UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÀTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

RAMONA SOARES CAVALCANTE

UMA INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Campina Grande - PB
2018

RAMONA SOARES CAVALCANTE

UMA INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura e Aplicada.

Orientadora: Profª Ms. Joselma Soares dos Santos

Campina Grande - PB
2018

C376i Cavalcante, Ramona Soares.
Uma introdução aos Sistemas de amortização [manuscrito] / Ramona Soares Cavalcante. - 2018.
66 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Profa. Ma. Joselma Soares dos Santos , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Matemática financeira. 2. Juros. 3. Sistemas de amortização. I. Título

21. ed. CDD 658.403 3

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

RAMONA SOARES CAVALCANTE

UMA INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura e Aplicada.

Aprovada em: 14/12/2018.

BANCA EXAMINADORA

Joselma Soares dos Santos

Profª. Ms. Joselma Soares dos Santos (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maria Isabelle Silva Dias Yanes

Profª. Dra. Maria Isabelle Silva Dias Yanes
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Isabella Silva Duarte

Profª. Ms. Isabella Silva Duarte
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a Deus, por me conceder saúde, força e disposição para realizar esse trabalho.

Agradeço à minha família e meus amigos por todo carinho e força. Sou grata, especialmente à minha mãe Gilda de Lima Soares Cavalcante, que tanto lutou pela minha educação. Obrigada, Rumella Soares Cavalcante, minha irmã por me ouvir nos momentos difíceis.

Só tenho a agradecer aos meus amigos, Raniery Macedo, Rumella Soares e Tamires Alves. Obrigado pelos conselhos, pelos puxões de orelha. As risadas que só nós sabemos o motivo delas. Meu muito obrigada.

Agradeço a todos os professores, em especial a Profª Ms. Joselma Soares dos Santos, responsável pela orientação deste trabalho. Obrigada por ser tão paciente e atenciosa.

Agradeço as docentes Profª. Dra. Maria Isabelle Silva Dias Yanes e Profª. Ms. Isabella Silva Duarte, por fazerem parte da banca examinadora. Obrigada pela disponibilidade e atenção.

Agradeço também a todos envolvidos diretamente e indiretamente. Obrigada a todos e todas.

RESUMO

Utilizada desde a antiguidade a matemática financeira é uma ferramenta usada em qualquer movimentação de capital, baseada em uma prévia estipulação de taxas e aplicação de juros, sejam eles recebimentos ou pagamentos. Na matemática financeira, temos os juros simples que incidem apenas sobre o capital inicial e os juros compostos que incidem sobre o saldo acumulado ao final de cada período, onde na prática ocorre o que conhecemos como "juros sobre juros", que dão origem a dois regimes de capitalização. Neste trabalho, estudamos os principais conceitos utilizados nos Regimes de Capitalização Simples e Composto e os fluxos de caixa, em particular o modelo padrão, com o principal objetivo de estudar Sistemas de Amortizações, em especial o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema de Amortização Francês (SAF) ou Price, que são os mais utilizados no Brasil, principalmente no financiamento de imóveis e empréstimos bancários.

Palavras-Chave: Matemática Financeira. Juros. Sistemas de Amortização.

ABSTRACT

Used since antiquity, financial math is a tool used in any capital movement, based on a prior stipulation of rates and application of interest, being them receipts or payments. In financial math, we have simple interest rates which are levied only on initial capital and compound interest on the balance accumulated at the end of each period, where in practice what we know as "interest on interest", which gives rise to two capitalization schemes. In this work, we study the main concepts used in the Simple and Compound Capitalization Schemes and the cash flows, in particular the standard model, with the main purpose of studying Amortization Systems, especially the *Sistema de Amortização Constante* (SAC) and the *Sistema de Amortização Francês* (SAF) or Price, which are the most used in Brazil, mainly in real estate financing and bank loans.

Keywords: Financial Math. Interest. Amortization Systems.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A matemática financeira é utilizada desde a antiguidade. Os primeiros registros encontrados a respeito datam da era de apogeu do povo Sumério, datados por volta do ano 3000 a.C. Documentos históricos revelam que os mesmos desenvolveram um sistema de crédito baseado em dois produtos, o grão e a prata. O juro por sua vez existe desde os primeiros registros de civilização, que indiciam ao povo da antiga babilônia no ano de 2000 a.C. onde os juros eram pagos sob a forma de sementes e outros bens, por exemplo, havia o empréstimo de sementes, em que o pagamento das mesmas ganhava por fim um acréscimo do total da colheita. As práticas existentes originam-se destes antigos costumes de emprestar e devolver sementes ou outros produtos agrícolas.

Pouco restava do escambo, que nada mais era do que um sistema de troca comum entre produtos, que por si já não supria as necessidades do homem em apenas realizar as trocas. O que levou na mesma época a idealização de um sistema financista que permitiria a obtenção de uma vantagem ao dono do bem em questão.

Ao longo deste percurso tanto os empréstimos quanto as formas de pagamento se aperfeiçoaram, desenvolvendo os conceitos de juros, caracterizando-se como o acréscimo além do valor pago, o de montante, que configura o total aderido com o empréstimo e o valor dos juros acrescidos, e o de capital, que é exatamente o que se tem para emprestar.

Na matemática financeira, temos os juros simples e os juros compostos, que dão origem ao Regime de Capitalização Simples e Regime de Capitalização Composta, que por sua vez demonstram como os juros são formados e sucessivamente incorporados ao capital no decorrer do tempo. Os juros simples incidem apenas sobre o capital inicial, comportam-se como uma progressão aritmética, crescendo os juros de forma linear ao longo do tempo. Por sua vez, os juros compostos incorporam ao capital não somente os juros a cada período, mas também os juros sobre os juros acumulados até o momento anterior, ou seja, os juros incidem sempre sobre o saldo apurado no início de cada período considerado, comporta-se como uma progressão geométrica, crescendo os juros de forma exponencial.

Na prática os juros simples tem aplicações bastante limitadas, restringindo-se principalmente às operações a curto prazo. Além disso, muitas taxas praticadas no mercado estão referenciadas em juros simples, porém a formação dos montantes das operações processa-se com juros compostos. Como exemplo, temos a Caderneta de Poupança que paga tradicionalmente uma taxa de juros de 6% ao ano, creditando todo mês o rendimento proporcional de 0,5%. Neste caso a taxa é linear (juros simples), porém os rendimentos são capitalizados segundo o regime de capitalização composto, ocorrendo ao longo dos meses juros sobre juros. Desta forma, em praticamente todas as operações financeiras do nosso cotidiano, sejam pagamentos, empréstimos ou financiamentos faz-se o uso direta ou indiretamente dos juros compostos.

Em muitas operações financeiras outro conceito bastante utilizado é o de Fluxo de Caixa, que representa uma série de pagamentos ou recebimentos que se estima ocorrer em determinado intervalo de tempo. Sendo utilizados na prática, para representar uma série de desembolsos (ou recebimentos) oriundos de compras a prazo, de investimentos empresariais, de recebimento ou pagamento de aluguéis, entre outras. No geral o Fluxo de Caixa é muito usado em gestão empresarial para fins de controle de caixa.

Outro conceito muito utilizado é o de Sistema de Amortização que foi desenvolvido basicamente para operações de empréstimos ou financiamentos de longo prazo, envolvendo desembolsos periódicos do valor principal e encargos financeiros, ou seja, nada mais é que uma explanação em uma planilha de como uma dívida é paga a longo prazo, sendo utilizado por exemplo, em financiamento de imóveis e automóveis e em empréstimos bancários.

Neste trabalho estudamos alguns conceitos básicos de matemática financeira, assim como os Regimes de Capitalização Simples e Composto e os Fluxos de Caixa com o principal objetivo de estudar os Sistemas de Amortização, em particular o Sistema de Amortização Constante e o Sistema de Amortização Francês, que são os mais utilizados no Brasil, para financiamento de imóveis e automóveis, empréstimos bancários, entre outras. Para isto, dividimos este trabalho em três Capítulos. No primeiro Capítulo, inicialmente apresentamos os conceitos gerais utilizados na matemática financeira como capital, juros, taxas de juros, montante, e em seguida estudamos os regimes de capitalização simples e composto, bem como as principais fórmulas utilizadas nestes dois regimes. No segundo Capítulo, estudamos os fluxos de caixa, em especial o modelo-padrão onde se verifica uma sucessão de pagamentos/recebimentos que apresenta ao mesmo tempo as classificações: postecipadas, limitadas, constantes e periódicas, e as fórmulas para determinar o valor presente e valor futuro deste fluxo de caixa. Finalmente, no último capítulo, usamos os assuntos abordados nos capítulos anteriores para estudar os Sistemas de Amortização, em particular os o Sistema de

Amortização Constante, no qual o valor de todas as amortizações é constante, e o Sistema de Amortização Francês, no qual o valor de todas as prestações é constante, onde nota-se a importância de estudar este conteúdo a fim de ter um conhecimento básico de como funciona os mais conhecidos métodos de financiamento, quitações de dívidas ou empréstimos no Brasil.

2. REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES E REGIME DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTO

Neste Capítulo, apresentaremos inicialmente alguns dos principais conceitos utilizados em Matemática Financeira que são as definições de capital, juros, taxa de juros e montante, que se aplicam tanto em Juros Simples quanto em Juros Compostos, para assim estudarmos os Regimes de Capitalização Simples e Composto. Ambos serão de muita importância para o desenvolvimento dos próximos capítulos deste trabalho. Para isto, usamos as referências [1], [3] e [5].

2.1. CONCEITOS GERAIS

Definição 2.1.1: Capital (C) é o valor de um ativo representado por moedas ou direitos passíveis no início de uma expressão monetária.

Definição 2.1.2: Chamamos de juros (J) o valor de remuneração do capital acordado entre o credor e o tomador em uma determinada operação financeira.

Definição 2.1.3: Taxa de juros (i) é o coeficiente que determina o valor do juro, ou seja, a remuneração do fator capital utilizado durante um período de tempo. A mesma refere-se sempre a uma unidade de tempo (dias, mês, semestres, anos, etc.) e pode ser representada equivalentemente de duas maneiras: taxa percentual e taxa unitária, conforme veremos abaixo.

- Taxa percentual se refere aos "centos" do capital, isto é, o valor dos juros para cada centésima parte do capital.

Exemplo 2.1.1: Um capital de R\$ 2.000,00 aplicado a 25% ao ano rende de juros, ao final deste período:

$$Juro = \frac{R\$\ 2.000{,}00}{100} \times 25$$
$$\Rightarrow Juro = R\$\ 20{,}00 \times 25$$
$$\Rightarrow Juro = R\$\ 500{,}00.$$

Note que o capital de R\$ 2.000,00 tem vinte centos. Como cada um deles rende 25, a remuneração total da aplicação no período é, portanto, de R\$ 500,00.

- Taxa unitária é centrada na unidade de capital. Refletindo o rendimento de cada unidade de capital em certo período de tempo.

  No exemplo acima, a taxa percentual de 25% ao ano indica um rendimento de $0{,}25 \left(= \frac{25}{100}\right)$ por unidade de capital aplicada, isto é:

$$Juro = R\$\ 2.000{,}00 \times \frac{25}{100}$$
$$\Rightarrow Juro = R\$\ 2.000{,}00 \times 0{,}25$$
$$\Rightarrow Juro = R\$\ 500{,}00.$$

Essa transformação da taxa percentual em unitária simplesmente se processa pela divisão da notação em percentual por 100. Da mesma forma para a transformação da taxa unitária em percentual, basta multiplicar a taxa unitária por 100.

Exemplo 2.1.2: Tabela com algumas taxas na forma percentual e na forma unitária.

Tabela 1. Tabela de taxa percentual e taxa unitária.

Taxa Percentual	*Taxa Unitária*
1,2%	0,012
7%	0,07
15%	0,15
75%	0,75
150%	1,50
1030%	10,3

Fonte: O autor.

Nas fórmulas de matemática financeira os cálculos são efetuados utilizando-se a taxa unitária de juros. Mas será utilizado nos enunciados a taxa percentual.

Desta forma, podemos definir a taxa de juros como a razão entre os juros recebidos ao final de um período de tempo e o capital inicialmente emprestado, ou seja,

$$i = \frac{juros}{capital} = \frac{J}{C}.$$

Exemplo 2.1.3: Qual a taxa de juros cobrada num empréstimo de R\$ 2.000,00, resgatado por R\$ 3.500,00 ao final de um ano?

