UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LUCIANA DE ALMEIDA OLIVEIRA

EQUAÇÃO DO 2º GRAU E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

CAMPINA GRANDE-PB
2018

LUCIANA DE ALMEIDA OLIVEIRA

EQUAÇÃO DO 2º GRAU E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão do Curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento ás exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano

CAMPINA GRANDE-PB
2018

O48e Oliveira, Luciana de Almeida.
Equação do 2º grau e resolução de problemas [manuscrito] / Luciana de Almeida Oliveira. - 2018.
36 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2018.

"Orientação : Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano , Departamento de Matemática - CCT."

1. Ensino de matemática. 2. Fórmula de bhaskara. 3. Equação matemática . 4. Educação matemática . I. Título

21. ed. CDD 512.94

Elaborada por Gabriella D. de Oliveira - CRB - 15/840 BC/UEPB

LUCIANA DE ALMEIDA OLIVEIRA

EQUAÇÃO DO 2º GRAU E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para obtenção de título

Aprovada em: 14/06/2018.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Suzana medeiros graciano

Profª. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano
UEPB (Orientadora)

Profº. Dr. José Lamartine da Costa Barbosa
UEPB (Examinador)

Maxwell Aires da Silva

Profº. Maxwell Aires da Silva
UEPB (Examinador)

CAMPINA GRANDE-PB

2018

A Margarida Rodrigues da Silva (sempre presente), que não teve apenas o dom da vida como também a coragem de vivê-la até o fim, DEDICO ESSA CONQUISTA, com todo amor e carinho.

“Não é o desafio com quem nos deparamos que determina quem somos e o que estamos nos tornando, mas a maneira com que respondemos ao desafio. Somos combatentes, idealistas mas plenamente conscientes porque ter consciência não nos obriga a ter teoria sobre as coisas só nos obriga a sermos conscientes. Problemas para vencer, liberdade para provar. E enquanto acreditamos nos nossos sonhos, nada é por acaso.”

(Henfil)

ORAÇÃO DE SÃO FRANCISCO

Senhor, fazei-me instrumento de vossa paz.
Onde houver ódio, que eu leve o amor;
Onde houver ofensa, que eu leve o perdão;
Onde houver discórdia, que eu leve a união;
Onde houver dúvida, que eu leve a fé;
Onde houver erro, que eu leve a verdade;
Onde houver desespero, que eu leve a esperança;
Onde houver tristeza, que eu leve a alegria;
Onde houver trevas, que eu leve a luz.

Ó Mestre, Fazei que eu procure mais
Consolar, que ser consolado;
compreender, que ser compreendido;
amar, que ser amado.
Pois é dando que se recebe,
é perdoando que se é perdoado,
e é morrendo que se vive para a vida eterna.

(São Francisco de Assis)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por tudo o que tenho e o que sou, por ter me deixado chegar onde cheguei, a Ele o meu futuro e o meu louvor.

Aos meus pais, Sandra de Almeida Oliveira e Edson Petrúcio de Oliveira, por compartilharem de todos os meus sonhos como se fossem seus, com o mesmo amor, mesma garra e dedicação. Saibam que os méritos desta conquista pertencem a vocês.

Aos meus irmãos, Karina de Almeida Oliveira e Tiago de Almeida Oliveira, pela torcida e incentivo, que me deram forças para prosseguir.

À minha avó, Margarida Rodrigues da Silva (sempre presente), que muito se orgulharia se viva fosse, por ter transmitido ensinamentos sublimes e sempre eficazes aos legítimos valores da vida!

Aos meus tios, Kátia Almeida Rodrigues e Paulo Roberto de Almeida Rodrigues, pelo indispensável apoio financeiro, assim como pela brilhante revisão deste trabalho.

Aos mestres, Kátia Suzana Medeiros Graciano, José Lamartine da Costa Barbosa e Maxwell Aires da Silva, por repartirem comigo os seus conhecimentos, colocando em minhas mãos as ferramentas com as quais abrirei novos horizontes, rumo à satisfação plena dos meus ideais profissionais e humanos.

Á Evarista de Almeida Cunha, por ter me dado à oportunidade, de colocar em prática os meus conhecimentos no seu estabelecimento de ensino durante cinco anos.

A Michelson Batista Barbosa, por todo amor, carinho, paciência e compreensão que tem me dedicado.

Aos meus amados sobrinhos, Ana Júlia Gama de Almeida e Luís Gustavo de Almeida Oliveira Arruda Câmara, por terem me proporcionado tantos risos em momentos tensos e terem me presenteado com imensa felicidade, apenas por existirem.

Aos amigos, Ellen da Silva Lima, Fabricio Donato Braz, Maria de Fátima Andrade e Nilson Hilário Cavalcante, pela força visivelmente demonstrada para que eu concretizasse esse sonho.

Enfim, ao distanciar-me dessa Escola que me acolheu os sonhos, deixo o abraço fraterno e a amizade sincera cultivada durante anos de convívio. À todos que de alguma forma contribuíram para a minha graduação.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos as equações do 2º grau; um conteúdo muito importante devido à quantidade de aplicações em outros conteúdos e no dia a dia. São inúmeros os problemas que resolvemos usando as equações do 2º grau. A fórmula de Bhaskara é ensinada como uma técnica de resolução para as equações do 2º grau. Mas, veremos também outros métodos para resolver essas equações. Historicamente, a equação do 2º grau foi objeto de estudo desde a antiguidade e por diferentes povos. Acredita-se que a fórmula leva o nome de Bhaskara, por ter sido ele, o primeiro a afirmar que uma equação do 2º grau pode ter dois resultados. Nosso foco está na transformação de uma situação problema em uma equação do 2º grau, para facilitar a assimilação do conteúdo motivado pela aplicabilidade.

Palavras-chave: Equação do 2º grau. Fórmulas de Bhaskara. Resolução de problemas.

ABSTRACT

In this work we present the equations of the 2nd degree; a very important content due to the amount of applications in other contents and day to day. There are many problems we solve using the equations of the second degree. The Bhaskara formula is taught as a solving technique for the equations of the second degree. But, we will also see other methods to solve these equations. Historically, the equation of the second degree was object of study since antiquity and by different peoples. It is believed that the formula takes the name of Bhaskara, because he was the first to assert that a equation of the second degree can have two results. Our focus is on transforming a problem situation into a 2nd degree equation to facilitate the assimilation of content motivated by applicability.

