UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

INVESTIGAÇÕES GEOMÉTRICAS E POLIEDROS DE PLATÃO: UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DO MATERIAL CONCRETO

LARISSA SILVA ARAÚJO

Campina Grande/PB
2012

LARISSA SILVA ARAÚJO

INVESTIGAÇÕES GEOMÉTRICAS E POLIEDROS DE PLATÃO: UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DO MATERIAL CONCRETO

Monografia apresentada no Curso de Especialização em Educação Matemática para professores do Ensino Médio da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Especialista em Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Kátia Maria de Medeiros

Campina Grande/PB
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

A663i Araújo, Larissa Silva.

Investigações geométricas e poliedros de platão [manuscrito]: um estudo sobre a influência do material concreto / Larissa Silva Araújo. - 2012.

67 f. : il. color.

Monografia (Especialização em Educação Matemática para professores do Ensino Médio) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2012.

“Orientação: Profa. Dra. Kátia Maria de Medeiros, Departamento de Matemática”.

1. Investigações Geométricas. 2. Material Concreto. 3. Poliedros de Platão. 4. Ensino Médio I. Título.

21. ed. CDD 516.2

LARISSA SILVA ARAÚJO

Monografia apresentada no Curso de Especialização em Educação Matemática para professores do Ensino Médio da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Especialista em Educação Matemática.

MONOGRAFIA APROVADA EM: 28/09/2012

BANCA EXAMINADORA

Kátia Maria de Medeiros

Profª Drª Kátia Maria de Medeiros
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Orientadora

Prof. Drn. José Lamartine da Costa Barbosa
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
. Examinador

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Profª. Msc. Maria da Conceição Vieira Fernandes
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Campina Grande/PB
2012

Dedico este trabalho a Deus, à minha mãe Maria do Socorro, ao meu namorado Marcos Alan, à minha família, a todos os amigos e colegas que estiveram comigo nesta caminhada e que contribuíram direta ou indiretamente para a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me dar forças durante toda minha jornada de estudos. Agradeço à minha mãe Maria do Socorro Silva, por todo o carinho, pelo exemplo de dedicação e o incentivo para buscar meus objetivos, à minha família, em especial ao meu avô José Ferreira (in memorian), que não teve estudos, mas sempre me incentivou a estudar, ao meu namorado Marcos Alan e aos meus amigos, pelo incentivo, carinho e por compreender minha ausência em momentos que eles necessitavam da minha presença.

Agradeço à minha orientadora a Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros pelo incentivo, dedicação e apoio ao me orientar, que foram indispensáveis para a realização deste trabalho. Aos meus professores da formação básica, em especial ao professor José Alberto, pois foi nele que me espelhei para a escolha da minha profissão. Aos professores da graduação e da Especialização por toda a bagagem que adquiri durante todos esses anos de formação.

À professora da Escola Conselheiro José Braz do Rêgo, Francitânia Albuquerque da Silva, por ter cedido sua turma para a realização desta pesquisa.

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino).

(Braumann)

RESUMO

Como os conteúdos de geometria nas escolas são poucos ou não trabalhados se torna evidente a dificuldade dos alunos do Ensino Médio no estudo de Geometria, principalmente a Geometria Espacial, na qual o seu estudo separado do material concreto exige uma abstração, relacionada à visualização espacial, que não é uma capacidade comum a todas as pessoas. Nossa pesquisa teve com objetivo geral verificar, através de atividades de investigação geométricas se, de fato, o material concreto pode contribuir na resolução de algumas destas investigações envolvendo o conteúdo Poliedros de Platão e como objetivos específicos: aplicar atividades contendo investigações geométricas para que os alunos resolvam sem a utilização do material concreto; confeccionar materiais concretos para auxiliar nas investigações geométricas; aplicar atividades contendo investigações geométricas para que os alunos resolvam utilizando o material concreto e verificar, através da análise dos questionários, se e como o material concreto contribuiu na resolução das atividades de investigação geométricas envolvendo o conteúdo Poliedros de Platão. A metodologia foi desenvolvida considerando aspectos qualitativos. Essa pesquisa foi realizada nos meses de junho e julho de 2012 em uma turma de 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Conselheiro José Braz do Rêgo localizada na cidade de Boqueirão - PB. Os resultados mostram que o material concreto contribui para a resolução de investigações geométricas com o conteúdo Poliedros de Platão, uma vez que com este material o aluno poderá, através da visualização, encontrar uma relação entre faces, vértices e arestas.

Palavras-Chave: Investigações Geométricas; Material Concreto, Poliedros de Platão, Ensino Médio.

ABSTRACT

As the contents of geometry in schools are few or unworked becomes evident the difficulty of high school students in the study of Geometry primarily the Spatial Geometry where your separate study of concrete material requires abstraction that is not an ability common to all people. Our research had with General purpose, check through geometric research activities if, in fact, the concrete material can contribute to the resolution of some of these investigations involving the Plato's Polyhedra as content and specific objectives: apply geometric investigations containing activities for students to solve without the use of concrete material; produce concrete materials to assist in geometric investigations; apply geometric investigations for activities containing that students solve using the concrete material and verify, through the analysis of the questionnaires, whether and how the concrete material contributed to the resolution of geometric research activities involving the Plato's Polyhedra content. The methodology has been developed considering qualitative aspects. This survey was conducted in June and July 2012 meses_de in a class of 2nd year of high school State School Elementary and High School Counselor José Braz do Rêgo located in the town of Boqueirão-PB. The results show that the concrete material contributes to the resolution of mathematical investigations with the Plato's Polyhedra content.

Key Words: Mathematical Investigations; Material Concrete, Polyhedra Plato's school.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A pesquisa que desenvolvemos parte da necessidade em aplicar métodos que visam facilitar o ensino e aprendizagem de matemática no Ensino Médio. Escolhemos esse conteúdo, Poliedros de Platão, devido à quantidade de subtópicos que podem ser explorados nessa pesquisa e a quantidade de materiais que podem ser confeccionados e/ou utilizados.

Com relação ao conteúdo Poliedros, que muitas vezes não é abordado em sala de aula, alguns professores e alunos sentem dificuldade de visualizar os Poliedros desenhados no papel. As dificuldades encontradas pelos professores de matemática são muitas, alguns não se sentem seguros em trabalhar com materiais concretos, Resolução de Problemas ou investigações por não ter aprendido como dar aula utilizando essas metodologias ou não tem apoio da escola para dar uma aula diferente da tradicional.

Nosso trabalho está organizado da seguinte forma: inicialmente apresentamos nosso objetivo geral e os específicos, a seguir apresentamos a revisão de literatura na qual abordamos alguns aspectos históricos dos Poliedros de Platão; em seguida tratamos das possibilidades didáticas dos Poliedros de Platão na aula de Matemática; das Investigações Matemáticas e os Poliedros de Platão; posteriormente, temos a análise dos dados e, finalmente, apresentamos as considerações finais.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GERAL

Verificar, através de atividades de investigação geométricas se, de fato, o material concreto pode contribuir na resolução de algumas destas investigações envolvendo o conteúdo poliedros de Platão.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Aplicar atividades contendo investigações geométricas para que os alunos resolvam sem a utilização do material concreto;
- Confeccionar materiais concretos para auxiliar nas investigações geométricas;
- Aplicar atividades contendo investigações geométricas para que os alunos resolvam utilizando o material concreto;
- Verificar, através da análise dos questionários, se e como o material concreto contribuiu na resolução das atividades de investigação geométricas envolvendo o conteúdo poliedros de Platão.

CAPÍTULO I

1. ASPECTOS HISTÓRICOS DOS POLIEDROS DE PLATÃO

Nesta sessão vamos apresentar aspectos históricos de algumas categorias de Poliedros como os *Poliedros de Arquimedes*, os *Poliedros Estrelados* com destaque aos *Poliedros de Platão* que é o foco do nosso trabalho.

1.1. Poliedros de Arquimedes

Veloso e Viana (2008), afirmam que os poliedros arquimedianos foram estudados pela primeira vez por Arquimedes, no terceiro século antes de nossa era, dois mil anos depois, o alemão Johannes Kepler investigou de modo exaustivo algumas famílias de poliedros. Segundo os autores, Kepler conseguiu demonstrar a existência de treze sólidos de Arquimedes.

Os autores descrevem as características dos poliedros arquimedianos, que não são como os sólidos platônicos que possui todas as faces iguais. Eles ressaltam que a única exigência para que um poliedro seja considerado como poliedros arquimedianos é que os vértices sejam todos do mesmo tipo, mesmos polígonos e mesma disposição, e para que pudessem existir apenas treze poliedros arquimedianos foi acrescentada uma restrição: todos os sólidos arquimedianos podem ser colocados dentro de um tetraedro regular, de modo que quatro das suas faces fiquem sobre as faces do tetraedro. Em seguida. os autores apresentam uma reflexão sobre como chegar a demonstração da existência de apenas 13 sólidos de Arquimedes.

Veloso e Viana (2008), comentam que, atualmente matemáticos, artistas plásticos, designers e arquitetos se entusiasmam com as propriedades e aplicações dos poliedros arquimedianos sugerindo várias formas de construí-los e representá-los em ecrãs de computador. Segundo os autores, existe ligação entre os sólidos arquimedianos e os sólidos platônicos, pois é possível obter sólidos arquimedianos a partir do cubo efetuando cortes que também são chamados de truncaduras.

Figura 1: Alguns Poliedros de Arquimedes obtidos a partir de truncaduras do cubo. Fonte: Veloso e Viana (2008a, p. 20),

Por sua vez, Loyd (2008) faz referência ao *problema délico* que consistia em duplicar ou dobrar a área de um cubo. Segundo o autor o problema délico costuma se confundir com o *dos cubos de Platão* que é por vezes chamado de *Números Geométricos de Platão*. O problema dos números Geométricos de Platão consiste em estabelecer a quantidade de cubos necessária para construir o monumento e a praça quadrada onde está situado.

1.2. Poliedros estrelados

Veloso e Viana (2008) apresentam a análise de uma peça de mármore existente na Basílica de S. Marcos, em Veneza, que foi atribuída ao pintor Paolo Ucello. Nesta peça, segundo os autores, pode ser observada a existência de 12 pequenas pirâmides pentagonais que estão coladas pela base pentagonal a um sólido que possui doze faces, o dodecaedro.

Figura 2: Peça de mármore existente na Basílica de S. Marcos, em Veneza. Fonte: Veloso e Viana (2008, p. 39)

Os autores explicam como acontece o processo de estrelação nos polígonos e afirmam que nos sólidos o processo de estrelação é resultado do prolongamento das suas faces e afirmam que nem todo sólido é possível realizar o processo de estrelação a exemplo do cudo.

Segundo os autores, a estrelação do octaedro resulta em um sólido estrelado composto por dois tetraedros que foi chamado por Kepler de Stella octangula.

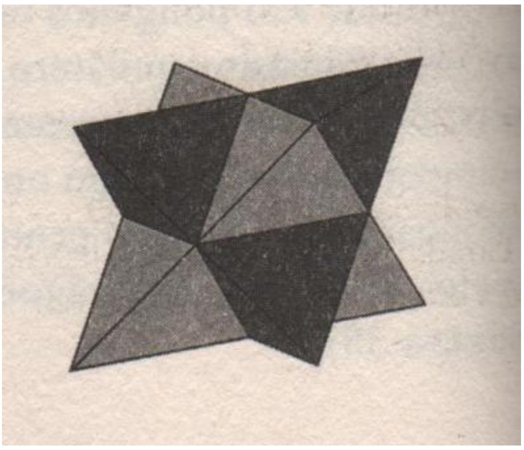


Figura 3: Stella octangula. Fonte: Veloso e Viana (2008)

Marques (2008) apresenta a definição de polígono e poliedro, segundo Coxeter, e em seguida apresenta a definição de polígono regular e poliedro regular afirmando que, "um polígono regular é um polígono com lados iguais e ângulos iguais, um poliedro é regular se as suas faces são regulares e todas iguais e seus vértices são congruentes (p. 29)".

Em seguida o autor apresenta o que deve ser feito para obter o polígono regular estrelado chamado de pentagrama e afirma que "se juntarmos cinco em cada vértice, obtemos o pequeno dodecaedro estrelado; se juntarmos três em cada vértice, obtemos o grande dodecaedro estrelado" (p. 31).

