UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

SABRINA XAVIER GOMES

SEQUÊNCIAS QUE PREENCHEM INTERVALOS RELACIONADAS COM NÚMEROS DE FIBONACCI

PATOS - PB
2017

SABRINA XAVIER GOMES

SEQUÊNCIAS QUE PREENCHEM INTERVALOS RELACIONADAS COM NÚMEROS DE FIBONACCI

Artigo de Conclusão de Curso apresentada ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura em Matemática - CCEA - UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira

Patos - PB
2017

G633s Gomes, Sabrina Xavier.

Sequências que preenchem intervalos relacionadas com números de Fibonacci [manuscrito] : / Sabrina Xavier Gomes. - 2017.

29 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2017.

"Orientação : Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira, Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Números de Fibonacci. 2. Representação de números reais. 3. Sequências que preenchem intervalos.

21. ed. CDD 512.943

Sabrina Xavier Gomes

SEQUÊNCIAS QUE PREENCHEM INTERVALOS RELACIONADAS COM NÚMEROS DE FIBONACCI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 13 de dezembro de 2017

Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Francisco Anderson Mariano da Silva (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho a Deus e aos meus avós: Antônio Juvino (in memoriam) e Eunice Xavier, Raimundo Pereira e Aneide Barbosa.

AGRADECIMENTOS

Quando agradecemos a todos, deixamos de enfatizar aqueles que mais importam. Mas quando citamos nomes, podemos nos esquecer de algumas pessoas. No entanto, a gratidão é sempre necessária.

Assim, agradeço a Deus pelo dom da vida e pela imensa bondade.

Aos meus pais e familiares pelo incentivo à busca incessante do conhecimento, especialmente a minha mãe (Risomar Xavier) por ter me instruídos no caminho da retidão.

Aos meus professores que na condição de mestres me proporcionaram vislumbrar o saber científico e como pessoa me estimularam a buscar novos horizontes para o conhecimento, aqui destaco os professores Prof. Me. Vilmar Vaz e Prof. Júlio Pereira, agradeço pelas valiosas instruções dadas, compromisso e competência profissional.

Quero também externar os meus agradecimentos ao meu orientador Prof. Me. Arlandson Matheus Oliveira pela paciência e assistência no desenvolvimento desde trabalho.

Chegar até aqui não foi tarefa fácil, então durante esta caminhada tive o suporte de pessoas espetaculares que são fontes de inspiração e, às quais, devo os meus sinceros agradecimentos por ter compartilhado seus conhecimentos, materiais e experiência de vida.

Em fim, na certeza que não há nenhum sucesso legítimo sem esforço árduo, agradeço àqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste sonho.

“ A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.”
Galileu Galilei

SUMÁRIO

SEQUÊNCIAS QUE PREENCHEM INTERVALOS RELACIONADAS COM NÚMEROS DE FIBONACCI

Sabrina Xavier Gomes*

RESUMO

Neste artigo, trataremos o conceito de *sequências que preenchem intervalos*, que concerne à representação de $x \in [0, S]$ na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \lambda_n, \quad \text{em que } \epsilon_n = 0 \text{ ou } 1.$$

A sequência (λ_n) é decrescente e satisfaz $\lambda_n \leq \lambda_{n+1} + \lambda_{n+2} + \lambda_{n+3} + \cdots$. Além disso, os termos λ_n são positivos e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ é convergente com soma S. Estudaremos o caso particular em que $\lambda_n = 1/(F_n)^r$ é a sequência formada pelos inversos dos números de Fibonacci elevados a um número real $r \in (0, 1]$. Este trabalho baseia-se em [7].

Palavras-chave: Números de Fibonacci. Representação de números reais. Sequências que preenchem intervalos.

ABSTRACT

In this paper, we will treat the concept of *interval-filling sequences*, which concern to the representation of $x \in [0, S]$ in the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \lambda_n, \quad \text{where } \epsilon_n = 0 \text{ ou } 1.$$

*Aluna de graduação do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Email: sabrinagomes.05@gmail.com. Este artigo de conclusão de curso foi escrito sob orientação do Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira.

The sequence (λ_n) is decreasing and satisfies $\lambda_n \leq \lambda_{n+1} + \lambda_{n+2} + \lambda_{n+3} + \cdots$. Moreover, the terms λ_n are positive, and the series $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ is convergent with sum S. We will study the particular case when $\lambda_n = 1/(F_n)^r$, where F_n are the Fibonacci numbers and r is a real number that belongs to $(0,1]$. This work is based on [7].

Keywords: Fibonacci numbers. Representation of real numbers. Interval-filling sequences.

1 INTRODUÇÃO

Eis uma versão de uma antiga piada matemática: *Todos os números são interessantes*. Com efeito, suponha que o oposto disso é que é verdade. Denote por X o conjunto de todos os números reais não interessantes e não negativos. Como $X \neq \emptyset$, seja x_0 a maior cota inferior para os elementos de X. Se $x_0 \in X$, então é notável o fato de existir um menor número não negativo e desinteressante. Se, por outro lado, $x_0 \notin X$, então não existe um menor número não interessante e não negativo, o que, sem dúvida, é interessante. Raciocínio análogo se aplica aos números negativos. Segue-se que todos os números são interessantes.

Alguns números, contudo, são mais interessantes que os outros. É o caso, por exemplo, das bases naturais dos sistemas de numeração mais conhecidos, notadamente o sistema binário e o decimal. Nas mais variadas e corriqueiras situações, representamos números em termos de potências do número 10. Dado um número natural N, existe uma única forma de escrevê-lo como

$$N = a_{k(N)} \cdot 10^{k(N)} + a_{k(N)-1} \cdot 10^{k(N)-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

em que $k(N)$ é um número natural ou zero e os *dígitos* ou *algarismos* a_i são tomados no conjunto $\{0,1,2,\ldots,9\}$. Todo número real no intervalo $(0,1)$ se escreve como

$$0,a_1a_2a_3\ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i},$$

com $a_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Esta representação, contudo, em geral não é única, como ilustra o número $0,5 = 0,4999\ldots$. E assim por diante.

Embora estas representações não nos causem hoje em dia mais espanto do que o necessário para ou até nos habituarmos com elas (em particular, com as contas que precisamos fazer para obtê-las), o percurso que vai desde o agrupamento de objetos em conjuntos com igual número de elementos até o profundo nível de abstração inaugurado pelos analistas a partir do século XIX é um dos mais longos e complexos da história das ideias matemáticas. O leitor pode encontrar mais informações a esse respeito em [4] ou [15].

Modernamente, surgiu a questão de representar um número real em uma base não inteira e, mais recentemente, em termos de uma sequência de números reais. É esta segunda questão que motiva os estudos desenvolvidos no presente artigo.

Dizemos que uma sequência (λ_n) de números reais positivos tal que

(i) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots$ e

(ii) $S := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty$

preenche intervalo se todo número x no intervalo $[0, S]$ pode ser escrito na forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \lambda_n,$$

em que $\varepsilon_n = 0$ ou 1 para todo $n \in \mathbb{N}$.

O estudo das *sequências que preenchem intervalos* foi iniciado por Z. Daróczy, A. Járai e I. Kátia [2]. A partir de uma sequência que preenche intervalo (SPI), os autores definiram o conceito de *função completamente aditiva*. Em [3], eles mostraram que as únicas funções completamente aditivas com relação a uma SPI são as funções linares, isto é, as funções da forma $f(x) = c \cdot x$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

Recorde que a *sequência de Fibonacci* é definida pela seguinte relação recursiva:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1 \quad \text{e, para todo } n \geq 1, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

A representação de números reais em termos dos números de Fibonacci foi investigada inicialmente por J.L. Brown [1] e por P. Ribenboim [14]. E. Herrmann [7] estudou sequências que preenchem intervalos relacionadas com números de Fibonacci. Um resultado central aqui é uma conjetura feita em 1914 por S. Kakeya [9] e provada por J.L. Brown [1].

Os resultados principais deste artigo são devidos a E. Herrmann [7] e podem ser enunciados como segue.

