UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA- UEPB
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS - CCT
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA- DM

DÁCIO BRADLEY VICENTE DA SILVA

APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL

CAMPINA GRANDE – PB
2018

DÁCIO BRADLEY VICENTE DA SILVA

APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Trabalho de Conclusão de Curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Profª. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano.

CAMPINA GRANDE – PB

2018

S586a Silva, Dácio Bradley Vicente da.
Aplicações do cálculo diferencial [manuscrito] / Dacio Bradley Vicente da Silva. - 2018.
43 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2018.
"Orientação : Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano , Departamento de Matemática - CCT."

1. Cálculo diferencial. 2. Taxa de variação. 3. Funções deriváveis. I. Título

21. ed. CDD 515.33

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

DÁCIO BRADLEY VICENTE DA SILVA

APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Trabalho de Conclusão de Curso da Graduação em Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática.

Aprovada em: 03/ 12/ 2018 .

BANCA EXAMINADORA

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profª. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maria Isabelle Silva Dias Yanes

Profª. Dra. Maria Isabelle Silva Dias Yanes
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Fernando Luiz Tavares da Silva

Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

RESUMO

Neste trabalho foi apresentado um estudo histórico a respeito do Cálculo Diferencial, importante ramo da matemática que, dentre outras utilidades, possibilita analisar taxas de variação. A pesquisa contém alguns dos principais fatos, personagens e respectivos trabalhos que colaboraram para o seu desenvolvimento com o passar dos anos. Estudou-se também a teoria da derivada, cujas aplicações estão presentes em diversas áreas da ciência. Algumas aplicações do Cálculo Diferencial são para solucionar problemas do dia a dia, como o crescimento populacional de um certo município ou até mesmo determinar o crescimento de uma colônia de bactérias.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial. História. Aplicações.

ABSTRACT

In this work we present a historical study about Differential Calculus, an important branch of mathematics that, among other utilities, makes it possible to analyze rates of variation. The research contains some of the main facts, characters and respective works that have contributed to its development over the years. The derivative theory was also studied, whose applications are present in several areas of science. Some applications of differential calculus are to solve day-to-day problems, such as the population growth of a certain municipality or even to determine the growth of a colony of bacteria.

Keywords: Differential Calculus. Story. Applications.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial é uma grande ferramenta matemática utilizada para tomada de decisões no dia a dia da sociedade. Possui muitas aplicações em diversas áreas do conhecimento, tais como: biologia, química, física, economia, na própria matemática, etc. Desde a antiguidade já se tinha ideia relacionada ao cálculo, mas sua formalização como conhecemos hoje veio com Newton e Leibniz no século XVII. Á partir do século XVII o cálculo tornou-se um instrumento muito importante para as pesquisas científicas e tecnológicas.

O objetivo deste trabalho foi realizar um estudo histórico sobre o cálculo, abordando o conteúdo e aplicações com o intuito de apresentar o Cálculo Diferencial de uma forma mais clara, pois alguns alunos sempre se perguntam: “Onde eu vou utilizar isso? Qual sua utilidade no dia a dia?”. Pretendemos suprir essa necessidade mostrando que o Cálculo Diferencial tem aplicabilidade em diversas áreas da ciência, que não se resumem apenas á matemática.

Com o intuito de dar uma visão mais atrativa ao conteúdo em tela, dividimos nosso trabalho da seguinte forma: No primeiro capítulo apresentamos o contexto histórico, envolvendo Issac Newton e Gottfried Leibnz, dois grandes pesquisadores que contribuíram diretamente para a criação do cálculo, uma vez que defendiam suas ideias, tornando o cálculo mais compreensivo por todos. O capítulo seguinte apresenta a definição do Cálculo Diferencial, alguns teoremas e suas propriedades, seguido de exemplos para o melhor entendimento do conteúdo. No terceiro capítulo apresentamos algumas aplicações do Cálculo Diferencial na Economia, na Biologia, no Crescimento Populacional e na Física. As aplicações têm o intuito de mostrar que o Cálculo Diferencial é uma ferramenta que não se limita só a matemática, e sim, uma ferramenta poderosa que pode ser utilizada em diversos ramos da ciência.

Capítulo 1
Contexto Histórico

A maior revelação matemática se deu no século XVII com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral por Newton e Leibniz, passando assim a dar suporte, a novos estudos do movimento, abrangendo tanto a física quanto a matemática, pois os matemáticos da época também eram físicos.

> A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. (EVES, 2011, p. 417)

Apesar da maior parte da história do cálculo estar situada no século XVII precisamos retornar, á Grécia do século V a.C. onde os problemas que motivaram o desenvolvimento do cálculo surgem, como o cálculo de áreas, volumes e comprimento de arcos.

O método de exaustão foi desenvolvido pelo astrônomo e matemático grego Eudoxo de Cnido (408 a.C – 355 a.C), que tinha como propósito calcular a cubatura (áreas) e quadraturas (volumes), onde demonstra que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente, assim subtraindo uma parte da mesma não menor que sua metade, sucessivamente até chegar a uma grandeza menor que qualquer outra da mesma espécie. Método esse, muito parecido com o Cálculo Integral usado atualmente.

Arquimedes foi quem obteve o método de exaustão mais próximo da atual e verdadeira integração, apesar de ser um método muito rigoroso, não serve para a descoberta inicial do resultado. No seu questionamento de áreas e volumes, ele alcançou resultados equivalentes a muitas integrais definidas que aparecem nos textos básicos de cálculo.

Para determinar uma área ou volume, Arquimedes corta a região proporcional num número muito grande de pedaços de fatias planas, colocando essas fatias numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira que determina o equilíbrio com uma figura de área ou volume com o ponto central conhecido. Esse método fez com que Arquimedes construísse a formula do volume da esfera. Podemos dizer que o moderno método de equilíbrio de Arquimedes chega se confundir com a moderna integração.

> Só por volta de 1450 os trabalhos de Arquimedes chegaram á Europa Ocidental, através de uma tradução, achada em Constantinopla, de uma cópia (do século IX) de seus manuscritos. Essa tradução foi revisada por Regiomontanus e impressa em 1540. Alguns anos mais tarde apareceu uma outra tradução. Mas só por perto do início do século XVII as ideias de Arquimedes passaram por outros desdobramentos. Dois dos primeiros matemáticos dos tempos modernos a usarem métodos comparáveis aos de Arquimedes foram o engenheiro flamengo Simon Stevan (1548-1620) e o matemático italiano Luca Valerio (c. 1552- 1618). Ambos tentaram evitar a dupla *reductio ad absurdum* do método de exaustão fazendo uma passagem direta ao limite, de maneira bastante parecida com o procedimento aplicado, ao cálculo da área de um segmento parabólico. (EVES, 2011, p. 424)

O método diferencial foi mostrado com clareza pelo matemático francês Pierre de Fermat no ano de 1629, determinando os pontos máximos e mínimos. Ele foi pioneiro não só no que se refere a diferenciação, mas também no que se refere a integração. O desenvolvimento do cálculo diferencial e integral possibilitou a chegada de novos pesquisadores matemáticos, com isso vários problemas matemáticos passaram a ter soluções. Surgiram então várias contradições obrigando o cálculo a passar por uma fundamentação lógica na intenção de se obter o maior formalismo possível. Deu-se a necessidade de inserir símbolos algébricos para estudar a geometria das curvas, favorecendo a evolução do conceito de derivada. Com o decorrer do tempo esse processo tonou-se mais algébrico do que geométrico, dando continuidade ao desenvolvimento dos conceitos básicos da fundamentação teórica do cálculo.