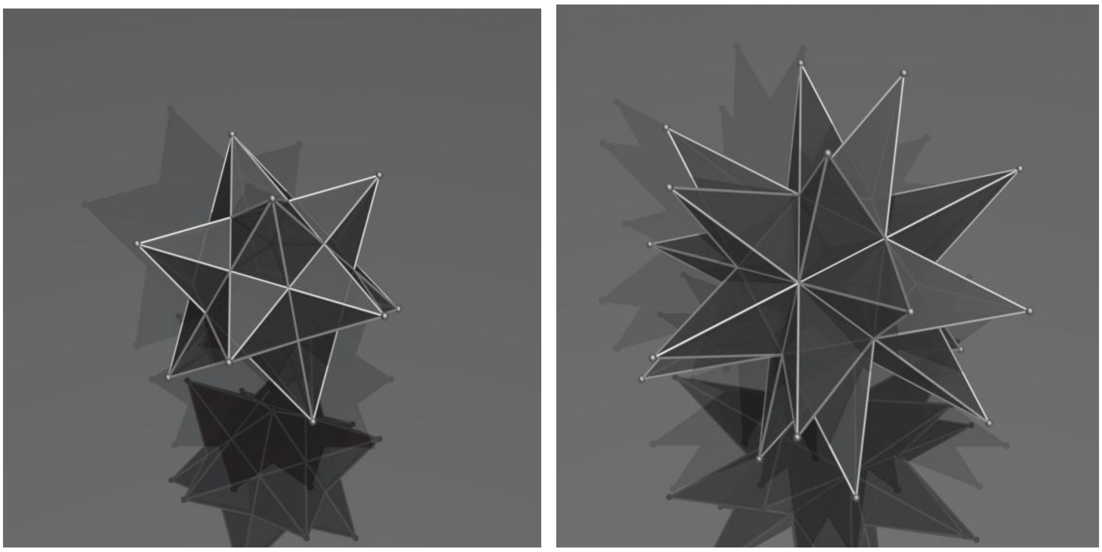


Figura 4: Pequeno dodecaedro estreado e grande dodecaedro estrelado, respectivamente.
Fonte: Marques (2008)

A definição de poliedro que foi considerada pelo autor admite a existência dos quatro poliedros regulares estrelados denominados de poliedros de Kepler-Poinsot. O autor afirma que “aceitando estas definições os cinco sólidos platônicos e estes quatro estrelados formam todos os poliedros regulares possíveis” (p. 32).

Veloso e Viana (2008) afirmam que o dodecaedro possui três estrelações: o pequeno dodecaedro estrelado, o grande dodecaedo e o grande dodecaedro estrelado. Segundo os autores, “as três estrelações do dodecaedro e a décima sexta estrelação do icosaedro, o chamado grande icosaedro, são os chamados sólidos de Kepler-Poinsot (p. 43)” que assim como os sólidos de Platão são regulares. Os autores mencionam uma característica dos sólidos de Kepler-Poinsot que é a intersecção de suas faces.

1.3. Breve história dos poliedros de Platão

Eves (2004) fala da existência de apenas cinco poliedros regulares e que esses poliedros foram associados a Platão mas, segundo os escritos no livro XIII dos Elementos, no primeiro escólio, a nomeação dos sólidos a Platão é feita erroneamente,” porque três deles, o tetraedro, o cubo e o dodecaedro se devem aos pitagóricos, ao passo que o octaedro e o icosaedro se devem a Teeteto” (p.144). Segundo Eves, foi Platão, em seu Timeu, que descreveu os cinco poliedros regulares e mostrou como construí-los juntando triângulos, quadrados e pentágonos para compor suas faces.

Quanto a analogia dos Poliedros de Platão aos elementos da natureza, Eves (2004) afirma que Platão associa o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o cubo aos elementos fogo, ar, água e terra, respectivamente. Platão teve dificuldade em explicar o dodecaedro e o associou ao universo.

Eves (2004, p. 114) apresenta a explicação interessante de Johann Kepler para as associações do Timeu dizendo que:

> Intuitivamente ele assumiu que, desses sólidos, o tetraedro abarca o menor volume para sua superfície, ao passo que o icosaedro o maior. Agora, essas relações volume-superfície são qualidades de secura e umidade, respectivamente, e como o fogo é o mais seco dos quatro “elementos” e a água o mais úmido, o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Associa-se o cubo com a terra porque o cubo, assentando quadradamente sobre uma de suas faces, tem a maior estabilidade. O octaedro, seguro frouxamente por dois de seus vértices opostos, entre o indicador e o polegar, facilmente rodopia, tendo a instabilidade do ar. Finalmente, associa-se ao dodecaedro com o Universo porque o dodecaedro tem doze faces e o Zodiaco tem doze seções.

Eves apresenta alguns exemplos de como alguns Sólidos de Platão podem ser encontrados na natureza: o tetraedro, o cubo, e o octaedro se encontram em forma de cristais e os outros, dodecaedro e icosaedro, apresentam-se na natureza como esqueletos de animais marinhos microscópicos que são chamados de radiolários. Eves afirma que em 1885 foi encontrado um brinquedo, de origem etrusca, na forma de dodecaedro regular.

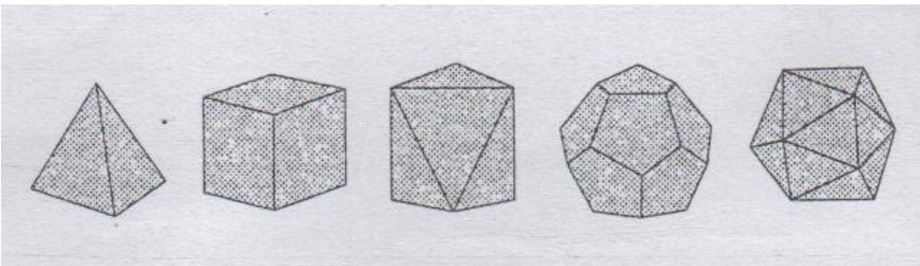


Figura 5: Sólidos de Platão. Fonte:Eves (2004, p. 114).

Pedone (1989) apresenta a forma de se encontrar as possibilidades de ângulos dos vértices dos poliedros, compostos por polígonos, que neste trabalho tratamos como Ângulo poliédrico. A autora afirma que a “soma dos ângulos dos polígonos unidos em cada vértice será menor que 360°”.

Assim, para o polígono triângulo, como apresentado por Pedone, teremos três possibilidades de Poliedros, tetraedro, octaedro e icosaedro, para o polígono quadrado teremos uma possibilidade de poliedro, o hexaedro (cubo), e para o polígono pentágono teremos uma possibilidade de poliedro, o dodecaedro, que são os cinco Sólidos de Platão.

Em nossa pesquisa, os alunos confeccionaram utilizando origami, quatro dos cinco Poliedros de Platão (o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro) além desses a pirâmide de base quadrangular e uma Dipirâmide Triangular (J12) (os dois últimos são sólidos de Johnson). Os alunos investigaram as possibilidades de ângulos poliédricos, como apresentado por Pedone(1989), que poderiam ser formados utilizando os módulos de origami em forma de triângulos, quadrados e pentágonos.

CAPÍTULO II

2. POSSIBILIDADES DIDÁTICAS DOS POLIEDROS DE PLATÃO NA AULA DE MATEMÁTICA

Existem várias possibilidades didáticas para trabalhar os Poliedros de Platão na sala de aula de Matemática, a exemplo da utilização de Canudos, Palitos de Churrasco, Geoespaço Origami, Poliedros construídos a partir de barras de sabão e o Aplicativo Poly Nesta sessão apresentaremos o trabalho com o Origami, Poliedros construídos a partir de barras de sabão e o Aplicativo Poly que foram os recursos que utilizamos para verificar se o material concreto contribuiu para o desenvolvimento do trabalho dos alunos nas investigações geométricas descritas neste trabalho.

2.1. O Origami

Segundo Rafael (2011) “o origami é a arte japonesa de dobrar papel". Além do origami a autora fala sobre a técnica do *Origami Modular* que consiste em confeccionar vários módulos que podem se unir para formar figuras mais ou menos complexas. A autora diz que a técnica do *Origami Modular* apresenta a atrativa possibilidade de construir e estudar poliedros.

A autora afirma que "os origamistas mais tradicionais não apreciam essa forma de dobragem. Para eles um modelo deve ser dobrado a partir de uma única folha de papel, sem cortes e sem cola. Já para outros a cola e a tesoura são permitidos".(p. 19).

Quanto ao formato do papel, durante muitos anos era utilizado um quadrado de papel para a confecção dos modelos, recentemente passou a se utilizar retângulos com formato parecido com o da folha A4, muitos modelos poliédricos são construídos utilizando esse formato.

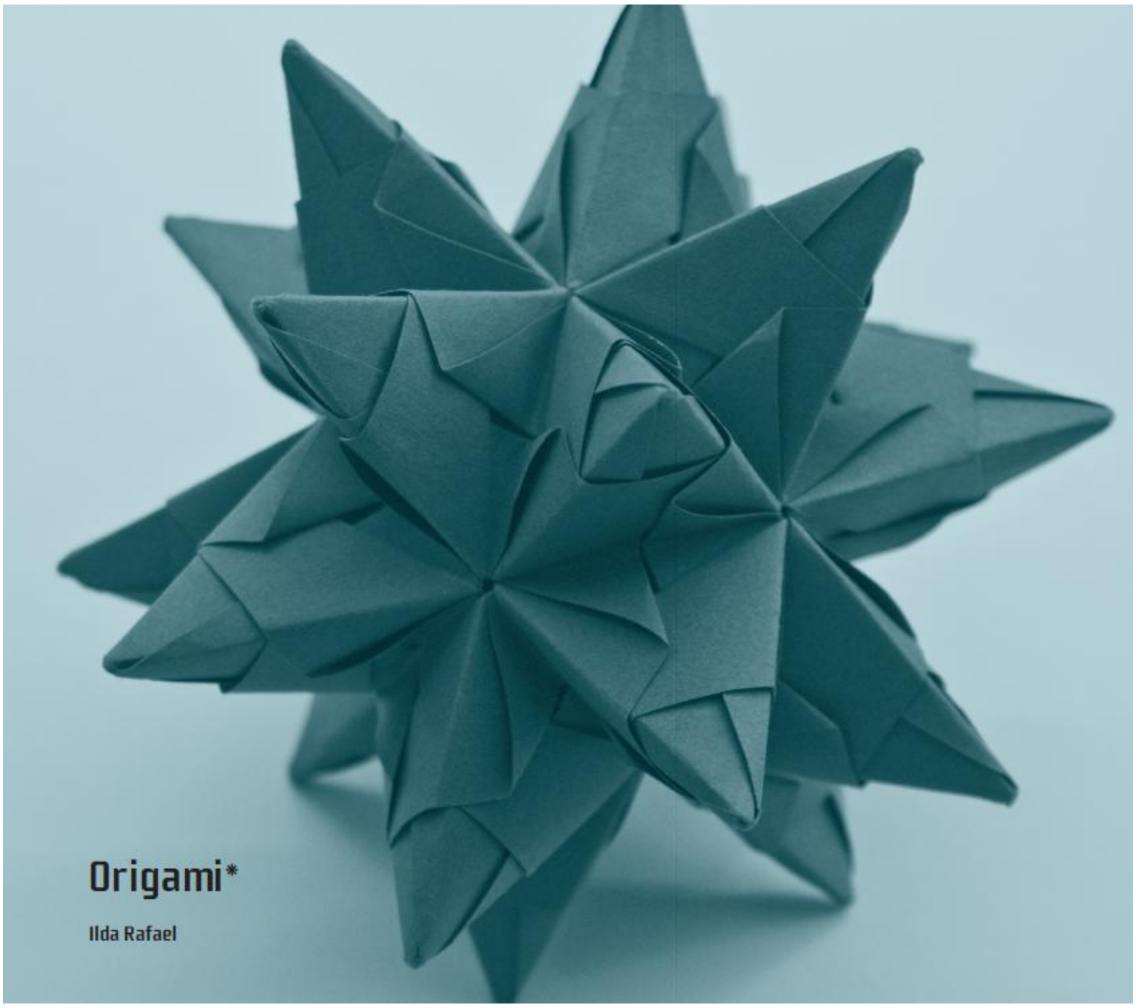


Figura 6: Sólido estrelado confeccionado com origami modular. Fonte: Rafael(2011, p. 6)

2.2. Os Poliedros construídos a partir de barras de sabão

Lopes (2012) defende que a exploração de poliedros e da relação de Euler deve ser feita nas séries finais do primeiro grau e que esse trabalho deve ser feito utilizando materiais e objetos que facilitem este estudo. Em sua pesquisa o autor utilizou a geometria dos cortes de sabão na qual os alunos utilizaram sabão em pedra para produzir cortes e para cada corte fazer a contagem de faces, vértices e arestas e preencher uma tabela contendo essas informações para deduzir a relação de Euler.