Teorema A. *Para cada $r \in (0, 1]$ fixado, a sequência $(1/(F_n)^r)$, em que F_n denota o n-ésimo número de Fibonacci, preenche intervalo, isto é, todo número x no intervalo $[0, S_r]$ pode ser escrito como*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{(F_n)^r}, \quad \varepsilon_n \in \{0, 1\}, \tag{1}$$

em que $S_r = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(F_n)^r$.

Teorema B. *Nas condições do teorema anterior, para cada x com $0 < x < S_r$, o conjunto C_x de todas as diferentes expansões de x na forma (1) têm a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$.*

Este artigo organiza-se como segue. Na Seção 2, apresentaremos os conhecimentos analíticos essenciais para a compreensão do texto e alguns fatos a respeito da sequência de Fibonacci que nos serão úteis. Na Seção 3, demonstraremos os Teoremas A e B anteriormente enunciados. A demonstração destes resultados consiste basicamente na aplicação do Teorema de Kakeya (veja o Teorema 3.4) e da Desigualdade de Jensen (veja o Lema 3.1) à sequência $(1/(F_n)^r)$ e a suas subsequências.

2 FIBONACCI ENCONTRA CAUCHY

A sequência de Fibonacci surgiu antes da era comum, na Índia, em conexão com a tradição sânscrita da prosódia. Fora da Índia, a primeira vez de que se tem notícia desta sequência é no livro *Liber Abaci*, escrito por Fibonacci e publicado em 1202. Johannes Kepler, em 1611, já havia obervado que a razão de números de Fibonacci consecutivos converge para o número de ouro da geometria clássica. Contudo, a verificação de fatos como este só se tornou possível graças ao trabalho dos analistas europeus do século XIX em diante, notadamente com o *Cours d'Analyse*, de 1821, do físico e matemático francês Augustin-Louis Cauchy, que rejeitou as bases algébricas adotadas pelos matemáticos Euler e Lagrange e propôs substitui-las pelo rigor fundamentado na geometria e nos infinitésimos.

2.1 Sequências de números reais

Uma *sequência* é uma lista ordenada de números reais. Mais precisamente, damos a seguinte

Definição 2.1. *Uma* sequência de números reais *é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*. A imagem de cada* $n \in \mathbb{N}$ *será denotada por* x_n*, em lugar de* $x(n)$*, e será denominada o* n-ésimo termo *da sequência. Denotaremos a sequência* x *por* (x_n)*. Uma subsequência de* (x_n) *consiste na restrição de* x *a um subconjunto infinito* $\mathbb{N} = \{n_1 < n_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$*. Uma subsequência será denotada por* (x_{n_k})*.*

Exemplos desta definição são dados por uma *sequência constante* $(x_n) = (c, c, c, \ldots)$, em que $c \in \mathbb{R}$, por $(x_n) = (1/n)$ e por $(x_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$. Duas subsequências desta última sequência são, por exemplo, $(x_n)_{n \text{ par}} = (-1, -1, -1, \ldots)$ e $(x_n)_{n \text{ ímpar}} = (1, 1, 1, \ldots)$.

As sequências que mais nos interessam aqui são aquelas cujos termos se tornam "arbitrariamente próximos" de algum número real. Formalizaremos isto com a seguinte

Definição 2.2. *Diremos que uma sequência de números reais* (x_n) *converge para* $L \in \mathbb{R}$ *se*

$$\text{para todo } \epsilon > 0 \text{ existe } n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \text{ implica } |x_n - L| < \epsilon.$$

Neste caso, diremos também que L é o limite da sequência (x_n) *e escreveremos*

$$\lim x_n = L$$

para denotar este fato.

Segue-se imediatamente desta definição que o limite de uma sequência, quando existe, é único. Com efeito, se $\lim x_n = L$ e L' é um número real diferente de L, então, escolhendo $\epsilon > 0$ tal que os intervalos $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ e $(L'-\epsilon, L'+\epsilon)$ são disjuntos, temos que $x_n \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$, para todo índice n suficientemente grande, de maneira que (x_n) não pode convergir para L'.

As sequências convergentes estão intimamente relacionadas ao estudo da continuidade de funções. Recordamos que uma função $f : X \subset \mathbb{R}$ é *contínua em um ponto* $a \in X$ de seu domínio se

$$\text{para todo } \epsilon > 0 \text{ existe } \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } x \in X,\ |x-a| < \delta \text{ implicam } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Caso $a \in X$ seja também um *ponto de acumulação* de X, isto é, caso todo conjunto da forma $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$, contenha algum ponto de X diferente de a, esta definição coincide com aquilo que aprendemos em Cálculo: $f : X \subset \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, existe o limite de $f(x)$ quando $x \in X$ se aproxima de a, e este limite é igual a $f(a)$. Uma função $f : X \subset \mathbb{R}$ é dita *contínua* se for contínua em todos os pontos de seu domínio.

O resultado a seguir estabelece uma relação entre sequências convergentes e funções contínuas.

Proposição 2.1. *A fim de que uma função* $f : X \subset \mathbb{R}$ *seja contínua em um ponto* $a \in X$ *é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos* $(x_n) \subset X$ *com* $\lim x_n = a$*, se tenha* $\lim f(x_n) = f(a)$.

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que f seja contínua em a. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x-a| < \delta$ implicam $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Seja $(x_n) \subset X$ com $\lim x_n = a$. Para este δ, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $|x_n - a| < \delta$. Logo, para todo $n > n_0$, temos que $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$, o que mostra que $\lim f(x_n) = f(a)$.

Reciprocamente, se, para toda sequência de pontos $(x_n) \subset X$ com $\lim x_n = a$, temos $\lim f(x_n) = f(a)$, mas f não é contínua em a, então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe $x_\delta \in X$ com $|x_\delta - a| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \epsilon_0$. Escolhendo, sucessivamente, $\delta = 1/n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, construímos assim uma sequência x_n de pontos de X que converge para a, mas tal que a sequência $(f(x_n))$ não converge para $f(a)$, contradizendo a hipótese. Portanto, f é contínua em a. $\square$

Exemplo 1. *Devida à sua própria construção sequencial, a função* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^\lambda$*, em que* λ *é um número real fixado, é contínua. Como, no entanto, esta construção foge ao escopo deste trabalho, remetemos o leitor interessado em detalhes a [10].*

O conceito de sequência convergente também nos permite dar sentido a uma igualdade do tipo

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1,$$

na qual o primeiro membro é uma "soma" com infinitas parcelas. É claro que não tem sentido somar uma infinidade de números reais. O que aquela igualdade exprime é o limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right).$$

Seja (a_n) uma sequência de números reais. A partir desta sequência, formamos uma nova sequência (s_n) cujos termos são as somas

$$s_1=a_1,\quad s_2=a_1+a_2,\quad \ldots,\quad s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

que chamaremos as *reduzidas* ou *somas parciais* da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

A parcela a_n chama-se o *n-ésimo termo* ou *termo geral* da série. Se existir o limite

$$S=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n),$$

diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é *convergente*, e o limite S será chamado a *soma* da série. Se a sequência das reduzidas não convergir, diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é *divergente*.

Às vezes, é conveniente considerar séries do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, que começam em a_0 em vez de a_1.

Exemplo 2. *Considere um número real a tal que* $0<a<1$. *Observe que a sequência cujo n-ésimo termo é*

$$s_n=1+a+a^2+\cdots+a^n$$

é limitada e crescente, logo converge. Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{1}{1-a}.$$

Com efeito, note que

$$s_n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a},$$

logo

$$\left|s_n-\frac{1}{1-a}\right|=\frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Como $0<a<1$, *sabemos que* $\lim_{k\to\infty} a^k=0$, *e, daí,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1-a}=0.$$

Mais formalmente, dado $\epsilon > 0$, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a^{n+1} < \epsilon(1-a)$. Segue-se que

$$n > n_0 \Rightarrow \frac{a^{n+1}}{1-a} < \epsilon,$$

donde

$$\left| s_n - \frac{1}{1-a} \right| < \epsilon.$$

Logo $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-a}$, *como queríamos provar. Isto significa que a série* $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ *é convergente com soma igual a* $1/(1-a)$, *desde que* $0 < a < 1$. *Tal série é dita uma série geométrica.*

Exemplo 3. *Seja (a_n) uma sequência satisfazendo*

(i) $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$ *e*

(ii) $\lim a_n = 0$.