A junção das partes mais conhecidas e utilizadas até então, associada ao desenvolvimento e aperfeiçoamento das técnicas, deu-se com Newton e Leibniz que mostraram os fundamentos mais importantes do cálculo: as Derivadas e as Integrais. No contexto atual ainda é possível encontrar algumas controvérsias a respeito do desenvolvimento do Cálculo, mas para esse trabalho não se estender muito, por anos e anos de história, o foco ficará sobre dois grandes colaboradores: Issac Newton e Gottfried Leibnz.

1.1 Isaac Newton

Isaac Newton nasceu no ano de 1642, foi educado por sua avó e por um tio do lado materno. Seu tio percebendo seu talento convenceu a sua mãe a matricula-lo na escola em Cambridge, onde havia se formado. Isaac Newton no primeiro momento interessou-se pela química, área que ele teve um enorme respeito. Após ler algumas obras de matemáticos como Euclides, Galileu e Fermat, começou a desenvolver seu lado matemático, passando assim a fazer suas contribuições a matemática. Sendo sua primeira descoberta exprimir funções em termos de séries finitas, mais tarde Newton veio a pensar nas taxas de variação.

Nos anos de 1665-1666 Newton atingiu o grau A e B como aluno na Universidade de Trinity College na cidade Cambridge, que mais tarde veio a ser fechado por conta da peste bubônica, levando Newton a ir pra sua casa, e nesse período ele fez 4 das suas principais descobertas sendo elas o teorema binominal, o cálculo, a lei de gravitação e a natureza das cores.

Ao observar os planetas, Newton percebeu que os movimentos dos mesmos se davam de modo que, em cada ponto a direção da velocidade era a mesma que a da reta tangente, daí esse movimento poderia ser descritos por pequenas tangentes. Sua próxima descoberta seria consequência das tangentes, a qual recebeu inicialmente o nome de fluxões, conhecido atualmente como Cálculo Diferencial. Com o passar do tempo ele percebeu que a integração e a diferenciação são processos inversos. Essa descoberta levou ao surgimento do Teorema Fundamental do Cálculo, tornando Newton conhecido como o inventor do cálculo, explorando a relação inversa entre inclinação da reta e área através de sua nova análise finita.

Entre os anos 1665-1666 Newton descobriu o cálculo e o método das séries infinitas, mas não publicou nada a respeito dos seus resultados. Vindo a aparecer em 1687 a primeira exposição do cálculo em *Philosophiae Naturais Principia Mathematica.* Sendo sua descoberta aplicável a todas as funções, sejam algébricas ou transcendentes.

As contribuições de Issac Newton para a ciência são tão significantes que não tem como estudar Física ou Cálculo e não citar seu nome. Muitos matemáticos e físicos o consideram como o maior cientista de todos os tempos.

Nos últimos anos de sua vida Issac Newton enfrentou a deficiência esfincteriana, onde veio a sofrer de incontinência urinária, além de sofrer de gota. Foi diagnosticado com cálculo na bexiga na sua causa-mortis, vindo a falecer no dia 20 de março de 1727 em Londres, Inglaterra.

1.2 Gottfried Wilheln Leibniz

Gottfried Wilheln Leibniz nasceu no ano de 1649 na cidade de Leibniz, aos 17 anos obteve o grau de bacharel. Cursou teologia, direito, filosofia e matemática, e por isso, vários historiadores o consideram como o último sábio que possui conhecimento universal. Mudou-se para a cidade de Nurunber onde obteve seu doutorado na Universidade de Altdorf. Por ter sido representante governamental teve a oportunidade de viajar durante toda sua vida. Viajou para Paris no ano de 1672 onde conheceu Huygens, que lhe indicou para estudo os tratados de Pascal. Na sua visita a Londres no ano de 1673 adquiriu uma cópia do Lectiones Geometricae de Isaac Barrow, mais tarde tornou-se membro do Royal Society. Através dessa visita a Londres surgiram boatos de que Leibniz talvez tivesse visto o trabalho de Newton, que poderia ter o motivado na descoberta do Cálculo, deixando a dúvida da legitimidade das suas descobertas relacionadas ao cálculo.

Compreendemos que hoje isto não teria sido possível, pois durante aquela visita a Londres, Leibniz não tinha conhecimento de geometria e nem análise suficiente para entender o trabalho de Newton. À partir daí as descobertas de Leibniz passariam a estar presentes na matemática. Ele em suas descobertas relacionadas ao triângulo de pascal e o triângulo harmônico, encontrou vários resultados de series infinitas convergentes.

No ano de 1676 Leibniz chega a mesma conclusão a qual Issac Newton chegou anos antes. Ele apresentava um método que era bastante importante por causa da sua generalidade. As operações de encontrar "soma" (integrais) ou "diferenças" (diferencias) poderia ser sempre aplicadas em função racional ou irracional, algébricas ou transcendente. Seu método de notação era muito importante e a partir daí é que surge o dx e dy para as diferenças menores possíveis em x e y usada no contexto atual.

Em 1684 surgiu a primeira publicação do cálculo diferencial de Leibniz sobre o título de *Nova Methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus*(um novo método para máximos e mínimos, também para tangentes que não é obstruido por quantidades irracionais).

As descobertas de Leibniz foram tão importantes para o cálculo e para matemática que ele é considerado como um dos setes filósofos modernos mais importantes. No ano de 1716 Leibniz veio a ficar doente vítima de uma crise de gota, afastado da aristocracia, no lugar onde viveu boa parte da sua vida. Faleceu no dia 14 de novembro do mesmo ano, em Honnover, Alemanha.

Neste breve histórico enfocamos o surgimento do cálculo e seus grandes colaboradores. Agora iremos detalhar o Cálculo Diferencial com suas definições e teoremas.

Capítulo 2
Cálculo Diferencial

A evolução do cálculo diferencial está relacionada a taxa de variação e às questões de tangente à uma curva. O uso dos símbolos algébricos no estudo do cálculo colaborou para o desenvolvimento da derivada. Newton fez seus cálculos a respeito do estudo dos fluidos, Leibniz, imaginava a derivada como uma grandeza. Agora iremos trabalhar o conteúdo de derivadas com definições, propriedades e alguns teoremas, com a formalidade que lhe é necessária.

2. Derivada de uma função

2.1 Taxa de variação: Suponha que y seja uma quantidade que depende de outra quantidade x. Assim y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x variar de x_1 a x_2 então a variação em x será

$$h = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

$$Y = f\ \ x_2\ \ - f\ \ x_1$$

O quociente das diferenças

$$\frac{Y}{h} = \frac{f\ \ x_2\ \ - f\ \ x_1}{x_2 - x_1}$$

é denominado taxa de variação de y em relação à x no intervalo $\ x_1, x_2\ $ e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante.