Keywords: Equation of the second degree. Bhaskara formulas. Troubleshooting.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1. RETÂNGULO 23
FIGURA 2. QUADRADO COM 4 UNIDADES DE LADOS. 23
FIGURA 3. ÁREA DE UM RETÂNGULO 24
FIGURA 4. QUADRADO COM $b/2a$ 25

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 11

CAPÍTULO I

1 UMA BREVE HISTÓRIA DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU 12

1.1 BIOGRAFIA DE BHASKARA 14

CAPÍTULO II

2 EQUAÇÃO DO 2º GRAU 16

2.1 EQUAÇÃO DO 2º GRAU COMPLETA E INCOMPLETA 16

2.2 FORMA CANÔNICA 17

2.3 RAÍZES DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU 17

2.4 RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU 19

2.5 RELAÇÃO ENTRE AS RAÍZES E OS COEFICIENTES DE UMA EQUAÇÃO – RELAÇÕES DE GIRARD 26

2.6 EQUAÇÕES BIQUADRADAS 27

2.7 EQUAÇÕES QUE RECAEM EM EQUAÇÕES QUADRÁTICAS 29

CAPÍTULO III

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU 30

CONSIDERAÇÕES FINAIS 35

REFERÊNCIAS 36

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem a finalidade de desenvolver um conteúdo relevante no Ensino Fundamental, pois é aplicado com frequência em vários conteúdos do ensino médio e até do ensino superior: a equação do 2º grau.

O estudo foi pautado em referenciais bibliográficos e nasceu após a inquietude sobre a dificuldade dos alunos fazerem a conexão entre o ensino da equação do 2º grau e a sua utilização na vida prática. Não compreendendo que as fórmulas são importantes, úteis e práticas, aumentando assim, o desinteresse pela matemática. Então, para incentivar o público alvo a ter mais interesse por este conteúdo, resolvemos mostrar essa utilização através da resolução de problemas. Torna-se bastante motivador ver a equalização de problemas, após a tradução para linguagem simbólica da matemática e aplicação das fórmulas.

A pesquisa em história da matemática tem se configurado como tema de interesse crescente comprovado pelas diversas fontes e publicações já acessíveis, relacionadas ou não ao ensino da matemática, como por exemplo, o estudo de conceitos, fórmulas, métodos e biografias. O estudo da equação da equação do 2º grau resulta, tradicionalmente, à conhecida fórmula de Bhaskara para resolução da equação. Em muitos casos, ainda é notória a vinculação dessa fórmula ao nome de um importante matemático hindu do século XII – Bhaskara. A origem exata dessa associação é difícil de estabelecer, entretanto sabe-se que remonta há algumas décadas e que essa relação é circunscrita exclusivamente ao ensino de matemática no Brasil.

O trabalho está dividido em três capítulos, além das considerações finais. No primeiro capítulo, partiremos de uma breve contextualização sobre a equação do 2º grau à biografia de Bhaskara. No segundo capítulo, desenvolveremos gradativamente os principais fatos, propriedades e análises que conduzem à fórmula de Bhaskara. No terceiro e último capítulo, faremos algumas aplicações, com problemas práticos que têm sua solução facilitada com o auxílio da equação do 2º grau, para melhor assimilação do conteúdo.

CAPÍTULO I

Neste capítulo vamos abordar brevemente a história das equações do 2º grau, assim como falaremos um pouco sobre Bhaskara e suas contribuições para o desenvolvimento da matemática.

1 UMA BREVE HISTÓRIA DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Sendo a matemática um edifício de encadeamento lógico e crescente, podemos notar através da cronologia, que diversos matemáticos contribuíram para o surgimento da Equação do 2º grau, tal qual entendemos hoje em dia.

Problemas que recaem numa equação do 2º grau já apareciam, há mais de quatro mil anos em textos escritos em placas de argila na mesopotâmia, e em papiros no Egito. O primeiro indício do uso de equações está relacionado, ao ano de 1650 a.C, no documento denominado Papiro de Rhind, adquirido por Alexander Henry Rhind, na cidade de Luxor- Egito, em 1858. O papiro de Rhind também recebe o nome de Ahmes, um escriba que relata no papiro a solução de problemas relacionados à matemática. Segundo Carvalho (2008, p. 55-58) "uma síntese histórica também é apresentada em na qual, se nota que, entre os egípcios, problemas constantes em papiro, envolvendo geometria, interpretados em linguagem atual, configuram equações do 2º grau."

Antes mesmo da era cristã, babilônios, egípcios e gregos eram detentores de técnicas capazes de solucionar problemas envolvendo esse tipo de equação. A matemática grega é diferente da babilônica e egípcia. Eles transformaram os reconhecimentos destas civilizações em resultados bem estruturados. Babilônios e egípcios utilizavam-se de textos e símbolos como ferramenta auxiliar na resolução. Já os gregos conseguiam concluir suas resoluções, realizando associações com a geometria, pois eles possuíam uma forma geométrica para solucionar os problemas ligados à equação de 2º grau.

O desenvolvimento dessa importante ferramenta matemática se deu através dos diversos métodos de soluções, desde as receitas em prosa, que ensinavam como proceder para determinar as raízes, em exemplos concretos com coeficientes numéricos, até a forma geral de resolução. Fórmula essa, que adquiriu o aspecto que tem hoje, somente quando se generalizou o uso de letras para representar os coeficientes de uma equação desde os mesopotâmios e egípcios, até os dias atuais.

Dentre os indianos, os matemáticos: Shidara, Bramagupta e Bhaskara; também contribuíram para o desenvolvimento da matemática, fornecendo importantes informações sobre as equações do 2º grau. Shidara foi o primeiro a estabelecer uma fórmula matemática para a resolução das equações biquadradas, pois Bramagupta e Bhaskara trabalhavam utilizando textos. De forma brilhante, os árabes foram representados pelo gênio Al-Klowarizmi, criando metodologia específica para a resolução das equações do 2º grau. Ele recebeu muita influência da geometria de Euclides (300 a.C.), em “Os elementos”, que dedicou algumas proposições sobre construções de aplicações de áreas e sobre o segmento áureo, que se comportam como casos típicos de equações do 2º grau:

> Para resolver as equações do 2º grau, Al-Khowarizmi utilizava somente palavras, até mesmo para expressar número, e seu método de resolução consistia em formar o quadrado perfeito. (GIOVANNI JÚNIOR, et al, 2009).

Finalmente tem as resoluções de Françóis Viéte (1540-1603) e de René Descartes (1596-1650) que podem ser chamadas, respectivamente de algébrica e analítica. Nesses dois casos, especificamente, como se faz atualmente, já se usou letras para representar os coeficientes das equações. No início do século XIX, o califa Al-Ma’mun estabeleceu, em Bagdá, a Bayat Al-Hikma (A casa da sabedoria), uma espécie de instituto de pesquisa, onde muitos, dos principais trabalhos matemáticos gregos foram traduzidos para o árabe. Assim, estudiosos islâmicos absorveram as antigas tradições matemáticas dos babilônicos e a trigonometria dos hindus. Para o historiador da matemática Victor Katz (1998):

> A maior contribuição da matemática islâmica foi na área de álgebra. Eles tomaram os trabalhos já desenvolvidos pelos babilônicos, combinaram com a herança clássica grega da geometria e produziram uma nova Álgebra.

