \frac{\epsilon}{4n(T_i - T_{i-1})} \right] - \sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) \left[ f(\xi_i) - \frac{\epsilon}{4n(T_i - T_{i-1})} \right] \end{aligned}$$

■

### 2.1.4 Teorema Fundamental do Cálculo

Após essa lista de resultados, Riemann também propôs o seu TFC que ficou sendo conhecido como o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo.

Antes de enunciá-lo, temos que apresentar algumas definições e teoremas necessários para sua demonstração.

**Definição 2.5.** Sejam  $f, F : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $F$  é uma

- *primitiva* de  $f$ , se  $F$  é derivável e  $F' = f$ ;
- *integral indefinida* de  $f$  se existe  $a \in I$  tal que

$$F(x) = f(a) + \int_a^x f(t) dt, \forall x \in I.$$

**Teorema 2.4.** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. A função  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva de  $f$  se, e somente se  $F$  é uma integral indefinida de  $f$ .

**Demonstração:** Fixe  $a \in I$  e defina  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Dados  $x \in I$  e  $h \in \mathbb{R}$  tal que  $x + h \in I$ , temos que

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt(I).$$

Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $t \in I, |t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \epsilon$ . Se  $h$  é tal que  $x + h \in I, |h| < \delta$ , sendo  $t$  entre  $x$  e  $x + h$ , temos que  $|t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \epsilon$ . Daí e de (I), obtemos

$$\begin{aligned} |h| < \delta &\Rightarrow \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} \epsilon dt = \frac{1}{|h|} \cdot \epsilon \cdot |h| = \epsilon. \end{aligned}$$

Dessa maneira,  $\varphi$  é derivável e  $\varphi'(x) = f(x)$ .

$\Rightarrow$ ) Seja  $F' = f = \varphi'$ . Daí existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $F(x) = \varphi(x) + c, \forall x \in I$ . Como  $\varphi(a) = 0$ , segue que  $F(a) = c$ . Logo,  $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$ .

$\Leftarrow$ ) Seja  $F(x) = F(a_0) + \int_{a_0}^x f(t) dt$ . Sendo  $\varphi_0(x) = \int_{a_0}^x f(t) dt$ , temos  $\varphi_0'(x) = F(x), \forall x \in I$  e, assim,  $F'(x) = \varphi_0'(x) = f(x), \forall x \in I$ . ■

**Teorema Fundamental do Cálculo:** Se uma função integrável  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possui uma primitiva  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

Em outros termos, se uma função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possui derivada integrável, então

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt.$$

**Demonstração:** Para qualquer partição  $P = t_0, \dots, t_n$  de  $[a, b]$  o Teorema do Valor Médio nos dá

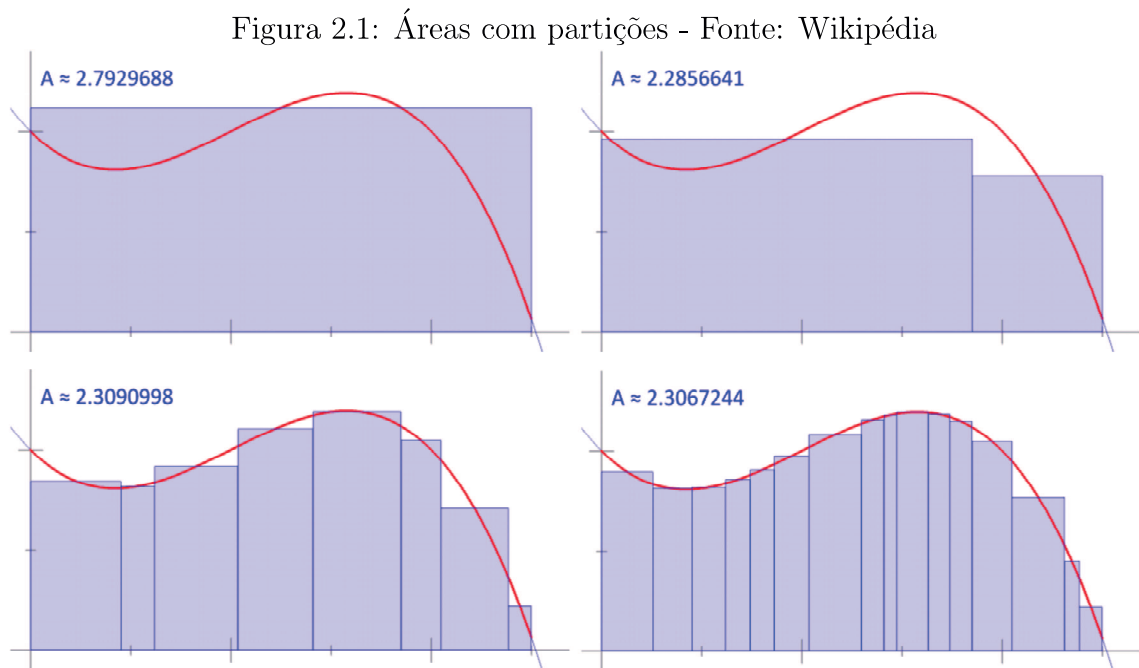
$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(t_i) - F(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^n F'(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1}),$$