Como $x_2 = x_1 + h$, logo podemos escrever

$$\frac{Y}{h} = \frac{f\ \ x_1 + h\ \ - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f\ \ x_1 + h\ \ - f(x_1)}{h}$$

Por analogia com a velocidade, consideramos a taxa média de variação em intervalos cada vez menores fazendo x_2 tender a x_1 e, portanto, fazendo h tender a 0. O limite dessas taxas médias de variação é chamado taxa (instantânea) de variação de y em relação a x em $x = x_1$, que é interpretada como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$. Daí,

$$\lim_{h \to 0} \frac{Y}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f\ \ x_1 + h\ \ - f(x_1)}{h}$$

Se tal limite existir, chamaremos de derivada da função f no ponto x_1.

2.2 Definição: Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$ (leia: f linha de p). Assim:

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Se f admite derivada em p, então diremos que f é derivável ou diferenciável em p.

Observação. Segue das propriedades dos limites que

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

como $x = p + h$.

Logo,

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

Exemplo 1: Seja a função $f(x) = x^2$. Calcule a derivada da função $f(x)$.

Solução:

Temos que:

$$f'(\mathrm{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Como

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h, com\ h \neq 0$$

Logo,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Portanto $f'(x) = 2x$

2.3 Continuidade de funções deriváveis

2.3.1 Teorema: Toda função derivável num ponto x_1, é contínua nesse ponto.

Demonstração:

Seja $f(x)$ uma função derivável em x_1. Vamos provar que $f(x)$ é contínua em x_1. Em outras palavras, vamos provar que as seguintes condições são válidas, isto é:

(i) $f(x_1)$ existe;

(ii) $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$ existe;

(iii) $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$

Por hipótese, $f(x)$ é derivável em x_1. Logo, $f'(x)$ existe e, pela fórmula

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Concluímos que $f(x_1)$ deve existir para que o limite tenha significado.

Além disso, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_1} \left(f(x) - f(x_1) \right) &= \lim_{x \to x_1} \left[(x - x_1) \cdot \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right] \\
&= \lim_{x \to x_1} (x - x_1) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \\
&= 0 \cdot f'(x) \,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \to x_1} \left(f(x) - f(x_1) \right) = 0$$

Temos, então,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_1} f(x) &= \lim_{x \to x_1} \left[f(x) - f(x_1) + f(x) \right] \\
&= \lim_{x \to x_1} \left(f(x) - f(x_1) \right) + \lim_{x \to x_1} f(x_1) \\
&= 0 + f(x_1) = f(x_1)
\end{aligned}$$

Velem então as condições (i), (ii) e (iii) e conclui-se que f(x) é contínua em x_1.

2.4 Derivadas Laterais

2.4.1 Definição. Se a função $f(x)$ está definida em x_1, então a derivada à direita de f em x_1, denotada por $f'_+(x_1)$, é definida por

$$\begin{aligned}
f'_+(x_1) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \\
&= \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}
\end{aligned}$$

2.4.2 Definição. Se a função $f(x)$ está definida em x_1, então a derivada à esquerda de f em x_1, denotada por $f'_-(x_1)$, é definida por

$$f'_-(x_1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$= \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Observação: Uma função é derivável em um ponto, quando as derivadas à direita e á esquerda nesse ponto existem e são iguais.

Exemplo 2: Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \; se \; x \leq 1 \\ 2x - 1 \; se \; x > 1 \end{cases}$.

a) f é derivável em 1?

b) f é contínua em 1?

Solução

a)

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \; se \; x \leq 1 \\ 2 \; se \; x > 1 \end{cases}$$

Note que

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$$

Logo,

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$$

Portanto, f é derivável em 1 e $f'(1) = 2$

b) Como f é derivável em 1, segue que f é contínua em 1.

Exemplo 3: Mostre que $f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$.

Solução:

Note que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \; se \; x \geq 0 \\ -1 \; se \; x < 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

não existe, ou seja, f não é derivável em 0. Como $f'(0)$ não existe, o gráfico de $f(x) = x$ não admite reta tangente em $(0, f(0))$

2.5 Regras de Derivação

Nesta seção, citaremos várias regras, chamadas regras de derivação, que facilitam determinar as derivadas das funções sem o uso da definição. Iremos considerar que a derivada de uma função f, em x, é representada por f' ou $\frac{df}{dx}$.

2.5.1 Derivada de uma constante: Seja $\boldsymbol{f(x) = k}$ uma função constante. Mostre que $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ para todo x.

Demonstração:

Temos que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Com $f(x) = k$ para todo x, resulta $f(x+h) = k$ para todo x e todo h. Assim,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Portanto $f'(x) = 0$

Exemplo 4: Seja $f(x) = 5$. Calcule $f'(x)$.

Solução

Note que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Como $f(x) = 5$ para todo x, resulta $f(x+h) = 5$ para todo x e todo h.

Portanto,

$$f'(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{5 - 5}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

2.5.2 Derivada da potência

2.5.2.1 Teorema. Seja n ≠ 0 um natural. São válidas as formulas de derivação:

a) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

b) $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}$, $x \neq 0$

Demonstração:

a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$

Fazendo $x + h = t$ $(t \to x \text{ quando } h \to 0)$ vem

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = \lim_{t\to x} \underbrace{(t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1})}_{n\ parcelas}.$$

Assim,

$$f'(x) = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1}}_{n\ parcelas}$$

ou seja

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

b) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^n} - \dfrac{1}{x^n}}{h} = \lim_{h\to 0} - \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} \cdot \dfrac{1}{(x+h)^n x^n}$

Por (a),

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

Como,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)^n x^n} = \frac{1}{x^{2n}}$$

resulta,

$$f'(x) = -nx^{n-1} \cdot \frac{1}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

Portanto,

$$f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}.$$

Exemplo 5: Seja $f(x) = x^4$. Calcule $f'(x)$.

Solução

Temos que:

$$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^{4-1}$$

Portanto

$$f'(x) = 4x^3.$$

Exemplo 6: Seja $f(x) = x^{-3}$. Calcule $f'(x)$.

Solução

Temos que:

$$f(x) = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-3-1}$$

Portanto

$$f'(x) = -3x^{-4}$$

2.5.3 Derivada de uma soma: Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

Demonstração:

Por hipótese, existem

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ e } g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - f(x)}{h}$$

Temos:

$$h'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h(x+h) - h(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x).$$

Observação: A proposição se aplica a um número finito de funções, isto é, a derivada da soma de um número finito de funções é igual à soma de suas derivadas, se estas existirem.

Exemplo 7: Seja $f(x) = 3x^4 + 8x + 5$. Calcule $f'(x)$.

Solução

Temos que:

$$f'(x) = 3(4x^3) + 8 \cdot 1 + 0 = 12x^3 + 8$$

Portanto, $f'(x) = 12x^3 + 8$

2.5.4 Derivada do produto de uma constante por uma função: Sejam f uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x) = cf(x)$. Se $f'(x)$ existe, então $g'(x) = cf'(x)$.

Demonstração:

Por hipótese, temos que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dai,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} c\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

$$= c\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) = cf'(x)$$

Portanto $f'(x) = cf'(x)$

Exemplo 8: Seja $f(x) = 8x^2$. Calcule $f'(x)$.