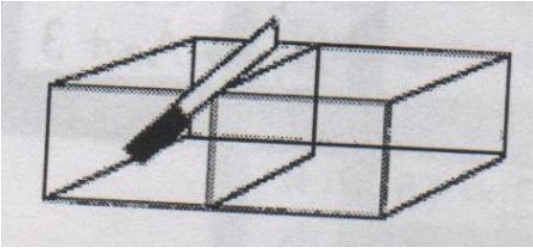


Figura 7: Corte da barra de sabão.Fonte: Lopes (2012)

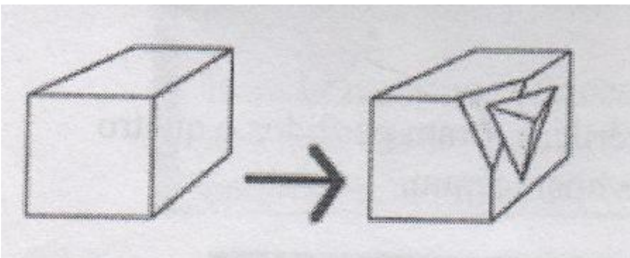


Figura 8: Processo de lapidação do cubo. Fonte:Lopes (2012)

2.3. O Aplicativo Poly

O Poly é um aplicativo de geometria espacial. Esse aplicativo fornece tanto a vista tridimensional como a planificada. Neste aplicativo podemos encontrar várias categorias de sólidos: *Sólidos Platônicos*, *Arquimedianos*, *Prismas e Anti-prismas*, *Sólidos de Johnson*, *Sólidos Catalãos*, *Dipirâmides* e *Deltoedros, Esferas* e *Domos Geodésicos*. Esse aplicativo permite o movimento dos sólidos. Existem essas categorias e cada categoria aqui mencionada é constituída por vários poliedros.

O *Poly* é um excelente aplicativo para trabalhar, principalmente o conteúdo sólidos geométricos, pois com o *Poly* os alunos poderão ter a experiência de conhecer mais do que os poucos sólidos geométricos que são apresentadas nas aulas de geometria. Os alunos poderão observar o movimento desses sólidos podendo visualizar todas as suas faces, vértices e arestas, o que contribui para o desenvolvimento da visão espacial.

Existem outros meios de desenvolver a visão espacial dos alunos sem utilizar o aplicativo como é o caso da construção de sólidos a partir de canudos como apresentado por Pohl (1987) e Leal e Veloso, mas a utilização do aplicativo *Poly* proporciona a visualização de vários poliedros que possivelmente os alunos não iriam construir utilizando o material concreto.

Nesta pesquisa, utilizamos o *Poly* para mostrar aos alunos vários sólidos e suas vistas espaciais e planas para que eles pudessem verificar os possíveis cortes que poderiam ter feito na investigação geométrica utlizando barras de sabão para preencher a tabela e deduzir a relação de Euler.

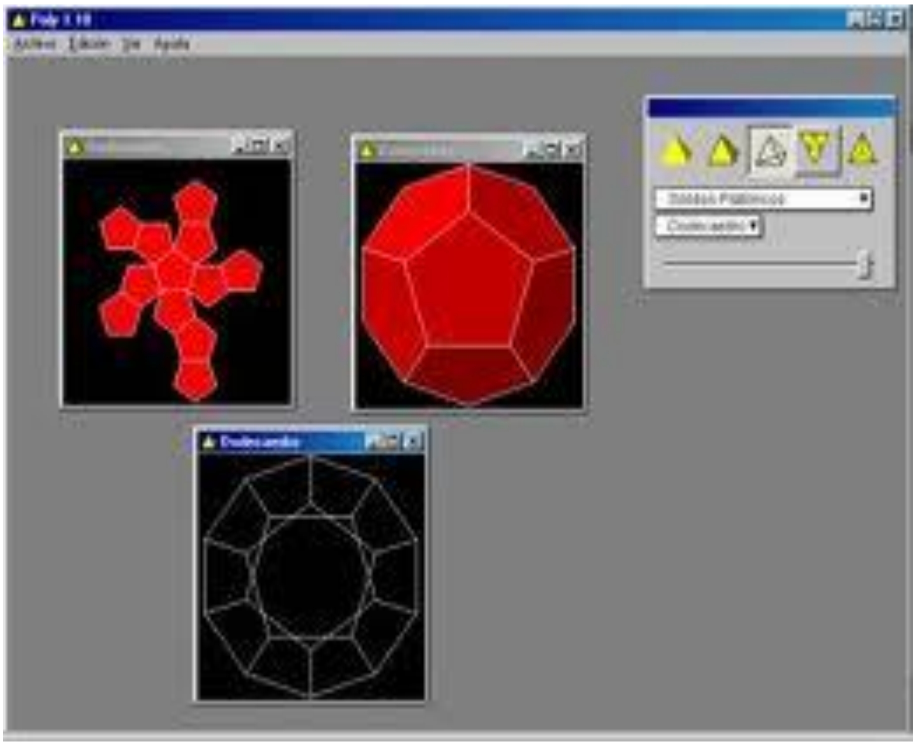


Figura 9: Aplicativo Poly

Durante as invetigações utilizamos o *origami, a geometria dos cortes de sabão* e *o aplicativo Poly* como recursos para a nossa pesquisa. Em relação ao origami, utilizamos a técnica de *origami modular* apresentada por Rafael (2011).

Quanto aos poliedros de barras de sabão utilizamos a sugestão de tabela apresentada por Menezes (2003) que difere da tabela utilizada por Lopes (2012), pois além do número de faces, vértices e arestas a tabela sugerida por Menezes, 2003) contém a soma do número de faces adicionado ao número de vértices.

Em nossa pesquisa o aplicativo *Poly* foi utilizado após a investigação geométrica com barras de sabão e serviu para apresentar aos alunos as possibilidades de cortes que eles poderiam ter realizado na barra de sabão.

CAPÍTULO III

3. AS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS E OS POLIEDROS DE PLATÃO

Os problemas e as investigações matemáticas são caracterizados como tarefas de grau de desafio elevado. Nesta sessão vamos apresentar aspectos relativos aos problemas e as investigações com destaque para as investigações que é o foco da nossa pesquisa.

3.1. Tarefas de desafio elevado

Ponte (2005, p. 7) afirma que "as investigações mais do que os problemas, promovem o envolvimento dos alunos, pois requerem a sua participação activa desde a primeira fase do processo - a formulação das questões a resolver".

Segundo o autor, as tarefas possuem duas dimensões: o grau de desafio e o grau de estrutura. O grau de desafio é medido pelo o grau de dificuldade da tarefa e pode variar entre os polos "reduzido" e "elevado". Quanto ao grau de estrutura, as tarefas podem ser classificadas com os polos "aberto" e "fechado". "Uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas". (PONTE 2005, p. 8).

Para o autor, quanto a duração, as tarefas de investigação podem ser classificadas como tarefas de média duração.

Para Medeiros (2001), a atividade de resolução de problemas, em sala de aula, no ensino fundamental, não está tendo a aprendizagem matemática proposta para esse campo de conhecimento, pois os professores utilizam os "problemas" para fixar os conteúdos que acabaram de ser vistos e os alunos encontram a solução dos problemas através da comparação com os problemas que foram trabalhados anteriormente de modo a identificar características semelhantes e o que era considerado um problema passa a ser um simples exercício, uma vez que os alunos já conhecem os procedimentos que devem utilizar para chegar a sua solução. Esses problemas são caracterizados como problema-padrão ou problemas fechados e podem ser resolvidos por meios das regras do contrato didático feito por professor e aluno.

Segundo a autora, o problema tem que proporcionar um desafio para o aluno de tal forma que ele não conheça procedimentos padronizados que o faça chegar à solução. A autora afirma que “os problemas abertos se caracterizam por não terem vínculo com os últimos conteúdos estudados, evitando as regras do contrato didático” (p. 5). Segundo a autora os problemas abertos possuem uma ou mais soluções e podem ser trabalhados em grupo para que haja, através de conflitos cognitivos, produção de conjecturas. Para a autora, com os problemas abertos “o aluno desenvolverá a capacidade de tentar, supor, testar e provar o que foi proposto como solução do problema”(p. 6).

Ponte (2010) afirma que investigar, em Matemática, envolve os momentos de formulação de questões, a produção, a análise e o refinamento de conjecturas, a demonstração e a comunicação dos resultados. Segundo o autor, uma investigação pode ter como ponto de partida um problema matemático ou uma situação não matemática. O autor (2010, p. 19) acredita que "uma investigação baseada na realidade dos alunos pode ser o ponto de partida para desenvolver a sua capacidade de investigação, para aprender novos conceitos de matemática”.

Quanto à comunicação, Menezes (2003) afirma que o desenvolvimento desta fase depende de como o professor organiza as situações de aprendizagem.

Alem disso, o autor (2003, p.115) afirma que:

> Ao dialogar o professor vai desenvolvendo suas capacidades de comunicação, detecta as dificuldades sentidas pelos alunos, bem como as suas causas; tornar-se-á mais simples o leque de estratégias para manter os alunos interessados na resolução de qualquer problema, seja ele de Matemática ou não, e enriquece o vocabulário também.

Segundo Ponte (2010), os problemas e as investigações podem gerar atividades que podem ser mais favoráveis à aprendizagem. Para o autor, as tarefas possuem quatro dimensões fundamentais: o grau de complexidade, a estrutura, o contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução.

Ponte (2010, p. 21) apresenta o seguinte esquema:

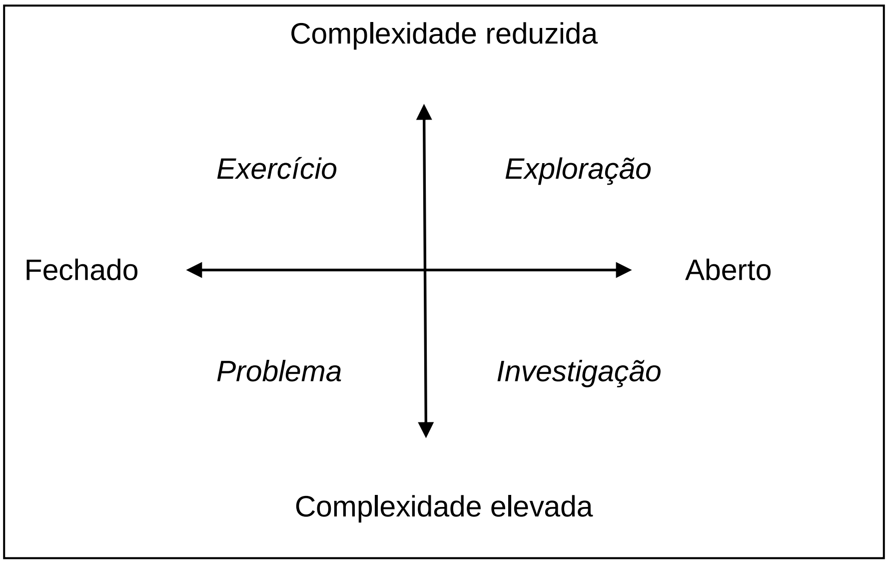


Figura 10: Esquema. Fonte: Ponte (2010, p. 21)

O grau de complexidade diz respeito ao grau de dificuldade da tarefa. Este esquema indica que os exercícios são tarefas de complexidade reduzida e apresenta a investigação como uma tarefa com um grau de complexidade elevado e uma estrutura aberta. O que distingue os problemas da investigação é que os problemas possuem uma estrutura fechada, isto é, possui uma solução, e o que diferencia as tarefas de exploração e as de investigação é o grau de complexidade. Segundo Ponte (2010), a tarefa de investigação é mais complexa que a de exploração.

Quanto ao contexto referencial "a tarefa pode ser contextualizada numa situação da realidade ou reformulada em termos puramente matemáticos"(PONTE, 2010, p. 22). Além disso, o autor fala sobre outro tipo de situação que é a "semi-realidade" que parecem reais, mas são abstratas.

Para Ponte (2010, p. 23), diferente da aula tradicional, onde o professor explica o conteúdo e dá exemplos:

> Os alunos tem voz e espera-se que tenham iniciativas. Eles têm a responsabilidade de usar argumentos lógicos para convencer os outros da veracidade de suas soluções, defendendo os seus pontos de vista, assumindo assim o estatuto de autoridade intelectual (*apud* Lampert, 1990).

Além disso, o autor afirma que (2010, p. 23), na atividade de investigação, durante o momento de discussão, pode surgir a possibilidade de negociação de significados como apresentado por Bishop e Goffree (1986) e “as principais ideias relacionadas com a tarefa são esclarecidas, formalizada e institucionalizadas como conhecimento novo”.

O autor destaca a importância da forma como o professor interage com os alunos de um grupo. Se o professor não responder às perguntas o aluno pode se sentir desmotivado e se dá a resposta, anula os benefícios adquiridos com a tarefa.

Menezes (2003) afirma que no momento de conclusão que o professor tem um papel muito importante que é o de motivar, moderar e coordenar o trabalho dos alunos para que eles desenvolvam suas estratégias. Para o autor (2003, p.121) “o professor deve evitar dar demasiadas pistas sempre que os enunciados coloquem mais dificuldades aos alunos e evitar também assumir o papel de primeiro e principal validador das ideias expressas pelos alunos”.

Ao se referir a aula com a exploração e tarefas de investigação Ponte (2010, p. 24) afirma que:

> Uma aula com a exploração e tarefas de investigação é muito mais complexa de gerir do que uma aula com base na exposição de conceitos e de realização de exercícios, já que é impossível prever todas as sugestões e questões que os alunos possam apresentar. Além disso, os alunos não sabem trabalhar a partir deste tipo de tarefa e é necessário que o professor os ajude a fazer essa aprendizagem. Não obstante as suas dificuldades e limitações, este trabalho é essencial para uma aula de Matemática que visa objetivos educacionais relacionados com compreensão e raciocínio dos alunos, modelação e a capacidade de resolução de problemas.