onde  $t_{i-1} < \xi_i < t_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Indicando  $m'_i$  e  $M'_i$  respectivamente o inf e o sup de  $F'$  no intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ , temos  $m'_i \leq F'(\xi_i) \leq M'_i$ , donde  $s(F'; P) \leq F(b) - F(a) \leq S(F'; P)$ . Portanto,  $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt$ . ■

### 2.1.5 Esquemas gráficos

É interessante que o leitor relacione logo o TFC com o cálculo da área de alguma figura. Para deixar clara a parte geométrica da integral de Riemann, temos alguns esquemas que representam a aplicação geométrica do TFC.

No primeiro esquema, vamos mostrar como funciona o cálculo da área de uma função utilizando pequenos retângulos. Veja:



Isto se deve ao fato de ser uma sequência convergente de somas de Riemann. O número na parte superior é a soma das áreas dos retângulos azuis. O valor converge para o integral da função. Além disso, com o tamanho dos retângulos cada vez menor, resultando em maior número de partições para cobrir o espaço, chegaremos mais e mais perto da real área da curva.

**Exemplo 2.2.** Como exemplo vamos calcular

$$\int_1^3 x^2 dx$$

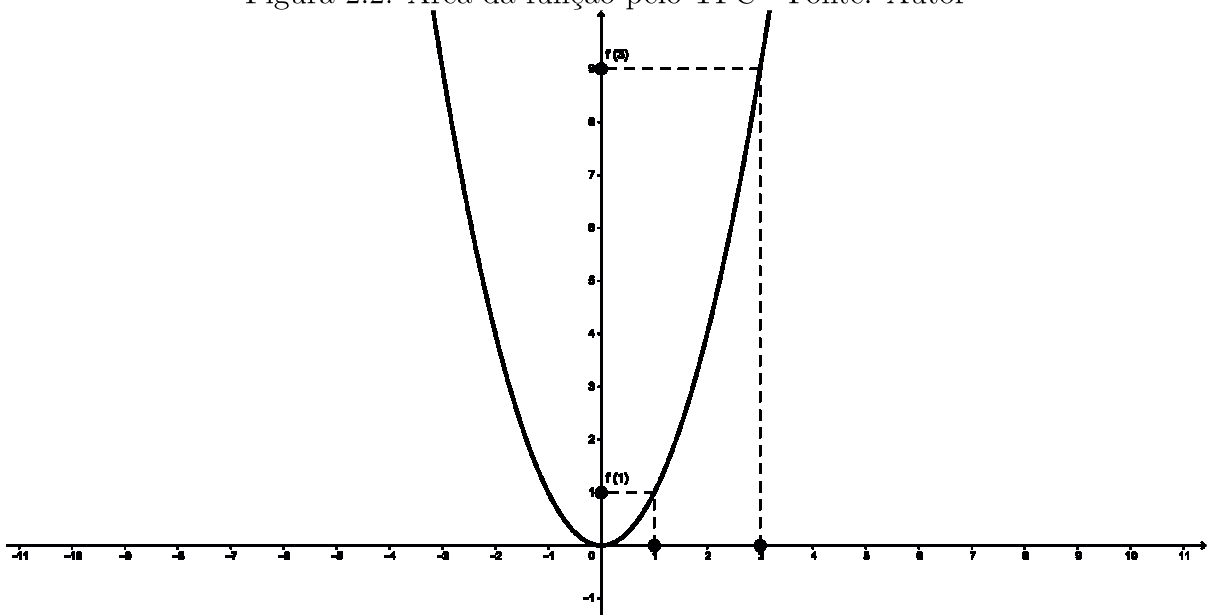
**Solução:** Aqui,  $f(x) = x^2$ , assim  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  é uma primitiva. Logo:

$$\int_1^3 x^2 dx = F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{28}{3} = 8,67.$$

Observe agora o esquema de imagens que reproduz o desenvolvimento geométrico do TFC e o cálculo da área da função acima.