Então a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *converge.*

Com efeito, a subsequência (s_{2n}) é limitada e crescente. O Teorema da Convergência Monótona nos permite afirmar que existe $S \in \mathbb{R}$ tal que $S = \lim s_{2n}$. Agora note que $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$, donde

$$\lim s_{2n+1} = \lim (s_{2n} + a_{2n+1}) = S + 0 = S.$$

O fato de que tanto (s_{2n}) quanto (s_{2n+1}) convergem para S implica que $\lim s_n = S$.

Exemplo 4. *Seja $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim |a_{n+1}/a_n| < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.*

Com efeito, seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $L < c < 1$, em que $L = \lim |a_{n+1}/a_n|$. Então, para todo n suficientemente grande, teremos $|a_{n+1}/a_n| = |a_{n+1}|/|a_n| < c = c^{n+1}/c^n$, donde $|a_{n+1}|/c^{n+1} \leq |a_n|/c^n$. Assim, a sequência de números não negativos $(|a_n|/c^n)$ é não crescente a partir de uma certa ordem, logo é limitada. Como a série geométrica $\sum c^n$ converge, comparando as somas parcais da série $\sum |a_n|$ e da série $\sum M c^n$, em que M é uma cota superior para os termos da sequência $(|a_n|/c^n)$, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

2.2 Sequência de Fibonacci

Comecemos com a sequinte

Definição 2.3. *A* sequência de Fibonacci (F_n) *é a sequência definida recursivamente por*

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1 \quad \text{e, para todo } n \geq 1, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

Observação 2.1. *Por vezes, é conveniente considerar a sequência de Fibonacci com valores iniciais* $F_0 = 1$ *e* $F_1 = 1$ *(ou mesmo* $F_0 = 0$ *e* $F_1 = 1$*), caso em que a relação recursiva* $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ *é tomada para* $n \geq 0$*.*

Dentre as muitas propriedades da sequência de Fibonacci, destacamos inicialmente a seguinte, que expressa os termos F_n em função do número de ouro da geometria clássica

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Proposição 2.2 (Fórmula de Binet)**.** *O n-ésimo termo da sequência de Fibonacci é dado por*

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}, \tag{2}$$

em que $\psi = (1-\sqrt{5})/2 = 1 - \varphi = -1/\varphi$*.*

A relação (2) é denominada *Fórmula de Binet*, apesar de que já era conhecida por Abraham de Moivre. A prova que apresentaremos aqui emprega conceitos básicos de Álgebra Linear. Embora o estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares não seja nosso objetivo, escolhemos esta prova devido a sua grande elegância e simplicidade. Seguiremos [6]. Os conceitos de Álgebra Linear necessários para a compreensão desta prova podem ser encontrados em [11]. O leitor pode encontrar uma demonstração alternativa em [12].

Demonstração da Proposição 2.2. Definimos as matrizes

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \psi \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{bmatrix}$$

e, para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos o vetor

$$v_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Cálculos elementares mostram que

$$P^{-1} = \frac{1}{\psi - \varphi} \begin{bmatrix} \psi & -1 \\ -\varphi & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$D^n = \begin{bmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{bmatrix}.$$

Além disso, o polinômio característico de M é $p(z) = z^2 - z - 1$ e uma decomposição diagonal de M é $M = PDP^{-1}$. Então $Mv_n = v_{n+1}$ e duas induções simples mostram que $v_n = M^{n-1}v_1$ e $M^n = PD^nP^{-1}$. Concluímos que $v_n = PD^{n-1}P^{-1}v_1$, que é a identidade (2) em forma vetorial. $\square$

Como consequência da Proposição 2.2, obtemos a seguinte identidade.

Corolário 2.4 (Identidade de Cassini)**.** *Seja* (F_n) *a sequência de Fibonacci com valores iniciais* $F_0 = 1$ *e* $F_1 = 1$ *(veja a Observação 2.1). Então, para todo* $n \geq 1$*, temos*

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^{n+2}. \tag{3}$$

Demonstração. Pela Fórmula de Binet (2), temos

$$\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= \frac{1}{5}\left[\left(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}\right)\left(\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}\right) - \left(\varphi^n - \psi^n\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{5}\left(\varphi^{n+1}\psi^{n-1} - \varphi^{n-1}\psi^{n+1} + 2\varphi^n\psi^n\right) \\
&= \frac{1}{5}(\varphi\psi)^{n-1}(\varphi^2 - 2\varphi\psi + \psi^2) \\
&= \frac{1}{5}(-1)^{n-1}(\varphi - \psi)^2 \\
&= (-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 5. *A sequência* (F_{n+1}/F_n) *converge para* φ*. Apresentaremos duas demonstrações deste fato.*

(1) Com efeito, seja $r_n := F_{n+1}/F_n$*, para* $n = 1, 2, 3, \ldots$*. Por definição de sequência de Fibonacci, temos*

$$r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{R_{n-1}} \quad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Daí e do fato de que o número de ouro φ *satisfaz a relação*

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi},$$

inferimos que, para todo $n = 2, 3, 4, \ldots$*, temos*

$$\begin{aligned}
\left|r_n - \varphi\right| &= \left|\left(1 + \frac{1}{r_{n-1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{\varphi}\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{\varphi}\right| \\
&= \left|\frac{\varphi - r_{n-1}}{r_{n-1}\varphi}\right| \\
&\leq \frac{1}{\varphi}|r_{n-1} - \varphi|.
\end{aligned}$$

Um argumento indutivo nos permite concluir que

$$\left|r_n - \varphi\right| \leq \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n-2}\left|r_2 - \varphi\right|.$$

Como $0 < 1/\varphi < 1$, *temos que* $\lim(1/\varphi)^{n-2} = 0$, *o que implica* $\lim\left|r_n - \varphi\right| = 0$, *ou seja,*

$$\lim \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

(2) Seja $L = \lim(F_{n+1}/F_n)$. *É claro que* $L \neq 0$. *Usando novamente a relação recursiva, obtemos*

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \quad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Fazendo $n \to \infty$, *vemos que* L *satisfaz a equação* $L = 1 + L^{-1}$. *Resolvendo esta equação, encontramos* $L = \varphi$.

É suficiente, então, garantirmos que a sequência (F_{n+1}/F_n) *converge. Usando os valores iniciais* $F_0 = F_1 = 1$, *mostraremos que*

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}}. \tag{4}$$

Procederemos por indução sobre n. *A identidade* (4) *é obviamente válida para* $n = 0$. *Suponhamo-la válida para* $n > 0$ *e mostremos que ela também para vale para o sucessor deste* n. *Há dois casos a considerar. Se* n *é par, então note que, pela Identidade de Cassini (veja o Corolário 2.4),*

$$\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}} - \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} + 1}{F_{n+1}F_{n+2}} = 0.$$

Daí e da hipótese de indução, segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} &= \frac{F_n}{F_{n+1}} - \frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}} \\ &= 1 - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{F_n F_{n+1}} - \frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}. \end{aligned}$$

O caso em que n *é ímpar é tratado de maneira análoga. Finalmente, observe que a expressão no lado direito de* (4) *é a soma parcial de uma série que está sob as condições do Exemplo 3. Esta série é convergente, logo também o é a sequência* (F_n/F_{n+1}). *Portanto,* (F_{n+1}/F_n) *converge com limite* φ.

Exemplo 6. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(F_n)^r}$, *em que* r *é um número pertencente ao intervalo* $(0,1]$, *converge.*

Com efeito, escrevendo $a_n = \frac{1}{(F_n)^r}$, *perceba que*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right)^r.$$

Pelo exemplo precedente e pela continuidade da função $0 \le t \mapsto t^r$ *(veja o Exemplo 1), temos que*

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{\varphi^r} < 1.$$

Segue-se do Exemplo 4 que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(F_n)^r}$ *converge.*

2.3 (Não) Enumerabilidade

Esta subseção seria melhor descrita como o encontro dos matemáticos de todos os tempos com o matemático alemão Georg Cantor, responsável por consolidar a teoria dos conjuntos. Cantor provou que o conjunto dos números reais tem "mais elementos" do que o conjunto dos números reais. O método empregado por ele para estabelecer este resultado, hoje chamado *método da diagonal de Cantor*, implica a existência de uma "infinidade de infinitos".