Para concluir, o autor fala que a investigação é uma atividade onde todos podem participar e que nem tudo se pode aprender através da investigação.

3.2. Investigações matemáticas na sala de aula

Lopes (1999) afirma que o ambiente de interação Lakatosiana também é chamado de ambiente de verdades provisórias. Segundo o autor, os alunos realizaram o estudo de ângulos com diversas abordagens e em uma delas estudaram os ponteiros de um relógio analógico que foi proposta como lição de casa.

O contrato didático existente nesta turma permite “a formulação de problemas e proposição de conjecturas que são objetos de investigação tanto como lição de casa como no posterior debate em sala” (LOPES, p. 20). Para o autor, a lição de casa permite que o aluno adquira responsabilidade e possa desenvolver sua atividade no seu próprio ritmo.

Segundo o autor, o problema proposto na aula anterior pedia para o aluno determinar o ângulo formado pelos ponteiros do relógio quando marca 7h20, 10h40, 12h45 e a hora em que você nasceu. Durante a aula os alunos são convidados a se dirigir ao quadro alternando entre os alunos que desenvolveram a atividade em casa e os que não a fizeram. Para o autor, “a discussão em sala de aula, neste caso, não depende exclusivamente do que foi produzido em casa” (p. 20).

Durante a investigação o professor nomeia as conjecturas que aparecem com os nomes dos alunos que a fizeram o que para os alunos é motivo de estimulo a seu trabalho.

Em sua pesquisa o autor apresenta:

> As características das situações no, aqui chamado, ambiente de inspiração lakatosiana que consideramos inicialmente (além do que o proposto por Borasi) são: Facilitar o processo de conjecturação; Promover um desenvolvimento sempre aberto; Estimular provas e refutações; Desenvolver uma postura flexível frente à certeza e, principalmente, às incertezas; Buscar um desenvolvimento lógico-dedutivo para todos; Construir conhecimento desconhecido a priori; Explorar situações que os alunos tenham condições cognitivas para compreender e enfrentar. (p. 21)

Essas características apresentadas pelo autor relacionam–se as investigações nas fases, apresentadas por Ponte (2012), de formulação de questões, a produção, a análise e o refinamento de conjecturas, a demonstração.

Lopes (1999) afirma que a conjectura apresentada só é tomada como verdade após a fase de discussão antes disso é chamada de verdade provisória. Segundo o autor, “proposições fracas, proposições fortes e exemplos vão sendo produzidos, confirmados ou refutados através de contra exemplos, alimentando assim a dinâmica de produção de conhecimento em aula” (p. 24). Para o autor, o papel do professor no ambiente de inspiração Lakatosiana é o de regular as ações dos alunos para que a maioria deles sejam ouvidos e possam ouvir os demais.

Dentre as três competências apresentadas pelo PCNEM (2002), eleitas como metas do Ensino Médio, destacamos aqui a investigação e compreensão, que é apresentada como uma "competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problemas, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências (PCNEM, 2002, p.113)". Neste sentido, tal competência se relaciona a esta pesquisa por nossa pesquisa tratar do desenvolvimento de investigações geométricas.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 13), "investigar é conhecer algo que não se sabe” e menciona o significado de investigar para os matemáticos profissionais, afirmando que “investigar é descobrir relações entre objetos conhecidos e desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”.

Em seu trabalho, Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) comentam que Henri Poincaré provou a existência de funções com um certo tipo de características que as denominou de "funções fuchsianas" e relatou que essa investigação desenrolou-se em três fases:

1. Fase *compilação de* informação e experimentação,;
2. *Fase de iluminação súbita* e
3. *Fase de sistematização e verificação dos resultados.*

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que o processo de criação surge em acontecimentos inesperados e que a matemática em construção aparece como uma ciência experimental, indutiva.

Sobre a relação entre problemas e investigações, os autores afirmam que uma investigação matemática se desenvolve em torno de um ou mais problemas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 20) citam os quatro momentos para a realização de uma investigação matemática.

> O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se a ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, a demonstração e a avaliação do trabalho realizado.

Além disso, os autores afirmam que:

> Em todos esses momentos pode haver interação entre vários matemáticos interessados nas mesmas questões. Essa interação torna-se obrigatória na parte final, tendo em vista a divulgação e a confirmação dos resultados (p.21).

Os autores afirmam que o que os exercícios e os problemas têm em comum é que em ambos os casos o seu enunciado “indica claramente o que é dado e o que é pedido” (p. 23), sem nenhuma ambiguidade. O professor já conhece a solução e a resposta do aluno só tem duas opções: ou está certa ou está errada. Por sua vez, a investigação é uma situação mais aberta apresentando a questão sem está bem definida no início uma vez que os pontos de partida e também de chegada podem não ser os mesmos.

Além disso, um dos aspectos fortes da investigação apresentado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p, 23) é que “o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo”. Segundo os autores, pode sempre programar como vai começar uma investigação, mas não tem como prever como ela irá acabar.

Sobre algumas habilidades que os alunos precisam ter ao enfrentar uma dada situação matemática, nos restringimos ao tópico da investigação matemática que é abordado no nosso trabalho, o PCNEM (2002) afirma que “O aluno precisa analisar e compreender a situação por inteiro, decidir sobre a melhor estratégia para resolvê-la, tomar decisões, argumentar, se expressar e fazer registros" (PCNEM , 2002, p. 112).

Além disso, salientam a competência de investigação e compreensão.

Fernandes (1989, p. 3) afirma que:

> Avaliar um plano que se elaborou para resolver um problema, seleccionar uma estratégia de resolução entre várias possíveis, ou gerir a aplicação de um plano ou estratégia são atividades tipicamente metacognitivas.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), afirmam que uma atividade de investigação habitualmente desenvolve-se em três fases, podendo ser numa aula ou conjunto de aulas, são elas: *introdução da tarefa*, *realização da investigação* e *discussão dos resultados*. Para os autores, existe a ideia que em uma investigação o aluno desenvolve seu trabalho de forma autônoma e cabe ao professor o papel de ajudar o aluno a compreender o significado de investigar e aprender a fazê-lo.

O professor deve estimular os alunos utilizando expressões que ajudam a compreender o sentido de investigar como incentivar a ser “pequenos exploradores” ou “partirem a descoberta”. Para os autores, essas metáforas transmitem o sentido de investigar.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que deve ser criado um ambiente de aprendizagem na sala de aula para que o aluno se sinta à vontade e que lhe seja dado tempo para pensar, colocar questões, explorar suas idéias e exprimi-las, tanto ao professor como ao colega. Se os alunos estão pouco familiarizados com esse tipo de atividade é importante que o professor dê algumas pistas ou que peça sugestões.

Para os autores, perceber que aquilo que ele vai fazer vai ser mostrado aos colegas fará com que o aluno se sinta estimulado e pessoalmente valorizado. No momento de discussão o professor poderá estimular os alunos a procurar contra-exemplos.

Segundo os autores, o papel do professor no momento da investigação é o de *desafiar os alunos*, *avaliar o seu progresso*, *raciocinar matematicamente* e *apoiar o trabalho deles.*

Ao *desafiar os alunos* o autor afirma que o professor deve estimulá-los fazendo perguntas abertas, pois podem surgir várias interpretações e respostas variadas além de estimular o aluno a se envolver na atividade. Com as perguntas abertas, segundo o autor, o professor pode estimular os alunos a “interrogar matematicamente e formular boas questões” (p. 48).

Segundo o autor, o professor deve *avaliar o progresso* dos alunos recolhendo informações do grupo, fazendo perguntas que necessitem de explicação e interferindo na investigação sempre que julgar necessário para encaminhar os alunos fazendo com que eles não desviem o propósito da investigação.

O autor afirma que ao *raciocinar matematicamente* o professor deve avaliar rápido, mesmo uma conjectura apresentada pelos alunos que o professor não havia pensado, para direcionar os alunos dizendo se deve parar para pensar ou deixar para outro momento julgando assim a relevância da conjectura para a investigação. O professor deve raciocinar em voz alta para que os alunos possam observar como se faz o teste de conjecturas.

Fernandes (1989, p. 3), se refere a esse processo de deixar para outro momento quando afirma que “abandonar uma certa estratégia por se reconhecer que ela é ineficaz ou por se pensar que há outra mais facilitadora é um exemplo típico deste aspecto de metacognição”.

Além disso, o autor afirma que “a metacognição se refere ao que cada um sabe acerca dos seus próprios conhecimentos e à forma como cada um gere tais conhecimentos durante qualquer actividade cognitiva”.

Para *apoiar o trabalho dos alunos* o autor afirma que, o professor deve “colocar questões mais ou menos diretas, fornecer informações relevantes, fazer sínteses e promover a reflexão dos alunos” (p. 52).

Podemos extrair um pensamento metacognitivo analisando as palavras de Polya (1995, p.133) quando trata da heurística, pois para o autor “uma espécie razoável de heurística não pode almejar regras infalíveis, mas sim tentar o estudo de processos mentais (operações, passos, lances) específicos, que contribuam para a solução de problemas”. Esses processos mentais são, segundo Fernandes (1989), exemplos de atividades metacognitivas. Polya (1995) afirma que o professor que deseje que o aluno realize esses processos mentais terá que ter adquirido esse tipo de atitude.

Há vários tipos de investigações matemáticas, as *numéricas*, as *algébricas*, as *estatísticas* e as *geométricas.* Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) abordam as *investigações numéricas*, as *investigações geométricas* e as *Investigações em Estatística*. Neste trabalho vamos abordar as *investigações numéricas* e as *investigações geométricas,* com destaque nas *investigações geométricas* que fazem parte do objetivo do nosso trabalho.

Sobre as *investigações numéricas*, Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que esse tipo de investigação pode contribuir para a compreensão do aluno ao trabalhar com números e operações bem como fazer com que o aluno desenvolva a capacidade de formular e testar conjecturas e procure generalizações. Tais investigações podem contribuir para o desenvolvimento do sentido numérico.

Ao tratar das *investigações geométricas,* Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que o estudo de geometria favorece esse tipo de ensino baseado em situações de caráter exploratório e investigativo. Para os autores, esse tipo de investigação também pode fazer com que o aluno estabeleça relações entre situações matemáticas e reais e, além disso, ao ser posto a esse tipo de experiência, o aluno pode desenvolver capacidades tais como a de visualização espacial e a utilização de diferentes maneiras de representar uma dada situação.

Um exemplo apresentado pelos autores, é de uma investigação geométrica chamada dobragens e cortes. Nesta investigação os alunos deveriam dobrar o papel e investigar quantos costes e quantas dobras deveria fazer para obter o triângulo desejado.

Durante esta investigação geométrica apresentada, Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), afirmam que a professora incentivou os alunos a ler com atenção o enunciado da tarefa e a trabalhar cooperativamente.

Ao falar do momento de discussão, Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) descrevem este momento dizendo que:

> Depois da exploração da tarefa em pequenos grupos, a professora coordenou uma discussão das descobertas dos alunos de modo a que todos tivessem a oportunidade de intervir. Depois de um grupo explicar o modo como havia explorado determinada questão, os outros eram solicitados a analisar o que havia sido explicitado e a acrescentar novos aspectos. (p.81).

Os autores descrevem a reação dos alunos de uma turma ao realizar uma investigação sobre uma relação entre o número de faces, vértices e arestas dos poliedros convexos. Para realizar essa investigação, os alunos tinham a disposição peças de *polidrons,* que são triângulos, quadrados e hexágonos que se encaixam uns nos outros podendo formar vários sólidos geométricos. Os autores comentam que os alunos se entusiasmaram muito com essa atividade e como dito no registro de um dos alunos: “E sem dúvida o mais interessante foi trabalhar com *polidrons*, com os quais ao mesmo tempo que trabalhávamos nos divertíamos” (p.87).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que deve ser dado tempo e oportunidade ao aluno para que ele possa organizar suas experiências espaciais.

Em nossa pesquisa realizamos uma investigação geométrica, como apresentado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), com o conteúdo de Poliedros de Platão para deduzir a relação de Euler. Para realizar uma das tarefas de investigação os alunos confeccionaram o que Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) tratam aqui como polidrons que foram utilizados para a montagem dos poliedros necessários para o desenvolvimento da atividade de investigação.

3.3. Investigações matemáticas e material concreto

Floriani (2000) questiona se seria interessante o banimento das aulas expositivas de matemática. E isso acontecer, como seria ministrada a aula de matemática?Ele comenta sobre a falta de produtividade nas explicações verbais mesmo que acompanhadas de recursos audiovisuais e que a transmissão dos conteúdos mediante a aula expositiva obedece ao esquema: codificador (professor, texto, filme, colega, etc.) => código verbal (Português) => código não-verbal (matemática) =>decodificador (ouvinte).

Segundo o autor, os treinamentos, em habilidades e técnicas, falham quando os professores recebem instrução sem prática, quando apenas visualiza o instrutor e não realiza nenhuma ação. Ora, se os professores sentem dificuldade em aprender ser agir, o que podemos dizer do aluno que possui uma bagagem menor? Essa dificuldade pode ser apresentada quando se trabalha com materiais concretos.