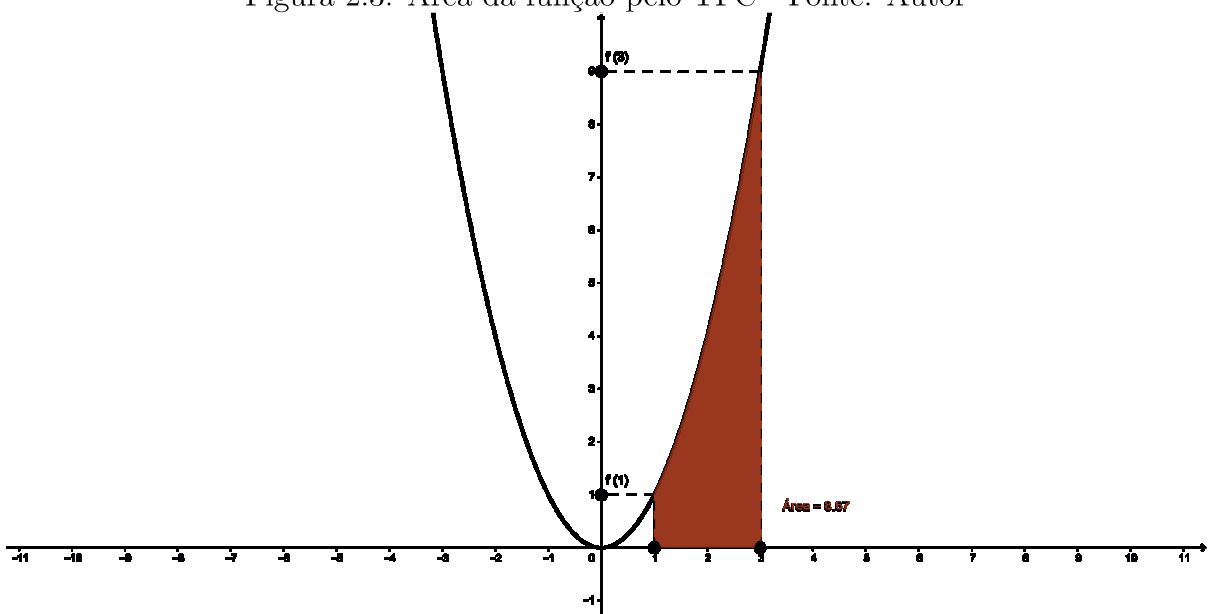
Inicialmente, observe o gráfico da função  $f(x) = x^2$  com os pontos  $(1, 0)$ ,  $(3, 0)$  e suas respectivas imagens  $f(1)$  e  $f(3)$ .

Figura 2.2: Área da função pelo TFC - Fonte: Autor



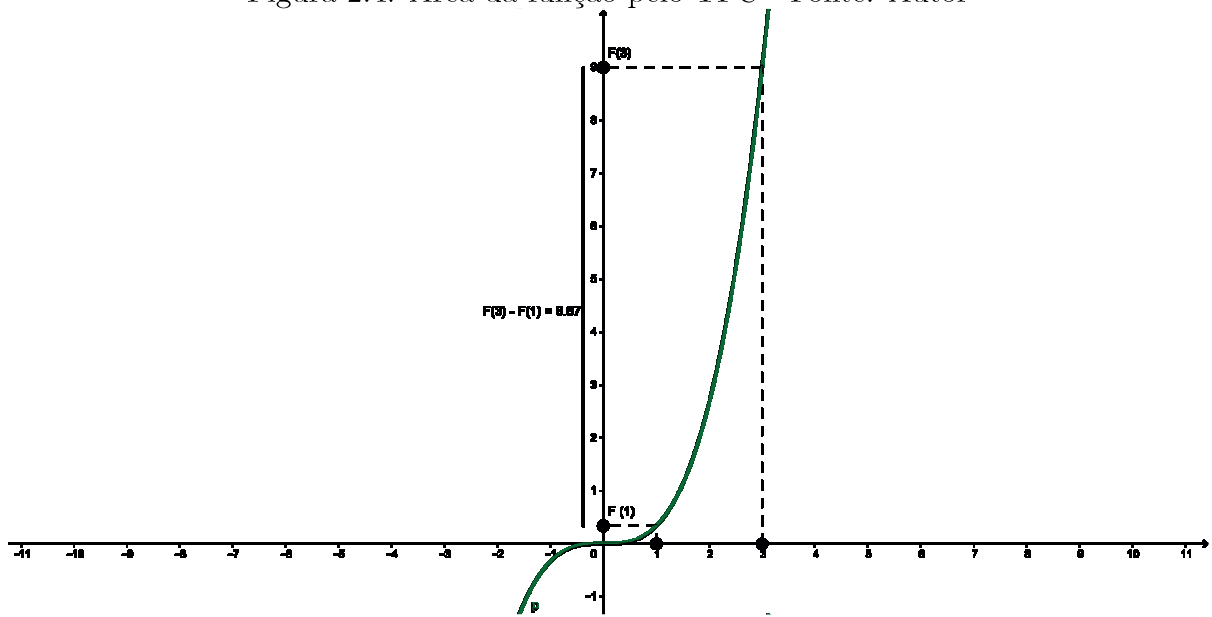
Agora, observe o valor da área da integral que foi calculada destacado em vermelho.