Solução

Temos que:

$$f'(x) = 8(2x) = 16x$$

Portanto,

$$f'(x) = 16x$$

2.5.5 Derivada do produto: Sejam f e g deriváveis em p. Então a função $f \cdot g$ é derivável em p.

Têm-se $(f \cdot g)'(p) = f'(p)g(p) + f(p) \cdot g'(p)$

Demonstração:

Temos:

$$(f \cdot g)'(p) = \lim_{x\to p}\frac{f(x)g(x) - f(p)g(p)}{x - p}$$

Somando e subtraindo $f(p)g(x)$ ao numerador resulta

$$(f\cdot g)'(p) = \lim_{x\to p}\frac{f(x)g(x) - f(p)g(x) + f(p)g(x) - f(p)g(p)}{x-p}$$

$$= \lim_{x\to p}\left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\cdot g(x) + f(p)\cdot\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right]$$

$$= f'(p)g(p) + f(p)g'(p).$$

Observe que, pelo g ser derivável em p, g será contínua em p, e, assim,

$$\lim_{x\to p} g(x) = g(p).$$

Exemplo 9: Seja $f(x) = (2x+1)(x+1)$. Calcule $f'(x)$.

Solução

Considere $h(x) = 2x+1$ e $g(x) = x+1$. Pela regra do produto temos que:

$$f'(x) = h'(x)\cdot g(x) + h(x)\cdot g'(x)$$

Daí

$$f'(x) = (2x+1)'(x+1) + (2x+1)(x+1)'$$

Como $h'(x) = 2$ e $g'(x) = 1$. Logo,

$$f'(x) = 2\cdot(x+1) + (2x+1)\cdot 1 = 2x+2+2x+1 = 4x+3$$

Portanto,

$$f'(x) = 4x+3$$

2.5.6 Derivada do Quociente: Se f e g forem deriváveis em p e se $g(p) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ será derivável em p e

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}$$

Demonstração:

Temos que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \lim_{x\to p}\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{x-p} = \lim_{x\to p}\frac{f(x)g(p) - f(p)g(x)}{x-p}\cdot\frac{1}{g(x)g(p)}$$

Somando e subtraindo $f(p)g(p)$ ao numerador resulta

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \lim_{x\to p}\frac{f(x)g(p) - f(p)g(p) + f(p)g(p) - f(p)g(x)}{x-p}\cdot\frac{1}{g(x)g(p)}$$

$$= \lim_{x\to p}\left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\cdot g(p) - f(p)\cdot\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right]\cdot\frac{1}{g(x)g(p)}.$$

e, portanto,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}$$

Exemplo 10: Calcule $f'(x)$ onde, $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$

Solução

Pela regra do quociente

$$f'(x) = \left(\frac{2x+3}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x+3)'(x^2+1) - (2x+3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

Como

$$(2x+3)' = 2 \text{ e } (x^2+1)' = 2x$$

Logo

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - (2x+3)2x}{(x^2+1)^2}$$

Ou

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 6x + 2}{(x^2+1)^2}$$

2.6 Derivada da função composta

Consideremos duas funções deriváveis f e g onde $y = g(x)$ e $u = f(x)$. Para todo x tal que $f(x)$ está no domínio de g, podemos escrever $y = g(u) = g(f(x))$, isto é, podemos considerar a função composta $(g_o f)(x)$.

Por exemplo, uma função tal como $y = (x^2 + 5x + 2)^7$ pode ser vista como a composta das funções $y = u^7 = g(u)$ e $u = x^2 + 5x + 2 = f(x)$.

A seguir apresentamos a regra da cadeia, que nos dá a derivada da função composta $g_o f$ em termos da derivada de f e g.

2.6.1 Regra da Cadeia: Se $y = g(x)$ e $y = g(x)$ e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, então a função composta $y = g(f(x))$ tem derivada que é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ou } y'(x) = g'(u) \cdot f'(x).$$

Demonstração:

Vamos fazer a demonstração supondo que existe um intervalo aberto I contendo x, tal que:

$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \neq 0$ sempre que $(x + \Delta x) \in I$ e $\Delta x \neq 0$. (1)

Isso se verifica para um grande número de funções, porém não para todas. Por exemplo, se f for uma função constante a condição apresentada não é satisfeita. Porém, neste caso, podemos provar a fórmula facilmente. De fato, se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$ e $y = g(f(x)) = g(c)$ é constante. Assim,

$y'(x) = 0 = g'(u) \cdot f'(x)$.

Então provemos que $y'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$ quando $f(x)$ satisfaz a condição (1).

Como $y = g(f(x))$, temos:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x}$$

se este limite existir.

Vamos considerar primeiro o quociente

$$\frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta \mathrm{x}}$$

Seja $\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x)$. Então Δu depende de Δx e $\Delta u \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Temos:

$$\frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} = \frac{g(f(x) + \Delta u) - g(f(x))}{\Delta x} = \frac{g(u + \Delta u) - g(u)}{\Delta x}.$$

Para a condição (1), $\Delta u \neq 0$ em um intervalo aberto contendo x. Assim, podemos dividir e multiplicar o quociente mostrado por Δu. Temos, então:

$$\begin{aligned}\frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta \mathrm{x}} &= \frac{g(u + \Delta u) - g(u)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} \\ &= \frac{g(u + \Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \frac{g(u + \Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

Aplicando o limite, temos:

$$\begin{aligned}y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{g(u + \Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= g'(u) \cdot f'(x).\end{aligned}$$

Exemplo 11: Seja $f(x) = (x^2 + 5x + 2)^7$. Calcule $f'(x)$.

Solução

Considere $g(u) = u^7$, onde $u = x^2 + 5x + 2$. Assim, pela regra da cadeia temos,

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'$$
$$= 7u^6 \cdot (2x + 5)$$
$$= 7(x^2 + 5x + 2) \cdot (2x + 5)$$

Portanto,

$$f'(x) = 7(x^2 + 5x + 2) \cdot (2x + 5)$$

2.7 Derivada da Função Inversa

Seja f uma função inversível, com inversa g; assim, $f(g(x)) = x$ para todo $x \in D_g$.

Prossegue para todo $x \in D_g$, $[f(g(x))]' = x'$ ou $[f(g(x))]' = 1$

Se admitirmos f e g diferenciáveis, podemos aplicar a regra da cadeia ao 1º membro da equação acima:

$$f'(g(x))\,g'(x) = 1$$

ou

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}\ \forall\, x \in D_g$$

Essa fórmula nos permite calcular a derivada de g conhecendo-se a derivada de f.

2.7.1 Teorema. Seja f uma função inversível, com função inversa g. Se f for derivável em $q = g(p)$, com $f'(q) \neq 0$, e se g for contínua em p, então g será derivável em p.

Demonstração:

Seja

$$\frac{g(x) - g(p)}{x - p} = \frac{g(x) - g(p)}{f(g(x)) - f(g(p))} = \frac{1}{\dfrac{f(g(x)) - f(g(p))}{g(x) - g(p)}},\ x \neq p$$

Considere $u = g(x)$, pela continuidade de g em p, $u \to q$ para $x \to p$. Dai,

$$\lim_{x \to p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} = \lim_{u \to q} \frac{1}{\dfrac{f(u) - f(q)}{u - q}}$$

Como,

$$\lim_{u \to q} \frac{f(u) - f(q)}{u - q} = f'(q) = f'(g(p))$$

logo,

$$g'(p) = \lim_{x \to p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} = \frac{1}{f'(g(p))}$$

Portanto, g é derivável em p e

$$g'(p) = \frac{1}{f'(g(p))}$$

Exemplo 12: Seja $y = f(x) = 3x - 5$, determine a função inversa $f^{-1}(x)$ e a sua derivada.