Resolução: Neste caso, são dados

Capital $(C) = \$\ 2.000,00$
$Juros\ (J) = 3.500,00 - 2.000,00 = 1.500,00$

Logo,

$$i = \frac{1.500,00}{2.000,00} = 0,75\ ou\ 75\%\ ao\ ano.$$

IMPORTANTE: Nas fórmulas de matemática financeira, tanto o prazo da operação como a taxa de juros devem necessariamente estar expressos na mesma unidade de tempo. Caso isto não aconteça, devemos transformar a unidade do prazo da operação na unidade da taxa de juros, ou vice-versa, conforme veremos mais adiante.

Definição 2.1.4: Montante é a soma do valor do Capital (C) e do valor do Juro (J) acordado na operação financeira e que é devido ao final da mesma, ou seja,

$$M = C + J.$$

Exemplo 2.1.4: Considere um empréstimo de $R\$\ 2.000,00$ pelo prazo de 1 ano, pagando-se a juros simples à razão de 5% ao ano. Determine o valor dos juros e do montante.

Resolução: Neste caso, são dados

Capital $(C) = \$\ 2.000,00$
$Taxa\ (i) = 5\%\ ao\ ano\ (= 0,05\ ao\ ano)$

Logo, o valor do juro é

$$J = 2.000,00 \times 0,05 = \$100,00,$$

e o valor do montante é, por definição,

$$M = 2.000,00 + 100,00 = \$2.100,00.$$

2.2. REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO

Os regimes (critérios) de capitalização mostram como os juros se formam e sucessivamente são incorporados ao capital no decorrer do tempo. Desse modo podem ser identificados dois regimes de capitalização dos juros: o simples (ou linear) e o composto (ou exponencial).

O regime de capitalização simples se comporta como uma progressão aritmética (PA), onde os juros crescem de forma linear no decorrer do tempo. Além disso, por definição, os juros incidem apenas sobre o capital inicial da operação (aplicação ou empréstimo), não registrando juros sobre o saldo dos juros acumulados.

Exemplo 2.2.1: Considere um empréstimo de $R\$\ 2.000{,}00$ pelo prazo de 5 anos, pagando-se a juros simples à razão de 5% ao ano, e têm-se os resultados na tabela a seguir:

Tabela 2. Tabela de juros simples.

Ano	*Saldo devedor do início de cada ano (\$)*	*Juros apurados para cada ano (\$)*	*Saldo devedor ao final de cada ano (\$)*	*Crescimento anual do saldo devedor (\$)*
Início do 1º ano	$-$	$-$	$2.000{,}00$	$-$
Fim do 1º ano	$2.000{,}00$	$0{,}05 \times 2.000{,}00 = 100{,}00$	$2.100{,}00$	$100{,}00$
Fim do 2º ano	$2.100{,}00$	$0{,}05 \times 2.000{,}00 = 100{,}00$	$2.200{,}00$	$100{,}00$
Fim do 3º ano	$2.200{,}00$	$0{,}05 \times 2.000{,}00 = 100{,}00$	$2.300{,}00$	$100{,}00$
Fim do 4º ano	$2.300{,}00$	$0{,}05 \times 2.000{,}00 = 100{,}00$	$2.400{,}00$	$100{,}00$
Fim do 5º ano	$2.400{,}00$	$0{,}05 \times 2.000{,}00 = 100{,}00$	$2.500{,}00$	$100{,}00$

Fonte: O autor.

Podemos observar na Tabela 2 que os juros incidem sobre o capital inicial de $R\$\ 2.000{,}00$, apresentando os mesmos valores ao final de cada ano, ou seja, $(0{,}05 \times 2.000{,}00 = 100{,}00)$. Onde o crescimento dos juros no tempo é linear crescendo $R\$\ 100{,}00$ por ano, se comportando exatamente como uma progressão aritmética (PA). Consequentemente, o saldo devedor ao final de cada ano também cresce linearmente e se comporta como uma progressão aritmética.

O regime de capitalização composto se comporta como uma progressão geométrica (PG), onde os juros crescem exponencialmente. Além disso, por definição, os juros sempre incidem sobre o saldo apurado no início do período correspondente (ou sobre o saldo apurado no final do período que antecede o período correspondente) e não unicamente sobre o capital inicial. Assim, os juros são capitalizados, produzindo juros sobre os juros periodicamente.

Admitiremos o exemplo anterior, que a dívida de $R\$\ 2.000{,}00$ deve ser paga a taxa de juros compostos de 5% ao ano, e têm-se os resultados na tabela a seguir:

Tabela 3. Tabela de juros compostos.

Ano	*Saldo do início de cada ano ($)*	*Juros apurados para cada ano ($)*	*Saldo devedor ao final de cada ano ($)*
Início do 1º ano	$-$	$-$	$2.000{,}00$
Fim do 1º ano	$2.000{,}00$	$0{,}05 \times 2.000{,}00 = 100{,}00$	$2.100{,}00$
Fim do 2º ano	$2.100{,}00$	$0{,}05 \times 2.100{,}00 = 105{,}00$	$2.205{,}00$
Fim do 3º ano	$2.205{,}00$	$0{,}05 \times 2.205{,}00 = 110{,}25$	$2.315{,}25$
Fim do 4º ano	$2.315{,}25$	$0{,}05 \times 2.315{,}25 = 115{,}76$	$2.431{,}01$
Fim do 5º ano	$2.431{,}01$	$0{,}05 \times 2.431{,}01 = 121{,}55$	$2.552{,}56$

Fonte: O autor.

Podemos observar na Tabela 3 que os juros não incidem unicamente sobre o capital inicial de $R\$\ 2.000{,}00$, mas sim sobre o saldo total acumulado no início de cada ano. O crescimento dos juros se dá em progressão geométrica, evoluindo de forma exponencial ao longo do tempo. Consequentemente, o mesmo também ocorre com o crescimento do saldo devedor ao final de cada ano.

Diante dos resultados obtidos podemos elaborar uma tabela comparativa dos regimes de capitalização comentados.

Tabela 4. Tabela comparativa dos regimes de capitalização.

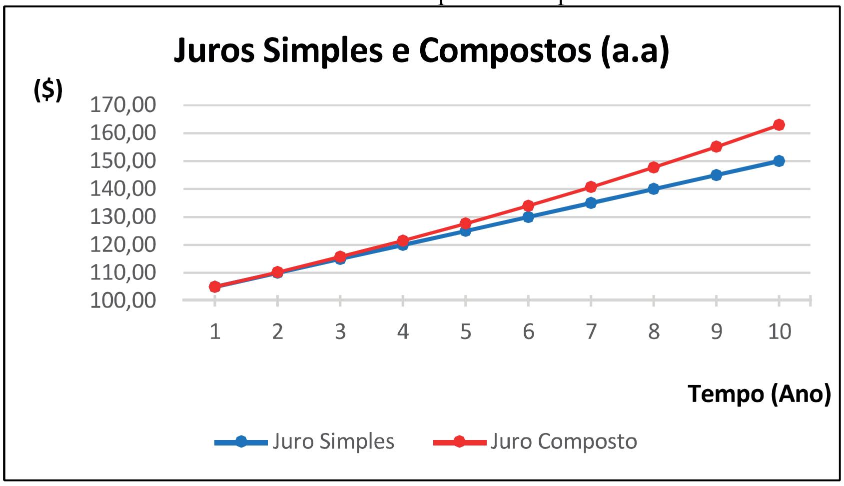
	Capitalização Simples		*Capitalização Composta*		*Diferença: Composta-Simples*	
	Juros anuais ($)	Saldo Devedor ($)	Juros anuais ($)	Saldo Devedor ($)	Juros anuais ($)	Saldo Devedor ($)
Início do 1º ano	$-$	2.000,00	$-$	2.000,00	$-$	$-$
Fim do 1º ano	100,00	2.100,00	100,00	2.100,00	0,0	0,0
Fim do 2º ano	100,00	2.200,00	105,00	2.205,00	5,00	5,00
Fim do 3º ano	100,00	2.300,00	110,25	2.315,25	10,25	15,25
Fim do 4º ano	100,00	2.400,00	115,76	2.431,01	15,76	31,01
Fim do 5º ano	100,00	2.500,00	121,55	2.552,56	21,55	52,56

Fonte: O autor.

Observa-se que no primeiro período do prazo os valores dos juros simples e compostos se igualam, e o saldo devedor também se torna igual em cada regime. Assim para operações que envolvem apenas um único período de capitalização de juros, é indiferente o uso do regime de capitalização simples ou composto, pois ambos produzem os mesmos resultados. Nota-se também que a diferença de valores entre os critérios se estabelece em operações com mais de um período de capitalização. Além disso, os juros simples crescem linearmente, configurando uma PA, enquanto que os juros compostos crescem exponencialmente, segundo o comportamento de uma PG.

Em resumo vejamos o comportamento descrito dos juros simples e compostos apresentado no gráfico abaixo.

Gráfico 1. Juros Simples e Compostos



Fonte: O autor.

Assim, há um crescimento linear no decorrer do tempo para os juros simples e um crescimento exponencial para os juros compostos.

IMPORTANTE: Ao utilizarmos as fórmulas de matemática financeira, a taxa de juros i deverá estar expressa na forma unitária e o período de tempo n e a taxa de juros i devem estar na mesma unidade de tempo.

2.3. FÓRMULAS UTILIZADAS NO REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

2.3.1. JUROS SIMPLES

Conforme vimos, no regime de capitalização simples, os juros incidem apenas sobre o capital inicial. Assim, por definição, o valor acumulado dos juros ao final de n períodos de tempo é obtido a partir da seguinte expressão:

$$J = C \times i \times n,$$

onde:

$\mathrm{J} = valor\ dos\ juros$;

$C = capital\ (em\ \$), capital\ inicial\ ou\ valor\ inicial$;

$i = taxa\ de\ juros\ (\ expressa\ em\ forma\ unitária)$;

$n = prazo\ da\ operação.$

Da expressão $J = C \times i \times n$, obtemos ainda por dedução algébrica as seguintes:

$$C = \frac{J}{i \times n}, \qquad i = \frac{J}{C \times n} \qquad e \qquad n = \frac{J}{C \times i}.$$

Exemplo 2.3.1: Um capital de R$ 50.000,00 é aplicado à taxa de juros simples de 1.5% ao mês durante um semestre. Pede-se o valor dos juros acumulados neste período.

Resolução: Dados,

$C = \$\ 50.000{,}00$

$i = 1.5\%$ ao mês $(= 0.015$ ao mês$)$

$n = 1$ semestre $= 6$ meses

$J = ?$

Temos,

$$J = C \times i \times n,$$

$$\Rightarrow J = 50.000{,}00 \times 0.015 \times 6$$

$$\Rightarrow J = \$\ 4.500{,}00.$$

Logo, os juros acumulados foram R\$ 4.500,00.

2.3.2. MONTANTE

Vimos que, por definição, o montante é a soma do Capital (*C*) e do Juro (*J*) acordado na operação financeira e que é devido ao final da mesma, ou seja, é dado pela igualdade

$$M = C + J,$$

denominada equação básica da Matemática Financeira.

No entanto, temos que:

$$J = C \times i \times n.$$

Substituindo essa expressão na fórmula do montante, e evidenciando *C,* temos:

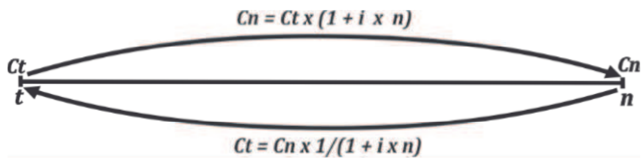
$$M = C + C \times i \times n$$

$$\Rightarrow M = C(1 + i \times n).$$

E, consequentemente,

$$C = \frac{M}{(1 + i \times n)}.$$

A expressão $(1 + i \times n)$ é definida como *fator de capitalização* (ou *de valor futuro*) dos juros simples. Multiplicando um capital por esse valor, determinamos o montante (valor em uma data futura). O inverso da expressão$(1 + i \times n)$, ou seja, $\frac{1}{(1+i \times n)}$ é denominado *fator de atualização* (ou *de valor presente*), onde, ao aplicar o fator sobre um valor expresso em uma data futura, obtém-se o seu equivalente numa data atual.



Exemplo 2.3.2: Aplica-se $R\$20.000,00$ à taxa de 2,5% ao mês durante 9 meses. Determinar o valor acumulado ao final deste período.