Sendo assim, podemos observar que são vários os momentos em matemática, bem como em outras áreas do conhecimento, que a evolução do problema em resolução acaba desembocando em equações de 2º grau. Por este motivo, o conhecimento dos processos de resolução desse tipo de equação é importante e, além disso, necessário. Muitos estudiosos contribuíram para a descoberta e aperfeiçoamento da resolução do 2º grau, que através de inúmeros trabalhos, desenvolveram a seguinte fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, onde\ \Delta = b^2 - 4ac$$

Observe que o desenvolvimento matemático contribui com a construção do conhecimento do conteúdo matemático equação de 2º do grau, nos situando no tempo e no espaço, acompanhando as mudanças que o mesmo sofreu.

De fato, as aplicações variam aos inúmeros casos, seja como técnica para resolver problemas mais avançados, para encontrar a raiz de uma equação do 2º grau. Portanto, em busca de novas aplicações e implicações que a ferramenta da resolução de uma equação biquadrada oferece, é que matemáticos do mundo estão buscando ainda modelos e padrões a fim de mostrar que a matemática tem muito ainda para nos oferecer.

1.1 BIOGRAFIA DE BHASKARA

Um dos maiores matemáticos do mundo, Bhaskara Akaria ou Bhaskara II, como também era conhecido, nasceu no berço da Índia em 1114, na cidade de Vijayapura, no Estado de Karnatuba. Sua mãe embora gozasse de boa saúde, morreu devido a complicações no parto.

Bhaskara foi instruído nas ciências (matemático e astronomia), por seu pai, Marshevara, um astrólogo de prestígio, que morreu em 1134. Essa forma de transferir conhecimento entre pai e filho, era bastante usual naquela época. Profissionalmente, Bhaskara foi astrônomo, astrólogo, professor e matemático. Com o intuito de dar base à Astrologia, discorreu sobre as posições planetárias e elipses.

As principais obras de Bhaskara são: Lilavati, Bijaganita e Siddhantasioromani. A primeira o perenizou no auge dos seus 25 anos e trata da aritmética. Já a segunda é dividida em 12 capítulos e refere-se à álgebra, contendo problemas de equações lineares e quadráticas. Vale salientar, que as soluções para tais problemas eram feitas em prosa. A última obra trata da astronomia e da esfera. A mesma é dividida em duas partes.

Lilavati, obra traduzida em turco, é um antropônimo feminino. De acordo com Fragoso (1999, p. 30-32), Lilavati significa formosa e bela, em sânscrito, ou seja, “a linda menina dos olhos fascinantes". Conta à lenda que, Bhaskara por ser muito autoconfiante nas suas previsões astrológicas, fez com que sua filha perdesse a oportunidade de se casar. Para homenageá-la e consolá-la, deu seu nome ao livro. Isso o fez ganhar notoriedade.

Lilavati "a linda menina dos olhos fascinantes". Expõe a lenda que os astrólogos predisseram data e horas propícias para o seu casamento. Como o tempo era marcado através do relógio d'água (dois recipientes com água disposta em níveis distintos, onde a água passa um para o outro marcando o horário). Naqueles dias, Lilavati, ansiosa, debruçou-se sobre um dos recipientes e, por obra, do destino, uma das pérolas que adornava seus cabelos caiu, interrompendo o fluxo de água e, desse modo, sem a referida cronometragem, ela não se casou. Em sua tristeza, seu pai, Bhaskara, resolveu imortalizá-la através do título de sua obra, pois acreditavam que quando se atribuía o nome de uma pessoa em um livro, esta viveria para sempre (FRAGOSO, 1999, p. 31-32).

Bhaskara, devido ao seu conhecimento matemático, ainda jovem, foi chefe do observatório astronômico. Levando-o a ganhar a confiança dos matemáticos, Varahamihira e Brahmagupta.

Vítima de afogamento num rio, Bhaskara morreu aos 71 anos, na cidade de Ujaim, no Estado de Madia Praxede, também na índia, no ano de 1185.

Como foi possível observar, Bhaskara contribuiu em vários ramos da matemática.

CAPÍTULO II

Neste capítulo vamos abordar brevemente definições da equação do 2º grau, bem como métodos para a resolução da mesma.

2 EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Denomina-se equação do 2º Grau na incógnita x toda equação do tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Assim:

- $2x^2 + 2x - 40 = 0$ é uma equação do 2º grau na incógnita x, em que a=2, b=2 e c= -40.
- $x^2 - 7x + 10 = 0$ é uma equação do 2º grau na incógnita x, em que a=1, b= -7 e c= 10.
- $5y^2 - 7y + 2 = 0$ é uma equação do 2º grau na incógnita y, em que a=5, b= -7 e c= 2.
- $x^2 - 7x + 10 = 0$ é uma equação do 2º grau na incógnita x, em que a=1, b= -7 e c= 10.
- $x^2 - 25 = 0$ é uma equação do 2º grau na incógnita x, em que a=1, b= 0 e c= -25.
- $6x^2 - 9x = 0$ é uma equação do 2º grau na incógnita x, em que a=6, b= -9 e c= 0.

Nas equações do 2º grau com uma incógnita x, os números reais a, b e c são chamados de coeficientes da equação. Assim, se a equação for à incógnita x:

- a será sempre o coeficiente do termo em x^2;
- b será sempre coeficiente do termo em x;
- c será o coeficiente sem variável ou o termo independente de x.

2.1 EQUAÇÃO DO 2º GRAU COMPLETA E INCOMPLETA

Pela definição, devemos ter sempre $a \neq 0$. Entretanto, podemos ter $b = 0 \; ou \; c = 0$.

Assim quando $b \neq 0 \; ou \; c \neq 0$, a equação do 2º grau se diz completa.

Exemplos:

- $5x^2 - 8x + 3 = 0$ é uma equação completa(a=5, b= -8 e c= 3).
- $y^2 + 12y + 20 = 0$ é uma equação completa(a= 1, b= 12 e c= 20).

Quando $b = 0\ ou\ c = 0$ ou $b = c = 0$ a equação do 2º grau se diz incompleta.

Exemplos:

- $x^2 - 81 = 0$ é uma equação incompleta (a=1, b= 0 e c= -81).
- $10t^2 + 2t = 0$ é uma equação incompleta (a= 1, b= 2 e c= 0).
- $5y^2 = 0$ é uma equação incompleta (a= 5, b= 0 e c= 0).