Solução

Inicialmente precisamos determinar $f^{-1}(x)$ para isso vamos fazer uma troca de x por y na expressão $y = 3x - 5$.

Assim teremos $x = 3y - 5$. Logo,

$$x = 3y - 5$$

$$3y = x + 5$$

$$y = \frac{1}{3}(x + 5) = g(y)$$

Portanto,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 5)$$

Agora iremos calcular as derivadas, temos que:

$$f(x) = 3x - 5 \Rightarrow f'(x) = 3$$

E mais,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 5) \Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{3}$$

Logo, podemos concluir que as derivadas, $f'(x) = 3$ e $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{3}$ são inversas uma da outra.

2.8 Derivadas das Funções Elementares

A seguir apresentaremos as funções elementares: exponencial, logarítmica e trigonométrica.

2.8.1 Derivada da função exponencial: Se $f(x) = a^x$, $(a > 0$ e $a \neq 1)$ então $f'(x) = a^x \ln a$ $(a > 0$ e $a \neq 1)$.

Demonstração:

Seja $f(x) = a^x$ $(a > 0$ e $a \neq 1)$. Aplicando a definição da derivada de uma função, obtemos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

Como

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = \ln a \ \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$$

Portanto,

$$f'(x) = a^x \ln a$$

Caso particular: Se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x$, onde e é o número neperiano.

Demonstração:

Temos que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h-1}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

Como

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

Logo,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} e^x \cdot 1$$

Portanto,

$$f'(x) = e^x$$

Exemplo 13: Calcule a derivada da função $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

Solução

Considere $y = e^u$ com $u = \frac{x+1}{x-1}$, temos que $y' = e^u u'$

Assim,

$$y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{(x-1)\cdot(x-1)' - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)\cdot 1 - (x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{(-2)}{(x-1)^2}$$

2.8.2 Derivada da Função Logarítmica: Se $f(x) = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$, então

$$f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$$

Demonstração:

Seja $f(x) = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$. Aplicando a definição da derivada de uma função, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

Note que

$$\lim_{h\to 0}\left[\log_a f(x)\right] = \log_a\left[\lim_{h\to 0} f(x)\right]$$

Daí, podemos escrever

$$f'(x) = \log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{\frac{h}{h}}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{h}}\right]$$

$$= \log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{h}\frac{x}{x}}\right] = \log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right]$$

Como

$$\lim_{h\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Logo,

$$f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

Caso particular: Se $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \frac{1}{x}\cdot\ln e = \frac{1}{x}$

Demonstração:

Temos que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]$$

Considere $u = \frac{h}{x}$. Daí,

$$f'(x) = \lim_{u \to 0} \left[\ln(1+u)^{\frac{1}{xu}}\right] = \lim_{u \to 0} \left[\frac{1}{x}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}\right] = \frac{1}{x}$$

Pois,

$$\lim_{u \to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Exemplo 14: Calcule a derivada da função $f(x) = \ln\frac{e^x}{x+1}$.

Solução

Considere $y = \ln u$, onde $u = \frac{e^x}{x+1}$. Daí

$$y' = \frac{u'}{u}$$

Assim,

$$y' = \frac{\frac{(x+1)e^x - e^x \cdot 1}{(x+1)^2}}{\frac{e^x}{x+1}} = \frac{x}{x+1}$$

Portanto,

$$(f(x))' = \frac{x}{x+1}$$

2.8.3 Derivada da Exponencial Composta: Sejam f e g duas funções deriváveis num mesmo conjunto A, com $f(x) > 0$ para todo $x \in A$. Consideremos a função definida em A e dada por

$$y = f(x)^{g(x)}.$$

Aplicando ln aos dois membros obtemos

$$\ln y = g(x)\ln f(x)$$

e, assim,

$$y = e^{g(x)\ln f(x)},$$

ou seja,

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Então,

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = e^{g(x)\ln f(x)}\left[g(x)\ln f(x)\right]'$$

Exemplo 15: Calcule a derivada da função $y = x^x$.

Solução

Temos que $x^x = e^{x \ln x}$. Daí,

$$y' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(\ln x + 1),$$

Portanto,

$$y' = x^x(1 + \ln x).$$

2.8.4 Derivadas das Funções Trigonométricas

2.8.4.1 Derivada da Função Seno: Se $f(x) = \operatorname{sen} x$ então $f'(x) = \cos x$.

Demonstração:

Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Aplicando a definição da derivada de uma função, obtemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

Aplicando a propriedade trigonométrica da soma de arcos, obtém-se:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}.$$

Utilizando a propriedade de soma dos limites, obtemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x}{h}.$$

Colocando em evidencia o segundo limite, tem-se:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x (\cos h - 1)}{h}.$$

Agora multiplicando o numerador e o denominador do segundo limite por $(\cos h + 1)$, obtemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x (\cos h - 1) \cdot (\cos h + 1)}{h \cdot (\cos h + 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x (\cos^2 h - 1)}{h \cdot (\cos h + 1)}.$$

Usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 h + \cos^2 h = 1$ obtém-se

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 h}{h \cdot (\cos h + 1)} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} h \operatorname{sen} h}{h \cdot (\cos h + 1)}.$$

Pela propriedade da multiplicação de limites podemos separar os limites da seguinte forma:

$$\lim_{h\to 0}\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} h}{\cos h+1}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

E mais,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}=1.$$

Pois é um limite fundamental. Dai,

$$\lim_{h\to 0}\cos x\cdot 1-\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} h}{\cos h+1}\cdot 1=\cos x\cdot 1-\frac{\operatorname{sen} x\cdot 0}{2}=\cos x.$$

Portanto,

$$f'\ x\ =\cos x$$

Exemplo 16: Determine a derivada da função $f\ x\ =\operatorname{sen}(x)^2$.