Resolução: Dados,

$C = \$\ 20.000,00$
$i = 2,5\%\ ao\ mês\ (= 0.025\ ao\ mês)$
$n = 9\ meses$
$M = ?$

Temos,

$$M = C(1 + i \times n)$$
$$\Rightarrow M = 20.000,00\ (1 + 0.025 \times 9)$$
$$\Rightarrow M = 20.000,00\ (1,225)$$
$$\Rightarrow M = \$\ 24.500,00.$$

Logo, o valor acumulado ao final deste período foi de $R\$\ 24.500,00$.

Exemplo 2.3.3: Uma dívida de $R\$\ 35.000,00$ vencerá em 6 meses. O credor está oferecendo um desconto de 5% ao mês caso o devedor deseje antecipar o pagamento para hoje. Calcular o valor que o devedor pagaria caso antecipasse a liquidação da dívida.

Resolução: Dados,

$M = \$\ 35.000,00$
$n = 6\ meses$
$i = 5\%\ ao\ mês\ (= 0.05\ ao\ mês)$
$C = ?$

Temos,

$$C = \frac{M}{(1 + i \times n)}$$

$$\Rightarrow C = \frac{35.000,00}{(1 + 0.05 \times 6)} = \frac{35.000,00}{(1,3)}$$

$$\Rightarrow C = \$\ 26.923,08.$$

Logo, o valor é de $R\$\ 26.923,08$.

2.3.3. TAXA PROPORCIONAL E TAXA EQUIVALENTE

Para se compreender mais claramente o significado destas taxas deve-se reconhecer que toda operação envolve dois prazos: (1) o prazo a que se refere à taxa de juros; e (2) o prazo de capitalização (ocorrência) dos juros.

Mas em inúmeras operações estes prazos não são coincidentes. O juro pode ser capitalizado em prazo inferior ao da taxa, devendo-se nesta situação ser definido como o prazo da taxa será rateado ao período de capitalização. Neste caso, ou transforma-se o prazo específico para o de capitalização ou, de maneira inversa, o período de capitalização passa a ser expresso na unidade de tempo da taxa de juros.

No regime de juros simples, esta transformação é processada pela denominada taxa proporcional de juros (também denominada taxa linear ou nominal) que é obtida da divisão entre a taxa de juros considerada na operação e o número de vezes em que ocorrerão os juros (quantidade de períodos de capitalização).

A aplicação das taxas proporcionais é muito difundida, principalmente em operações de curto e curtíssimo prazo, tais como: cálculo de juros de mora, descontos bancários, créditos de curtíssimo prazo, apuração de encargos sobre o saldo devedor de conta corrente bancária, etc.

As taxas de juros simples se dizem equivalentes quando, aplicados a um mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo juro.

IMPORTANTE: No regime de juros simples, taxas proporcionais e equivalentes são consideradas a mesma coisa.

Exemplo 2.3.4: Calcular:

a) as taxas mensal e anual proporcional a taxa de 13,8% ao semestre.

Resolução: Como temos uma taxa semestral e em um semestre temos 6 meses, a taxa mensal proporcional é:

$$\frac{13{,}8\%}{6} = 2{,}3\%\ ao\ mês.$$

E, como em um ano temos 2 semestres, a taxa anual proporcional é:

$$13{,}8\% \times 2 = 27{,}6\%\ ao\ ano.$$

b) as taxas trimestral e anual proporcional a taxa de 58,96 % ao biênio.

Resolução: Como temos uma taxa ao biênio (2 anos) e em um biênio temos 8 trimestres, a taxa trimestral proporcional é:

$$\frac{58{,}96\%}{8} = 7{,}37\%\ ao\ trimestre.$$

E, como em um biênio temos 2 anos, a taxa anual proporcional é:

$$\frac{58{,}96\%}{2} = 29{,}48\%\ ao\ ano.$$

2.4. FÓRMULAS UTILIZADAS NO REGIME DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTO

2.4.1. MONTANTE E JUROS

Conforme vimos, no regime capitalização composto, os juros sempre incidem sobre o saldo apurado no início do período correspondente (ou sobre o saldo apurado no final do período que antecede o período correspondente), crescendo os juros exponencialmente. Assim, por definição, o montante ou valor futuro (M), resultante de uma aplicação do capital ou valor presente (C) a uma taxa de juros compostos i (por período de capitalização) após n períodos de capitalização, é dado por:

$$M = C \times (1 + i)^n.$$

Mas, em juros compostos o valor presente (Capital) não se refere necessariamente a um valor expresso no momento (data focal) zero. O valor presente pode ser apurado em qualquer momento (data focal) anterior à do valor futuro (montante). Assim, para evitar confusão, iremos representar nas fórmulas de juros compostos o Capital ou valor presente por PV e o Montante ou valor futuro por FV. Desta forma, a fórmula obtida acima será reescrita do seguinte modo:

$$FV \ = \ PV \ \times \ (1 + i)^n.$$

De onde segue que,

$$PV = \frac{FV}{(1 + i)^n}.$$

A expressão $(1 + i)^n$ é definida como *fator de capitalização* (ou *de valor futuro*) do juro composto. Multiplicando um valor presente por esse fator, determinamos um valor futuro (valor em uma data futura). A expressão $\frac{1}{(1+i)^n}$ é denominada *fator de atualização* (ou *de valor presente*), onde, ao aplicar o fator sobre um valor expresso em uma data futura, obtém-se o seu equivalente numa data atual.

Por outro lado, como o montante é a soma do capital com os juros, sabe-se que o valor monetário dos juros (J) é obtido pela diferença entre o montante (FV) e o capital (PV), sendo obtido também pela seguinte expressão:

$$J = FV - PV.$$

Mas, $FV = PV(1+i)^n$, consequentemente:

$$J = PV(1+i)^n - PV,$$

colocando PV em evidência, concluímos que o valor juros (J) é dado pela expressão:

$$J = PV[(1+i)^n - 1].$$

Exemplo 2.4.1: Consideremos uma aplicação de $R\$\,20.000{,}00$ a uma taxa de juros compostos de 7% ao ano pelo prazo de 4 anos. Calcule o montante.

Resolução: Dados do problema

$PV = 20.000{,}00$
$i = 7\%\ ao\ ano\ (= 0{,}07\ ao\ ano)$
$n = 4\ anos$
$FV = ?$

Aplicando a fórmula de juros compostos,

$$FV = PV(1+i)^n,$$

temos:

$$FV = 20.000{,}00 \times (1 + 0{,}07)^4$$

$$\Rightarrow FV = 20.000{,}00 \times (1{,}07)^4$$

$$\Rightarrow FV = 20.000{,}00 \times 1{,}3107 = 26.215{,}92.$$

Portanto, o montante da aplicação é $R\$26.215{,}92$.

Exemplo 2.4.2: Uma determinada empresa dispõe de um tipo de seguro de vida resgatável ao final de determinado período, onde uma das modalidades consiste em efetuar um único pagamento no início, que será remunerado com base em uma taxa de juros compostos de 9% ao ano. Determine o tempo estimado para uma pessoa que efetua um pagamento de $R\$100.000{,}00$ e terá direito a resgate de $R\$\ 500.000{,}00$ ao final.

Resolução: Dados do problema,

$PV = 100.000{,}00$

$FV = 500.000{,}00$

$i = 9\%\ ao\ ano\ (= 0{,}09\ ao\ ano)$

$n = ?$

Usando a fórmula de juros compostos,

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n},$$

temos:

$$100.000{,}00 = \frac{500.000{,}00}{(1+0{,}09)^n}$$

$$\Rightarrow 500.000{,}00 = 100.000{,}00 \times (1+0{,}09)^n$$

$$\Rightarrow \frac{500.000{,}00}{100.000{,}00} = (1{,}09)^n$$

$$\Rightarrow 5 = (1{,}09)^n$$

$$\Rightarrow \ln 5 = ln(1{,}09)^n$$

$$\Rightarrow \ln 5 = n \times \ln(1{,}09)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 5}{\ln(1{,}09)} = n$$

$$\Rightarrow n \cong 18{,}7.$$

Portanto, o tempo estimado é de aproximadamente 18 anos e 7 meses.

2.4.2. TAXAS EQUIVALENTES

O conceito de taxa equivalente é o mesmo de juros simples, diferenciando-se, no entanto, à fórmula da taxa de juros.

Neste caso, se a taxa de juros relativamente a um período de tempo é igual a i, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I, tal que

$$1 + I = (1+i)^n\ ou\ I = (1+i)^n - 1\ ou\ i = \sqrt[n]{1+I} - 1.$$

Observe que nesta fórmula, temos que i refere-se a "taxa do prazo menor" e I refere-se a "taxa do prazo maior".

Exemplo 2.4.3: Determine:

a) A taxa anual equivalente a taxa de 2,5% ao mês.

Resolução: Neste caso temos $i = 2{,}5\%\ ao\ mês\ (= 0{,}025)$ e como queremos encontrar a taxa anual $I,\ n = 12$ (1 ano = 12 meses). Logo a taxa equivalente anual é

$$I = (1 + 0{,}025)^{12} - 1 \approx 0{,}3449 = 34{,}49\%\ ao\ ano.$$

b) A taxa bimestral equivalente a taxa de 85,6% ao ano.

Resolução: Neste caso temos $I = 90{,}25\%\ ao\ ano(= 0{,}9025)$ e como queremos encontrar a taxa bimestral $i,\ n = 6$(1 ano = 6 bimestres). Logo a taxa equivalente bimestral é

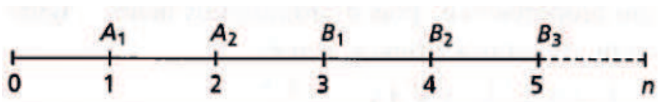
$$i = \sqrt[6]{1 + 0{,}9025} - 1 \approx 0{,}1132 = 11{,}32\%\ ao\ bimestre.$$

2.5. EQUIVALÊNCIA FINANCEIRA EM JUROS COMPOSTOS

A equivalência financeira constitui-se no raciocínio básico da matemática financeira. Conceitualmente dois ou mais capitais representativos de uma certa data dizem-se equivalentes quando, a uma certa taxa de juros, produzem resultados iguais numa data comum.

Os capitais A_1, A_2 e B_1, B_2, B_3, dizem-se equivalentes se, quando expostos em valores de uma mesma data comum (chamada de data focal), e a mesma taxa de juros, apresentam resultados iguais.

Graficamente, temos:



Usando a fórmula de juros compostos, como os capitais A_1, A_2 e B_1, B_2, B_3 são equivalentes, pela definição dada acima:

Sendo a data focal 0 (zero), tem-se:

$$\frac{A_1}{(1+i)^1}+\frac{A_2}{(1+i)^2}=\frac{B_1}{(1+i)^3}+\frac{B_2}{(1+i)^4}+\frac{B_3}{(1+i)^5}.$$

Sendo a data focal o momento 6, obtemos:

$$A_1(1+i)^5+A_2(1+i)^4=B_1(1+i)^3+B_2(1+i)^2+B_3(1+i)^1.$$

IMPORTANTE: No regime de Capitalização Composta, pode ser escolhida qualquer data focal, que os resultados encontrados serão equivalentes.

Exemplo 2.5.1: Uma venda imobiliária envolve o pagamento de 12 prestações mensais iguais a $R\$\ 10.000{,}00$, a primeira no ato da venda, acrescidas de uma parcela final de $R\$\ 100.000{,}00$, 12 meses após a venda. Suponha que o valor do dinheiro seja de 2% ao mês.

a) Se o comprador preferir efetuar o pagamento da parcela final junto com a última prestação, de quando deverá ser o pagamento dessa parcela?
b) Se o comprador preferir efetuar o pagamento à vista, qual deverá ser o valor desse pagamento único?

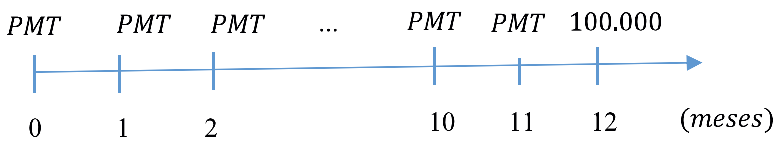
Resolução: Dados do problema,

$PMT = 10.000{,}00$ (parcelas fixas mensais)

$i = 2\%\ ao\ mês (= 0{,}02\ ao\ mês)$

$n = 12$ meses

Temos o seguinte fluxo de pagamentos:



a) Queremos saber quanto deverá ser o pagamento da parcela, se a mesma for paga junto com a última prestação, isto é, no mês 11.