2.2 FORMA CANÔNICA

Uma equação do 2º Grau é uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a, b\ e\ c$ são números reais dados, com $a \neq 0$. Dada uma equação do 2º grau como acima, denotamos por Δ o número real Δ= $b^2 - 4ac$, e o denominamos discriminante da equação. Nossa missão é tentar calcular quando existirem as raízes reais de uma equação do 2 grau. Para isso, considere o seguinte trinômio:

$ax^2 + bx + c \Longrightarrow 0 = a\left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right] = 0$. As duas primeiras parcelas dentro do colchete são as mesmas do desenvolvimento de $\left[x + \frac{b}{a}\right]^2$. Completando o quadrado, podemos escrever:

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2\,\frac{bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right],$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

A última forma apresentada é chamada de forma canônica.

2.3 RAÍZES DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Podemos agora calcular, caso existam, as raízes reais de uma equação do 2º grau. Com efeito, sendo $a \neq 0$, temos as seguintes equivalências:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula leva o nome de fórmula de Bhaskara, em homenagem ao matemático hindu que viveu no século XII, o qual foi citado no capítulo I.

Dependendo do discriminante Δ, as raízes podem ser ou não números reais. Vejamos as três possibilidades:

1) Δ *é um número real positivo* $\Delta > 0$.

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ é um número real e existem dois valores reais diferentes para as raízes da equação:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

2) Δ *é zero positivo* ($\Delta = 0$).

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ é igual a zero e ocorre:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-\mathrm{b}}{2a}$$

Observamos, então que existe um único valor real para a incógnita x, embora seja costume dizer que a equação tem duas raízes reais e iguais, ou seja,

$$x_1 = x_2 = -\frac{\mathrm{b}}{2a}$$

3) Δ *é um número negativo* ($\Delta < 0$).

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ não é um número real, pois não há no conjunto dos números reais a raiz quadrada de um número negativo. Dizemos, então, que não há valores reais para a incógnita x, ou seja, a equação não tem raízes reais.

As raízes da equação pertencem a um outro conjunto numérico chamados de números complexos. Dessa forma, como acabamos de ver, a existência ou não das raízes reais, bem como o fato de elas serem duas ou uma única, depende, exclusivamente do discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Vamos agora, determinar as raízes de algumas equações do 2º grau com uma incógnita, usando a fórmula resolutiva ou fórmula de Bhaskara.

1) Resolver a equação $x^2 - 2x - 8 = 0$ no seguinte $\mathbb{R}$ nessa equação, temos:

$$a = 1, \qquad b = -2, \qquad c = -8.$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

Como $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais distintas dadas por:

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-2) \pm \sqrt{36}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-(-2) + 6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ e \\ x_2 = \dfrac{2 - 6}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Os números 4 e -2 são as raízes reais da equação dada. Então: $S = \{4, -2\}$.

2) Resolver a equação $x^2 - 14x + 49 = 0$ no conjunto $\mathbb{R}$, nessa equação, temos:

$$a = 1, \qquad b = -14, \qquad c = 49.$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4(1).49 = 196 - 196 = 0$$

Como $\Delta = 0$, a equação tem uma única raiz real, que é dada por:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-14)}{2(1)} = \frac{14}{2} = 7$$

O número 7 é a única raiz real da equação dada. Então: $S = \{7\}$.

3) Resolver a equação $x^2 - 5x + 8 = 0$ no conjunto $\mathbb{R}$, nessa equação, temos:

$$a = 1, \qquad b = -5, \qquad c = 8.$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1).(8) = 25 - 32 = -7$$

Como $\Delta < 0$, a equação dada não tem raízes reais. Logo, $S \neq \emptyset$.

2.4 RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU

2.4.1 Resoluções de equações incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$.

a) $x^2 - 64 = 0$

$x^2 - 64 + 64 = 0 + 64$ (adiciona 64 nos dois membros).

$x^2 = 64$ (cálculo da raiz quadrada nos dois membros)

$x = \sqrt{64} = 8$ ou $x = -\sqrt{64} = -8$

Portanto, as raízes da equação são $S = \{-8, 8\}$.

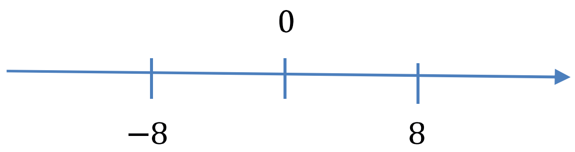
b) $4x^2 - 49 = 0$

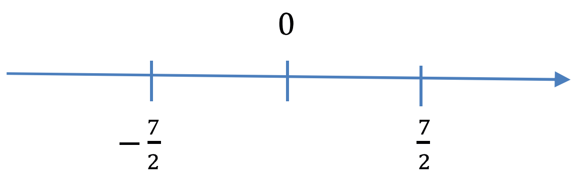
$4x^2 - 49 + 49 = 0 + 49$
$4x^2 = 49$
$\frac{4x^2}{4} = \frac{49}{4}$
$x^2 = \frac{49}{4}$
$x = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$ ou $x = -\sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{7}{2}$

Portanto, as raízes da equação são $S\{-\frac{7}{2}$ e $\frac{7}{2}\}$.

Como não existe um número real que elevado ao quadrado seja $a = -7$, então não existe número real x que seja solução da equação. Portanto, para a equação $3x^2 - 25 = 4$, não existem raízes reais.

Observação: nas equações do tipo $ax^2 + c = 0$, que possuem soluções reais, as raízes são opostas. Se representarmos as raízes das equações dos exemplos $a)$ e $b)$ na reta numérica, temos:

a)


b)


2.4.2 Resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$.

a) $x^2 - 8x = 0$

$x(x - 8) = 0$ (coloca o fator comum x em evidência). Como o produto dos fatores é zero, pelo menos um dele é zero. Assim temos:

$x = 0$ ou $x - 8 = 0$
$x - 8 + 8 = 0 + 8$
$x = 8$

1º Fator 2º Fator

Portanto, as raízes da equação são $S = \{0, 8\}$.

b) $6x^2 + 18\text{x} = 0$

$$\text{x}(6\text{x} + 18) = 0$$

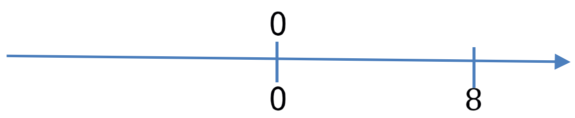
Assim, temos:

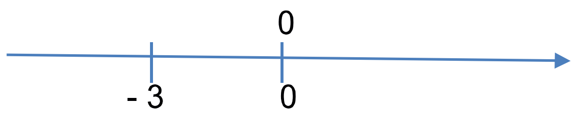
$x = 0$ ou $6x + 18 = 0$

$$6x + 18 - 18 = 0 - 18$$
$$6x = -18$$
$$\frac{6x}{6} = \frac{-18}{6}$$
$$x = -3$$

Portanto, as raízes das equações são $S = \{-3, 0\}$.