Figura 2.3: Área da função pelo TFC - Fonte: Autor



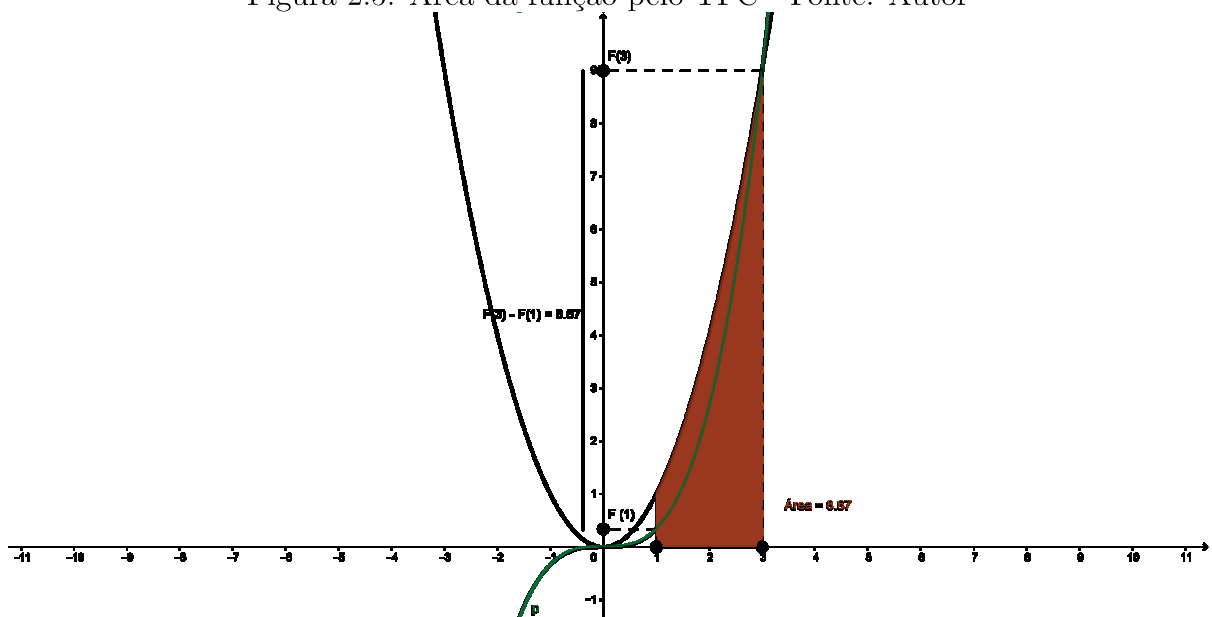
Como a primitiva da função  $f(x) = x^2$  é a função  $F(x) = \frac{x^3}{3}$ , temos que o gráfico da primitiva de  $f(x)$  é dado da forma:

Figura 2.4: Área da função pelo TFC - Fonte: Autor



Note que a distância entre os pontos  $F(3)$  e  $F(1)$  é 8,67. Ou seja:

Figura 2.5: Área da função pelo TFC - Fonte: Autor



A área da função  $f(x) = x^2$ , avaliada entre os pontos  $(1, 0)$  e  $(3, 0)$ , é exatamente igual à distância entre os pontos  $F(3)$  e  $F(1)$ , destacando que  $F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ , como afirma, de modo geral, o Teorema Fundamental do Cálculo.



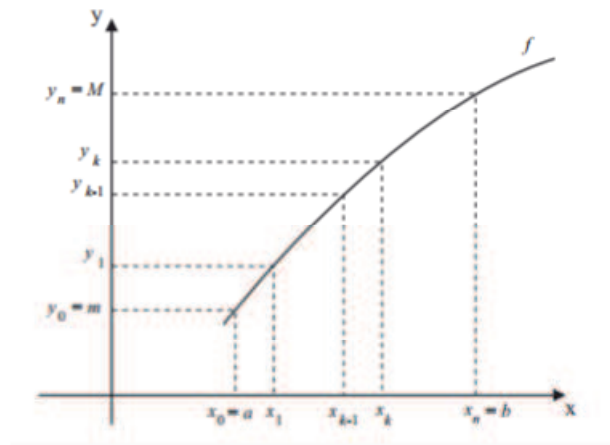
## 2.2 Lebesgue

Em 1901 Henri Lebesgue publicou uma nota que muda de modo profundo a maneira de definir a integral idealizada por Riemann.

Lebesgue organizou seu pensamento da seguinte forma:

Supõe  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , limitada, crescente, sendo  $m, M$ , respectivamente, o ínfimo e o supremo de  $f$  em  $[a, b]$ .