Considerando a data focal 11, temos que o valor da parcela final é:

$$PV=\frac{100.000{,}00}{(1+0{,}02)^1}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{100.000,00}{(1,02)^1}$$

$$\Rightarrow PV = 98.039,22.$$

Logo, se o comprador preferir pagar a parcela final junto com a última prestação ele pagará pela parcela $R\$$ 98.039,22.

b) Queremos saber o valor do pagamento (de todas as prestações e da parcela final) caso o comprador efetue o pagamento à vista.

Considerando a data focal 0 (zero), temos:

$$PV = 10.000 + \frac{10.000,00}{(1,02)^1} + \frac{10.000,00}{(1,02)^2} + \frac{10.000,00}{(1,02)^3} + \frac{10.000,00}{(1,02)^4} + \frac{10.000,00}{(1,02)^5} + \frac{10.000,00}{(1,02)^6} + \frac{10.000,00}{(1,02)^7} + \frac{10.000,00}{(1,02)^8} + \frac{10.000,00}{(1,02)^9} + \frac{10.000,00}{(1,02)^{10}} + \frac{10.000,00}{(1,02)^{11}} + \frac{100.000,00}{(1,02)^{12}}$$

$$\Rightarrow PV = 10.000,00 + 9.803,92 + 9.611,69 + 9.423,22 + 9.238,45 + 9.057,31 + 8.879,71 + 8.705,60 + 8.537491 + 8.367,55 + 8.203,48 + 8.042,63 + 78.849,32,$$

$$\Rightarrow PV = 186,717,81.$$

Logo, se o comprador preferir efetuar o pagamento à vista, ele pagará $R\$$ 186.717,81.

Exemplo 2.5.2: Um comerciante contraiu um empréstimo de $R\$$ 8.000,00 a juros semestrais de 10%. O pagamento foi realizado em duas parcelas, uma de $R\$$ 5.808,00 após um ano da contratação do empréstimo e a outra seis meses após a primeira.

a) Calcule o valor da 2ª parcela do empréstimo.
b) Caso o comerciante optasse por quitar a dívida em três parcelas semestrais fixas, a primeira a partir do primeiro semestre após a contratação do empréstimo, qual seria o valor das parcelas?

Resolução: Dados do problema,

$PV = R\$\ 8.000,00$

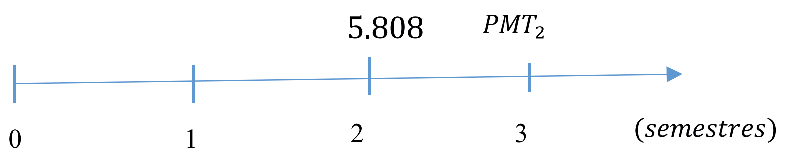
$i = 10\%\ ao\ semestre\ (= 0{,}1\ ao\ semestre)$

$PMT_1 = R\$\ 5.808{,}00$

$PMT_2 = ?$

$n = 3$ semestres

a) Temos o seguinte fluxo de pagamentos:



Queremos encontrar o valor da 2ª parcela (PMT_2). Considerando a data focal 0 zero, por equivalência de Capitais, temos:

$$8.000{,}00 = \frac{5.808{,}00}{(1+0{,}1)^2} + \frac{PMT_2}{(1+0{,}1)^3}$$

$$\Rightarrow 8.000{,}00 = \frac{5.808{,}00}{1{,}1^2} + \frac{PMT_2}{1{,}1^3}$$

$$\Rightarrow 8.000{,}00 = \frac{5.808{,}00}{1{,}21} + \frac{PMT_2}{1{,}331}$$

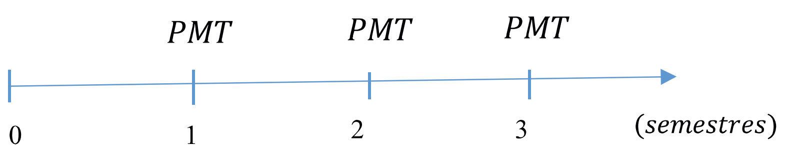
$$\Rightarrow 8.000{,}00 = 4.800{,}00 + 0{,}7513 PMT_2$$

$$\Rightarrow 0{,}7513 PMT_2 = 3.200{,}00$$

$$\Rightarrow PMT_2 = R\$\ 4.259{,}28.$$

Logo, o valor da segunda parcela do empréstimo é de $R\$\ 4.259{,}28$.

b) Temos o seguinte fluxo de pagamentos:



Queremos encontrar o valor da parcela PMT. Considerando a data focal 0 (zero),temos:

$$8.000,00 = \frac{PMT}{(1+0,1)^1} + \frac{PMT}{(1+0,1)^2} + \frac{PMT}{(1+0,1)^3}$$

$$\Rightarrow 8.000,00 = \frac{PMT}{1,1} + \frac{PMT}{1,1^2} + \frac{PMT}{1,1^3}$$

$$\Rightarrow 8.000,00 = 0,9091PMT + 0,8264PMT + 0,7513PMT$$

$$\Rightarrow 8.000,00 = 2,4868PMT$$

$$\Rightarrow PMT = R\$\ 3.216,99.$$

Logo o valor das parcelas fixas, seria de $R\$$ 3.216,99.

Exemplo 2.5.3: Uma imobiliária vende um pequeno apartamento usado por $R\$\ 150.000,00$ à vista. Como alternativas a seus clientes, oferece dois planos de financiamento:

Plano A: entrada de $R\$\ 50.000,00$ mais 4 prestações trimestrais de $R\$\ 31.600,00$.

Plano B: entrada de $R\$\ 30.000,00$ mais 8 parcelas de $R\$\ 23.000,00$.

O Sr. João de Souza, capitalista que aplica seu dinheiro a 10% ao trimestre, deseja comprar este apartamento. Qual é a sua melhor opção de compra?

Resolução: Dados do Plano A,

$R\$\ 50.000,00\ de\ entrada$

$n = 4\ trimestres$

$PMT = R\$\ 31.600,00$

$PV = ?$

$i = 10\%\ ao\ trimestre\ (= 0,1\ ao\ trimestre)$

Considerando a data focal 0 zero, no Plano A, temos:

$$PV = 50.000,00 + \frac{31.600,00}{(1+0,1)^1} + \frac{31.600,00}{(1+0,1)^2} + \frac{31.600,00}{(1+0,1)^3} + \frac{31.600,00}{(1+0,1)^4}$$

$$\Rightarrow PV = 50.000,00 + \frac{31.600,00}{1,1^1} + \frac{31.600,00}{1,1^2} + \frac{31.600,00}{1,1^3} + \frac{31.600,00}{1,1^4}$$

$$\Rightarrow PV = 50.000,00 + \frac{31.600,00}{1,1} + \frac{31.600,00}{1,21} + \frac{31.600,00}{1,331} + \frac{31.600,00}{1,4641}$$

$$\Rightarrow PV = 50.000{,}00 + 28.727{,}27 + 26115{,}70 + 23741{,}55 + 21583{,}22$$

$$\Rightarrow PV = R\$\ 150.167{,}74.$$

Dados do Plano B:

$R\$\ 30.000{,}00\ de\ entrada$

$n = 8\ trimestre$

$PMT = R\$\ 23.000{,}00$

$PV = ?$

$i = 10\%\ ou\ 0{,}1\ ao\ trimestre$

Considerando a data focal 0 zero, no Plano B, temos:

$$PV = 30.000{,}00 + \frac{23.000{,}00}{1{,}1} + \frac{23.000{,}00}{1{,}1^2} + \frac{23.000{,}00}{1{,}1^3} + \frac{23.000{,}00}{1{,}1^4} + \frac{23.000{,}00}{1{,}1^5} + \frac{23.000{,}00}{1{,}1^6} + \frac{23.000{,}00}{1{,}1^7} + \frac{23.000{,}00}{1{,}1^8}$$

$$\Rightarrow PV = 30.000{,}00 + \frac{23.000{,}00}{1{,}1} + \frac{23.000{,}00}{1{,}21} + \frac{23.000{,}00}{1{,}331} + \frac{23.000{,}00}{1{,}4641} + \frac{23.000{,}00}{1{,}6105} + \frac{23.000{,}00}{1{,}771561} + \frac{23.000{,}00}{1{,}9487171} + \frac{23.000{,}00}{2{,}14358881}$$

$$\Rightarrow PV = 30.000{,}00 + 20.909{,}09 + 19.008{,}26 + 17.280{,}24 + 15.709{,}30 + 14.281{,}19 + 12.982{,}90 + 11.802{,}64 + 10.729{,}67$$

$$\Rightarrow PV = R\$\ 152.703{,}29.$$

Logo, comparando os valores obtidos nos dois planos na mesma data focal, o plano A seria uma boa opção, porém a melhor opção de compra é à vista no valor de $R\$\ 150.000{,}00$.

Observa-se nos exemplos 2.5.1, 2.5.2 e 2.5.3 que para resolvê-los são necessários vários cálculos, já que temos que calcular o valor presente (ou valor futuro) de cada uma das prestações e depois somar, ou seja, quanto mais prestações mais contas temos para fazer. Conforme veremos no próximo capítulo, estas prestações representam um tipo particular de fluxo de caixa, que é o fluxo de caixa uniforme ou modelo-padrão, e para saber a soma de todas as prestações basta aplicar diretamente uma fórmula, o que irá facilitar e muito os nossos cálculos.

3. FLUXO DE CAIXA

Neste Capítulo iremos estudar os Fluxos de Caixa, em particular o modelo-padrão. É bastante comum, na prática, defrontar-se com operações financeiras que se representam por um fluxo de caixa. Por exemplo, empréstimos e financiamentos de diferentes tipos costumam envolver uma sequência de desembolsos periódicos de caixa. Temos também os fluxos de pagamentos/recebimentos de aluguéis, de prestações oriundas de compras a prazo, etc. Todos estes desembolsos, sejam eles pagamentos ou recebimentos, representam um Fluxo de Caixa, daí a importância de estudá-los. Para isto, usamos a referência [1].

3.1. DEFINIÇÃO

Definição 3.1.1: Um fluxo de caixa representa uma série de pagamentos ou recebimentos que se estima ocorrer em determinado intervalo de tempo.

Os fluxos de caixa podem ser verificados das mais variadas formas e tipos:

i) Quanto ao *período de ocorrência,* podem ser:

- ✓ Postecipados (ou vencidos) - se os termos (pagamentos ou recebimentos) são exigíveis (pagos ou recebidos) no fim dos períodos, ou seja, o primeiro pagamento ou recebimento ocorre no final do primeiro período.

- ✓ Antecipados - se os termos são exigíveis no início dos períodos, ou seja, o primeiro pagamento ou recebimento ocorre da data focal 0 (zero).

- ✓ Diferidos – se os termos são exigíveis pelo menos ao final do segundo período, ou seja, ocorre o que conhecemos como "carência".

ii) Quanto a *Periodicidade,* podem ser:

- ✓ Periódicos - se todos os períodos são iguais entre si.

- ✓ Não-Periódicos - se os períodos não são iguais entre si.

iii) Quanto a *Duração,* podem ser:

- ✓ Limitados (temporários) - se a duração for limitada.
- ✓ Indefinidos (indeterminados ou perpétuos) - se a duração for ilimitada;

iv) Quanto aos *Valores,* podem ser:

- ✓ Constantes - se todos os termos são iguais.
- ✓ Variáveis - se os termos não são iguais entre si.

No Fluxo de caixa os pagamentos ou recebimentos podem ser chamados de prestação, representada por PMT, que vem do inglês "Payment" (que significa pagamento ou recebimento).

3.2. MODELO-PADRÃO

Como vimos, os fluxos de caixa podem ser representados das mais diferentes formas e tipos, onde cada um deles é tratado especificamente em termos de formulação. São identificados com base na seguinte classificação:

1. $\text{Período de Ocorrência} \begin{cases} \text{Postecipados} \\ \text{Antecipados} \\ \text{Diferidos} \end{cases}$
2. $\text{Periodicidade} \begin{cases} \text{Periódicos} \\ \text{Não Periódicos} \end{cases}$
3. $\text{Duração} \begin{cases} \text{Limitados (Finitos)} \\ \text{Indeterminados} \end{cases}$
4. $\text{Valores} \begin{cases} \text{Constantes} \\ \text{Variáveis} \end{cases}$

O modelo-padrão de um fluxo de caixa é verificado quando os termos de uma sucessão de pagamentos ou recebimentos apresentam, ao mesmo tempo, as seguintes classificações:

- **Postecipados**: indica que o fluxo de pagamento ou recebimento começa a ocorrer ao final do primeiro intervalo de tempo;
- **Limitados**: o prazo total do fluxo de caixa é conhecido a priori, sendo finito o número de termos (pagamentos ou recebimentos);
- **Constantes**: indica que os valores dos termos que compõem o fluxo de caixa são iguais entre si;
- **Periódicos**: é quando os intervalos de tempo entre os termos do fluxo são idênticos entre si. Ou seja, o tempo entre um fluxo e outro é constante.