Os resultados discutidos nesta subseção ilustram a importância do uso de representações dos números reais para o estudo da reta e de seus subconjuntos.

O conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$ e seus subconjuntos finitos da forma $\{1,2,3,\dots,n\}$ são usados como "unidades de medida" básicas para determinar o número de elementos de um conjunto. Mais precisamente, damos a seguinte

Definição 2.5. *Seja X um conjunto. Diremos que X é* finito *se X for vazio ou se existir uma bijeção entre X e $\{1,2,3,\dots,n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Diremos que X é* enumerável *se X for finito ou se existir uma bijeção entre X e $\mathbb{N}$.*

Neste sentido, o conjunto $\mathbb{N}$ é o "menor" dos conjuntos infinitos.

São exemplos de conjuntos infinitos o próprio conjunto $\mathbb{N}$, assim como o conjunto $\mathbb{Z}$ de todos os números inteiros e o o conjunto $\mathbb{Q}$ de todos os números racionais.

Os conjuntos que não cabem na Definição 2.5 são ditos *não enumeráveis*. Estes são os conjuntos que nos interessam aqui.

Definição 2.6. *Um conjunto X é dito* não enumerável *se não é finito nem pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais.*

Exemplo 7. *O intervalo $(0,1) \subset \mathbb{R}$ é não enumerável.*

Com efeito, suponhamos, por absurdo, que $(0,1)$ fosse enumerável, de maneira que, usando a representação decimal dos números reais, poderíamos listar todos os números reais entre 0 e 1 da seguinte forma

$$\xi_m = 0, a_{m1} a_{m2} a_{m3} a_{m4} a_{m5} \dots,$$

em que $m \in \mathbb{N}$ e os dígitos a_{mn} são elementos do conjunto $\{0,1,2,\dots,9\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos um número real $\xi \in (0,1)$ com expansão decimal $\xi = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots$ por meio da regra

$$b_n = \begin{cases} 2, & se \quad a_{nn} \neq 2, \\ 3, & se \quad a_{nn} = 2. \end{cases}$$

Temos que $\xi \neq \xi_m$*, qualquer que seja* $m \in \mathbb{N}$*. Contradição. Portanto,* $(0,1)$ *é não enumerável.*

O método empregado neste exemplo é denominado método da diagonal de Cantor.

Consequentemente, o conjunto $\mathbb{R}$ *de todos os números reais também é não enumerável. Podemos concluir este segundo fato de pelo menos duas maneiras, a saber: (i) todo subconjunto de um conjunto enumerável também é enumerável (como se verifica sem grande dificuladade); (ii) todos os números reais podem ser produzidos pela função* $f(x) = \tan(\pi(x - 1/2))\,, x \in (0,1)$*, isto é, a função* $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \tan(\pi(x-1/2))$ *é uma bijeção; logo, se* $(0,1)$ *é não enumerável, o mesmo é verdade para* $\mathbb{R}$*.*

Exemplo 8. *O conjunto* $\mathscr{P}(\mathbb{N})$*, de todos os subconjuntos de* $\mathbb{N}$*, é não enumerável.*

Mostraremos que nenhuma função $f:\mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$*é sobrejetiva. Com efeito, dada uma tal* f*, considere o conjunto* $A_f := \{n \in \mathbb{N} : n \notin f(n)\}$*. Se* f *fosse sobrejetiva, então existiria* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $f(n_0) = A_f$*. Ora,* $n_0 \in A_f$ *se, e somente se,* $n_0 \notin A_f$*. Um absurdo. Assim, nenhuma função* $\mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ *pode ser bijetiva (uma vez que nenhuma função* $\mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ *pode ser sobrejetiva).*

Exemplo 9. *O conjunto* $\mathscr{S}$ *formado por todas as sequências reais cujos termos são 0 ou 1 não é enumerável.*

Um argumento inteiramente análogo ao empregado no Exemplo 7 pode ser usado para estabelecer este fato.

Dizemos que dois conjuntos X e Y *têm a mesma cardinalidade* se existe uma função bijetiva $f: X \to Y$.

Proposição 2.3. *O conjuntos* $(0,1)$*,* $\mathscr{P}(\mathbb{N})$*,* $\mathscr{S}$ *e* $\mathbb{R}$ *têm a mesma cardinalidade.*

Demonstração. Já vimos que $(0,1)$ e $\mathbb{R}$ têm a mesma cardinalidade.

Consideremos, agora, os conjuntos $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ e $\mathscr{S}$. Note que $\mathscr{S} = \big\{\text{funções } f:\mathbb{N} \to \{0,1\}\big\}$. Para cada $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, isto é, para cada subconjunto $A \subset \mathbb{N}$, definimos a função $f_A : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ dada por

$$f_A(n) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad n \in A, \\ 0, & \text{se} \quad n \notin A. \end{cases}$$

A correspondência $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{S}$ que associa a cada $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ a função $f_A \in \mathscr{S}$ é claramente uma bijeção.

Finalmente, usando a representações binária e decimal de um número real, é possível estabelecer funções injetivas entre os conjuntos $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ e $(0,1)$.[1] Seja $x = 0, a_{1,x}a_{2,x}a_{3,x}\ldots$ a

[1] Uma demonstração alternativa para o fato de que há uma bijeção entre estes dois conjuntos, mas que também faz uso de conceitos cuja discussão está fora do escopo deste trabalho pode ser encontrada em [13].

representação binária de um número $x \in (0,1)$. Excluímos as representações nas quais apenas uma quantidade finita de dígitos são iguais a 0. Definimos o conjunto $A_x := \{n \in \mathbb{N} : a_{n,x} = 1\}$. A correspondência $(0,1) \ni x \mapsto A_x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ é injetiva. Dado, agora, $B \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, seja $x \in (0,1)$ o número cuja expansão decimal $x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ é definida por

$$b_n = \begin{cases} 3, & \text{se} \quad n \in B, \\ 5, & \text{se} \quad n \notin B. \end{cases}$$

Esta regra define uma correspondência injetiva $P(\mathbb{N}) \to (0,1)$. A existência de uma bijeção entre $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ e $(0,1)$ segue-se do *Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein*, o qual estabelece, se X e Y são conjuntos tais que há funções injetivas $X \to Y$ e $Y \to X$, então há uma bijeção entre X e Y (veja [5]). □

3 REPRESENTANDO NÚMEROS REAIS EM TERMOS DOS NÚMEROS DE FIBONACCI

O estudo das *sequências que preenchem intervalos* foi iniciado por Z. Daróczy, A. Járai e I. Kátia [2]. A partir de uma sequência que preenche intervalo (SPI), os autores definiram o conceito de *função completamente aditiva*. Em [3], eles mostraram que as únicas funções completamente aditivas com relação a uma SPI são as funções linares, isto é, as funções da forma $f(x) = c \cdot x$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

A representação de números reais em termos dos números de Fibonacci foi investigada inicialmente por J.L. Brown [1] e por P. Ribenboim [14]. E. Herrmann [7] estudou sequências que preenchem intervalos relacionadas aos números de Fibonacci. Um resultado central aqui é uma conjetura feita em 1914 por S. Kakeya [9] e provada por J.L. Brown [1].

3.1 Sequências que preenchem intervalos e resultados principais

Comecemos com a definição de sequência que preenche intervalo, conceito central deste artigo.

Definição 3.1. *Seja (λ_n) uma sequência de números reais tal que*

(i) $\lambda_n > \lambda_{n+1} > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $S := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty$.

Dizemos que (λ_n) preenche intervalo *se, para qualquer $x \in [0, S]$, existe uma sequência de dígitos $\varepsilon_n \in \{0,1\}$ tal que podemos escrever*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \lambda_n, \quad \varepsilon_n \in \{0,1\}. \tag{5}$$

Uma vez introduzida esta definição, estamos em condições de enunciar os resultados principais deste artigo, devidos a E. Herrmann [7], cuja demonstração será dada nas Subseções 3.2 e 3.4.