Figura 2.6: Fonte: MEDEIROS (2008)



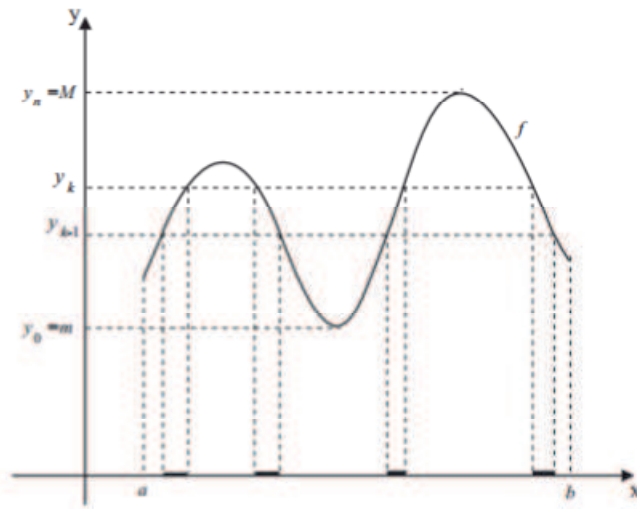
Tome uma partição  $P$  de  $[a, b]$  com os intervalos  $[x_{k-1}, x_k], k \in \mathbb{N}$ . Onde são determinadas partições em intervalos  $[y_{k-1}, y_k], k \in \mathbb{N}$ . Da mesma forma que, como  $f$  é crescente em  $[a, b]$ , uma partição  $[m, M]$  em intervalos  $[y_{k-1}, y_k], k \in \mathbb{N}$ , determina uma partição de  $[a, b]$  em intervalos  $[x_{k-1}, x_k], k \in \mathbb{N}$ . Portanto, neste caso, qualquer que seja o método de partição de  $[a, b]$  e  $[m, M]$  leva-se a um mesmo conceito de integral. Veja:

$$s_P = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})y_{k-1} \text{ e } S_P = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})y_k \quad (2.1)$$

Assim, Lebesgue concluiu que no caso em que  $f$  é crescente, limitada, podemos obter as integrais inferiores e superiores de Riemann com partições de  $[a, b]$  ou  $[m, M]$ , que leva ao mesmo conceito de integral. Análogo para o caso decrescente limitado.

Agora suponha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada mas não necessariamente monótona, veja a figura abaixo.

Figura 2.7: Fonte: MEDEIROS (2008)



Considere uma partição de  $[a, b]$  em intervalos  $[x_{k-1}, x_k], k \in \mathbb{N}$ , permite definir um novo conceito da integral de Riemann.

Contudo, fazendo uma partição  $[y_{k-1}, y_k], k \in \mathbb{N}, y_0 = m, y_n = M$ , podemos concluir que em  $[a, b]$  uma partição não pode ser definida em intervalos, como indica a figura anterior pra um caso simples. Em  $[a, b]$  obtemos

$$x \in [a, b]; y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k,$$

que é composto da união de intervalos sem ponto comum. Agora, se  $f$  não for simples e

for oscilante em  $[a, b]$  a partição  $[m, M]$  determina partições bem gerais em  $[a, b]$ .

Desse modo, da partição  $[y_{k-1}, y_k], k \in \mathbb{N}, y_0 = m, y_n = M$ , de  $[m, M]$  resulta em  $[a, b]$  na partição

$$E_k = x \in [a, b]; y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k, k \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

mas em subconjuntos  $E_k$ .

Agora, reescrevemos as somas 2.1, no caso de partição  $[m, M]$  em intervalos  $[y_{k-1}, y_k]$  com  $y_0 = m, y_n = M, k = 1, \dots, n$ , da seguinte forma:

$$s_P = \sum_{k=1}^n y_{k-1} \mu(E_k) e S_P = \sum_{k=1}^n y_k \mu(E_k). \quad (2.3)$$

Com isso, vamos estabelecer a definição de *função mensurável* para que seja avaliado quais funções limitadas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é possível delimitar uma "medida"  $\mu(E_k)$  aos conjuntos  $E_k$ , da partição de  $[a, b]$ .

**Definição 2.6.** Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , limitada, denomina-se *mensurável* quando para todo par de números  $\alpha < \beta$ , o conjunto

$$x \in [a, b]; \alpha < f(x) < \beta,$$

for mensurável.

Desse modo, fica aceitável para as funções  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , limitadas e mensuráveis. Lebesgue ainda observa que as funções contínuas a menos de conjunto de medida nula são exemplos de funções mensuráveis.