Graficamente o fluxo de caixa uniforme (padrão) é representado da seguinte forma:

A estrutura desse fluxo de caixa obedece à classificação-padrão apresentada acima:

- Postecipado: o primeiro pagamento ou recebimento (PMT) ocorre em $n = 1$;
- Periódico: a diferença entre a data de um termo e outro é constante (neste caso a diferença é 1);
- Limitado ou Finito: o prazo do fluxo é fixo, apresentando n períodos;
- Constante: os valores de pagamento ou recebimento (PMT) são uniformes, isto é, são todos iguais.

3.3. VALOR PRESENTE E FATOR DE VALOR PRESENTE

O valor presente de um fluxo de caixa uniforme, para uma taxa periódica de juros, é determinado pelo somatório dos valores presentes de cada um de seus valores. Assim, considerando o fluxo de caixa uniforme que acabamos de ver, e a data focal 0 (Zero), o valor presente deste fluxo é:

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}} + \frac{PMT}{(1+i)^n}.$$

Colocando PMT em evidência, temos:

$$PV = PMT \times \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

ou melhor:

$$PV = PMT \times [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \cdots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{-n}]$$

Observe que a expressão $[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \cdots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{-n}]$ é a soma dos termos de uma progressão geométrica (PG) de n termos, onde o primeiro termo (a_1) e a razão (q) são iguais a $(1+i)^{-1}$, e o n-ésimo termo (a_n) igual a $(1+i)^{-n}$.

Agora, como a fórmula de cálculo da soma de uma progressão geométrica (PG) é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Substituindo os termos da expressão de fator de valor presente na formula da soma de uma (PG), obtemos:

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^{-1} \times [1 - ((1+i)^{-1})^n]}{1-(1+i)^{-1}}\right]$$

$$\Rightarrow PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-1}(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}\right].$$

Seguindo-se a sequência de dedução adotada por Mathias e Gomes[1] multiplica-se o numerador e o denominador por $(1+i)$, obtemos:

$$PV = PMT \times \left[\frac{[(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1}] \times (1+i)}{[1-(1+i)^{-1}] \times (1+i)}\right]$$

$$\Rightarrow PV = PMT \times \left[\frac{((1+i)^{-1} \times (1+i)) - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1} \times (1+i)}{(1+i) - (1+i)^{-1} \times (1+i)}\right]$$

$$\Rightarrow PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^{-1+1} - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1+1}}{(1+i) - (1+i)^{-1+1}}\right]$$

$$\Rightarrow PV = PMT \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)-1}\right]$$

[1] MATHIAS, N. Franco; GOMES, J. Maria. *Matemática financeira*. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1998.p.242;

$$\Rightarrow PV = PMT \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{1+i-1}\right]$$

$$\Rightarrow PV = PMT \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right].$$

Nesta fórmula, a expressão:

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

é denominada *Fator de Valor Presente*, e é denotada por $FPV(i,n)$. Assim,

$$FPV(i,n) = \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i},$$

$$\Rightarrow FPV(i,n) = \frac{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}}{i}$$

$$\Rightarrow FPV(i,n) = \frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n} \times \frac{1}{i}$$

$$\Rightarrow FPV(i,n) = \frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n \times i}.$$

Logo, a fórmula de valor presente de um fluxo de caixa uniforme é apresentada da seguinte forma:

$$PV = PMT \times FPV(i,n), PV = PMT \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \text{ } ou \text{ } PV = PMT \times \frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n \times i}.$$

Exemplo 3.3.1: Determinado bem é vendido em 36 pagamentos mensais, iguais e consecutivos de $R\$ \, 1.650{,}00$. Para uma taxa de juros de 2,9% ao mês, até que preço compensa adquiri-lo à vista?

Resolução: Dados do problema

$PMT = \$ \, 1.650{,}00$

$i = 2{,}9\% \text{ } ao \text{ } mês \text{ } ou \text{ } 0{,}029 \text{ } ao \text{ } mês$

$n = 36 \text{ } meses$

$PV = ?$

Neste caso, temos um fluxo de caixa uniforme, daí, aplicando a fórmula de valor presente,

$$PV = PMT \times FPV(i,n) = PMT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

obtemos:

$$PV = 1.650 \times \frac{1-(1+0{,}029)^{-36}}{0{,}029}$$

$$\Rightarrow PV = \ 1.650 \times \frac{1-(1{,}029)^{-36}}{0{,}029}$$

$$\Rightarrow PV = 1.650 \times \frac{1-0{,}357311}{0{,}029}$$

$$\Rightarrow PV = 1.650 \times \frac{0{,}642689}{0{,}029}$$

$$\Rightarrow PV = 1.650 \times 22{,}161689 = \$\ 36.566{,}78.$$

Logo, compensa adquirir o produto à vista por até de $R\$\ 36.566{,}78$.

Exemplo 3.3.2: Determinar o valor presente de um fluxo de 10 pagamentos mensais, iguais e sucessivos de $R\$\ 900{,}00$ sendo a taxa de juros igual a 1,5% ao mês.

Resolução: Dados do problema

$PMT = \$\ 900{,}00$
$i = 1{,}5\%\ ou\ 0{,}015\ ao\ mês$
$n = 10\ meses$
$PV = ?$

Neste caso, temos um fluxo de caixa uniforme, daí, aplicando a fórmula de valor presente,

$$PV = PMT \times FPV(i,n) = PMT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

temos:

$$PV = 900 \times \frac{1-(1+0{,}015)^{-10}}{0{,}015}$$

$$\Rightarrow PV = 900 \times \frac{1-(1{,}015)^{-10}}{0{,}015}$$

$$\Rightarrow PV = 900 \times \frac{1-0{,}861667}{0{,}015}$$

$$\Rightarrow PV = 900 \times \frac{0{,}138333}{0{,}015}$$

$$\Rightarrow PV = 900 \times 9{,}2222 = \$\ 8.299{,}98.$$

Logo, o valor presente é $R\$$ 8.299,98.

Exemplo 3.3.3: Uma pessoa deve atualmente 18 prestações mensais de $R\$\ 2.200{,}00$ cada uma. Com o intuito de adequar esses desembolsos mensais com suas disponibilidades de caixa, está propondo ao credor a transformação deste fluxo numa série de 8 pagamentos trimestrais, iguais e sucessivos. Para uma taxa de juros de 2,4% a.m. determinar o valor de cada prestação trimestral que está sendo proposta.

Resolução: Inicialmente, note que as duas formas de pagamento são para liquidar a mesma dívida. Neste caso, basta escolher uma data focal e usar a definição de equivalência financeira.

Na primeira forma de pagamento da dívida temos:

$PMT = \$\ 2.200{,}00$
$i = 2{,}4\%\ ao\ mês\ ou\ 0{,}024\ ao\ mês$
$n = 18\ meses$

Como temos um fluxo de caixa uniforme, o valor presente (valor na data focal 0) é:

$$PV = PMT \times FPV(i,n) = PMT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

isto é,

$$PV = 2.200 \times \frac{1-(1+0{,}024)^{-18}}{0{,}024} = 31.851{,}37.$$

Na segunda forma de pagamento da dívida temos:

$PMT = ?$
$i = 2{,}4\%\ ao\ mês\ ou\ 0{,}024\ ao\ mês$

$n = 8\ trimestres$

Como temos um fluxo de caixa uniforme, o valor presente (valor na data focal 0) é:

$$PV = PMT \times FPV(i, n) = PMT \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}.$$

Mas, como a taxa e o prazo estão em unidades de tempo diferentes, iremos encontrar a taxa equivalente trimestral, que é

$$(1 + i)^n - 1 = (1 + 0{,}024)^3 - 1 = 0{,}0737 = 7{,}37\%\ ao\ trimestre.$$

Daí,

$$PV = PMT \times \frac{1 - (1 + 0{,}0737)^{-8}}{0{,}0737}.$$

Consequentemente, pela equivalência de capitais temos

$$2.200 \times \frac{1 - (1 + 0{,}024)^{-18}}{0{,}024} = PMT \times \frac{1 - (1 + 0{,}0737)^{-8}}{0{,}0737}$$

$$\Rightarrow 2.200 \times \frac{1 - 0{,}65253}{0{,}024} = PMT \times \frac{1 - 0{,}56615}{0{,}0737}$$

$$\Rightarrow 2.200 \times 14{,}4779 = PMT \times 5{,}8867$$

$$\Rightarrow 31.851{,}38 = 5{,}8867 \times PMT$$

$$\Rightarrow PMT = 5.410{,}75.$$

Logo, o valor de cada prestação trimestral é de $R\$\ 5.410{,}75$.

3.4. VALOR FUTURO E FATOR DE VALOR FUTURO

O valor futuro de um fluxo de caixa uniforme, para uma taxa periódica de juros, é determinado pelo somatório dos valores futuros (montantes) de cada um de seus valores. Assim, considerando o fluxo de caixa uniforme visto anteriormente, e a data focal n (número de períodos), o valor futuro deste fluxo é:

$$FV = PMT \times (1 + i)^{n-1} + PMT \times (1 + i)^{n-2} + \cdots + PMT \times (1 + i)^2 +$$

$$+ PMT \times (1 + i) + PMT$$

Colocando PMT em evidência, temos:

$$FV = PMT \times [1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \cdots + (1 + i)^{n-1}],$$

onde a expressão $[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \cdots + (1 + i)^{n-1}]$, representa a soma dos termos de uma progressão geométrica (PG) de n termos, onde o primeiro termo é $a_1 = 1$, a razão é $q = (1 + i)$ e o n-ésimo termo é $a_n = (1 + i)^{n-1}$.

Sabendo que a fórmula de cálculo de soma dos valores de uma (PG) é: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, podemos então substituir os respectivos valores encontrados na expressão de valor futuro, onde teremos o seguinte:

$$FV = PMT \times \left[\frac{1 \times [1 - (1 + i)^n]}{1 - (1 + i)}\right].$$

Usando o mesmo método desenvolvido no cálculo na obtenção do valor presente, multiplicaremos o numerador e o denominador por $(1 + i)^{-1}$:

$$FV = PMT \times \left[\frac{[1 - (1 + i)^n] \times (1 + i)^{-1}}{[1 - (1 + i)] \times (1 + i)^{-1}}\right]$$

$$\Rightarrow FV = PMT \times \left[\frac{(1 + i)^{-1} - (1 + i)^n \times (1 + i)^{-1}}{(1 + i)^{-1} - (1 + i) \times (1 + i)^{-1}}\right]$$

$$\Rightarrow FV = PMT \times \left[\frac{(1 + i)^{-1} - (1 + i)^{n-1} \times (1 + i) \times (1 + i)^{-1}}{(1 + i)^{-1} - (1 + i)^{-1+1}}\right]$$

$$\Rightarrow FV = PMT \times \left[\frac{\frac{1}{(1 + i)} - \frac{(1 + i)^n}{(1 + i)} \times (1 + i)^{-1+1}}{\frac{1}{(1 + i)} - 1}\right]$$

$$\Rightarrow FV = PMT \times \left[\frac{\frac{1}{(1 + i)} - \frac{(1 + i)^n}{(1 + i)}}{\frac{1}{(1 + i)} - 1}\right]$$

$$\Rightarrow FV = PMT \times \left[\frac{\frac{1 - (1 + i)^n}{(1 + i)}}{\frac{1 - (1 + i)}{(1 + i)}}\right]$$

$$\Rightarrow FV = PMT \times \left[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)} \times \frac{(1+i)}{1-(1+i)}\right]$$

$$\Rightarrow FV = PMT \times \left[\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}\right].$$

Portanto, temos:

$$FV = PMT \times \left[\frac{1-(1+i)^n}{-i}\right],$$

ou seja:

$$FV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right].$$

Nesta fórmula a expressão

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

é denominada por *Fator de Valor Futuro*, e é denotada por $FFV(i,n)$. Assim,

$$FV = PMT \times FFV(i,n) \; ou \; FV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right].$$

Exemplo 3.4.1: Calcular o montante acumulado ao final de 5º mês de uma sequência de 5 depósidos mensais sucessivos, no valor de $R\$\,950{,}00$ cada, numa conta poupança que remunera a uma taxa de juros de 2% ao mês.