Teorema 3.2. *Para cada $r \in (0,1]$ fixado, a sequência $(1/(F_n)^r)$, em que F_n denota o n-ésimo número de Fibonacci, preenche intervalo, isto é, todo número x no intervalo $[0, S_r]$ pode ser escrito como*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{(F_n)^r}, \quad \varepsilon_n \in \{0,1\}, \tag{6}$$

em que $S_r = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(F_n)^r$.

Teorema 3.3. *Nas condições do teorema anterior, para cada x com $0 < x < S_r$, o conjunto C_x de todas as diferentes expansões de x na forma* (6) *têm a mesma cardinalidade que* $\mathbb{R}$.

3.2 O Teorema de Kakeya e Demonstração do Teorema 3.2

Nesta subseção, apresentaremos a prova dada por P. Ribenboim [14] para uma conjectura feita em 1914 por S. Kakeya [9].

Teorema 3.4 (Kakeya [9])**.** *Seja λ_n uma sequência de números reais positivos, tal que a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \tag{7}$$

converge com soma s e as desigualdades

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \tag{8}$$

são satisfeitas. Então cada número $x \in [0, s]$ pode ser escrito na forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \lambda_n, \quad \varepsilon_n \in \{0,1\}, \tag{9}$$

se,e somente se,

$$\lambda_n \leq \lambda_{n+1} + \lambda_{n+2} + \lambda_{n+3} + \cdots \tag{10}$$

para todo $\in \mathbb{N}$.

Os dígitos ε_n da expansão (9) podem ser determinados recursivamente pelo seguinte algoritimo: Se $n \geq 1$ e se os dígitos ε_i da expansão de x na forma (9) já estão determinados para todo $i < n$, então seja

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{se } \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \lambda_i + \lambda_n < x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Segue-se que cada expansão com $x > 0$ é infinita, isto é, existem infinitos índices n com $\varepsilon_n = 1$.

Demonstração do Teorema 3.4. Note que as afirmações a seguir são equivalentes.

(1) Cada x, $0 < x \leq S$, é representado pela sequência $(\lambda_i)_{i\geq 1}$. Assim, $x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{i_j}$, em que $i_1 < i_2 < i_3 < ...$ e i_1 é o menor índice tal que $\lambda_{i_1} < x$;

(2) Cada x, $0 < x < S$, é representado pela sequência $(\lambda_n)_{n\geq 1}$.

(3) Para cada $n \geq 1$, $\lambda_n \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i$.

É claro que (1) $\Rightarrow$ (2).

Provaremos que (2) $\Rightarrow$ (3) por redução ao absurdo. Suponha que a afirmação (2) seja verdadeira, mas que exista $n \geq 1$ tal que $\lambda_n > \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i$. Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i < x < \lambda_n$. Por hipótese,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{i_j},$$

com $i_1 < i_2 < i_3 < ...$ e e i_1 é o menor índice tal que $\lambda_{i_1} < x$. Como $\lambda_{i_1} < x < \lambda_n$ e a sequência (λ_n) é, por hipótese, não crescente, então $n < i_1$. Por conseguinte, temos $x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{i_j} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k$, o que é um absurdo. O absurdo se dá por supormos que $\lambda_n > \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i$, logo para cada $n \geq 1$ devemos ter $\lambda_n \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i$.

Finalmente, mostremos que (3) $\Rightarrow$ (1). Como $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = 0$, existe um menor índice i_1 tal que $\lambda_{i_1} < x$. Similarmente, existe um menor índice i_2 tal que $i_1 < i_2$ e $\lambda_{i_2} < x - \lambda_{i_1}$. Genericamente, para cada $n \geq 1$, definimos i_n como o menor índice tal que

$$i_{n-1} < i_n \quad \text{e} \quad \lambda_{i_n} < x - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{i_j}.$$

Assim, $x \geq \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{i_j}$. Suponha que $x > \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{i_j}$.

Note que existe N tal que se $m \geq N$, então $\lambda_{i_m} < x - \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i_j}$. De fato, caso contrário, existiriam infinitos índices $n_1 > n_2 > n_3 > \cdots$ tais que

$$\lambda_{i_{n_k}} \geq x - \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_{i_j}.$$

No limite, teríamos que

$$0 = \lim_{k\to\infty} \lambda_{i_{n_k}} \geq x - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{i_j} > 0,$$

uma contradição.

Seja N o menor natural com a propriedade descrita no parágrafo anterior. Mostraremos que para $m \geq N$, $i_m + 1 = i_{m+1}$. De fato,

$$\lambda_{i_m+1} \leq \lambda_{i_m} < x - \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i_j},$$

donde pela definição da sequência de índices, $i_m + 1 = i_{m+1}$. Portanto, os seguintes conjuntos de índices coincidem: $\{i_N, i_N + 1, i_N + 2, \ldots\} = \{i_N, i_{N+1}, i_{N+2}, \ldots\}$.

Agora, argumentaremos que $i_N = 1$. Suponha que $i_N > 1$ e considere o índice $i_N - 1$. Pela hipótese (3), temos

$$s_{i_N - 1} \leq \sum_{k=i_N}^{\infty} \lambda_k = \sum_{j=N}^{\infty} \lambda_{i_j} < x - \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_{i_j}.$$

Temos que $i_{N-1} \leq i_N - 1 < i_N$. A desigualdade $i_{N-1} < i_N - 1$ é impossível, uma vez que i_N foi definido como o menor índice tal que $i_{N-1} < i_N$ e $\lambda_{i_N} < x - \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_{i_j}$. Logo $i_{N-1} = i_N - 1$, isto é, $\lambda_{i_N - 1} < x - \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_{i_j}$, o que contradiz a minimalidade de N. $\square$

A demonstração do Teorema 3.2 agora é imediata. Passemos a ela.

Demonstração do Teorema 3.2. Seja $\lambda_n = 1/(F_n)^r$, em que $0 < r \leq 1$ é um número real fixado. Verificamos no Exemplo 6 da seção precedente que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(F_n)^r}$$

converge. Assim, a condição (7) do Teorema de Kakeya é satisfeita. Além disso, é óbvio que a sequência $(1/(F_n)^r)$ cumpre a condição (8).

Resta, então, verificarmos que a condição (10) também é atendida. Observe que, para todo $n \geq 2$, temos

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} < 2F_n \Rightarrow 2F_n > F_{n+1} \Rightarrow F_n > \frac{F_{n+1}}{2} \Rightarrow F_n > \frac{F_{n+1}}{2} \Rightarrow \frac{1}{F_n} < \frac{2}{F_{n+1}}. \tag{11}$$

Pela própria definição da sequência de Fibonacci, é claro que esta última desigualdade se verifica para todo $n \geq 1$. Como $r \in (0, 1]$, segue-se que

$$\frac{1}{F_n} < \frac{2}{F_{n+1}} \leq \frac{2^{\frac{1}{r}}}{F_{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{(F_n)^r} < \frac{2}{(F_{n+1})^r}.$$

Finalmente, mostremos por indução que

$$\frac{1}{(F_n)^r} - \frac{1}{(F_{n+k})^r} < \frac{1}{(F_{n+1})^r} + \frac{1}{(F_{n+2})^r} + \cdots + \frac{1}{(F_{n+k})^r} \quad \text{para todo } k \geq 1. \tag{12}$$

É claro que esta desigualdade vale para $k = 1$. Suponhamo-la válida para algum $k > 1$ e provemos que vale também para o sucessor deste k. Pela última desigualdade em (11), temos

$$-\frac{1}{(F_{n+k+1})^r} < -\frac{1}{(F_{n+k})^r} + \frac{1}{(F_{n+k+1})^r},$$

donde

$$\frac{1}{(F_n)^r} - \frac{1}{(F_{n+k+1})^r} < \frac{1}{(F_n)^r} - \frac{1}{(F_{n+k})^r} + \frac{1}{(F_{n+k+1})^r}. \tag{13}$$

Agora, a hipótese de indução assevera que

$$\frac{1}{(F_n)^r} - \frac{1}{(F_{n+k})^r} < \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(F_{n+i})^r}.$$

Colocando esta desigulddade no lado direito da desiguladade (13), obtemos

$$\frac{1}{(F_n)^r} - \frac{1}{(F_{n+k+1})^r} < \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(F_{n+i})^r},$$

o que mostra a validade de (12) para $k+1$.