Ele argumenta que no processo de aprendizagem é preciso que haja uma “imitação interior”. Alguns alunos limitam-se a anotar o conteúdo e não realizam a imitação interior, eles prestam atenção o suficiente para não cometer erros de cópia.

Bishop e Goffree (1986) também afirmam sobre a explicação e que o importante no explicar é que sejam expostas as conexões entre a ideia que está sendo explicada e outras ideias e que o aluno é um participante ativo. Ao envolvê-lo em atividades matemáticas planejadas e significativas, provavelmente, será estimulado a fazer conexões com outras ideias. Os autores afirmam também que o momento mais apropriado para que sejam expostas as conexões e os significados é a fase reflexiva. Esta fase é o momento em que os alunos interligam ideias matemáticas para discutir e produzir significados.

3.3.1. O laboratório de Matemática e os materiais concretos

Segundo Medeiros (2003), são muitas as ideias do que se espera em um Laboratório de Matemática e para conceituá-lo é necessário considerar alguns aspectos como a origem, o lugar de funcionamento, para quem vai ser direcionado, ou seja, o público alvo, as atividades que são realizadas nesse laboratório, etc.

Segundo a autora, dentre as atividades que podem ser desenvolvidas em Laboratórios de Matemática pode-se ressaltar a formação continuada que pode levar para as escolas, através da capacitação para professores de Matemática do ensino Fundamental e Médio das escolas públicas, o conhecimento de como se deve trabalhar no Laboratório de Matemática, também podemos destacar “a proposta de implantação do Laboratório de Matemática na rede pública” (p. 1).

De acordo com a autora, Para escolher as atividades desenvolvidas no Laboratório de Matemática deve ser considerado o ambiente e o nível dos alunos. Os jogos, de acordo com Medeiros (2003), promovem a interação dos participantes e exige a concentração, os desafios, enigmas e paradoxos, formulados em linguagem cotidiana estimulam o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos e as atividades realizadas no laboratório de matemática têm o objetivo de estabelecer um elo entre a matemática da sala de aula e a matemática do cotidiano.

A manipulação de materiais só tem sentido se for explorada a relação entre os materiais e a Matemática. O contato dos alunos do Ensino Médio com materiais concretos pode auxiliar a construir e firmar seus conhecimentos acerca de alguns conteúdos de geometria, que precisamente aqui tratamos como os Poliedros de Platão.

Sobre o Ensino Médio, o PCNEM (2002, p. 111) afirma que:

> A matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional.

Barroso e Franco (2010) afirmam que existem dois tipos de obstáculos do conhecimento que impedem o aprendizado dos alunos: o epistemológico e o didático. Segundo os autores, esses obstáculos podem se revelar quando professores com conhecimentos errados, firmados pelo tempo, entram em contato com um laboratório de ensino de Matemática. Para que os alunos possam ter contato com os materiais concretos os professores precisam romper esses obstáculos do conhecimento e assim poder conduzir o aluno na construção do conhecimento com o auxilio do material concreto.

Essa pesquisa, apresentada pelos autores, foi desenvolvida com base nas teorias de Bachelard, Piaget, Brousseau e Sierpinskae tem como tema o laboratório de ensino de matemática e a identificação de obstáculos do conhecimento de professores de matemática. Os resultados da pesquisa apresentada pelo autor foram obtidos através da realização de uma oficina para professores de matemática do Núcleo regional de Ensino de Maringá, no Paraná, que explorou jogos e materiais manipuláveis no Laboratório de Matemática.

Em sua pesquisa, segundo o autor, Foram feitas observações por meio de gravação de áudio e imagem para investigar os conhecimentos matemáticos dos professores baseados nos temas das atividades do dia da oficina e foram relatadas algumas das atividades com materiais manipuláveis desenvolvidas na oficina, juntamente com suas análises e discussão dos resultados. Após a exploração pelos professores participantes as atividades eram explicadas e concluídas pelo professor ministrante para sanar todas as dúvidas encontradas durante a exploração da atividade.

O modelo das atividades desenvolvidas durante a oficina apresentada pelos autores consistia de apresentação, descrição, objetivos, série e nível sugeridos para a aplicação, mídias existentes, material necessário e custo, orientação para construir, cuidados necessários, desenvolvimento da atividade e potencialidades.

Ao apresentar os materiais concretos aos alunos do Ensino Médio eles poderão desenvolver sua visão espacial e visualizando o concreto terá a possibilidade de entender conceitos que muitas vezes só a teoria não supre a necessidade dessa compreensão.

“Os alunos precisam visualizar o concreto para compreender intelectualmente um fenômeno e poder abstrair depois”. (CUNHA, 2007, p.118). O material concreto pode ajudar os alunos, pois muitas vezes só com a definição e o objeto os alunos conseguem compreender a definição.

Em nossa pesquisa não foi utilizado o laboratório de matemática, pois além de na escola só existir um laboratório comum a todas as disciplinas o espaço não é apropriado para o desenvolvimento desse tipo de atividade por ser muito pequeno e não dispor de mesas e cadeiras para os alunos. Quanto aos materiais concretos, utilizamos as barras de sabão e os sólidos feitos com origami.

3.3.2. Materiais concretos e investigações matemáticas: limites e possibilidades

Ao trabalhar com investigações matemáticas aliado ao material concreto o aluno pode interagir com o objeto para auxiliar na resolução da investigação. Para Santos e Falcão (1999, p.1) ao tratar dos materiais manipuláveis afirmam que:

> os materiais concretos ou manipulativos assumem um papel intermediário entre os fatos reais e os modelos matemáticos; eles seriam um recurso, sobre o qual os sujeitos podem se embasar para construir representações de situações reais e desta maneira operar sobre elas. Os materiais concretos ou pedagógicos, fariam um "elo" intermediário entre a matemática e as situações reais e facilitariam a manipulação de realidades de difícil acesso pelas crianças. A semelhança estrutural entre os materiais manipulativos, as situações reais e os conceitos matemáticos é conhecida como *isomorfismo*, e através do isomorfismo, existiria a possibilidade de transferir as conclusões tiradas de um sistema mais simples para um sistema mais complicado ou menos acessível. Não existem isomorfismos perfeitos, pois estes são aproximações da realidade produzidos a partir da verificação de pontos de contato entre fenômenos e suportes representacionais por parte de um observador humano. Não obstante, pode-se considerar como pertinente a idéia de que alguns suportes se adequam melhor para representar determinadas propriedades conceituais do domínio visado do que outros.

Matos e Serrazina (1996) afirmam que Pestalozii foi o defensor da utilização de materiais manipuláveis no século XIX. Segundo o autor, muitas vezes os alunos não fazem relação dos materiais manipuláveis com a Matemática (escrita) formal. Os autores afirmam que não é a mesma coisa o professor manusear o material manipulável, o aluno ocupando o papel de expectador, e ser o aluno que realize a ação de manusear o material. Os autores enfatizam que os materiais devem estar sempre à disposição dos alunos para que eles o utilizem sempre que considerarem necessário. Santos (2009), ao falar sobre as competências dos alunos e sobre suas várias dificuldades, afirma que, em relação ao espaço e forma o conteúdo é pouco ou não trabalhado. O autor (2009, p.77) afirma que os alunos possuem domínio sobre a “relação de certos sólidos e sua planificação sem justificativa-identificação do número de faces de um sólido - identificação de triângulos e círculos – reconhecimento de ângulos”.

Segundo o autor (2009, p. 77), os alunos apresentam dificuldades na “nomeação de sólidos geométricos-relação entre os sólidos geométricos e objetos do mundo físico – classificação de figuras planas – polígonos (exceto triângulo e quadrado) – diferenciação de figuras planas e não planas”.

O autor afirma que os alunos sentem dificuldade em escrever o seu raciocínio, sua explicação, mesmo sabendo como resolver e conseguindo expressar seu raciocínio oralmente o aluno não consegue passar para o papel. Quando foram solicitados a responder oralmente, mesmo não tendo prática, conseguiram com desenvoltura expressar a sua estratégia de resolução.

Veloso (2008) afirma que os professores só apresentam aos alunos “meia dúzia de figuras planas e meia dúzia dos chamados 'sólidos geométricos'” (p. 18). Os alunos não são postos a experiências de visualização de figuras tridimensionais diferentes das que aparecem nos livros didáticos. Eles não têm idéia que uma bóia é um exemplo de uma figura matemática chamada toro. Eles não são apresentados a outros tipos de curvas como as cônicas, cicloides, as hipociclóides, as conchoides. Segundo o autor, os alunos passam 9 anos olhando para cones e cilindros sem imaginar o que aconteceria se o cortasse por um plano.

Leal e Veloso (1990) apresentam em seu trabalho uma possibilidade de introduzir materiais manipuláveis na aula de Matemática diferente da apresentada neste trabalho. Os autores relatam a utilização de canudos para trabalhar geometria em uma turma do 7º ano. Segundo os autores a utilização de canudo é de fácil manuseio, permite a medição da diagonal do cubo ou da altura da pirâmide e permite introduzir uma estrutura dentro de outra.

Victoria Pohl (1987) também utiliza canudos para realizar uma investigação matemática. O objetivo da investigação apresentada consiste em construir um tetraedro, um cubo, um octaedro e depois intruduzir uma estrutura dentro da outra utilizando canudos e fio como também foi apresentado por Leal e Veloso (1990).

Michel (1987) afirma que é indispensável mostrar cristais naturais aos alunos. O estudo da geometria dos cristais permite ao aluno obter conhecimentos tais como: o estudo de faces, vértices e arestas; o estudo de simetria; o estudo de ângulos diedros e ângulos sólidos.

O limite da utilização de canudos como recurso é que esse material não permite a visualização das faces dos poliedros e o limite dos cristais naturais é o fato de não ser um material de fácil aquisição para uso didático.

Quanto à dificuldade em expressar seus pensamentos como foi apresentado por Santos (2009) acreditamos que com as atividades de investigação o aluno vai adquirindo o hábito de passar para o papel o que está pensando da forma mais clara possível para que o leitor possa compreender.

CAPÍTULO IV

METODOLOGIA

A pesquisa que desenvolvemos pode ser classificada como pesquisa qualitativa, Segundo Bicudo (2011, p. 14) "o qualitativo da pesquisa informa que se está buscando trabalhar com qualidades dos dados à espera de análise". Além disso, a autora afirma quanto à denominação de pesquisa qualitativa, que possui essa denominação "para dar maior destaque às nuanças das qualidades percebidas e trabalhadas como dados da investigação".

Com base neste tipo de pesquisa vamos analisar como o material concreto pode contribuir para a resolução de investigações geométricas envolvendo o conteúdo de Poliedros de Platão. Esta pesquisa foi realizada com os alunos do 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Conselheiro José Braz do Rêgo da cidade de Boqueirão - PB.

Enquanto procedimento, este trabalho foi realizado por meio de observação direta, porque estive em contato direto com os alunos para observá-los e mediar a construção do conhecimento.

A coleta dos dados foi realizada nos meses de junho e julho de 2012. Inicialmente tivemos a ideia de utilizar dois jogos do caderno do Mathema, jogo dos poliedros e o cara a cara de poliedros, e a dinâmica do Painel Integrado para iniciar as investigações. Como a turma era composta por 48 alunos, preparamos 12 jogos para que os alunos formassem grupos composto por 4 alunos. A proposta inicial é que 6 grupos ficassem com o jogo dos poliedros e 6 grupos com o jogo cara a cara de poliedros para depois utilizar o Painel Integrado para que todos conhecessem o jogo.

Neste dia não estavam presentes todos os alunos e só foi possível formar 11 grupos, sendo 10 composto por 4 alunos e 1 com 3 alunos. Após um bom tempo que os alunos estavam fazendo o estudo das regras do jogo surgiu à pergunta em um dos grupos, o que é faces vértices e arestas? Achamos que, como os outros grupos não haviam perguntado era porque eles sabiam, mas algum tempo depois começou a surgir a mesma pergunta dos outros grupos e percebemos que era uma dúvida comum a todos.

Além desse problema, que foi encontrado percebemos que falhamos na escolha de um dos jogos, pois o jogo dos poliedros havia muitos poliedros que eles não haviam estudado. O conhecimento que eles tinham era o do mais conhecido como pirâmide. Ainda assim eles não sabiam identificar os polígonos da base para diferenciar as pirâmides contidas no jogo. O conteúdo Polígonos é estudado no ensino fundamental, dai surge a dúvida: os alunos não estudaram esse assunto ou já esqueceram?

Após verificar esses problemas decidimos retirar a parte de jogos tendo em conta que não prejudicava a investigação. E nas aulas que serão aqui descritas os alunos, inicialmente, resolveram investigações geométricas sem a utilização de material concreto.

Depois de analisar o desempenho dos alunos na resolução dessa investigação, confeccionamos materiais concretos para auxiliar na resolução e pedimos aos alunos que respondessem a investigação geométrica com a utilização do material concreto. Os roteiros das investigações e os questionários que foram aplicados estão em anexo.