Resolução: Dados do problema

$PMT = \$\,950{,}00$
$i = 2\% \; ao \; mês \; ou \; 0{,}02 \; ao \; mês$
$n = 5 \; meses$
$FV = ?$

Neste caso, temos um fluxo de caixa uniforme, daí, aplicando a fórmula de valor futuro,

$$FV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

obtemos:

$$FV = 950 \times \frac{(1 + 0,02)^5 - 1}{0,02}$$

$$\Rightarrow FV = 950 \times \frac{(1,02)^5 - 1}{0,02}$$

$$\Rightarrow FV = 950 \times \frac{(1,02)^5 - 1}{0,02}$$

$$\Rightarrow FV = 950 \times \frac{1,104081 - 1}{0,02}$$

$$\Rightarrow FV = 950 \times \frac{0,104081}{0,02} = 950 \times 5,20405 = \$4.943,85.$$

Logo, o montante acumulado é de $R\$$ 4.943,85.

4. SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E FINANCIAMENTOS

Neste Capítulo, iremos estudar os sistemas de Amortização, em particular o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema de Amortização Francês (SAF), que são os mais utilizados no Brasil de forma geral para financiamentos e empréstimos. Para isto, usamos a referência [1].

4.1. DEFINIÇÕES BÁSICAS

Os sistemas de amortização são desenvolvidos basicamente para operações de empréstimos e financiamentos de longo prazo, envolvendo desembolsos periódicos do principal e encargos financeiros. Uma característica fundamental dos sistemas de amortização é a utilização exclusiva do critério de juros compostos, incidindo os juros exclusivamente sobre o saldo devedor (montante) apurado em período imediatamente anterior. Assim, podemos dizer que os sistemas de amortização de empréstimos e financiamentos tratam, da forma pela qual o principal (capital emprestado) e os encargos financeiros são restituídos ao credor do capital. Vejamos agora, a definição dos principais termos empregados nas operações de empréstimos e financiamentos:

Definição 4.1.1: Encargos Financeiros (Despesas) – Representam os juros da operação, caracterizando-se como custo para o devedor e retorno para o credor. Podendo ser prefixados ou pós-fixados, na qual, respectivamente, é a correção da dívida em função de uma expectativa ou verificação posterior do comportamento de determinado indexador.

Em outras palavras, nas operações prefixadas estipula-se uma taxa única para todo decorrer do tempo, e nas operações pós-fixadas há um desmembramento dos encargos em juros e correção monetária que pode ocasionar verificação futura.

Definição 4.1.2: Amortização – Refere-se exclusivamente ao pagamento do capital emprestado, onde geralmente é efetuado mediante parcelas periódicas (mensais, trimestrais, etc.), em outras palavras, "é o valor que é abatido da dívida periodicamente".

Definição 4.1.3: Saldo Devedor – Representa o valor principal da dívida, em determinado momento, após dedução do valor já pago ao credor a título de amortização.

Definição 4.1.4: Prestação – É composto do valor da amortização mais encargos financeiros devidos em determinado período de tempo. Assim:

$$Prestação = Amortização + Encargos\ Financeiros.$$

Definição 4.1.5: Carência – Muitas operações de empréstimos e financiamentos preveem um diferimento na data convencional do início dos pagamentos. Por exemplo, se tomarmos um empréstimo por 3 anos, a ser pago em prestações trimestrais, o primeiro pagamento ocorrerá três meses após a liberação dos recursos, onde as demais parcelas terão vencimento ao final de cada um dos trimestres subsequentes. Ocorrendo um diferimento (carência), a primeira parcela poderá ser paga, por exemplo, 9 meses após o recebimento do capital emprestado. Neste caso, diz-se que a carência corresponde a dois trimestres, ou seja, equivale ao prazo entre a data convencional de inicial do pagamento que seria ao final do 3º e a do final do 9º mês.

É comum em muitas propagandas a seguinte propaganda "compre agora e só comece a pagar daqui a n meses", esse período para começar a pagar é exatamente a carência.

Assim, a amortização nada mais é do que um processo de extinção de uma dívida através de pagamentos periódicos, que são realizados em função de um planejamento, de modo que cada prestação corresponde à soma do reembolso do Capital e do pagamento dos juros do saldo devedor, sendo que "os juros são sempre calculados sobre o saldo devedor", isto é, utilizando os juros compostos.

Para cada sistema de amortização é constituída uma planilha, onde seguindo uma padronização, relaciona-se, diversos fluxos de pagamentos e recebimentos.
Os principais sistemas de amortização são:

a) Sistema de Amortização Constante – SAC: Neste sistema, a amortização da dívida é constante e igual em cada período.

b) Sistema de Amortização Francês – SAF: Neste sistema, os pagamentos (prestações) são iguais.

c) Sistema de Amortização Misto – SAM: Neste sistema, os pagamentos (prestações) são dados pela média aritmética das prestações respectivas no Sistema de Amortização Francês (SAF) e no Sistema de Amortização Constante (SAC).

d) Sistema de Amortização Americano – SAA: Neste sistema o pagamento é efetuado no final com juros calculados período a período.

e) Sistema de Amortizações Variáveis (Parcelas Intermediárias): Neste sistema os pagamentos (prestações) são diferenciados.

4.2. SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

O Sistema de Amortização Constante (SAC) tem como característica básica serem as amortizações do capital emprestado sempre constantes em todo o prazo da operação. Neste sistema, o valor da amortização é facilmente obtido mediante a divisão do capital emprestado pelo número de prestações. É utilizado, por exemplo no Sistema Financeiro da Habitação.

Os juros, por incidirem sobre o saldo devedor, que ao final de cada período é menor devido o pagamento de cada amortização, assumem valores decrescentes nos períodos. Além disso, em decorrência do comportamento da amortização e dos juros, as prestações periódicas e sucessivas no SAC são decrescente em progressão aritmética.

Exemplo 4.2.1: Admitindo, por exemplo, um empréstimo de $R\$\ 57.000{,}00$, que deve ser pago num prazo de 3 anos, em 6 prestações semestrais, a uma taxa de juros de $9{,}54\%$ ao semestre, pelo sistema de amortização constante. Construa uma planilha para esta operação.

Resolução: Desconsiderando a existência de carência, obtemos a seguinte planilha financeira para a operação de empréstimo citado.

Tabela 5. SAC sem carência.

Períodos (Semestres)	*Saldo Devedor (R$)*	*Amortização (R$)*	*Juros (R$)*	*Prestações (R$)*
0	57.000,00	–	–	–
1	47.500,00	9.500,00	5.437,80	14.937,80
2	38.000,00	9.500,00	4.531,50	14.031,50
3	28.500,00	9.500,00	3.625,20	13.125,20
4	19.000,00	9.500,00	2.718,90	12.218,90
5	9.500,00	9.500,00	1.812,60	11.312,60
6	–	9.500,00	906,30	10.406,30
Total	–	57.000,00	19.032,30	76.032,30

Fonte: O autor.

Vejamos agora como obtemos esta tabela. Para isto inicialmente observe que o SAC determina que a amortização seja constante, isto é, a restituição do capital emprestado seja efetuado em parcelas iguais (lembre-se que ao final dos 6 semestres, o saldo devedor deve ser zero, e o que é descontado do saldo devedor é o que chamamos de amortização). Assim, conforme acabamos de ver, o valor de cada amortização constante é obtida pela simples divisão entre o capital emprestado e o número fixado de prestações, ou seja,

$$Armotização = \frac{Capital\ Emprestado}{Nº\ de\ Prestações}.$$

Então a amortização do exemplo acima foi obtida da seguinte forma:

$$Amortização = \frac{R\$\ 57.000,00}{6},$$

ou seja,

$$Amortização = R\$\ 9.500,00\ por\ semestre.$$

Observe que os juros, por incidirem sobre o saldo devedor imediatamente anterior, apresentam valores aritmeticamente decrescentes. Assim,

- ✓ para o final do primeiro semestre, os encargos financeiros (juros) somam: $R\$\ 57.000,00 \times 0,0954 = R\$\ 5.437,80$ e o saldo devedor (= Saldo devedor anterior – amortização) é $R\$\ 57.000,00 - R\$\ 9.500,00 = R\$\ 47.500,00$;

- ✓ para o final do segundo semestre: o valor do juros é $R\$\ 47.500,00 \times 0,0954 = R\$\ 4.531,50$ e o saldo devedor é $R\$\ 47.500,00 - R\$\ 9.500,00 = R\$\ 38.000,00$.

- ✓ para o final do terceiro semestre: o valor do juros é $R\$\ 38.000,00 \times 0,0954 = R\$\ 3.625,20$ e o saldo devedor é $R\$\ 38.000,00 - R\$\ 9.500,00 = R\$\ 28.500,00$, e assim por diante.

Fazendo a soma para cada período, do valor da amortização com os respectivos encargos financeiros (juros), obtemos o valor da prestação semestral do financiamento. Assim,

- ✓ para o primeiro semestre a prestação é: $R\$\ 9.500,00 + R\$\ 5.437,80 = R\$\ 14.937.80$;

- ✓ para o segundo semestre a prestação é: $R\$\ 9.500{,}00 + R\$\ 4.531{,}50 = R\$\ 14.031{,}51$;

- ✓ para o terceiro semestre a prestação é: $R\$\ 9.500{,}00 + R\$\ 3.625{,}20 = R\$\ 13.125{,}20$; e assim sucessivamente.

Observe também que a diminuição de $R\$\ 906{,}30$ de juros em cada período é explicada pelo fato de as amortizações serem fixas e reduzirem o saldo devedor da dívida semestralmente $R\$\ 9.500{,}00$. Esta diminuição, em consequência, equivale a uma redução nos juros de: $R\$\ 9.500{,}00 \times 9{,}54\% = R\$\ 906{,}30$.

4.3. EXPRESSÕES DE CÁLCULO DO SAC

A seguir serão desenvolvidas as expressões genéricas de cálculo de cada parcela (amortização, saldo devedor, juros e prestação) da planilha do Sistema de Amortização Constante. Para todas as expressões encontradas, consideremos uma dívida (financiamento ou empréstimo) PV, que deve ser paga em n prestações periódicas a uma taxa de juros i.

Amortização ($\boldsymbol{Amort}$): por definição, os valores são sempre iguais e obtidos por:

$$Amort = \frac{PV}{n},$$

onde:

$PV = Valor\ do\ financiamento\ (capital\ emprestado\ ou\ saldo\ devedor\ inicial)$;

$n = números\ de\ prestações.$

Logo, considerando $Amort_k$: o valor da amortização no período k, $k = 1,2,3, \dots n$, temos:

$$\frac{PV}{n} = Amort_1 = Amort_2 = Amort_3 = \cdots = Amort_n,$$

e

$$PV = Amort_1 + Amort_2 + Amort_3 + \cdots + Amort_n.$$

Saldo Devedor ($\boldsymbol{SD}$): conforme vimos, o saldo devedor é decrescente em PA (progressão aritmética) pelo valor constante da amortização. Logo, a redução periódica do SD é:

$$\frac{PV}{n} = Amort.$$

Assim, considerando SD_k: o saldo devedor ao final do período k, $k = 1,2,3,\dots n$, temos:

$$SD_1 = PV - \frac{PV}{n} = (n-1) \times \frac{PV}{n},$$

$$SD_2 = PV - \frac{PV}{n} - \frac{PV}{n} = (n-2) \times \frac{PV}{n},$$

$$SD_3 = PV - \frac{PV}{n} - \frac{PV}{n} - \frac{PV}{n} = (n-3) \times \frac{PV}{n},$$

e assim por diante. Consequentemente para um período k qualquer temos:

$$SD_k = PV - \frac{PV}{n} - \frac{PV}{n} - \cdots - \frac{PV}{n}$$

$$\Rightarrow SD_k = PV - k \times \frac{PV}{n}$$

$$\Rightarrow SD_k = (n-k) \times \frac{PV}{n},$$

ou ainda, como $Amort = \frac{PV}{n}$,

$$SD_k = (n-k) \times Amort.$$

Denotaremos por SD_0, o valor inicial PV (saldo devedor na data zero).