Conclui-se então que, aceitando-se as noções de função mensurável e conjunto, se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  for limitada e mensurável as somas  $s_P$  e  $S_P$  estão bem definidas. Assim, define-se as integrais inferior e superior, respectivamente, por  $\sup s_P$  e  $\inf S_P$ . Quando forem iguais, a este valor comum é denominado integral de Lebesgue da função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , representada por

$$(\mathcal{L}) \int_a^b f(x) dx.$$

**Observação:** Lebesgue mostrou que se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e mensurável, então ela é integrável.

Um primeiro enunciado para o Teorema Fundamental do Cálculo de Lebesgue pode

ser visto da seguinte maneira:

**Teorema 2.5. Teorema de Lebesgue:** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada, mensurável, derivável e com derivada  $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. Então  $f'$  é integrável, à Lebesgue, e

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

**Observação:** Devido ao caráter introdutório do curso, não será formulada a demonstração do teorema e deixaremos a ideia da demonstração abaixo.

#### Ideia da demonstração

- $f$  é contínua quase sempre em  $[a, b]$  porque é derivável. Estende-se  $f$ , contínua, ao intervalo  $[a, b + 1]$  definindo:

$$f(x) = f(x) + (x - b)f(b) \text{ se } b < x < b + 1.$$

- Considera-se a sucessão  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definida por

$$\phi_n(x) = n \left[ f \left( x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right]$$

As  $\phi_n$  são mensuráveis porque  $f$  é contínua em  $[a, b + 1]$

- $\lim_{n \rightarrow \mathbb{R}} \phi_n(x) = f'(x)$
- $f'$  é mensurável porque é limite de  $\phi_n$  mensuráveis. Como, por hipótese,  $f'$  é limitada, temos que  $f'$  é integrável à Lebesgue.
- Do Teorema do valor intermediário de Cauchy:

$$\phi_n(x) = f' \left( x + \frac{\theta}{n} \right), 0 < \theta < 1.$$

Com isso, as funções  $\phi_n$  são limitadas por  $f'$ . Logo,  $\phi_n$  são mensuráveis e limitadas obtendo:

$$\int_a^b f'(x)dx = \lim_{n \rightarrow \mathbb{R}} \int_a^b \phi_n(x)dx.$$

Daí,

$$\int_a^b \phi_n(x)dx = n \int_a^b f \left( x + \frac{1}{n} \right) dx - n \int_a^b f(x)dx.$$

Considere na primeira integral  $t = x + \frac{1}{n}$ , obtendo-se:

$$\int_a^b \phi_n(x) dx = n \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(t) dt - n \int_a^b f(t) dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi_n(x) dx &= n \int_{a+\frac{1}{n}}^a f(t) dt + n \int_a^{b+\frac{1}{n}} f(t) dt \\ &\quad - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t) dt - n \int_{a+\frac{1}{n}}^b f(t) dt \end{aligned}$$

ou

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \mathbb{N}} n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(t) dt - \lim_{n \rightarrow \mathbb{N}} n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t) dt = f(b) - f(a).$$

■

**Definição 2.7.** Dizemos que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é absolutamente contínua quando para cada  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que para toda coleção finita de subintervalos  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$  de  $[a, b]$ , com  $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n$ , satisfazendo

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta,$$

daí,

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

Para concluir que se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  for absolutamente contínua, ela é uniformemente contínua logo contínua, é suficiente considerar  $n = 1$  na definição anterior.

**Observação:** Conforme diz [6], a recíproca do resultado anterior não é verdadeira. Ou seja, existem funções uniformemente contínuas que não são absolutamente contínuas.

**Definição 2.8.** Considerando  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e a partição  $P$  de  $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

podemos definir

$$V_P = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Caso o supremo de  $V_P$ , quando varia na partição  $P$  de  $[a, b]$ , seja finito, dizemos que  $f$  é de *variação limitada* em  $[a, b]$ .

**Definição 2.9.** Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é dita Lipschitziana quando existe  $K > 0$  tal que  $\forall x, y \in [a, b]$  se tem:

$$|f(x) - f(y)| < K |x - y|.$$

Qualquer função derivável com derivada limitada é uma função Lipschitziana.

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitziana. Então, dada a partição  $P$  de  $[a, b]$ , obtem-se:

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| < K |x_k - x_{k-1}|.$$

Com isso,  $V_P < K |b - a|$ , provando que  $f$  é de variação limitada.

**Observação:** As funções de variação limitadas  $f$  em  $[a, b]$ , tem derivadas  $f'$  quase sempre limitadas. As funções absolutamente contínuas são de variação limitada.

Desse modo, podemos enunciar o Teorema Fundamental do Cálculo à Lebesgue.

**Teorema 2.6. Teorema Fundamental do Cálculo:** Suponha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , absolutamente contínua. Então  $f$  é derivável quase sempre em  $[a, b]$ , tem sua derivada  $f'$  integrável em  $[a, b]$  e:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

■

Nesta seção mostraremos uma função que não é Riemann integrável, mas é Lebesgue integrável.