Observação: Toda equação do 2º grau de forma $ax^2 + bx = 0$ apresenta uma raiz igual a zero. Se representarmos as raízes dos exemplos a e b na reta numérica, temos:

a) 

b) 

2.4.3 Resolução das equações incompletas do tipo $ax^2 = 0$.

a) $9x^2 = 0$

$$\frac{9x^2}{9} = \frac{0}{9}$$
$$x^2 = 0$$
$$x.x = 0$$

Portanto, a equação tem duas raízes iguais a $S = \{0\}$.

2.4.4 Resolução de equações do 2º grau completas

Para calcular as raízes de uma equação do 2º grau podemos utilizar três métodos: fatoração, completar quadrados ou fórmula resolutiva (Bhaskara).

1) Fatoração:

Vamos determinar as raízes de $x^2 - 14x + 49 = 9$ por fatoração.

- $x^2 - 14x + 49 = 9$
- $(x - 7).(x - 7) = 9$

- $(x-7)^2 = 9$

Nessa mesma equação o 1º membro é um trinômio quadrado perfeito, ou seja, os trinômios quadrados perfeitos são expressões que podem ser escritas na forma de $ax^2 - 2ab + b^2 e\ ax^2 + 2ab + b^2$. Essas expressões são obtidas por meio do quadrado da soma ou da diferença de dois termos:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Como há dois números cujo quadrado é igual a 9, temos:

- $x - 7 = +\sqrt{9}$
- $x - 7 = 3$
- $x - 7 + 7 = 3 + 10$
- $x = 10$

- $x - 7 = -\sqrt{9}$
- $x - 7 = -3$
- $x - 7 + 7 = -3 + 10$
- $x = 4$

Portanto, as raízes da equação são $4\ e\ 10$. S = {4, 10}

2) Completar Quadrados

Há equações do 2º grau em que o 1º membro não é um trinômio quadrado perfeito. Nesses casos, podemos determinar as raízes da equação utilizando o método de completar quadrados. Esse método foi utilizado pelo matemático árabe al-Khowarizmi por volta de 825 d.C. em seu livro Al-Jbr Wa'l muqabalah. Ele consiste na construção de quadrados e retângulos para obter raízes da equação.

Observe como podemos calcular as raízes de $x^2 + 8x + 7 = 0$ utilizando o método de completar quadrados.

- Como o 1º membro dessa equação não é um trinômio quadrado perfeito, é preciso acrescentar um número apropriado aos dois membros da igualdade para poder fatorá-lo. Para isso, inicialmente isolamos o termo independente no 2º membro da equação.

  $x^2 + 8x + 7 - 7 = 0 - 7$

  $x^2 + 8x = -7$

- Escrevemos o 1º membro da equação de maneira convincente e o representamos geometricamente, como mostra a figura

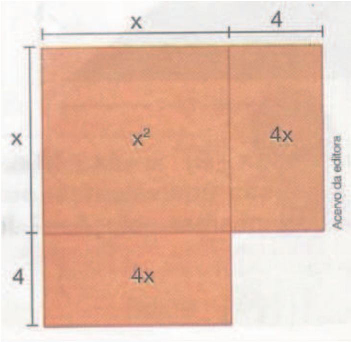
$$x^2 + 8x = x^2 + 24.x$$

.

Área de um quadrado com lados x

Área de um retângulo com lados medindo $4\ e\ x$.

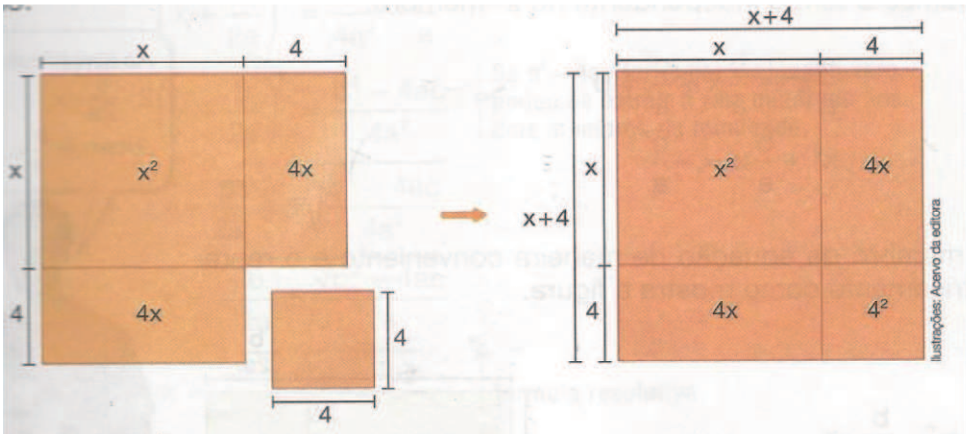
Figura 1: Retângulo



Fonte: Pataro e Souza (2009. p.32)

Observando a figura, podemos notar que para completá-la a fim de obter um quadrado, temos de acrescentar um quadrado com 4 unidades de lado.

Figura 2: Quadrado com 4 unidades de lados.



Fonte: Pataro e Souza (2009. p.33)

Dessa maneira, para obtermos um trinômio quadrado perfeito no 1º membro da equação, acrescentamos 4² aos dois membros

$$x^2 + 8x + 4^2 = -7 + 4^2$$

$$x^2 + 8x + 16 = 9$$

Agora fatoramos o trinômio quadrado perfeito e resolvermos a equação:

$$x^2 + 8x + 16 = 9$$

$$(x + 4)^2 = 9$$

$$x + 4 = +\sqrt{9}$$

$$x + 4 = 3$$

$$x + 4 - 4 = 3 - 4$$

$$x = -1$$

$x + 4 = -\sqrt{9}$

$x + 4 = -3$

$x + 4 - 4 = -3 - 4$

$x = -7$

Portanto, as raízes da equação são -1 e -7.

3) Fórmula Resolutiva (Bhaskara)

Outra maneira de resolvermos uma equação do 2º grau é por meio de uma fórmula, chamada fórmula resolutiva, que consiste na generalização do método de completar quadrados. Utilizando essa fórmula é possível obter raízes de uma equação do 2º grau através de seus coeficientes.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Veja como podemos deduzir a fórmula resolutiva. Inicialmente, dividimos cada termo da equação do 2º grau em $ax^2 + bx + c = 0$ por a. Depois, isolamos o termo independente no 2º membro.