Juros ($\boldsymbol{J}$): conforme vimos o juro de um determinado período é calculado sobre o saldo devedor ao final do período anterior, assim o juro é obtido pela redução constante do saldo devedor, e diminuem linearmente ao longo do tempo, comportando-se como uma PA decrescente. O valor periódico da redução é dos juros: $\frac{PV}{n} \times i$, sendo i a taxa de juros.

Assim, considerando J_k: o juro no período k, $k = 1,2,3,\dots n$, e usando a expressão obtida para encontrar SD_k, temos:

$$J_1 = PV \times i,$$

$$J_2 = SD_1 \times i \Rightarrow J_2 = (n-1) \times \frac{PV}{n} \times i,$$

$$J_3 = SD_2 \times i \Rightarrow J_3 = (n-2) \times \frac{PV}{n} \times i,$$

e assim por diante. Consequentemente, para um período k qualquer, tem-se:

$$J_k = SD_{k-1} \times i = \big(n - (k-1)\big) \times \frac{PV}{n} \times i$$

$$\Rightarrow J_k = (n - k + 1) \times \frac{PV}{n} \times i$$

$$\Rightarrow J_k = \frac{PV}{n} \times (n - k + 1) \times i.$$

ou ainda, como $Amort = \frac{PV}{n}$,

$$J_k = Amort \times (n - k + 1) \times i.$$

Note que, na planilha financeira apresentada no exemplo 4.2.1, usando essa expressão podemos obter facilmente o valor dos juros em determinado período da operação em questão, por exemplo, no 4º período, ou melhor, para $k = 4$, temos:

$$J_4 = \frac{57.000{,}00}{6} \times (6 - 4 + 1) \times 0{,}0954$$

$$\Rightarrow J_4 = 9.500{,}00 \times 3 \times 0{,}0954$$

$$\Rightarrow J_4 = R\$\ 2.718{,}90.$$

Prestação ($\boldsymbol{PMT}$): conforme vimos, a prestação (pagamento) é a soma da amortização e dos juros, ou melhor:

$$PMT = Amort + J.$$

Assim, considerando PMT_k: o valor da prestação no período k, $k = 1,2,3,\ldots,n$, temos:

$$PMT_k = Amort_k + J_k\,.$$

Como, $Amort_k = \frac{PV}{n}$ e $J_k = \frac{PV}{n} \times (n - k + 1) \times i$, obtemos

$$PMT_k = \frac{PV}{n} + \left[\frac{PV}{n} \times (n-k+1) \times i\right]$$

$$\Rightarrow PMT_k = \frac{PV}{n} \times [1 + (n-k+1) \times i],$$

ou ainda, como $Amort = \frac{PV}{n}$,

$$PMT_k = Amort \times [1 + (n-k+1) \times i].$$

Assim, considerando novamente a planilha financeira apresentada no exemplo 4.2.1, para calcular a prestação do 5º semestre, isto é, para $k = 5$ temos:

$$PMT_5 = \frac{57.000{,}00}{6} \times [1 + (6-5+1) \times 0{,}0954]$$

$$\Rightarrow PMT_5 = 9.500{,}00 \times (1 + 2 \times 0{,}0954)$$

$$\Rightarrow PMT_5 = 9.500{,}00 \times (1 + 0{,}1908)$$

$$\Rightarrow PMT_5 = 9.500{,}00 \times 1{,}1908$$

$$\Rightarrow PMT_5 = R\$\ 11.312{,}60.$$

Observe que o uso destas fórmulas faz-se necessário principalmente quando queremos saber o valor em apenas um determinado período. Com elas, não é necessário construir a planilha para saber o valor pedido, o que diminui muito o nosso trabalho, principalmente quando temos um financiamento ou empréstimo, com um número grande de prestações.

Exemplo 4.3.1: Um banco concede um financiamento de $R\$\ 660.000{,}00$ para ser liquidado em 8 pagamentos mensais pelo sistema SAC. A operação é realizada com uma taxa de juros de 2,5% $a.m.$, elaborar a planilha de desembolsos deste financiamento.

Resolução: Dados do problema,

$PV = R\$\ 660.000{,}00$
$i = 2{,}5\%\ ou\ 0{,}025\ ao\ mês$
$n = 8\ meses.$

Para construir a planilha, iremos aplicar as expressões de cálculo de SAC.

Calculemos inicialmente o valor da amortização, que é fixo (constante), para isto, vamos usar a expressão $Amort = \frac{PV}{n}$. Assim,

$$Amort = \frac{660.000,00}{8} \Rightarrow Amort = R\$\,82.500,00.$$

Calculemos agora os juros. Usando a expressão dos juros referente ao período de pagamento k, dada por:

$$J_k = \frac{PV}{n} \times (n - k + 1) \times i,$$

obtemos:

- 1º mês: $J_1 = \frac{660.000,00}{8} \times (8 - 1 + 1) \times 0,025 \Rightarrow J_1 = \$\ 16.500,00,$

- 2º mês: $J_2 = \frac{660.000,00}{8} \times (8 - 2 + 1) \times 0,025 \Rightarrow J_2 = R\$\ 14.437,50,$

- 3º mês: $J_3 = \frac{660.000,00}{8} \times (8 - 3 + 1) \times 0,025 \Rightarrow J_3 = R\$\ 12.375,00,$

- 4º mês: $J_4 = \frac{660.000,00}{8} \times (8 - 4 + 1) \times 0,025 \Rightarrow J_4 = R\$\ 10.312,50,$

- 5ºmês: $J_5 = \frac{660.000,00}{8} \times (8 - 5 + 1) \times 0,025 \Rightarrow J_5 = R\$\ 8.250,00,$

- 6º mês: $J_6 = \frac{660.000,00}{8} \times (8 - 6 + 1) \times 0,025 \Rightarrow J_6 = R\$\ 6.187,50,$

- 7º mês: $J_7 = \frac{660.000,00}{8} \times (8 - 7 + 1) \times 0,025 \Rightarrow J_7 = R\$\ 4.125,00,$

- 8º mês: $J_8 = \frac{660.000,00}{8} \times (8 - 8 + 1) \times 0,025 \Rightarrow J_8 = R\$\ 2.062,50.$

Para obter as prestações, vamos utilizar a seguinte expressão:

$$PMT_k = \frac{PV}{n} \times [1 + (n - k + 1) \times i]$$

Sabendo que serão 8 pagamentos mensais, temos:

- 1º mês: $PMT_1 = \frac{660.000,00}{8} \times [1 + (8 - 1 + 1) \times 0,025] \Rightarrow PMT_1 = R\$\ 99.000,00,$

- 2º mês: $PMT_2 = \frac{660.000,00}{8} \times [1 + (8 - 2 + 1) \times 0,025] \Rightarrow PMT_2 = R\$\,96.937,50$,

- 3º mês: $PMT_3 = \frac{660.000,00}{8} \times [1 + (8 - 3 + 1) \times 0,025] \Rightarrow PMT_3 = R\$\,94.875,00$,

- 4º mês: $PMT_4 = \frac{660.000,00}{8} \times [1 + (8 - 4 + 1) \times 0,025] \Rightarrow PMT_4 = R\$\,92.812,50$,

- 5º mês: $PMT_5 = \frac{660.000,00}{8} \times [1 + (8 - 5 + 1) \times 0,025] \Rightarrow PMT_5 = R\$\,90.750,00$,

- 6º mês: $PMT_6 = \frac{660.000,00}{8} \times [1 + (8 - 6 + 1) \times 0,025] \Rightarrow PMT_6 = R\$\,88.687,50$,

- 7º mês: $PMT_7 = \frac{660.000,00}{8} \times [1 + (8 - 7 + 1) \times 0,025] \Rightarrow PMT_7 = R\$\,86.625,00$,

- 8º mês: $PMT_8 = \frac{660.000,00}{8} \times [1 + (8 - 8 + 1) \times 0,025] \Rightarrow PMT_8 = R\$\,84.562,50$.

E mais, sabendo que a amortização é descontada do saldo devedor a cada mês, a planilha fica da seguinte forma:

Tabela 6. SAC sem carência.

Períodos (Mês)	*Saldo Devedor (R$)*	*Amortização (R$)*	*Juros (R$)*	*Prestações (R$)*
0	660.000,00	–	–	–
1	577.500,00	82.500,00	16.500,00	99.000,00
2	495.000,00	82.500,00	14.437,50	96.937,50
3	412.500,00	82.500,00	12.375,00	94.875,00
4	330.000,00	82.500,00	10.312,50	92.812,50
5	247.500,00	82.500,00	8.250,00	90.750,00
6	165.000,00	82.500,00	6.187,50	88.687,50
7	82.500,00	82.500,00	4.125,00	86.625,00
8	–	82.500,00	2.062,50	84.562,50
Total	–	660.000,00	74.250,00	734.250,00

Fonte: O autor.

Exemplo 4.3.2: Um financiamento no valor de $R\$\,240.000,00$ deve ser saldado em 30 prestações mensais pelo sistema SAC. A taxa de juros contratada é de 4% $ao\ mês$. Determine os juros e a prestação referentes ao 19º mês.

Resolução: Dados do problema,

$PV = R\$\,240.000,00$

$i = 4\%\ ou\ 0,04\ ao\ mês$

$n = 30\, meses$

$J_{19} = ?$

$PMT_{19} = ?$

Usando a expressão de juros, para obter os juros referente ao 19º mês, temos:

$$J_k = \frac{PV}{n} \times (n - k + 1) \times i$$

$$\Rightarrow J_{19} = \frac{240.000{,}00}{30} \times (30 - 19 + 1) \times 0{,}04$$

$$\Rightarrow J_{19} = R\$\, 3.840{,}00.$$

E, aplicando a expressão de prestação, para obter a prestação referente ao 19º mês, temos:

$$PMT_k = \frac{PV}{n} \times [1 + (n - k + 1) \times i],$$

$$\Rightarrow PMT_{19} = \frac{240.000{,}00}{30} \times [1 + (30 - 19 + 1) \times 0{,}04]$$

$$\Rightarrow PMT_{19} = 8.000{,}00 \times (1 + 12 \times 0{,}04)$$

$$\Rightarrow PMT_{19} = R\$\, 11.840{,}00.$$

Portanto, os juros e a prestação referentes ao 19º mês, são, respectivamente $R\$\, 3.840{,}00$ e $R\$\, 11.840{,}00$.

4.4. SAC COM CARÊNCIA

Como na carência há um diferimento na data convencional do início do pagamento, significa a postergação apenas do capital emprestado, não sendo incluídos necessariamente os juros. Com isso podem ocorrer três situações (para ilustrar vamos utilizar o exemplo 4.2.1 considerando uma carência de 2 anos):

1º Caso: Os juros são pagos durante a carência;

Considerando carência de 2 anos e pagamento dos juros, temos a seguinte tabela:

Tabela 7. SAC com Carência e Pagamento dos Juros.

Períodos (Semestres)	*Saldo Devedor ($)*	*Amortização ($)*	*Juros ($)*	*Prestações ($)*
0	57.000,00	–	–	–
1	57.000,00	–	5.437,80	5.437,80
2	57.000,00	–	5.437,80	5.437,80
3	57.000,00	–	5.437,80	5.437,80
4	57.000,00	–	5.437,80	5.437,80
5	47.500,00	9.500,00	5.437,80	14.937,80
6	38.000,00	9.500,00	4.531,50	14.031,50
7	28.500,00	9.500,00	3.625,20	13.125,20
8	19.000,00	9.500,00	2.718,90	12.218,90
9	9.500,00	9.500,00	1.812,60	11.312,60
10	–	9.500,00	906,30	10.406,30
$Total$	–	57.000,00	40.783,50	97,783,50

Fonte: O autor.

Observe que os juros são pagos durante a carência estipulada. Ao final dos quarto primeiros semestres, a prestação é constituída unicamente pelos encargos financeiros (juros), $R\$57.000{,}00 \times 9{,}54\% = R\$5.437{,}80$. Do quinto semestre em diante, encerrada a carência de 2 anos, inicia-se a amortização do capital emprestado, sendo o fluxo de prestações, deste momento em diante, conforme vimos anteriormente, onde

$$Amort = \frac{57.000{,}00}{6} = R\$\ 9.500{,}00.$$

2º Caso: Os juros são capitalizados e pagos totalmente quando do vencimento da primeira amortização;

Considerando agora, 2 anos de carência sendo capitalizado os juros, temos a seguinte tabela:

Tabela 8. SAC com Carência e Capitalização dos Juros.