### 2.2.1 Função de Dirichlet

Vamos ver aqui um exemplo de uma função que não é integrável pelo método de Riemann mas é à Lebesgue.

**Exemplo 2.3.** Considere  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Definindo  $[0, 1]$  em partições da forma  $I_k = [x_{k-1}, x_k] k = 1, \dots, n$ , com  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ , segue daí que cada  $I_k$  contém pontos racionais e irracionais, donde  $\inf_{x \in I_k} f = 0$  e  $\sup_{x \in I_k} f = 1$  lembrando que  $k = 1, \dots, n$ . Assim,

$$\int_0^1 f(x) dx = 0 \text{ e } \int_0^1 f(x) dx = 1.$$

Daí, como as integrais tem valores diferentes, não é integrável pelo método de Riemann.

Por outro lado, já que  $f = 0$  quase sempre em  $[0, 1]$ . De modo que, o conjunto dos números racionais é enumerável, conseqüentemente tem medida de Lebesgue nula, assim tanto  $s_P(f)$  quanto  $S_P(f)$  tem valor zero. Com isso, a função é integrável à Lebesgue e

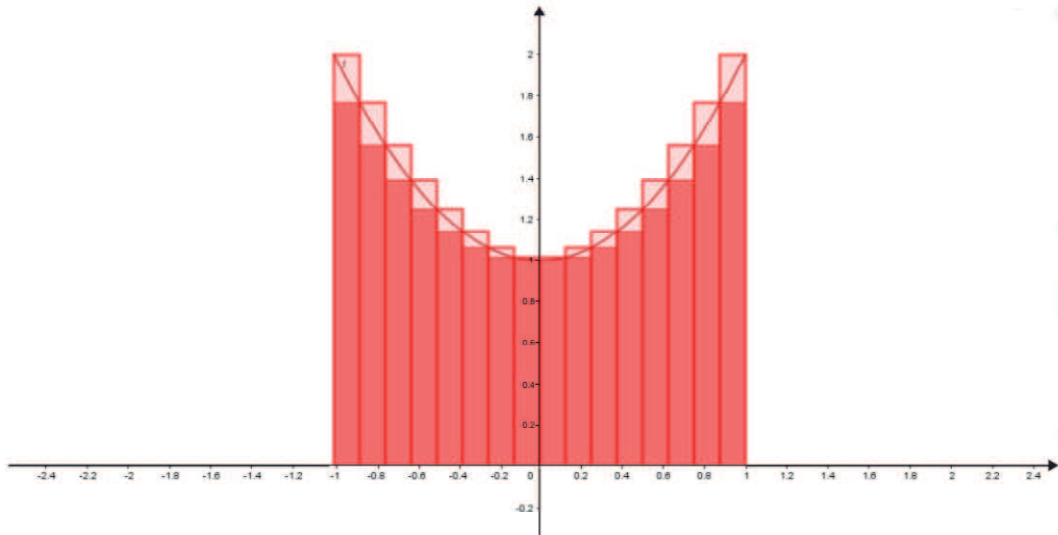
$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Com isso, podemos ver que a integral de Lebesgue abrange um raio maior de funções integráveis.

## 2.2.2 Gráficos

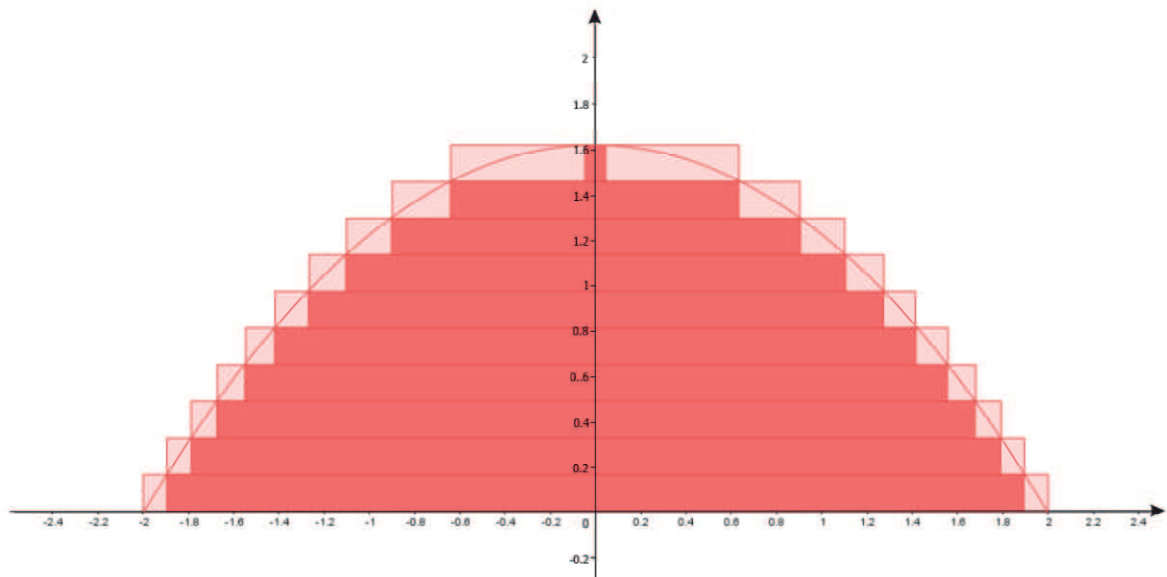
A principal diferença entre as integrais de Riemann e Lebesgue é o cálculo da área de uma curva. Enquanto Riemann tenta responder esse problema particionando o domínio da função, Lebesgue particiona a imagem. Observe:

Figura 2.8: Partições de Riemann - Fonte: Autor



Note que as partes mais escuras fazem referência aos polígonos que estão contidos na área determinada pelo gráfico da função, ou seja, a integral inferior. Já as partes claras, são os polígonos que contém a área determinada pelo gráfico da função, ou seja, a integral superior. Quando esses dois valores converge, temos a integral da função.

Figura 2.9: Partições de Lebesgue - Fonte: Autor





## Considerações Finais

A teoria desenvolvida por Lebesgue foi resultado de uma construção que era trabalhada desde 1890 a.C. e teve a contribuição de vários gênios de diferentes épocas da história.

Na parte histórica fixamos alguns resultados que ajudaram na formulação final da ideia de integral proposta por Newton e Leibniz. Porém, omitimos alguns nomes que merecem lembrança nesta parte do trabalho. São eles: Pierre Fermat (1601 - 1665), Cauchy (1789 - 1857) e Emile Borel (1871 - 1956).

Assim, devido a importância dessa teoria, o trabalho foi desenvolvido em cima de um resultado importante presente em muitos estudos de diferentes pesquisadores, o Teorema Fundamental do Cálculo. Aqui foi feito um levantamento das duas principais teorias de integral, Riemann e Lebesgue, para mostrar quais os limites apresentados na formulação do TFC. Desse modo, também é realizada uma abordagem comparativa entre a abrangência dos métodos de integração e visto que Lebesgue conseguiu compactar uma variedade de funções maior que Riemann.

Com isso, podemos concluir que a teoria de Lebesgue é vital para vários ramos da matemática, Análise, Cálculo, Equações Diferenciais e Física. Podemos ver que Lebesgue conseguiu se tornar um marco histórico com sua teoria e conseguiu suprir algumas deficiências que o estudo de Riemann deixou.

## Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, B. S. V. *Curso de Verão: Análise Real*. 2018. Universidade Federal de Campina Grande.
- [2] BARRA, G. *Measure Theory and Integration*. New Age International Publishers, 2000.
- [3] BOYER, C. B. *História da Matemática*. Edgard Blucher, 2 ed. São Paulo, 1996.
- [4] COELHO, E. R. S. *Introdução à Integral de Lebesgue*. 2013 59 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2013.
- [5] DINIZ, G. I., *História do Cálculo - Teorema Fundamental do Cálculo*. Disponível em: <http://denilsonpaulo.blogspot.com/2012/07/historia-do-calculo-teorema-fundamental.html> Acessado em 03/03/2018.
- [6] Kolmogorov, A.N. y Fomin, S.V. *Elementos de la Teoria de Funciones y del Análisis Funcional*, Editorial Mir (1972).
- [7] LEITHOLD, L. *El Cálculo*. Oxford University Press, 1998.
- [8] LIMA, E. L. *Curso de análise: Vol 1*. 12 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.
- [9] LIMA, O. A. e MACIEL, A. B. *Introdução à análise real*. Campina Grande: EDUEPB, 2005.
- [10] MEDEIROS, L. A. *Aspectos do Teorema Fundamental do Cálculo*. Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.
- [11] MEDEIROS, L. A. e MELLO, E. A. *A integral de Lebesgue*. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 6 edição, Rio de Janeiro, 2011.
- [12] MELCHIORS, A. e SOARES, M. *História do Cálculo Diferencial e Integral*. Trabalho de Graduação - Centro Universitário Leonardo da Vinci – UNIASSELVI, Indaial-SC, 2013.

- [13] PEDROSO, H. A. e PRECIOSO, J. C. *Soluções dos três problemas clássicos de construção por métodos não-euclidianos*. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru - SP, 2015.
- [14] SOUZA, V. C. *A origem do Cálculo Diferencial e Integral*. 2001 27 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Cândido Mendes, Rio de Janeiro, 2001.