O questionário que aplicamos foi elaborado com perguntas abertas. Segundo Marconi e Lakatos (2009) esse tipo de questionário permite ao aluno uma resposta livre com a utilização da própria linguagem e permite ao aluno emitir suas opiniões. Ainda com respeito aos questionários estas autoras (2009) classificam as perguntas que utilizamos no questionário como direta ou pessoal.

A análise dos dados será realizada nos meses de julho e agosto de 2012. Procuraremos ver na análise aspectos quantitativos e qualitativos das investigações geométricas com e sem o auxílio do material concreto.

CAPÍTULO V

ANÁLISE DOS DADOS

Durante as investigações geométricas os alunos responderam três roteiros de investigação sendo um sem a utilização do material concreto e dois utilizando o material concreto: um utilizando as barras de sabão e o outro a técnica do origami modular. Nesta sessão apresentaremos a análise do que ocorreu em sala de aula no momento das investigações e a análise do questionário respondido pelos alunos no nosso último encontro.

5.1. Investigação sem o material concreto

Depois de explicar para eles o conceito de faces, vértices e arestas, pedi para que eles formassem grupos de no máximo 4 alunos. No total foram 11 grupos sendo 2 grupos de 4 e 9 grupos de 3 alunos. Cada grupo recebeu uma folha contendo a investigação geométrica e uma folha com poliedros e suas planificações.

Ao receber a atividade os alunos perguntaram "é pra fazer o que professora?" sem antes ler as perguntas da investigação.

Na primeira pergunta percebi que muitos se atrapalharam ao contar o número de faces, vértices e arestas. Alguns olharam para o poliedro e como em alguns só tinha a vista frontal ou superior do poliedro eles não contaram com as faces, os vértices e as arestas que não estavam visíveis, mesmo com o auxilio da planificação que ajuda na contagem, principalmente das faces.

Já em outro grupo, os alunos contavam o número de vértices pelos vértices de cada polígono que formava o poliedro o que dificultou ao observar a relação entre o número de faces, vértices e arestas. Ao passar pelo grupo pedi que eles percebessem isso e corrigissem os dados contidos na tabela.

Na segunda questão, pedi para que eles relacionassem a soma das faces e vértices com as arestas. Como não estão acostumados com esse tipo de atividade, os alunos ficavam fazendo perguntas diretas como "Me diga que relação é essa pra eu colocar aqui". Com pressa de terminar e ir logo para casa. Eu dizia: Observe os números. O que está acontecendo? Apontava para a soma de faces e vértices e perguntava: que número é esse? E eles respondiam. Apontava para o número de faces e perguntava: que número é esse? Eles respondiam. Eu perguntava: que relação existe entre esses números? Eles responderam: são diferentes. Eu perguntava: Qual é a diferença entre eles? E eles respondiam. Eu disse: Faça essa mesma análise para todos os poliedros.

Depois de dar uma volta observando o andamento dos outros grupos voltei aos grupos que estavam fazendo essa análise e perguntei: existe alguma coisa de semelhante entre o resultado que vocês encontraram? E eles responderam a maioria é dois. E eu pedi para que eles escrevessem o que eles estavam observando.

Verificamos que um grupo composto por 3 alunos não se interessaram pela atividade. Por outro lado, cerca de quatro grupos desenvolveram a atividade até a terceira questão. Não sendo possível passar para a parte da discussão com a turma, toda tendo em conta que eles passaram muito tempo para descobrir a relação. Isso ocorreu poque nem todos descobriram e, por sentir dificuldade na obtenção dos dados relacionados às faces, vértices e arestas e, consequentemente, à soma das faces com os vértices, não conseguiram garantir que a relação era válida para todo poliedro. Esses quatro grupos que foram citados descobriram a relação faltando 5 minutos para o término da segunda aula, quando os outros grupos já haviam ido embora, e ainda faltava escrever de forma clara o que eles haviam descoberto.

Dentre as respostas estavam:

- “A diferença entre a soma das faces e dos vértices com as arestas é que a quantidade aumenta. A maioria teve o resultado nº 2.” Quando escreveram “a maioria” eles estavam querendo dizer que era o número que se repetiu com maior freqüência, neste caso 4 vezes;

-“Geralmente quando se calcula Fase + verteces o resultado -2 e o resultado da aresta.” Quando pedi para que o aluno me explicasse qual a relação que eles tinham encontrado ele me disse que o número de faces mais o número de vértices, menos dois é igual ao resultado da aresta. Percebe-se que os alunos sabiam qual era a relação, a dificuldade estava na parte da escrita.

- “Concluímos que existe a diferença de dois números entre a soma de faces e vértices para com as arestas.

Arestas mais 2 é igual a soma de faces e vértices.”

5.2. Investigação com a utilização do material concreto

5.2.1 Investigação com barras de sabão

Pedi para que eles formassem grupos de, no máximo, 4 alunos. No total foram 11 grupos sendo 6 grupos de 4 e 5 grupos de 3 alunos. Cada grupo recebeu uma folha contendo a investigação e duas *barras de sabão* no formato de cubo.

Figura 11: Alunos lendo o roteiro de investigação. Fonte: Dados da pesquisa, 2012.

Os alunos permanecem com o costume de não ler bem a questão para interpretar e depois resolver o que está sendo pedido. Por isso, três grupos começaram a fazer cortes no sabão, sem observar e anotar o que estava ocorrendo, sendo preciso entregar outra barra de sabão ao grupo para que eles fizessem a investigação.

Alguns alunos pediram para que eu explicasse novamente o conceito de face, vértices e arestas. Três alunos pararam para fazer outra atividade, de outra disciplina, durante a aula.

Substitui o instrumento para cortar o sabão, ao invés da régua entreguei aos alunos linha de costura para que não precisasse de tantas réguas, para que todos pudessem participar, podendo mais de um aluno ficar com a tarefa de cortar a barra de sabão e para que diminuísse a sujeira.

Figura 12: Alunos fazendo os cortes na barra de sabão. Fonte: Dados da pesquisa, 2012.

Das respostas referentes à pergunta “O que vocês podem concluir sobre a relação entre os números de faces, vértices e arestas? Explique.” As respostas que mais se aproximaram foram:

- Só duas comparações deu 6, todas as outras 6 a diferença foi dois;
- Somando das arestas mais 2 é igual ao resultado de faces mais vértices;
- Que em cada corte temos um resultado quase igual o anterior, a diferença é de dois e quatro.

Novamente, não foi possível passar para a parte da discussão com a turma toda tendo em conta que eles passaram muito tempo para descobrir a relação, e nem todos descobriram. Alguns alunos demoraram, porque tiveram que começar a atividade, novamente, por ter cortado a barra de sabão de forma errada e outros alunos chegaram atrasados. Quando estava faltando 5 minutos para o término da segunda aula apresentei aos alunos o aplicativo *Poly* para que eles pudessem observar vários sólidos e suas vistas espaciais e planas e assim poder verificar os possíveis cortes que eles poderiam ter feito para preencher a tabela e deduzir a Relação de Euler.

5.2.2 Investigação com Origami Modular

Nesta sessão vamos apresentar o desenvolvimento da investigação geométrica utilizando o *origami modular*. Esta investigação foi realizada em dois dias como descreveremos a seguir.

5.2.2.1 Investigação com Origami Modular- 1º dia

Neste dia estavam presentes 34 alunos que foram divididos em 6 grupos, sendo: 1 grupo de 4 alunos, 2 grupos de 5 alunos, 1 grupo de 6 alunos e 2 grupos de 7 alunos.

Neste momento, tinha sido sugerido aos alunos que formassem grupos de, no máximo, 6 alunos, a mesma quantidade (de preferência o mesmo grupo) de alunos que fizeram os polígonos base para formar os poliedros. Depois de insistir para que 1 dos participantes dos grupos que tinham 7 alunos fosse para um grupo com menos integrantes e não consegui. Para não perder o interesse em fazer a atividade, tendo em conta a afinidade já existente entre os participantes, decidimos permitir a formação de grupos de 7.

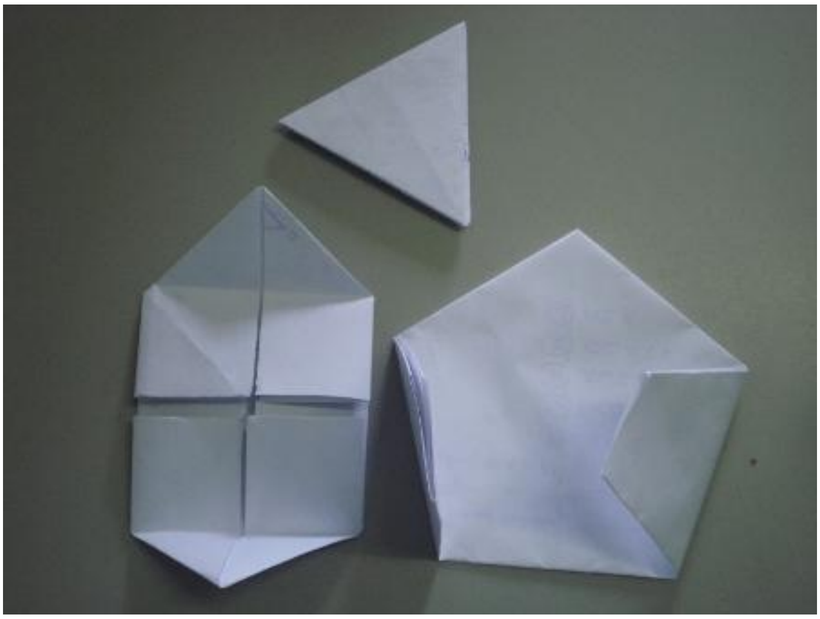


Figura 13: Tipos de origami modular confeccionados para a montagem dos poliedros.
Fonte: Dados da pesquisa, 2012.

Os alunos demoraram a compreender como fazer os bicos (ângulos poliédricos).

Em muitos grupos apenas 2 alunos estavam trabalhando. O envolvimento na aula não era da totalidade dos alunos. A maioria dos grupos só conseguiu responder à 1ª questão e 3 grupos estavam respondendo à 2ª questão. Um dos grupos, formado por 5 alunos, não fez nenhum registro na folha de investigação.

Os alunos se confundiam na forma de encaixar os polígonos para formar os Ângulos poliédricos sendo preciso orientá-los para desenvolver essa atividade.

5.2.2.2. Investigação com Origami Modular- 2º dia

Estavam presentes 24 alunos divididos em 5 grupos. Sendo 1 grupo de 7 alunos, 2 grupos de 5 alunos, 2 grupos de 2 alunos. Neste dia estava chovendo, o que pode ser o motivo para que faltasse boa parte dos alunos. Como faltou a maioria dos integrantes de alguns grupos, houve a união de dois grupos e alguns alunos decidiam trocar de grupo.

O fato de grande parte dos alunos terem faltado à aula dificultou, de certa forma, a atividade para pelo menos um dos grupos composto por 2 alunos, que passaram muito tempo para colar os polígonos para formar o sólido e só conseguiram montar 2 sólidos. Acreditamos que a presença dos outros integrantes poderia enriquecer a atividade desse grupo. Além disso, se todos os alunos que estavam presentes na investigação, dia 12, estivessem também no dia 13 os grupos poderiam permanecer os mesmos podendo começar e terminar a investigação sem mudar os integrantes do grupo.

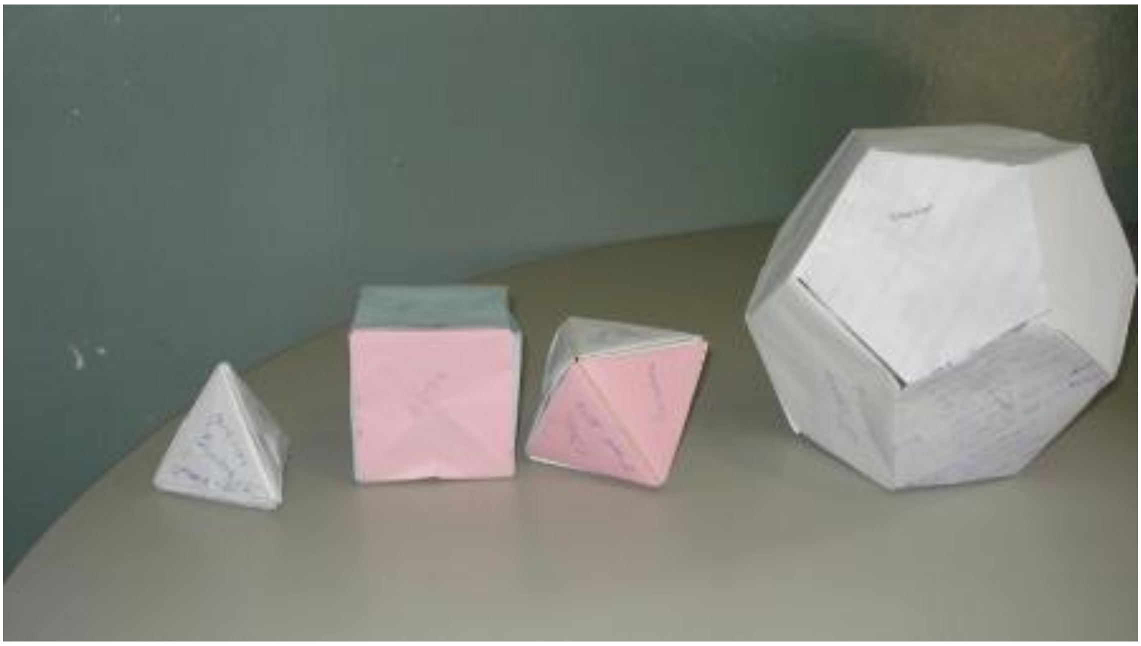


Figura 14: Tipos de Sólidos de Platão confeccionados pelos alunos.Dados da pesquisa, 2012.