Solução

Temos que: $f\ x\ =\operatorname{sen}(x)^2$, considere $f\ x\ =\operatorname{sen} u$, onde $u=x^2$. Daí

$$f'\ x\ =(\cos u)u'=[\cos(x^2)]\cdot 2x=2x\cdot\cos x^2$$

Portanto,

$$f'\ x\ =2x\cdot\cos x^2$$

2.8.4.2 Derivada da Função Cosseno: Se $f\ x\ =\cos x$, então $f'\ x\ =-\operatorname{sen} x$.

Demonstração:

Seja $f\ x\ =\cos x$. Aplicando a definição da derivada de uma função, obtemos

$$f'\ x\ =\lim_{h\to 0}\frac{\cos\ x+h\ -\cos x}{h}.$$

Aplicando a propriedade trigonométrica da soma de arcos, obtém-se:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos\ x+h\ -\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} h-\cos x}{h}.$$

Usando a propriedade de soma dos limites obtemos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} h-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\cos x}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} h}{h}.$$

Colocando em evidência tem-se:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\,(\cos h-1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} h}{h}.$$

Agora multiplicando o numerador e o denominador do primeiro limite por $(\cos h+1)$, obtemos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\,(\cos h - 1)\cdot(\cos h + 1)}{h\cdot(\cos h + 1)} - \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\,(\cos^2 h - 1)}{h\cdot(\cos h + 1)} - \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h}.$$

Usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 h + \cos^2 h = 1$ obtém-se

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\,(-\operatorname{sen}^2 h)}{h\cdot(\cos h + 1)} - \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{\cos x \operatorname{sen} h \operatorname{sen} h}{h\cdot(\cos h + 1)} - \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h}.$$

Pela propriedade da multiplicação de limites podemos separar os limites da seguinte forma:

$$-\lim_{h\to 0}\frac{\cos x \operatorname{sen} h}{\cos h + 1}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} - \lim_{h\to 0}\operatorname{sen} x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

E mais,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1.$$

Pois é um limite fundamental. Dai,

$$-\lim_{h\to 0}\frac{\cos x \operatorname{sen} h}{\cos h + 1}\cdot 1 - \lim_{h\to 0}\operatorname{sen} x\cdot 1 = -\frac{\cos x\cdot 0}{1+1}\cdot 1 - \operatorname{sen} x\cdot 1 = -\operatorname{sen} x.$$

Portanto,

$$f'\ x\ = -\operatorname{sen} x$$

Exemplo 17: Determine a derivada da função $f\ x\ = \cos(\frac{1}{x})$.

Solução

Temos que:

$$f\ x\ = \cos\ \frac{1}{x}\ .$$

Considere $f\ x\ = cos\, u$, onde $u = \frac{1}{x}$. Daí

$$f'\ x\ = (-\operatorname{sen} u)u' = [-\operatorname{sen}\ \frac{1}{x}\ ]\cdot\ -\frac{1}{x^2}\ = \frac{1}{x^2}\cdot\operatorname{sen}\ \frac{1}{x}$$

Portanto,

$$f'\ x\ = \frac{1}{x^2}\cdot\operatorname{sen}\ \frac{1}{x}$$

2.8.4.3 Derivada da Função Tangente: Se $f\ x\ = \operatorname{tg} x$, então $f'\ x\ = sec^2 x$.

Demonstração:

Seja $f(x) = \operatorname{tg} x$. Aplicando a definição da derivada de uma função, obtemos

$$\operatorname{tg}' x = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h}.$$

Fazendo $t = x + h (t \to x\ quando\ h \to 0)$

$$\operatorname{tg}' x = \lim_{t \to x} \frac{\operatorname{tg} t - \operatorname{tg} x}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{t - x}$$

$$= \lim_{t \to x} \frac{\operatorname{sen} t \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \cos t}{t - x} \cdot \frac{1}{\cos t \cdot \cos x}$$

Como,

$$\lim_{t \to x} \frac{\operatorname{sen} t \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \cos t}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{\operatorname{sen}(t - x)}{t - x} = 1$$

e mais,

$$\lim_{t \to x} \frac{1}{\cos t \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Portanto,

$$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x$$

Exemplo 18: Determine a derivada da função $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$.

Solução

Temos que: $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$, considere $u = \operatorname{tg} x$, onde $u' = \sec^2 x$. Daí,

$$f'(x) = 2\sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x.$$

Portanto,

$$f'(x) = 2\sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x$$

2.8.4.4 Derivada da Função Secante: Seja $f(x) = \sec x$. Logo podemos reescrever $f(x)$ como sendo:

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

Aplicando a regra do quociente, obtemos:

$$f'(x) = \frac{(1)' \cdot (\cos x) - (1) \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

Assim, podemos reescrever $f'(x)$ como sendo:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

Como,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \text{ e } \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Daí,

$$f'(x) = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$$

Portanto,

$$f'(x) = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$$

Exemplo 19: Calcule a derivada da função $f(x) = \sec(x^2 + 3x + 7)$

Solução

Pela regra da cadeia, considere $f(x) = \sec u$, onde $u = x^2 + 3x + 7$

Daí,

$$f'(x) = (\sec u)' \cdot u' = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot u'$$

Como $(\sec u)' = \sec u \cdot \operatorname{tg} u$, $u' = 2x + 3$ e $u = x^2 + 3x + 7$. Logo,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sec(x^2 + 3x + 7) \cdot \operatorname{tg}(x^2 + 3x + 7) \cdot (2x + 3) \\ &= (2x + 3)\sec(x^2 + 3x + 7) \cdot \operatorname{tg}(x^2 + 3x + 7). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f'(x) = (2x + 3)\sec(x^2 + 3x + 7) \cdot \operatorname{tg}(x^2 + 3x + 7)$$

2.8.4.5 Derivada da Função Cotangente: Seja $f(x) = \cot gx$, podemos reescrever $f(x)$ como sendo:

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

Aplicando a regra do quociente, obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x)' \cdot \operatorname{sen} x - \cos x \cdot (\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{(-\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen} x - \cos x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

Pela identidade trigonométrica, temos que: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Assim,

$$f'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

E mais,

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \csc^2 x.$$

Portanto,

$$f'\ x\ = -\csc^2 x$$

Exemplo 20: Calcule a derivada da função $f\ x\ = \operatorname{cotg} 3x$.

Solução

Pela regra da cadeia, considere $f\ x\ = \operatorname{cotg} u$, onde $u = 3x$.

Daí,

$$f'\ x\ = (\operatorname{cotg} u)' \cdot u'.$$

Como, $(\operatorname{cotg} u)' = -\csc^2 u$, $u' = 3$ e $u = 3x$.

Logo,

$$f'\ x\ = (-\csc^2 3x) \cdot 3.$$

Portanto,

$$f'\ x\ == 3 \cdot (-\csc^2 3x)$$

2.8.4.6 Derivada da Função Cossecante: Seja $\boldsymbol{f\ x\ = \csc x}$, podemos reescrever $\boldsymbol{f(x)}$. Como sendo:

$$f\ x\ = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Aplicando a regra do quociente, obtemos:

$$f'\ x\ = \frac{1\ ' \cdot \operatorname{sen} x - (1) \cdot (\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{0 \cdot \operatorname{sen} x - 1 \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Logo,

$$f'\ x\ = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Reescrevendo $f'(x)$, obtemos:

$$f'\ x\ = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Como,

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot gx \text{ e } \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x$$

Portanto,

$$f'\ x\ = -\cot gx\ \cdot \csc x$$

Exemplo 21: Calcule a derivada da função $f\ x\ = \csc(\frac{x+1}{x-1})$.

Solução

Aplicando a regra da cadeia, considere $f(x) = \csc u$, onde $u = \frac{x+1}{x-1}$.

Aplicando a regra do quociente em $u = \frac{x+1}{x-1}$, obtemos:

$$u' = \frac{(x+1)' \cdot (x-1) - (x+1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(1) \cdot (x-1) - (x+1) \cdot (1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

Daí,

$$f'(x) = (\csc u)' \cdot u'.$$

Como $(\csc u)' = -\csc u \cdot \mathrm{cotg}\, u$, $u' = \frac{-2}{(x-1)^2}$, e $u = \frac{x+1}{x-1}$. Logo,

$$f'(x) = -\csc\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \cot g\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \frac{(-2)}{(x-1)^2}.$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2} \cdot \csc\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \cot g\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

2.9 Derivadas Sucessivas

Seja f *uma* função derivável definida num certo intervalo. A sua derivada f' é também uma função, definida no mesmo intervalo. Podemos, portanto, pensar na derivada da função f'.