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

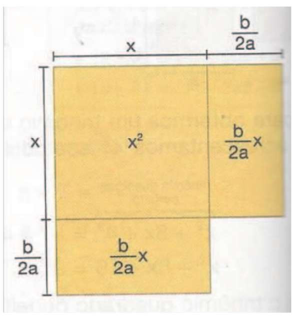
Escrevemos o 1º membro da equação de maneira convincente e o representamos geometricamente como mostra a figura.

$$x^2 + \frac{bx}{a} = x^2 + 2.\frac{b}{2a}.x$$

Área de um quadrado com lados medindo x.

Área de um retângulo com lados medindo x e $\frac{b}{2a}$.

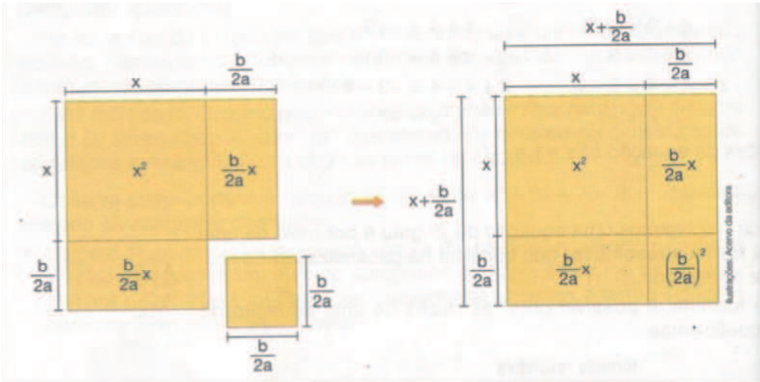
Figura 3: Área de um retângulo



Fonte: Pataro e Souza (2009. p.34)

Observamos a figura, podemos notar que, para completá-la e obter um quadrado, temos que acrescentar um quadrado com $\frac{b}{2a}$ unidades de lados:

Figura 4: quadrado com $b/2a$



Fonte: Pataro e Souza (2009. p.34)

Dessa maneira para obtermos um trinômio quadrado perfeito no 1º membro da equação, acrescentamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ aos dois membros:

$$\underbrace{x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{Trinômio Quadrado perfeito.}} = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Agora, fatoramos o trinômio quadrado perfeito e isolamos a incógnita x no 1º membro.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se $b^2 - 4ac$ for maior ou igual a zero, podemos extrair a raiz quadrada nos dois membros da igualdade.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2.5 RELAÇÃO ENTRE AS RAÍZES E OS COEFICIENTES DE UMA EQUAÇÃO – RELAÇÕES DE GIRARD

Por meio dos coeficientes de uma equação do 2º grau, podemos estabelecer duas relações envolvendo suas raízes. Para determinamos essas relações consideramos uma equação do 2º grau, cujas raízes são dadas por:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{com}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \ e \ \Delta \geq 0$$

Agora estabelecemos as seguintes relações:

- Soma das raízes (S):

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\text{b}}{2a} = \frac{-\text{b}}{a}$$

- Produto das raízes (P):

$$x_1.x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2}$$

$$= \frac{(b^2) - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{\text{a}}$$

Portanto:

s = $x_1 + x_2 = \frac{-b}{\text{a}}$ p = $x_1.x_2 = \frac{c}{\text{a}}$

Utilizando as relações de soma e produto das raízes, podemos escrever uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ de outra maneira. Para isso, dividimos todos os termos dessa equação por a.

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Como s= $-\frac{b}{a}$ e p= $-\frac{c}{a}$, temos:

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - sx + p = 0$$

Podemos escrever uma equação do 2º grau por meio de duas raízes dadas. Uma equação, cujas raízes são 3 e -4 por exemplo, pode ser escrita da seguinte maneira:

$s = x_1 + x_2 = 3 + (-4) = -1$ e p = $x_1 . x_2$=3.(-4)= -12

Como $x^2 - sx + P = 0$, logo
$x^2 - (-1)x + (-12) = 0$, ou seja,
$x^2 + x - 12 = 0$

Portanto, uma equação cujas raízes são 3 e -4 é dada por $x^2 + \mathrm{x} - 12 = 0$.

1) Veja como podemos calcular as raízes da equação $x^2 - 4\mathrm{x} - 21 = 0$. Inicialmente, obtemos dois números cuja soma é o oposto do coeficiente b, isto é, $-(-4) = 4$. Veja algumas possibilidades.

$$1\ e\ 3;\ \ 7\ e - 3;\ 2\ e\ 2;\ 8\ e - 4.$$

Como o produto das raízes é o próprio coeficiente c, isto é, -21, as raízes são $7\ e - 3$, pois:

$s = 7\ - 3 = 4$ $p = 7.(-3) = -21$

2.6 EQUAÇÕES BIQUADRADAS

Denomina-se biquadrada, na incógnita x, toda equação da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, em que $a, b\ e\ c$ são números reais e $a \neq 0$. Dessa forma, as equações a seguir são biquadradas:

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$9x^4 - 6x^2 = 0$

Nota-se que as equações biquadradas são equações incompletas do 4º grau, desprovidas dos termos em que a incógnita teria expoente ímpar. De modo que, a resolução das equações biquadradas envolve um artifício, conforme nos exemplos a seguir.

a)Resolver a equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, considerando U= $\mathbb{R}$. Vamos, inicialmente, indicar $x^2 = p$, usando a incógnita auxiliar p.

Substituindo x^2 por p na equação dada, temos:

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0$

$p^2 - 5p^2 + 4 = 0 \Rightarrow$ Equação do 2º grau na incógnita p.

A partir da equação acima, podemos evidenciar os seguintes termos:

$a = 1, \quad b = -5, \; c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1).(4) = 25 - 16 = 9$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta^2}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{5+3}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ p_2 = \dfrac{5-3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

As raízes $4 \, e \, 1$ são valores reais da incógnita p. Como fizemos $x^2 = p$, precisamos, agora obter os valores de x, que serão as raízes da equação biquadrada. Assim:

Para p = 4, temos: x² = 4 ⇒ $x \pm \sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$.

Para p = 1, temos: x² = 1 ⇒ $x \pm \sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1$.

Então: $S = \{-2, 2, -1, 1\}$.

b)Determinar a solução da equação $x^2 = 1 + \frac{2}{x^2}$ no conjunto $\mathbb{R}$ *. Incialmente, escrevemos a equação na sua forma reduzida:

$x^2 = 1 + \frac{2}{x^2} \Rightarrow \frac{4}{x^2} = \frac{x^2+2}{x^2} \Rightarrow x^4 = x^2 + 2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0$

Vamos agora, usar a incógnita auxiliar s, fazendo $x^2 = s$

$s^2 - s \;\; - 2 = \; 0$

$a = 1 \, , \;\; b = \; -1, \qquad c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1).(-2) = 1 + 8 = 9$

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta^2}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\begin{cases} s_1 = \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ s_2 = \dfrac{1-3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

As raízes $2\ e -1$ são valores reais da incógnita s. Como fizemos $x^2 = s$, vamos obter os valores de x, que serão as raízes da equação biquadrada em $\mathbb{R}^*$. Desse modo:

Para s=2, temos: $x^2 = 2 \Rightarrow x = +\sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

Para s = -1, temos: $x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$, logo $\nexists\ \mathbb{R}$.