Os alunos estavam entusiasmados, pois estavam conseguindo montar os sólidos. O primeiro sólido montado foi o hexágono, também chamado de cubo. Quatro dos cinco grupos estavam envolvidos na atividade. Um dos grupos resolveu se interessar em fazer a atividade no fim da aula e apenas dois participantes realizaram a atividade deixando-a incompleta. Para desenvolver a atividade, os grupos montaram de 2 a 4 sólidos para verificar se os sólidos poderiam ser considerados Poliedros de Platão.

Consideramos a atividade muito proveitosa, pois além de verificar quais dos sólidos que os alunos montaram podiam ser considerados poliedros de Platão, os alunos puderam verificar quantos polígonos poderiam formar um ângulo poliédrico, que acreditamos ser um conhecimento que eles nunca tiveram acesso.

Durante a investigação percebemos que dois grupos erraram na contagem de faces, vértices e arestas em um dos sólidos confeccionados. Ao verificar a existência da relação na maioria dos sólidos e em apenas um a relação não se satisfez, perguntamos aos alunos: Será que tem alguma coisa errada na contagem do número de faces, vértices e aresta? E uma aluna afirmou: Deve ser o número de arestas que está errado, os outros integrantes do grupo concordaram. Eles foram contar novamente o número de arestas e perceberam que realmente a contagem estava errada e todos os poliedros que eles encontraram poderiam ser considerados Poliedros de Platão.

Quando sugerimos que eles contassem novamente uma aluna se assustou, pois pensava que o grupo teria que começar a investigação do início. Depois que ela compreendeu que só precisaria contar o número de faces, vértices e arestas do sólido que não estava obedecendo a Relação de Euler ela ficou mais tranquila.

Quatro dos cinco grupos conseguiram realizar a atividade até o fim. Os sólidos que os alunos conseguiram montar foram o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro, a pirâmide de base quadrangular e uma Dipirâmide Triangular (J12) (os dois últimos são sólidos de Johnson).

Figura 15: Tipos de Poliedros confeccionados pelos alunos. Dados da pesquisa, 2012.

Figura 16: Poliedros confeccionados pelos alunos. Dados da pesquisa, 2012.

5.3. Análise dos questionários

Antes de entregar os questionários para os alunos responder e, tendo em conta que nenhum dos grupos montaram todos Poliedros de Platão, resolvemos apresentar para eles todos os Poliedros de Platão, inclusive dizendo o nome de cada um deles, que eles confeccionaram e o icosaedro que nenhum grupo montou.

Figura 17: Poliedros de Platão que apresentamos aos alunos, dados da pesquisa, 2012.

A primeira questão, pedia para que o aluno dissesse a sua opinião acerca da investigação geométrica sem a utilização do material concreto e se teve dificuldade. Em caso afirmativo, o aluno deveria explicar qual a dificuldade encontrada por ele.

A segunda questão, pedia para que o aluno dissesse a sua opinião acerca da investigação geométrica com a utilização do material concreto e se teve dificuldade. Em caso afirmativo o aluno deveria explicar qual a dificuldade encontrada por ele.

A terceira questão, pedia que o aluno dissesse se o material concreto contribuiu, de alguma forma, para o desenvolvimento da investigação. Em caso afirmativo, o aluno deveria explicar de que forma o material concreto contribuiu para o desenvolvimento da investigação.

5.3.1 Análise dos 10 questionários pertencentes aos alunos que participaram de todos os dias que foram realizadas as investigações

Questão/ Resposta	Sim	Não
1ª	9 (90%)	1 (10%)
2ª	5 (50%)	5 (50%)
3ª	9 (90%)	1 (10%)

Tabela 1: Análise dos 10 questionários

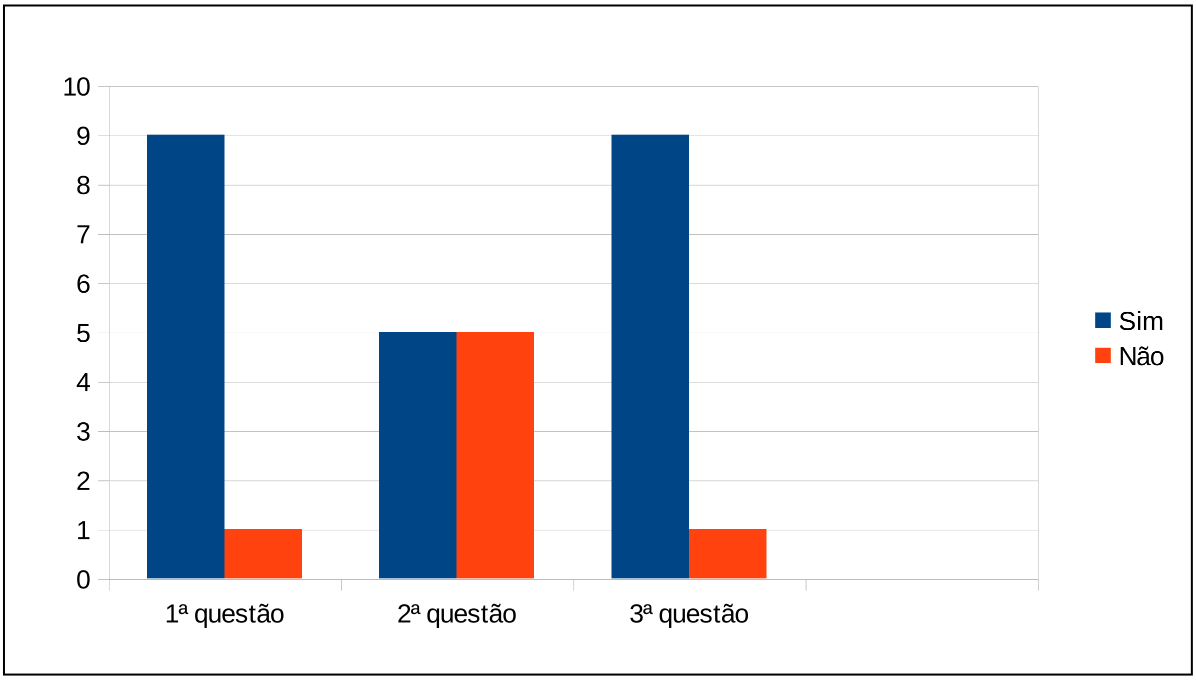


Gráfico 1: Análise dos 10 questionários.

5.3.2 Análise dos 20 questionários pertencentes aos alunos que participaram da investigação sem o material concreto e de pelo menos uma das investigações com o material concreto.

Questão/ Resposta	Sim	Não
1ª	17 (85%)	3 (15%)
2ª	10 (50%)	10 (50%)
3ª	19 (95%)	1 (5%)

Tabela 2: Análise dos 20 questionários

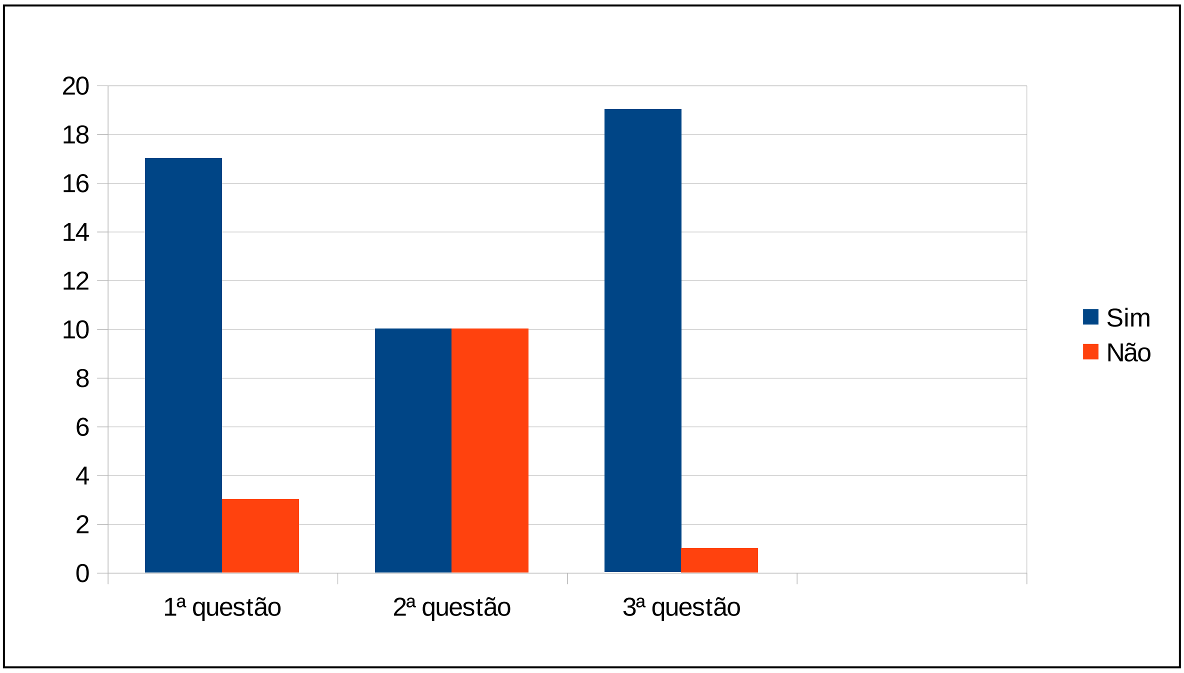


Gráfico 2: Análise dos 20 questionários.

Ao observar análise dos 10 e dos 20 questionários verificamos que o resultado da segunda questão foi semelhante. Quanto a essa questão gostaríamos de destacar um comentário feito oralmente por uma aluna que disse não ter gostado muito da investigação utilizando as barras de sabão por ter sujado as unhas com o sabão. Esse comentário nos faz pensar que alguns alunos não utilizaram o sentido de dificuldade abordado na questão com o sentido de dificuldade em aprender o conteúdo utilizando o material concreto, mas apenas a dificuldade no manuseio do material, como foi o caso desta aluna.

Quarta questão

Para a quarta questão, que pedia para que os alunos fizessem um comentário a respeito das investigações, selecionamos as respostas mais criativas entre os questionários dos 10 alunos que participaram de todos os dias da investigação por acreditarmos que quem participou de todos os momentos possui mais argumentos para falar a respeito dessa questão. Dentre as respostas dos alunos estão:

-Foi ótimo o tempo das investigações pois os alunos se reuniram e fizeram tudo junto.

-No começo eu não gostei muito mais no decorrer das investigações eu passei a achar interessante era difícil mais era bom, deu pra aprender muito pois eu não sabia nada sobre isso.

-Foi bom, nunca tinha feito esse tipo de investigação, mas valeu a pena.

-Foi bom todos nos tivemos um pouco de dificuldade porque não é fácil montar essas coisas.

-Bom, as vezes gostava e as vezes não, é tão trabalhoso ficar contando os vértices e arestas, mas foi legal.

6. CONCLUSÃO

Ao analisarmos as respostas contidas nos roteiros das investigação geométricas e as duas análises dos questionários, com 10 e com 20 alunos, percebemos que o material concreto contribuiu na resolução das investigações geométricas envolvendo o conteúdo Poliedros de Platão e, com isso, conseguimos atingir nossos objetivos.

A ordem das tarefas de investigação foi de grande importância para que os alunos pudessem comparar o grau de dificuldade de cada tarefa e, como podemos observar nas análises dos questionários, os alunos sentiram muita dificuldade no desenvolvimento das investigações geométricas sem a utilização do material concreto, por não possuir o desenvolvimento de visualização espacial.

Para facilitar os cortes nas barras de sabão decidimos trocar a régua pela linha para ser utilizada como instrumento de corte. Ensinamos aos alunos a fazer os origamis modular (quadrado, triângulo e pentágono) que serviram como base para a montagem dos Poliedros necessários para o desenvolvimento da investigação geométrica. Os alunos confeccionaram apenas um origami modular de cada tipo, para realizarmos a investigação tivemos que confeccionar vários módulos para ficar disponível aos alunos no momento da montagem dos sólidos.

Aplicamos atividades contendo investigações geométricas para que os alunos resolvessem utilizando o material concreto e, através da análise dos questionários, observamos que o material concreto contribuiu na resolução das atividades de investigação geométricas envolvendo o conteúdo Poliedros de Platão, pois os alunos puderam visualizar e manusear o material, o que facilitou a contagem de faces, vértices e arestas, necessários para o preenchimento da tabela e a dedução da Relação de Euler.