Fazendo em (12) $k \to \infty$ e observando que $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(F_{n+k})^r} = 0$, inferimos que

$$\frac{1}{(F_n)^r} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(F_{n+i})^r},$$

o que mostra que a sequência $\lambda_n = 1/(F_n)^r$ verifica a condição (10). Portanto, esta sequência preenche o intervalo $[0, S_r]$, com $S_r = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(F_n)^r$, como queríamos provar. $\square$

3.3 Desigualdades com somas dos inversos de $(F_n)^r$

Com o intuito de demonstrarmos o Teorema 3.3, nosso objetivo central é construir uma subsequência de $(\lambda_n = 1/(F_n)^r)$ que também satisfaz as condições do Teorema 3.4. Para atingirmos este objetivo, investigaremos algumas desigualdades envolvendo os inversos das potências dos números de Fibonacci. Mais precisamente, provaremos o seguinte

Teorema 3.5. *Sejam z um número natural e r um número real tal que* $0 < r \leq 1$.

1. *Se z é ímpar, então*
$$\frac{1}{(F_z)^r} < \frac{1}{(F_{z+1})^r} + \frac{1}{(F_{z+2})^r}.$$

2. *Se z é par, então*
$$\frac{1}{(F_z)^r} < \frac{1}{(F_{z+1})^r} + \frac{1}{(F_{z+2})^r} + \frac{1}{(F_{z+3})^r}.$$

3. Se z é ímpar, então

$$\frac{1}{(F_z^r)} < \frac{1}{(F_{z+2})^r} + \frac{1}{(F_{z+3})^r} + \cdots + \frac{1}{(F_{z+n(z)})^r}.$$

$n(z)$ é um inteiro que depende do inteiro ímpar z e, além disso, satisfaz $n(z) \leq n(z+2)$ e $n(z) \to \infty$ quando $z \to \infty$.

4. se z é par, então

$$\frac{1}{(F_z)^r} < \frac{1}{(F_{z+1})^r} + \frac{1}{(F_{z+3})^r} + \frac{1}{(F_{z+4})^r} + \cdots + \frac{1}{(F_{z+k})^r},$$

com $k = 7$ se $z = 2$ e $k = 5$ se $z \geq 4$.

Na demonstração do Teorema 3.5, faremos uso do seguinte

Lema 3.1 (Desigualdade de Jensen (veja [8]))**.** *Sejam A um subconjunto de $\mathbb{N}$, finito ou infinito, e $r \in \mathbb{R}$ com $0 < r \leq 1$. Então*

$$\sum_{i \in A} \frac{1}{F_i} \leq \left(\sum_{i \in A} \frac{1}{(F_i)^r} \right)^{\frac{1}{r}}$$

Demonstração. Seja $a = \left(\sum_{i \in A} \frac{1}{(F_i)^r} \right)^{\frac{1}{r}}$. Então

$$\sum_{i \in A} \frac{1}{(F_i \cdot a)^r} = 1.$$

Isso implica

$$\frac{1}{F_i \cdot a} \leq 1 \quad \text{para todo } i \in A.$$

Como $r \leq 1$, então $\frac{1}{F_i \cdot a} \leq \frac{1}{(F_i \cdot a)^r}$ para todo $i \in A$. Assim sendo,

$$\sum_{i \in A} \frac{1}{F_i \cdot a} \leq \sum_{i \in A} \frac{1}{(F_i \cdot a)^r} = 1.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por a, temos

$$\sum_{i \in A} \frac{1}{F_i} \leq \left(\sum_{i \in A} \frac{1}{(F_i)^r} \right)^{\frac{1}{r}}$$

Com isso, a demonstração do Lema 3.1 está concluída. □

Demonstração do Teorema 3.5. Vamos primeiro considerar o caso em que $r = 1$.

1. Obverve que a afirmação deste item é equivalente às seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}(F_{z+1})^2 = F_{z+2}F_z - 1 < F_{z+2}F_z \quad &\Leftrightarrow \quad (F_{z+1})^2 = F_{z+1}(F_{z+2} - F_z) < F_{z+2}F_z \\ &\Leftrightarrow \quad F_{z+1}F_{z+2} - F_{z+1}F_z < F_{z+2}F_z(F_{z+1} + F_{z+2})\end{aligned}$$

Com efeito, multiplicando ambos os lados desta última desigualdade por

$$\frac{1}{F_zF_{z+1}F_{z+2}},$$

econtramos

$$\frac{F_{z+1}F_{z+2}}{F_zF_{z+1}F_{z+2}} < \frac{F_z(F_{z+1} + F_{z+2})}{F_zF_{z+1}F_{z+2}} \Leftrightarrow \frac{1}{F_z} < \frac{1}{F_{z+1}} + \frac{1}{F_{z+2}}$$

Portanto, a validade do item 1 para $r = 1$ decorre imediatamente da Identidade de Cassini (veja o Corolário 2.4).

Para $0 < r < 1$, aplicando a Desigualdade de Jensen (Lema 3.1) ao conjunto $A = \{z + 1, z + 2\}$, vemos que a desigualdade também é satisfeita. Basta observar que

$$\frac{1}{F_z} < \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{F_{i+1}} \leq \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{(F_{z+i})^r}\right)^{\frac{1}{r}} \Rightarrow \frac{1}{(F_z)^r} < \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{(F_{i+1})^r}.$$

2. Analisaremos primeiro o caso em que $r = 1$. Pelo item 1, temos

$$\frac{1}{F_{z+1}} < \frac{1}{F_{z+2}} + \frac{1}{F_{z+3}} \tag{14}$$

Além disso, sabemos que (faça $n = z$ em (11) na demonstração do Teorema 3.2)

$$\frac{1}{F_z} < \frac{2}{F_{z+1}}. \tag{15}$$

Então, adicionando $1/F_{z+1}$ aos membros da desiguadade (14), temos

$$\frac{2}{F_{z+1}} < \frac{1}{F_{z+1}} + \frac{1}{F_{z+2}} + \frac{1}{F_{z+3}}. \tag{16}$$

De (14) e (16), concluímos que

$$\frac{1}{F_z} < \frac{1}{F_{z+1}} + \frac{1}{F_{z+2}} + \frac{1}{F_{z+3}}.$$

Para provar a validdade para $0 < r < 1$, basta aplicar a Desigualdade de Jensen com $A = \{z + i : i = 1, 2, 3\}$.

3. Com o auxílio da Fórmula de Binet (Proposição 2.2), demonstraremos o item 3.

Seja

$$F_z = \frac{\varphi^z - \psi^z}{\sqrt{5}}, \quad \text{para } z \in \mathbb{N}.$$

Observe que

$$\frac{F_z}{F_{z+n}} = \frac{\varphi^z - \psi^z}{\varphi^{z+n} - \psi^{z+n}}.$$

Assim,

$$\frac{F_z}{F_{z+2}} + \frac{F_z}{F_{z+3}} + \cdots + \frac{F_z}{F_{z+n}} = \frac{\varphi^z - \psi^z}{\varphi^{z+2} - \psi^{z+2}} + \frac{\varphi^z - \psi^z}{\varphi^{z+3} - \psi^{z+3}} + \cdots + \frac{\varphi^z - \psi^z}{\varphi^{z+n} - \psi^{z+n}}.$$

Pondo $\frac{\varphi^z}{\varphi^{z+i}}$, $i = 2, 3, \cdots, n$, em evidência em cada parcela da lado direito da igualdade, obtemos

$$\frac{\varphi^z}{\varphi^{z+2}} \cdot \frac{1 - (\frac{\psi}{\varphi})^z}{1 - (\frac{\psi}{\varphi})^{z+2}} + \frac{\varphi^z}{\varphi^{z+3}} \cdot \frac{1 - (\frac{\psi}{\varphi})^z}{1 - (\frac{\psi}{\varphi})^{z+3}} + \cdots + \frac{\varphi^z}{\varphi^{z+n}} \cdot \frac{1 - (\frac{\psi}{\varphi})^z}{1 - (\frac{\psi}{\varphi})^{z+n}} \tag{17}$$

Afirmação. $\varphi^{-1} = -\psi$.