Então: $S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

2.7 EQUAÇÕES QUE RECAEM EM EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Algumas equações que não são quadráticas podem ser reescritas como equações quadráticas para facilitar sua resolução.

Exemplo: $x^{16} - x^8 - 2 = 0 \Rightarrow (x^8)^2 - x^8 - 2 = 0$.

Podemos chamar $x^8 = t$, então: $(x^8)^2 - x^8 - 2 = 0 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$. Resolvendo, $a = 1,\ b = -2\ e\ c = -2,\ \Delta = b^2 - 4ac$.

$$t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-2)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Portanto: $t = 2\ ou\ t = -1$. Como $t = x^8$, temos: $\begin{cases} x^8 = 2 \Rightarrow \mathrm{x} = \pm\sqrt[8]{2} \\ x^8 = -1 \end{cases}$

Devemos descartar essa última igualdade, pois não existe x real que a verifica. Assim o conjunto solução é: S: $\{+\sqrt[8]{2},\ -\sqrt[8]{2}\}$.

Após esses métodos de resolução de equação do 2º grau, vamos agora utilizá-los na resolução de problemas.

CAPÍTULO III

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Mostraremos algumas aplicações de equações do segundo grau e falaremos resumidamente sobre a resolução de problemas desse tipo de equações, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais. Dessa forma, faremos um breve comentário sobre as estratégias de resolução de problemas, segundo Polya (1964), em seu livro “A arte de resolver problemas”.

Os PCN’S trazem as equações do segundo grau dentro do bloco de números e operações, e orienta que o docente procure apresentá-lo através de situações-problema, para que proporcione ao aluno uma melhor compreensão do conteúdo. Segundo os PCN’S Brasil (1998, p.48) é fundamental que “[...] a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas e variáveis) e o conhecimento da “sintaxe” (regras para resolução de uma equação)”.

Desse modo, percebemos que, ao conhecermos as aplicações do conteúdo, podemos criar situações problemas que oportunizem ao aluno o desenvolvimento das habilidades e competências através da aprendizagem significativa e, assim, construir o seu próprio conhecimento. Articulando o conhecimento prévio ao novo. Vejamos algumas situações-problema em que se podem utilizar os nossos conhecimentos sobre equações de 2º Grau.

Problema I:

Michel comprou algumas garrafas de um bom vinho por 540 reais. Por ter obtido um desconto de 15 reais no preço de cada garrafa, ele conseguiu comprar 3 garrafas a mais do que previa, originalmente. Quantas garrafas de vinho Michel comprou?

Solução do problema I:

A unidade de cada garrafa custa y e Michel compraria x garrafas, desembolsando $x \,.\, y = R\$\ 540,00$. Recebeu um desconto e a garrafa passou a custar $y - 15$, conseguindo comprar $x + 3$ garrafas pelo mesmo preço. Isso nos diz que, (y – 15) . (x + 3) = R$ 540. Fazendo as devidas operações, inclusive simplificando, chegamos ao trinômio $X^2 + 3x - 108 = 0$ e suas raízes são exatamente: $x' = -12$ e $x'' = 9$. Como não existe preço negativo, a solução pertinente é $x'' = 9$. Logo, conclui-se que Michel comprou 9 garrafas de vinho por R$ 540,00 e a unidade custou R$ 45,00.

É notório que o ensino de equações, deixa de ser desprovido de significados, quando o conteúdo é apresentado de forma contextualizada, possibilitando a promoção de mecanismo para resolução e é por essa razão que os Parâmetros Curriculares Nacionais falam que

> Resolução de situação-problema que podem ser desenvolvidos por uma equação do 2 grau, cujas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta. (BRASIL, 1998, p.88).

É evidente que, essa metodologia de ensino é um meio facilitador, no que diz respeito à aprendizagem, pois provoca a curiosidade e constante motivação do educando, exigindo raciocínio lógico, investigação, reflexão e empenho.

Com essa aplicabilidade prática é possível formar cidadãos com elevado pensamento crítico, alta criatividade e capacidade de execução. Diante disso, exercitar de forma mecânica, tornou-se uma prática obsoleta de ensino. Para se atingir o status de escola pensante, há que se quebrar de paradigmas de escola ensinante, com resposta pronta para o aluno.

Vejamos outros problemas, onde podemos usar as equações do 2º grau.

Problema II:

Três homens, Gabriel, Miguel e Rafael trabalhando juntos, realizam uma tarefa em x horas. Se trabalharem sozinhos, Gabriel executaria a tarefa em $x + 1\, horas$; Miguel, em $x + 6\, horas$; e Rafael, em $2x\, horas$. Calcule x.

Solução do problema II:

Fazendo o cálculo do trabalho individual, realizado em uma hora, temos que: Gabriel: $\frac{1}{(x+1)}$; Miguel: $\frac{1}{(x+6)}$ e Rafael: $\frac{1}{2x}$. Caso o trabalho fosse realizado juntos, fariam $\frac{1}{x}$ da tarefa. Segue que:

$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x} \Longrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x} \Longrightarrow \frac{x+6+x+1}{(x+1)(x+6)}=\frac{2-1}{2x} \Longrightarrow \frac{2x+7}{(x^2+7x+6)}=\frac{1}{2x} \Longrightarrow$

$3x^2+7x-6=0$

As raízes dessa equação são: $x'=-3\ e\ x''=\frac{2}{3}$. Como a raiz negativa não serve como solução do problema, a resposta é $x=\frac{2}{3}$ de horas.

Segundo Lima (2006) as equações do tipo $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x}$ recebe o nome de equações fracionárias e algumas não parecem ser do 2º grau, mas podem ser transformadas de modo a sê-lo.

Problema III:

O produto da idade de Luís Gustavo pela de Ana Júlia é igual a 374. Luís Gustavo é 5 anos mais velho que Ana Júlia. Quantos anos tem cada um deles?

Solução III:

Indicando por x a idade de Luís Gustavo, teremos que x – 5 será a idade de Ana Júlia. Como o produto das idades é igual a 374, temos:

$$x(x-5)=374 \Rightarrow x^2-5x-374=0,$$

Onde suas raízes são respectivamente: x' = -17 e x'' = 22 pelo fato de estarmos calculando idades, a raiz x' = 17 é descartada. Logo, como idade de Luís Gustavo é 5 anos mais velho que Ana Júlia, sua idade é 17 anos.