2.9.1 Definição. Seja f *uma* função derivável. Se f' também for derivável, então a sua derivada é chamada *derivada segunda de* f e é representada por $f''(x)$.

Exemplo 22: Seja $f(x) = 3x^2 + 8x + 1$. Calcule $f''(x)$.

Solução:

$f(x) = 3x^2 + 8x + 1$, então

$f'(x) = 6x + 8$

$f''(x) = 6$

Portanto: $f''(x) = 6$

Se f'' *é uma* função derivável, sua derivada, representada por $f'''(x)$, *é* chamada *derivada terceira* de $f(x)$.

A derivada de ordem *n* ou n-ésima derivada de *f*, representada por $f^{n}(x)$, *é* obtida derivando-se a derivada de ordem $n-1$ de f.

Exemplo 23: *Se* $f(x) = 3x^5 + 8x^2$, então

$f'(x) = 15x^4 + 16x$

$f''(x) = 60x^3 + 16$

$f'''(x) = 180x^2$

$f^{(4)} = 360x$

$f^{(5)} = 360$

$f^{(6)} = 0$

Dai $f^{n}(x) = 0, para\, n \geq 6$

Este capítulo teve o intuito de melhorar o nosso entendimento sobre a derivada para nos auxiliar no desenvolvimento das aplicações do capítulo seguinte.

Capítulo 3
Algumas Aplicações do Cálculo Diferencial

O cálculo é uma ferramenta que pode nos auxiliar nas dificuldades do dia a dia. Neste capítulo iremos fazer algumas aplicações no intuito de mostrar que o cálculo diferencial pode ser usado em diversas áreas da ciência.

3.1Aplicações na Economia

3.1.1 Um fabricante determina que t meses após o lançamento de um novo produto no mercado, $x(t) = t^2 + 3t$ centenas de unidades podem ser produzidas e vendidas por um preço unitário $p(t) = -2t^{\frac{3}{2}} + 30$ reais.

a) Expresse a receita $R(t)$ com a venda do produto em função do tempo.

b) Com que taxa a receita está variando em relação ao tempo 4 meses após o lançamento do produto? A receita está aumentando ou diminuindo nesta ocasião?

Solução:

a) A receita é dada por

$$R(t) = x(t)p(t) = (t^2 + 3t)(-2t^{\frac{3}{2}} + 30).$$

Centenas de reais.

b) A taxa de variação da receita $R(t)$ em relação ao tempo é dada pela derivada $R'(t)$, que podemos calcular usando a regra do produto. Daí,

$$R'(t) = x(t) \cdot p'(t) + p(t) \cdot x'(t).$$

Logo,

$$R'(t) = (t^2 + 3t) \cdot \frac{d}{dt}\left(-2t^{\frac{3}{2}} + 30\right) + (-2t^{\frac{3}{2}} + 30) \cdot \frac{d}{dt}(t^2 + 3t)$$

$$= (t^2 + 3t)\left(-2(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}})\right) + \left(-2t^{\frac{3}{2}} + 30\right)(2t + 3).$$

No instante $t = 4$, a taxa de variação da receita é

$$R'(4) = (4^2 + 3 \cdot 4)\left(-3 \cdot (4)^{\frac{1}{2}}\right) + \left(-2 \cdot (4)^{\frac{3}{2}} + 30\right)(2 \cdot 4 + 3) = -14.$$

Assim, após 4 meses a receita está variando á taxa de 14 centenas de reais (R$ 1400,00) por mês. Nesta ocasião, a receita está diminuindo, já que $R'(4)$ é negativa.

3.1.2 Um estudo de eficiência realizado no turno da manhã de uma certa fábrica revela que um operário que chega ao trabalho ás 8 h terá produzido

$$Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 24t$$

unidades t horas mais tarde.

a) Calcule a taxa de produção dos operários ás 11 h.

b) Qual é a taxa de variação da taxa de produção dos operários ás 11 h?

Solução:

a) A taxa de produção dos operários é a derivada primeira

$$R(t) = Q'(t) = -3t^2 + 12t + 24$$

da função de produção $Q(t)$. Ás 11 h, $t = 3$ e a taxa de produção é

$$R(3) = -3\cdot(3)^2 + 12\cdot(3) + 24 = 33.$$

Portanto a taxa de produção é 33 unidades por hora.

b) Usaremos a derivada segunda para determinar a taxa de variação da taxa de produção. Temos que:

$$Q'(t) = -3t^2 + 12t + 24$$
$$Q'' = -6t + 12.$$

Dai,

$$R'(t) = Q''(t) = -6t + 12$$

da função de produção. Ás 11 h, está taxa é

$$R'(3) = Q''(3) = -6\cdot(3) + 12 = -6$$

unidades por hora ao quadrado.

O sinal negativo indica que a taxa de produção dos operários está diminuindo, em outras palavras, os operários estão trabalhando mais lentamente. A taxa deste decréscimo de eficiência ás 11 h é 6 unidades por hora ao quadrado.

3.2 Aplicações na Biologia

Um biólogo modela o efeito da introdução de uma toxina em uma colônia de bactérias através da função

$$p(t) = \frac{t+1}{t^2 + t + 4}$$

Onde p é a população da colônia (em milhões) t horas após a toxina ser introduzida.

a) Com que taxa a população está variando no momento em que a toxina é introduzida? A população está aumentando ou diminuindo nesta ocasião?

b) Em que instante a população começa a diminuir? De quanto a população aumente antes de começar a diminuir?

Solução:

a) a taxa de variação da população com o tempo é dada pela derivada $p'\ t$, que podemos calcular usando a regra do quociente.

Seja $f\ t\ = t+1$ e $g\ t\ = t^2+t+4$. Dai pela regra do quociente temos:

$$p'\ t\ = \frac{g\ t\ f'\ t\ - f\ t\ g'(t)}{(g\ t\ )^2}.$$

Onde $f'\ t\ = 1$ e $g'\ t\ = 2t+1$. Logo,

$$p'\ t\ = \frac{(t^2+t+4)\cdot\ 1\ - (t+1)\cdot(2t+1)}{(t^2+t+4)^2}$$

$$= \frac{t^2+t+4-2t^2-3t-1}{(t^2+t+4)^2} = \frac{-t^2-2t+3}{(t^2+t+4)^2}$$

A toxina é introduzida em $t = 0$; neste instante, a taxa de variação da população é

$$p'\ 0\ = \frac{0+0+3}{(0+0+4)^2} = \frac{3}{16} = 0{,}1875.$$

Logo a população inicial está variando a uma taxa de 0,1875 milhões de bactérias (187500) por hora. Como $p'(0) > 0$ portanto ela está aumentando.

b) Para que a população diminua, é preciso que $p'(t) < 0$. Inicialmente vamos fatorar o numerador de $p'(t)$. Temos que:

$$-t^2-2t+3 = -\ t^2+2t-3\ = -\ t-1\ \ t+3\ .$$

Daí, podemos escrever

$$p'\ t\ = \frac{-(t-1)(t+3)}{(t^2+t+4)^2}.$$

Como o denominador $(t^2+t+4)^2$ e o fator $t+3$ são positivos para qualquer valor de $t \geq 0$, podemos escrever:

Para $0 \leq t < 1\ e\ p'(t) > 0,\ p(t)$ está aumentando;

Para $t \geq 1\ e\ p'(t) < 0,\ p(t)$ está diminuindo. Assim, a população começa diminuir após 1 hora.