De fato, veja que $\varphi^{-1} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$ e $-\psi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Um cálculo direto mostra que

$$\varphi^{-1} - (-\psi) = \frac{2}{1+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{4 - (\sqrt{5}-1)(1+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5}) \cdot 2} = 0 \Rightarrow \varphi^{-1} = -\psi.$$

Faça $\gamma = \frac{\psi}{\varphi} = \psi \cdot \varphi^{-1} = \psi \cdot (-\psi) = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$. Então $|\gamma| < 1$. Observe que, como z é ímpar, então $1 - \gamma^z = 1 + |\gamma|^z$. Substituindo esta última informação em (17), encontramos

$$\varphi^{-2} \cdot \frac{1 + |\gamma|^z}{1 + |\gamma|^{z+2}} + \varphi^{-3} \cdot \frac{1 - |\gamma|^z}{1 - |\gamma|^{z+3}} + \cdots + \varphi^{-n} \cdot \frac{1 \pm |\gamma|^z}{1 \pm |\gamma|^{z+n}} > \varphi^{-2} \cdot \frac{1 + |\gamma|^z}{1 + |\gamma|^{z+2}}.$$

Seja dado $\epsilon > 0$ pequeno. Considere (x_n) uma sequência crescente de valores menores do que $1 - 1/\varphi - \epsilon$ e que converge para este número. Multiplicado o lado direito da última desigualdade por

$$\frac{x_n}{1 - \frac{1}{\varphi} - \epsilon},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \alpha^{-2} \cdot \frac{1 + |\gamma|^z}{1 + |\gamma|^{z+2}} + \alpha^{-3} \cdot \frac{1 - |\gamma|^z}{1 - |\gamma|^{z+3}} + \cdots + \alpha^{-n} \cdot \frac{1 \pm |\gamma|^z}{1 \pm |\gamma|^{z+n}} &> \alpha^{-2} \cdot \frac{1 + |\gamma|^z}{1 + |\gamma|^{z+2}} \\ &> \frac{1 + |\gamma|^z}{1 + |\gamma|^{z+2}} \cdot \frac{x_n}{\varphi^2 \left(1 - \frac{1}{\varphi} - \epsilon\right)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Perceba que $\frac{1+|\gamma|^z}{1+|\gamma|^{z+2}} > 1$, pois $|\gamma| < 1$. Além disso, devido à escolha da sequência (x_n), temos que

$$\frac{x_n}{1 - \frac{1}{\varphi} - \epsilon} < 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

e $\lim x_n = 1 - 1/\varphi - \epsilon$. Notando, finalmente, que $\varphi^2(1 - 1/\varphi) = 1$, concluímos que, para n suficientemente grande (e para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno), o lado direito da última desigualdade em (18) é maior do que 1. Assim sendo, para n suficientemente grande, encontramos que

$$\frac{F_z}{F_{z+2}} + \frac{F_z}{F_{z+3}} + \cdots + \frac{F_z}{F_{z+n}} > 1.$$

A desigualdade desejada segue-se multiplicando esta última desigualdade por $1/F_z$.

O caso em que $0 < r < 1$ decorre deste que acabamos de estabelecer com o auxílio do Lema 3.1 aplicado ao conjunto $A = \{z + i : i = 2, 3, 4, \cdots, n(z)\}$.

4. Provaremos primeiro o caso em que $r = 1$.

   Para $z = 2$, precisamos mostrar que

$$\frac{1}{F_2} < \frac{1}{F_3} + \frac{1}{F_4} + \cdots + \frac{1}{F_7}.$$

   Um cálculo simples nos permite concluir que

$$\frac{1}{F_2} = 1 < \sum_{i=3}^{7} \frac{1}{F_i} \approx 1,3288.$$

   Trataremos, agora, o caso em que $z \geq 4$. Temos que $F_{n+2}F_{n-1} - F_nF_{n+1} = (-1)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n = z - 1$ e obervando que z é par, obtemos

$$F_{z-2}F_{z+1} - F_{z-1}F_z = -1.$$

   Daí, temos

$$\begin{aligned} F_{z-2}F_{z+1} = F_{z-1}F_z - 1 \quad &\Rightarrow \quad 2F_{z-2}F_{z+1} > F_{z-1}F_z \\ &\Rightarrow \quad F_{z+1}(F_z - F_{z-1}) > F_{z-1}F_z \\ &\Rightarrow \quad 2F_{z+1}F_z > 2F_{z+1}F_{z-1} + F_{z-1}F_z. \end{aligned}$$

   Note que o lado direito da última desigualdade é $2F_{z+1}F_{z-1} + F_{z-1}F_z = F_{z-1}(2F_{z+1} + F_z) = F_{z+1}F_{z+3}$. Daí, temos

$$2F_{z+1}F_z > F_{z-1}F_{z+3} \Rightarrow \frac{2F_{z+1}F_z}{F_{z-1}F_{z+3}} > 1.$$

   No item 1, mostramos que

$$\frac{1}{F_z} < \frac{1}{F_{z+1}} + \frac{1}{F_{z+2}},$$

com z ímpar. Substituindo z por $z+3$ nesta última desigualdade (recorde que z é par), encontramos

$$\frac{1}{F_{z+3}} < \frac{1}{F_{z+4}} + \frac{1}{F_{z+5}} < \frac{1}{F_{z+3}} + \frac{1}{F_{z+4}} + \frac{1}{F_{z+5}}.$$

Multiplicando as extremidades da última desigualdade por $2F_{z+1}/F_zF_{z-1}$, obtemos

$$1 < \frac{2F_{z+1}F_z}{F_{z-1}F_{z+3}} < \left(\frac{1}{F_{z+3}} + \frac{1}{F_{z+4}} + \frac{1}{F_{z+5}}\right) \cdot \frac{2F_{z+1}F_z}{F_{z-1}}.$$

Isso implica

$$\frac{F_{z+1}F_z}{F_{z-1}} \cdot \left(\frac{1}{F_{z+3}} + \frac{1}{F_{z+4}} + \frac{1}{F_{z+5}}\right) > 1.$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{F_{z-1}}{F_{z+1}F_z}$, chegamos a este resultado

$$\frac{1}{F_{z+3}} + \frac{1}{F_{z+4}} + \frac{1}{F_{z+5}} > \frac{F_{z-1}}{F_{z+1}F_z} = \frac{1}{F_z} - \frac{1}{F_{z+1}},$$

isto é,

$$\frac{1}{F_z} < \frac{1}{F_{z+1}} + \frac{1}{F_{z+3}} + \frac{1}{F_{z+4}} + \frac{1}{F_{z+5}}$$

e a prova está completa para $r = 1$.

Para o caso em que $0 < r < 1$, basta considerar o conjunto A do Lema 3.1 como sendo $A = \{z + i := 1, 3, 4, \cdots 7\}$ se $z = 2$ e $A = \{z + i : 1, 3, 4, 5\}$ para $z \geq 4$.

Isto conclui a demonstração.

□

3.4 Não unicidade da representação (6)

Nesta subseção, utilizando as desigualdades estabelecidas no Teorema 3.5, daremos uma demonstração do Teorema 3.3.

Demonstração do Teorema 3.3. Primeiramente, escolhemos uma sequência (z_j) de números naturais pares tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $z_{j+1} - z_j > \text{máx}\{9, n(z_j - 1)\}$, em que $n(z_j - 1)$ é uma sequência obtida como no item 3 do Teorema 3.5.