Problema IV:

Uma tela retangular com área de $9600cm^2$ de comprimento igual a três meios da altura. Quais são as dimensões desta tela?

Solução do problema IV:

Considerando x a altura da tela, temos que $\frac{3x}{2}$ será o seu comprimento. Para calcular a área de uma figura geométrica retangular, multiplicamos a medida do seu comprimento, pela medida da sua altura. Em forma de sentença matemática, temos:

$$x.\frac{3x}{2}=9600cm^2.$$

Que pode ser expressa como: $\frac{3x^2}{2}=9600=0 \Longrightarrow 3x^2=19200$. Chegamos a uma equação do 2º grau incompleta, que terá duas raízes reais opostas, o que ocorre sempre que o coeficiente b é igual a zero. Calculemos: $3x^2 = 19200 \Rightarrow x^2 = \frac{19200}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{6400} \Rightarrow x = \pm 80$. Portanto, as raízes encontradas são -80 e 80. Como uma tela não pode ter dimensões negativas, desconsideremos a raiz -80.

Como $\frac{3x}{2}$ representa o comprimento da tela, temos, então que ela será de $\frac{3}{2}$ de 80, que é igual a 120. Conclui-se que a tela tem dimensões de 80 cm de altura por 120cm de comprimento.

Problema V:

Comprei 4 lanches a um certo valor unitário. De outro tipo de lanche, com o mesmo preço unitário, a quantidade comprada foi igual ao valor unitário de cada lanche. Paguei com duas notas de R$ 100,00 reais e recebi $R\$ 8{,}00$ reais de troco. Qual o preço unitário de cada produto?

Solução do problema V:

Retirando os dados do problema, temos que: x corresponde aos dois tipos de lanche, que têm o mesmo valor unitário. Seguindo as informações de um dos produtos, eu comprei 4 unidades e do outro eu comprei x unidades. É sabido que, recebi R$ 8,00 de troco ao efetuar o pagamento de R$ 200,00 pela mercadoria. Agora, fica fácil montarmos a equação: $x^2 + 4x + 8 = 200$. Solucionando, $x^2 + 4x - 192 = 0$, descobrimos as raízes da equação são:
$x' = -16$ e $x'' = 12$. O preço unitário de cada produto é de R$ 12,00, pois não existe preço negativo.

Problema VI:

O triplo do quadrado do número de filhos de Pedro Emanuel é igual a 63 menos 12 vezes o número de seus filhos. Quantos filhos, Pedro Emanuel tem?

Solução de problemas VI:

Considerando os dados do enunciado, temos que: x corresponde ao número de filhos de Pedro Emanuel e $3x^2$ equivale ao triplo do quadrado do número de filhos, ao passo que, $63 - 12x$ refere-se a 63 menos 12 vezes o número de filhos.

Chegamos a seguinte sentença matemática: $3x^2 = 63 - 12x \Rightarrow 3x^2 + 12x - 63 = 0$, que resulta numa equação do 2º grau, cujas raízes são $x' = 3$ e $x'' = -7$.

Descartando $x'' = -7$, porque o número de filhos não pode ser negativo, concluímos que Pedro Emanuel tem 3 filhos.

Os PCN (BRASIL, 1998, p. 116) também afirmam que é mais proveitoso propor situações que levam os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da álgebra, apenas, enfatizando, as “manipulações” com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. “É importante que os alunos percebam que as equações facilitam muito as resoluções de problemas difíceis”. (BRASIL, 1998, p.121).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A abordagem do tema Equação do 2º grau e resolução de problemas é de grande relevância, visto a sua aplicabilidade em toda a matemática e em situações do cotidiano. Considerando o atual estágio no qual se encontra o ensino da matemática, a forma como está sendo transmitida sem nenhuma motivação faz-se necessário um novo olhar para o ensino, desenvolvendo um trabalho dinâmico e interativo.

Nesse contexto, como alternativa para promover um aprendizado diferenciado, surgiu esse trabalho mostrando uma viagem pela história das equações do 2º grau, destacando fatos relevantes e personagens que muito contribuíram não apenas com a evolução do tema em questão, mas com a matemática como um todo.

Em seguida, utilizamos problemas simples como incentivos para estimular o interesse dos alunos pelo conteúdo, visto que essa metodologia visa conciliar o tema com o dia-a-dia, trazendo sentido ao estudo.

Devemos propiciar e valorizar as táticas empregadas pelos alunos e não somente os resultados, com o objetivo de transformar a concepção que com os alunos possuem sobre o erro, mostrando que "errar" é um passo para entender que novos saberes estão e podem ser produzidos.

Esperamos que a maneira de ensinar matemática desperte para novos horizontes, onde o ensino seja menos mecânico e utilizando ferramentas para estimular o raciocínio e a curiosidade para promover uma formação mais abrangente.

Assim, buscar construir o novo, é meditar o ontem, não deixando-o de lado, esquecido, mas sendo ele o passaporte para uma nova era. Não precisa radicalizar o ensino, mas melhora a ótica com a qual as coisas são apresentadas, para assim trilharmos por novos caminhos e alcançar novos horizontes.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, M. R. **Bhaskara**: Biografia de Bháscara. In: E. Biografias, [S.I.], 2014. Disponível em: <http://www.e-biografias.net/baskhara/>. Acesso: 22 de março de 2018.

BRASIL, **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais:** terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental: introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais Brasília. MEC/SEF, 1998. 88.p. Disponível em: <http:// portal.mec.gov.br/seb/arqueiro/pdf/matemática.pdf> Data de acesso: 01 de dezembro de 2017.

BRASIL, **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais:** introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 121.p. Disponível em: <http:// portal.mec.gov.br/seb/arquivo/pdf/livro 01.pdf> Acesso: 01 de dezembro de 2017.

CARVALHO, João Barco Pitombeira. **Três excursões pela História da Matemática.** Rio Janeiro: Internet, 2008.

FRAGOSO, Wagner da Cunha. Uma abordagem histórica da equação do 2º grau. In___: **Revista do professor de matemática**. [S.1...] : [S. D], n.43, 01 dez. 1999.

FRAGOSO, W. da C. **Equação do 2º grau**: uma abordagem histórica. 2º. Ed. Ijuí: Unijuí, 1999.

GIOVANNI JR; J; CASTRUCCI, B. **A conquista matemática.** São Paulo: FTD, 2009.

KATZ, Victor. **A history of mathematics: an introduction** 2. ed. Addesion-Wesley,1998.

LIMA. E.L. ed. **Exames de textos:** Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro. 2006.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um enfoque do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1964.