Temos que: a população inicial da colônia é

$$p\ 0\ = \frac{0+1}{0+0+4} = \frac{1}{4}\ milhões.$$

Após 1 hora, passa a ser,

$$p\ 1\ = \frac{1+1}{1+1+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\ milhões.$$

Assim, antes de começar a diminuir, a população aumenta de

$$p(1) - p(0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\ milhões$$

O que corresponde a 83333 bactérias.

3.3 Aplicações no Crescimento Populacional

Estima-se que daqui a x meses a população de um certo município será $p(x) = x^2 + 20x + 8000$.

a) Qual será a taxa de variação da população com o tempo após 15 meses?

b) Qual será a variação da população durante o décimos sexto mês?

Solução:

a) A taxa de variação da população com o tempo é a derivada da função população. Logo a taxa de variação é igual a $p'(x) = 2x + 20$.

Agora vamos determinar a taxa de variação da população daqui a 15 meses. Temos que:

$$p'(15) = 2 \cdot (15) + 20 = 50.$$

Portanto, a taxa de variação da população será de 50 moradores por mês.

b) A variação da população durante o 16ª mês é igual a diferença entre a população após 16 meses e a população após 15 meses. Temos que:

$$p(16) = (16)^2 + 20 \cdot (16) + 8000 = 256 + 320 + 8000 = 8576$$

$$p(15) = (15)^2 + 20 \cdot (15) + 8000 = 225 + 300 + 8000 = 8525.$$

Logo a taxa de variação da população é:

$$p(16) - p(15) = 8576 - 8525 = 51.$$

Portanto a taxa é de 51 moradores.

3.4 Aplicações na Física

Um corpo se move em linha reta de tal forma que sua posição no instante t é dada por $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$.

a) Determine a velocidade do corpo e discuta seu movimento entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$.

b) Determine a distância percorrida pelo corpo entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$.

c) Determine a aceleração do corpo e os intervalos de tempo nos quais está acelerando e desacelerando entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$.

Solução:

Temos que a velocidade é dada por $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$ e a aceleração é dada por $a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$.

a) Temos que $s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$. Dai,

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9.$$

Assim o corpo está estacionário quando,

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) = 0.$$

Isto é, nos instantes $t = 1$ e $t = 3$. Em todos os outros instantes, o corpo está avançando ou recuando como mostra a tabela a seguir.

Tabela 1:

Intervalo	Sinal de $v(t)$	Descrição do movimento
$0 < t < 1$	$+$	Avança de $s(0) = 5$ para $s(1) = 9$
$1 < t < 3$	$-$	Recua de $s(1) = 9$ para $s(3) = 5$
$3 < t < 4$	$+$	Avança de $s(3) = 5$ para $s(4) = 9$

Fonte: HOFFMANN; BRADLEY, 2008

b) Vamos agora determinar a distância percorrida pelo corpo. Sabemos que o corpo se desloca para frente de $s(0) = 5$ até $s(1) = 9$, volta para $s(3) = 5$ e, se desloca para frente até $s(4) = 9$. Portanto, a distância percorrida é:

$$D = \underset{0<t<1}{|9-5|} + \underset{1<t<3}{|5-9|} + \underset{3<t<4}{|9-5|} = 12\, u.m$$

c) Temos que a aceleração é dada por

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 = 6(t-2).$$

O corpo está acelerando $(a(t) > 0)$ no intervalo $2 < t < 4$ e desacelerando $(a(t) < 0)$ no intervalo $0 < t < 2$.

Foi abordado nesse capítulo algumas aplicações do cálculo diferencial na economia, no crescimento populacional, na biologia e na física. Mostrando que o cálculo diferencial é uma ferramenta muito importante para tomada de decisão na sociedade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O grande diferencial da matemática é a sua aplicação em situações do dia a dia, no intuito de facilitar a vida em sociedade. O cálculo, desde o seu surgimento, continua a ser aplicado em vários ramos da ciência, passando a ser uma importante ferramenta utilizada por físicos, administradores, economistas e biólogos.

As aplicações do Cálculo Diferencial proporcionam romper as barreiras da sala de aula observando que o mesmo pode ser aplicado em diversas áreas da ciência.

Ao pesquisar sobre o conteúdo ampliou-se o conhecimento à respeito da história do cálculo, de suas definições, teoremas com suas respectivas demonstrações e exemplos mostrando sua importância para o aluno. As aplicações usadas nesse trabalho tiveram o intuito de despertar a curiosidade e o interesse do estudo em mais áreas, que outros acadêmicos possam levar as aplicações para a sala de aula.

Este trabalho enriqueceu o conhecimento sobre o conteúdo estudado, favorecendo a atuação do professor em sala de aula, através de pesquisas complementares para que a motivação seja sempre o foco, tornando o estudo mais prazeroso.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Cálculo**. Vol. 1. Editora LTC.

BOYER, Carl Benjamin, 1906, **História da Matemática** [tradução de Elza F. Gomide] – São Paulo, Edgard Blucher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

FLEMMING, Marília Diva e GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**: Funções, Limites, Derivação e Integração. 6.ed. São Paulo-SP: Editora, Pearson, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática** [tradução Hygino H. Domingues. 5a ed] – Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011.

FOULIS, M. **Cálculo.** Vol. 1. Editora Guanabara Dois.

HOFFMANN, Laurense D. e BRADLEY, Gerald L. **Cálculo:** um curso moderno e suas aplicações. 9.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. ISBN: 978852166023.

DIAS, Gabriela Alves. **Cálculo Diferencial e Integral e suas Aplicações.** Bahia, 2016. Disponível em: <http://www2.uesb.br/cursos/matematica/matematicavca/wp-content/uploads/monografia.-Gabriela-Alves-Vers%C3%A3o-Final.pdf>. Acesso em: 18/03/2018, 00:01:30.

"Isaac Newton (1642-1727)". 2009. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/newton.htm>. Acesso em: 28/03/2018, 14:52:30.

"Morte de Isaac Newton". Disponível em: <http://mortenahistoria.blogspot.com.br/2008/08/morte-de-isaac-newton_12.html> Acesso em: 28/03/2018, 15:20:37.

"Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)".2009. Disponível em <http://ecalculo.if.usp.br/historia/leibniz.htm>. Acesso em: 28/03/2018, 16:26:25.

Biografia de Leibniz <https://www.ebiografia.com/gottfried_leibniz/>. Acesso em: 03/05/2018, 16:16:45.

"O método exaustão". Disponível em: <http://www.seara.ufc.br/folclore/folclore368.htm > Acesso em 15/05/2018, 20:06:37.