Com base na escolha da sequência (z_j), definimos $I = \mathbb{N} - \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$. O primeiro termo z_1 será escolhido (posteriormente) de maneira a ser suficientemente grande. Além disso, consideremos o conjunto $\{1/(F_i)^r : i \in I\}$ com uma sequência não-crescente a_n:

$$a_1 = \frac{1}{(F_1)^r},\ a_2 = \frac{1}{(F_2)^r}, \ldots,\ a_{z_1-1} = \frac{1}{(F_{z_1-1})^r},\ a_{z_1} = \frac{1}{(F_{z_1+1})^r},\ a_{z_1+1} = \frac{1}{(F_{z_1+2})^r}, \ldots.$$

O passo seguinte é mostrarmos que o Teorema 3.4 se aplica à sequência (a_n). Particularmente, precisamos mostrar que (a_n) satisfaz a condição (10).

Antes de mais, detereminamos, para cada $i \in I$, um índice único j único tal que $z_{j-1}+1 \leq i \leq z_j - 1$ ($z_0 = 0$).

Pelo Teorema Teorema 3.5 (1) e (2), se $z_j + 1 \leq i \leq z_j - 4$, então

$$\sum_{n\in I, n>i} \frac{1}{(F_n)^r} > \frac{1}{(F_{i+1})^r} + \frac{1}{(F_{i+2})^r} + \frac{1}{(F_{i+3})^r} > \frac{1}{(F_i)^r}.$$

Pelo Teorema Teorema 3.5 (1), se $i = z_j - 3$, então

$$\sum_{n\in I, n>i} \frac{1}{(F_n)^r} > \frac{1}{(F_{i+1})^r} + \frac{1}{(F_{i+2})^r} > \frac{1}{(F_i)^r}.$$

Pelo Teorema Teorema 3.5 (4), se $i = z_j - 2$, então

$$\sum_{n\in I, n>i} \frac{1}{(F_n)^r} > \frac{1}{(F_{i+1})^r} + \frac{1}{(F_{i+3})^r} + \cdots + \frac{1}{(F_{i+k})^r} > \frac{1}{(F_i)^r}.$$

Pelo Teorema Teorema 3.5 (3), se $i = z_j - 1$, então

$$\sum_{n\in I, n>i} \frac{1}{(F_n)^r} > \frac{1}{(F_{i+2})^r} + \frac{1}{(F_{i+3})^r} + \cdots + \frac{1}{(F_{i+n(i)})^r} > \frac{1}{(F_i)^r}.$$

Em suma, com o auxílio do do Teorema 3.5, vemos que, para cada $i \in I$,

$$\sum_{n\in I, n>i} \frac{1}{(F_n)^r} > \frac{1}{(F_i)^r},$$

de maneira que a a condição (10) do Teorema 3.4 é satisfeita. As condições (7) e (8) são trivialmente verificadas.

Seja dado $x \in (0, S_r)$. Observe que o $\lim_{z_1\to\infty} \sum_{n\geq z_1} \frac{1}{(F_n)^r} = 0$. Escolhendo z_1 suficientemente grande, teremos simultaneamente satisfeitas as seguintes desigualdades

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(F_{z_j})^r} < x \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(F_{z_j})^r} + x < S_r. \tag{19}$$

Agora, considere $\mathbb{M}$ um subconjunto de $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$. Definimos a sequência (δ_j) de 0's e 1'a da seguinte forma:

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{se } z_j \in \mathbb{M}, \\ 0, & \text{se } z_j \notin \mathbb{M}. \end{cases}$$

Denotamos por y o número

$$y = x - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j}{(F_{z_j})^r}.$$

Segue-se da definição de y e das condições em (19) que $0 < y < \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Das informações destacadas anteriormente, em virtude do Teorema 3.4, podemos inferir que, para cada número real ξ no intervalo $\left[0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right]$, existe uma representação da forma

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n,$$

em que $\varepsilon_n = 0$ ou 1. A partir da definição de y, podemos escrever

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j}{(F_{z_j})^r}.$$

Note que um inverso de uma potência de F_n contido na segunda soma não pode aparecer na primeira, o que implica que a representação de x depende da sequência (δ_j). Duas sequências distintas dão origem a duas representações distintas para x. Recorde que, na Proposição 2.3, já estabelecemos o fato de que os conjuntos $\mathscr{S}$, de todas as sequências formadas por 0's e 1's, e $\mathbb{R}$ têm a mesma cardinalidade. Segue-se que C_x e $\mathbb{R}$ também têm a mesma cardinalidade, para todo $x \in (0, S_r)$. □

Observação 3.1. *Em [7], o autor também trata o caso em que $r > 1$ e estabelece os seguintes resultados:*

1. *Se $1 < r < \log 2/\log\varphi$, então existe um natural par $m = m(r)$ tal que a sequência $(1/(F_n)^r)_{n=m(r)-1}^{\infty}$ preenche intervalo.*
2. *Se $r \geq \log 2/\log\varphi$, então não existe nenhum $m \in \mathbb{N}$ tal que $(1/(F_n)^r)_{n=m}^{\infty}$ preenche intervalo.*

A divisão nos casos $1 < r < \log 2/\log\varphi$ e $r \geq \log 2/\log\varphi$ deve-se à técnica empregada pelo autor para provar estes resultados.

4 Conclusão

O desenvolvimento deste trabalho propiciou uma ocasião para aprofundarmos nossa reflexão a respeito dos conceitos de número, representação e sistema de numeração.

No âmbito da Análise, faz sentido propor o problema de representar um número em termos de uma sequência (λ_n) de números reais fixada. Vimos que este problema sempre possui solução no intervalo $[0, S]$, desde que a sequência (λ_n) seja monótona não crescente, de termos positivos, somável e satisfaça a condição $\lambda_n \leq \sum_{k>n} \lambda_k$, em que $S = \sum \lambda_k$. Este é o conteúdo do Teorema de Kakeya, que se aplica particularmente à sequência $(1/(F_n)^r)$, em que F_n denota o n-ésimo número de Fibonacci e $r \in (0, 1]$ é um número real fixado. Todo número x no intervalo $[0, \sum 1/(F_n)^r]$ pode ser escrito como $x = \sum \varepsilon_n/(F_n)^r$, em que $\varepsilon_n = 0$ ou 1. Esta representação, contudo, não é única. De fato, o conjunto C_x das representações de cada $x \in [0, \sum 1/(F_n)^r]$ tem a mesma cardinalidade que a reta real.

A demonstração de todos estes fatos constituiu um rico itinerário pela Análise que esperamos poder retomar e adensar em estudos de pós-graduação.

REFERÊNCIAS

[1] BROWN Jr., J.L. *On Generalized Bases for Real Numbers*. The Fibonacci Quarterly Vol. 9 (1971), p. 477-496.

[2] DARÓCZY, Z.; JÁRAI, A.; KÁTAI, I. *Intervallffillende Folgen und volladditive Funktionen*. Acta Sci. Math. (Szeged) Vol. 50 (1986), p. 337-350.

[3] ______________. *On completely additive functions related to interval-filling sequences*. Arch. Math. Vol. 54 (1990), p. 173-179.

[4] EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tad. Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

[5] HALMOS, P. *Teoria ingênua dos conjuntos*. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2001.

[6] HENDEL, R.J. *Approaches to the Formula for the nth Fibonacci Number*.

[7] HERMANN, E. *Interval-Filling Sequences Involvong Reciproval Fibonacci Numbers*. The Fibonacci Quarterly No. 5, Vol. 41 (2003), p. 441-449.

[8] HIRZEBRUCH, F.; SCHARLAU, W. *Einführung in Die Funktionahnalysis*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1971.

[9] KAKEYA, S. *On the partial sums of an infinite series*. Science Reports Tôhoku Imp. Univ. (1), Vol. 3 (1914), 159-163.

[10] KOPP, P.E. *Analysis*. Oxford: Elsevier, 2004.

[11] LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 8 ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[12] MARTINEZ, F.E.B.; MOREIRA, C.G.T.A.; SALDANHA, N.C.; TENGAN, E. *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[13] MORENO, L.F. *An Invitation to Real Analysis*. MAA, 2015.

[14] RIBENBOIM, P. *Representations of Real Numbers by Means of Fibonacci Numbers*. L'Enseignement Mathematique Vol. 31 (1985), p. 249-259.

[15] ROQUE, T. *História da matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.