O relato de um dos alunos, ao responder a quarta questão do questionário, quando afirma que “Foi ótimo o tempo das investigações pois os alunos se reuniram e fizeram tudo junto” enfatiza a importância da interação no processo de investigação.

Durante a investigação tentamos realizar todas as fases da investigação abordados por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), mas devido às aulas serem curtas não foi possível realizar a fase de discussão dos resultados. Antes de entregar os questionários para os alunos responderem, apresentamos de forma sucinta o desenvolvimento dos alunos, afirmando que vários grupos conseguiram deduzir a Relação de Euler, que era o foco do nosso trabalho, e apresentamos os Poliedros confeccionados pelos alunos fazendo a distinção dos Poliedros de Platão. Como os alunos não confeccionaram o icosaedro, levamos para mostrar o Poliedro a turma.

As dificuldades que encontramos durante as investigações geométricas foram o fato de muitos feriados coincidirem com o dia de aula dessa turma e o fato de nem todos os alunos participarem de todos os dias das atividades de investigação. Por isso, apresentamos como sugestões para outras investigações que o professor escolha uma turma com poucos alunos, isto irá ajudar no momento das notas de campo. Com poucos alunos o professor vai poder diferenciar as falas dos alunos e ouvi-los no momento que estiver raciocinando em voz alta. Numa turma com muitos alunos só se consegue saber o desenvolvimento dos alunos se formos perguntar no grupo. Com poucos alunos pode acontecer também a partilha de ideias e a investigação torna-se mais rápida, podendo realizar com mais produtividade todos os passos da investigação.

Seria interessante solicitar junto à direção da escola todo o tempo necessário para o desenvolvimento da investigação matemática, para que não haja interrupções.

REFERÊNCIAS

BARROSO. M. M & FRANCO. V. S. *O laboratório de ensino de matemática e a identificação de obstáculos no conhecimento de professores de matemática.* In Zetetikê- FE- Unicamp- v.18- nº 34- jul./dez.-2010.

BICUDO, M. A. V. (Org.) *Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica.* São Paulo: Cortez, 2011.

BISHOP, A. J. & GOFFREE. F. Classroom organization and dynamics. In B.Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel, 1986.

CUNHA, M. I. *O bom professor e sua prática.* São Paulo: Papirus Editora, 2007.

EVES, HOWARD. *Os sólidos Regulares.* In: EVES, HOWARD. Introdução a História da Matemática. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

FERNANDES, D. *Aspectos metacognitivos da resolução de problemas de matemática.* Revista Educação e Matemática, 1989.

FLORIANI , J. V. *Professor e Pesquisador.* 2.Ed. Blumenau, SC: Editora da FURB,2000.

LEAL, L. C. & VELOSO, E. *Geometria do espaço e materiais no 7.º ano.* Revista Educação e Matemática, APM: 1990.

LOPES, A. J. *Gestão de interacções e produção de conhecimento matemático em um ambiente de inspiração lakatosiana.* Educação Matemática em Revista, *7*(6), 19-26, 1999.

LOYD, S. Os Enigmas de Sam Loyd. RBA Coleccionables, S.A., Espanha: 2008.

MATOS, J. M. & SERRAZINA, M. L. *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MARQUES, P. M. *Poliedros Regulares*. Revista Educação e Matemática, APM: 2008.

MICHEL, F. *A Geometria dos Cristais*. Revista Educação e Matemática, APM: 1987.

MEDEIROS, K. M. *Laboratório no Ensino de Matemática.* (mimeo), 2003.

MEDEIROS, K. M. *O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula*. Educação Matemática em Revista. Ano 8, n. 9, p. 32-39. 2001.

MENEZES, L., SANTOS, F., SILVA, A. , TRINDADE, M. J.. Investigar a comunicação matemática no 1º ciclo. *Millenium, 8*(27), 123-137, 2003.

PCN + ENSINO MÉDIO. *Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Secretária de Educação Tecnológica – Brasília: MEC; SEMTEC. 2002.

PEDONE, N. M. D**.** *Poliedros de Platão.* Revista do Professor de Matemática. RPM 18, 1991.

POHL, V. *Visualizando o espaço tridimensional pela construção de poliedros.* In: LINDQUIST M. M., SHULTE, A P.(Org.) *Aprendendo e ensinando geometria.* São Paulo, Atual editora, 1994.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995

Ponte, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM, 2005.

PONTE, J. P., BROCARDO, J., OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

RAFAEL, I. *Origami.* Revista Educação e Matemática. APM, 2011

SANTOS, V. M. *A relação e as dificuldades dos alunos com a matemática: um objeto de investigação.* Zetetikê- FE- Unicamp- v.17- nº 33, 2009.

SANTOS, R. B., DA ROHA FALCÃO. *A influência do material concreto na resolução dos problemas com estruturas aditivas.* Anais do XIV Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste. Salvador: 1999.

VELOSO, E. *Há vida na geometria além dos prismas, paralelepípedos, cubos, esferas, cilindros e cones...* Educação e Matemática, APM, 2008.

VELOSO, E., VIANA, J.P. Um Cubo Primo (Desafios VI). RBA Coleccionables, S.A., Espanha: 2008.

SITE CONSULTADO:

LOPES, A. J. *Geometria dos Cortes de Sabão.* Disponivel em:<HTTP://www.matematicahoje.com.br/telas/Autor/artigos/artigos-publicados.asp?aux=sabao> . Acesso em: 02 de abril de 2012.

PONTE, J. P. *Explorar e Investigar em Matemática: uma atividade fundamental no ensino e na aprendizagem.* Revista Iberoamericana de Educación Matematica, n. 21, mar. 2010, p. 13-30. Disponível em: <http://www.fisem.org/web/union/revistas/21/Union_021_006.pdf.> Acesso em: 25 de novembro de 2011.

APÊNDICE

Investigação sem o material concreto

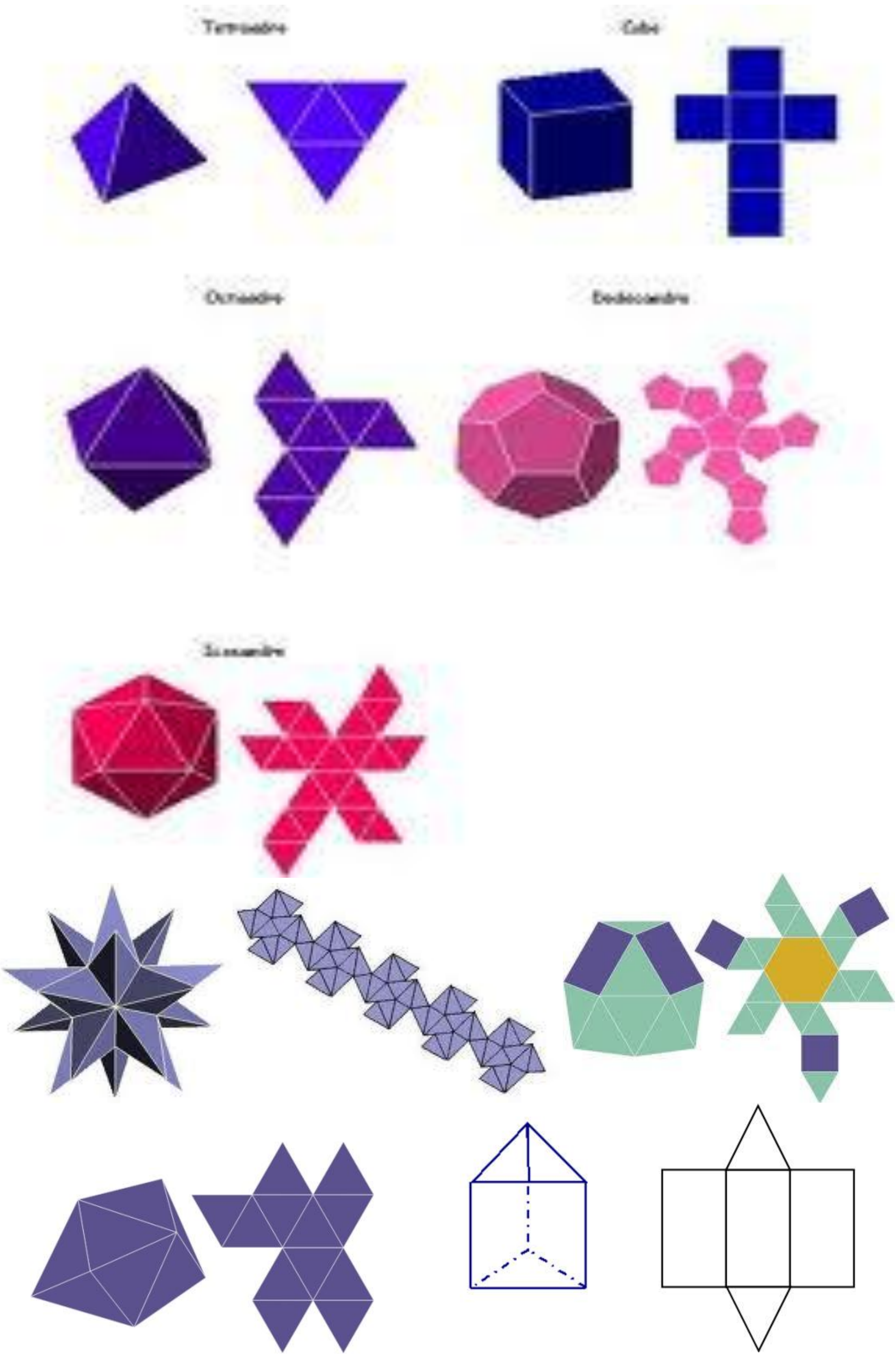
1. Conte o número de faces, vértices e arestas de cada poliedro. Podem preencher uma tabela para registrar os números que vocês encontraram.
2. Para cada sólido geométrico, calcule a soma do número de faces com o número de vértices.
3. O que podemos concluir sobre a relação entre os números de faces, vértices e arestas?
4. Sabendo que para ser considerado um poliedro de Platão devem ser considerados os seguintes aspectos:

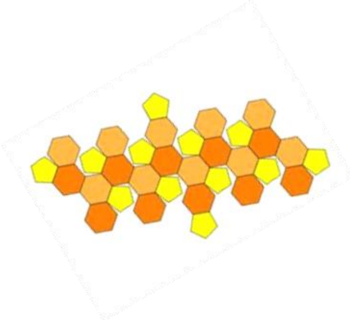
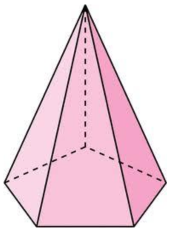
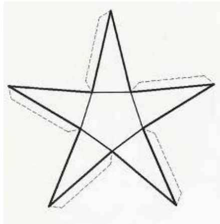
- Satisfazer a essa relação que vocês encontraram, que é denominada relação de Euler, entre os números de faces, vértices e arestas.
- Todas as faces têm o mesmo número de arestas;
- Em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.

Quais dos Poliedros que vocês encontraram podem ser denominados Poliedros de Platão?

Folha contendo os Sólidos geométricos e suas planificações para ajudar no desenvolvimento da investigação

Sólidos geométricos e suas planificações



Investigação com as barras de sabão.

1. Utilizando a barra de sabão e partindo do formato do cubo façam cortes, utilizando a régua e, para cada corte, conte o número de faces, vértices e arestas. Pode usar uma tabela para registrar os números que vocês encontraram.
2. Para cada sólido geométrico, calcule a soma do número de faces com o número de vértices.
3. Compare o resultado, obtido com o número de arestas.
4. O que vocês podem concluir sobre a relação entre os números de faces, vértices e arestas? Explique.

Investigação com Dobraduras

1. Quantos polígonos podemos utilizar para formar um ângulo poliédrico?
2. Forme poliedros com os ângulos poliédricos encontrados.
3. Conte o número de faces, vértices e arestas de cada poliedro. Podem preencher uma tabela para registrar os números que vocês encontraram.
4. Para cada sólido geométrico, calcule a soma do número de faces com o número de vértices.
5. O que podemos concluir sobre a relação entre os números de faces, vértices e arestas?
6. Sabendo que para ser considerado um poliedro de Platão devem ser considerados os seguintes aspectos:

- Satisfazer a essa relação que vocês encontraram, que é denominada relação de Euler, entre os números de faces, vértices e arestas.
- Todas as faces têm o mesmo número de arestas;
- Em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.

Quais dos Poliedros que vocês encontraram podem ser denominados Poliedros de Platão?

<u>Questionário</u> (20-07-2012)

1- Qual a sua opinião acerca da investigação matemática sem a utilização do material concreto? Teve dificuldade? Se sim, explique.

2- Qual a sua opinião acerca da investigação com a utilização do material concreto? Teve dificuldade? Se sim, explique.

3- O material concreto contribuiu de alguma forma para o desenvolvimento da investigação? Se sim, explique.

4- Faça um comentário a respeito das investigações.