Períodos (Semestres)	*Saldo Devedor ($)*	*Amortização ($)*	*Juros ($)*	*Prestações ($)*
0	57.000,00	–	–	–
1	62.437,80	–	–	–
2	68.394,37	–	–	–
3	74.919,19	–	–	–
4	82.066,48	–	–	–
5	47.500,00	9.500,00	32.895,62	42.395,62
6	38.000,00	9.500,00	4.531,50	14.031,50
7	28.500,00	9.500,00	3.625,20	13.125,20
8	19.000,00	9.500,00	2.718,90	12.218,90
9	9.500,00	9.500,00	1.812,60	11.312,60
10	–	9.500,00	906,30	10.406,30
$Total$	–	57.000,00	46.490,12	103.490,12

Fonte: O autor.

Neste caso, os encargos são capitalizados, segundo o critério de juros compostos, e devidos integralmente quando do vencimento da primeira parcela de amortização. Assim,

- ✓ ao final do primeiro semestre, o saldo devedor é acrescido dos juros, ou seja, o saldo devedor ao final do primeiro semestre é: $R\$\ 57.000{,}00 \times (1 + i) = R\$\ 57.000{,}00 \times 1{,}0954 = R\$\ 62.437{,}80$;

- ✓ ao final do segundo semestre, são calculados da mesma maneira, os juros sobre o saldo devedor anterior de $\$\ 62.437{,}80$ acrescidos ao mesmo, ou seja, $R\$\ 62.437{,}80 \times 1{,}0954 = R\$\ 68.394{,}37$.

- ✓ ao final do terceiro semestre o saldo devedor atinge $R\$\ 68.394{,}37 \times 1{,}0954 = R\$\ 74.919{,}19$, e ao final do quarto semestre $R\$\ 74.919{,}19 \times 1{,}0954 = R\$\ 82.066{,}48$.

Do quinto semestre em diante, encerrada a carência de 2 anos, inicia-se a amortização do capital emprestado, sendo o fluxo de prestações, deste momento em diante, conforme vimos anteriormente, onde os juros acumulados durante a carência são todos pagos na 5ª prestação e o valor da amortização continua sendo:

$$Amort = \frac{57.000{,}00}{6} = R\$\ 9.500{,}00.$$

3º Caso: Os juros são capitalizados e acrescentados ao saldo devedor gerando um fluxo de amortização de maior valor.

Considerando agora uma carência de 2 anos, em que os juros não são pagos durante a carência são capitalizados e distribuídos uniformemente no fluxo de amortização do financiamento a partir do quinto semestre, temos a seguinte tabela:

Tabela 9. SAC com Carência com Juros Capitalizados e Acrescidos ao Saldo Devedor.

Períodos (Semestres)	*Saldo Devedor ($)*	*Amortização ($)*	*Juros ($)*	*Prestações ($)*
0	57.000,00	−	−	−
1	62.437,80	−	−	−
2	68.394,37	−	−	−
3	74.919,19	−	−	−
4	82.066,48	−	−	−
5	68.388,75	13.677,75	7.829,14	21.506,89
6	54.711,00	13.677,75	6.524,29	20.202,04
7	41.033,25	13.677,75	5.219,43	18.897,18
8	27.355,50	13.677,75	3.914,57	17.592,32
9	13.677,75	13.677,75	2.609,71	16.287,46
10	−	13.677,75	1.304,86	14.892,61
$Total$	−	82.066,50	27.402,00	109.468,50

Fonte: O autor.

Neste caso, do mesmo modo que ocorreu no 2º caso, os encargos são capitalizados, segundo o critério de juros compostos, porém, além de não serem pagos durante a carência são capitalizados e distribuídos uniformemente no fluxo de amortização do financiamento a partir do quinto semestre. Dessa forma, no quinto semestre, o saldo devedor, somado ao montante capitalizado de juros, atende, conforme está demonstrado acima, $R\$\,82.066{,}50$. Daí, as parcelas semestrais de amortização totalizam, portanto, $R\$\,82.066{,}50$. Consequentemente, o valor de cada amortização é:

$$Amort = \frac{R\$\,82.066{,}48}{6} = R\$13.677{,}75.$$

Os valores dos juros e das prestações referentes aos demais semestres são apurados seguindo os cálculos apresentados para o SAC, conforme vimos anteriormente.

4.5. SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (SAF)

O Sistema de Amortização Francês (SAF) ou Sistema de Prestação Constante (SPC) ou Tabela Price, que também é adotado no mercado financeiro do Brasil, tem como característica, ao contrário do Sistema de Amortização Constante (SAC), que as prestações devem ser iguais, periódicas e sucessivas. Em outras palavras, equivale ao modelo-padrão de fluxos de caixas já estudado no capítulo anterior. É utilizado, por exemplo, em empréstimos, em financiamentos em geral de bens de consumo.

Os juros, nesse caso, incidem sobre o saldo devedor em forma decrescente, ao contrário das parcelas de amortização que assumem valores crescentes. Ou melhor, no Sistema de Amortização Francês (SAF) os juros decrescem e as amortizações crescem ao longo do tempo. A soma dessas duas parcelas (juros e amortização) permanece sempre igual ao valor da prestação.

Para compreender melhor, admitiremos o mesmo exemplo citado no Sistema de Amortização Constante (SAC), um empréstimo de $R\$\ 57.000{,}00$, a ser pago dentro de um prazo de 3 anos, em 6 prestações semestrais, a uma taxa de juros de $9{,}54\%$ ao semestre. Neste caso, desconsiderando a existência de carência, obtemos a seguinte planilha financeira.

Tabela 10. SAF sem carência.

Períodos (Semestres)	*Saldo Devedor ($)*	*Amortização ($)*	*Juros ($)*	*Prestações ($)*
0	57.000,00	−	−	−
1	49.526,11	7.473,89	5.437,80	12.911,69
2	41.339,21	8.186,90	4.724,79	12.911,69
3	32.371,28	8.967,93	3.943,76	12.911,69
4	22.547,81	9.823,47	3.088,22	12.911,69
5	11.787,18	10.760,63	2.151,06	12.911,69
6	−0,01	11.787,19	1.124,50	12.911,69
Total	−	57.000,01	20.470,13	77.470,14

Fonte: O autor.

Vejamos como fazer para obter esta tabela. Conforme vimos, por definição no SAF, as prestações são constantes, periódicas e sucessivas, além de serem limitadas, caracterizando um fluxo de caixa padrão. Assim, as prestações são obtidas pela aplicação da fórmula de valor presente estudada no capítulo anterior, ou seja:

$$PV = PMT \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \ ou \ PV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}.$$

onde:

$PV = Valor\ do\ Financiamento\ (Capital\ emprestado\ ou\ Saldo\ devedor\ inicial),$

$PMT = valor\ da\ prestação\ periódica, igual\ e\ sucessiva.$

De onde segue que,

$$\Rightarrow \frac{PV}{PMT} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

$$\Rightarrow PV \times (1+i)^n \times i = PMT \times (1+i)^n - 1$$

$$\Rightarrow PMT = PV \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}.$$

Logo, neste exemplo, como $PV = 57.000{,}00$, $n = 6$ semestres e $i = 9{,}54\%\ ao\ semestre$, temos:

$$PMT = 57.000{,}00 \times \frac{(1+0{,}0954)^6 \times 0{,}0954}{(1+0{,}0954)^6 - 1} = R\$\ 12.911{,}69.$$

Os demais valores são mensurados de forma sequencial em cada um dos períodos. Assim, para cada um dos semestres, tem-se que:

- O Juro é calculado sobre o saldo devedor apurado no início de cada período;

- A Amortização é obtida pela diferença entre o valor da prestação PMT e o valor dos juros J acumulado no início de cada período;

- O Saldo Devedor é obtido para cada período, pela diferença entre o saldo devedor do período que antecede o período correspondente e a amortização do período.

Desta forma obtemos, de modo análogo ao que fizemos para o SAC, a tabela do SAF (Tabela 10).

No Sistema de Amortização Francês (SAF) as prestações são constantes, os juros são decrescentes e as amortizações são exponencialmente crescentes ao longo do tempo, conforme podemos observar no exemplo visto anteriormente. Além disso, no SAF também podemos ter um período de carência, podendo ocorrer as mesmas situações vistas no SAC.

4.6. EXPRESSÕES DE CÁLCULO DO SAF

A seguir serão desenvolvidas as expressões genéricas de cálculo de cada parcela da planilha do Sistema de Amortização Francês. Para todas as expressões encontradas, consideremos uma dívida (financiamento ou empréstimo) PV, que deve ser paga em n prestações periódicas a uma taxa de juros i.

Prestação (PMT): conforme foi citado, o valor da prestação é calculado mediante a aplicação da fórmula de valor presente desenvolvida para o modelo-padrão de fluxo de caixa, demonstrada no capítulo anterior, ou seja:

$$PMT = PV \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}.$$

Considerando PMT_k: o valor da prestação no período k, $k = 1,2,3,\dots,n$, temos:

$$PMT_1 = PMT_2 = \cdots = PMT_n = PMT = PV \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}.$$

Amortização ($\boldsymbol{Amort}$): como, por definição, a prestação é a soma amortização com os juros, isto é, $PMT = Amort + J$, o valor da amortização é obtido pela diferença entre a prestação (PMT) e os juros (J), ou seja:

$$Amort = PMT - J.$$

Considerando $Amort_k$: o valor da amortização no período k, $k = 1,2,3,\dots,n$, e J_k: o valor do juro no período k, $k = 1,2,3,\dots,n$, temos:

- ✓ Amortização do 1º período: $Amort_1 = PMT - J_1$.

Ou melhor:

$$Amort_1 = PMT - (PV \times i),$$

E sendo $PV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$, obtemos:

$$Amort_1 = PMT - \left[\left(PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}\right) \times i\right],$$

$$\Rightarrow Amort_1 = PMT - \left(PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right)$$

$$\Rightarrow Amort_1 = PMT\left(1 - \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right)$$

$$\Rightarrow Amort_1 = PMT\left(\frac{(1+i)^n - (1+i)^n + 1}{(1+i)^n}\right)$$

$$\Rightarrow Amort_1 = PMT \times (1+i)^{-n}.$$

- ✓ Amortização do 2º período: $Amort_2 = PMT - J_2$.

Onde por definição, $J_2 = (PV - Amort_1) \times i$. Daí,

$$Amort_2 = PMT - (PV - Amort_1) \times i$$

$$Amort_2 = PMT - \ PV \times i + Amort_1 \times i\ .$$

Mas, $PMT - \ PV \times i = Amort_1$, de onde segue que

$$\Rightarrow Amort_2 = Amort_1 + Amort_1 \times i$$

$$\Rightarrow Amort_2 = Amort_1(1 + i).$$

- ✓ Amortização do 3º período: $Amort_3 = PMT - J_3$.

Onde por definição, $J_3 = \ (PV - Amort_1 - Amort_2) \times i$. Daí,

$$Amort_3 = PMT - \ (PV - Amort_1 - Amort_2) \times i$$

$$Amort_3 = PMT - \ PV \times i + Amort_1 \times i + Amort_2 \times i.$$

Mas, $PMT - \ PV \times i = Amort_1$, de onde segue que

$$Amort_3 = Amort_1 + Amort_1 \times i + Amort_1(1 - i) \times i.$$

$$\Rightarrow Amort_3 = Amort_1(1 + i + i + i^2) = Amort_1(1 + 2i + i^2)$$

$$\Rightarrow Amort_3 = Amort_1(1 + i)^2.$$

Como o seu crescimento é exponencial no tempo, o valor da amortização num momento k qualquer $k = 1,2,3, \dots, n$, é calculado pela expressão:

$$Amort_k = Amort_1 \times (1 + i)^{k-1},$$

ou ainda,

$$Amort_k = PMT \times (1 + i)^{-n} \times (1 + i)^{k-1} = PMT \times (1 + i)^{k-n-1}.$$

Saldo Devedor ($\boldsymbol{SD}$): por definição o saldo devedor é calculado, para cada período, pela diferença entre o valor devido no início do intervalo de tempo e a amortização do período.

Considerando SD_k: o valor do saldo devedor ao final do período k, $k = 1,2,3, \dots, n$, por definição, temos:

- ✓ Saldo devedor ao final do 1º período: $SD_1 = PV - Amort_1$.

- ✓ Saldo devedor ao final do 2º período: $SD_2 = PV - Amort_1 - Amort_2$.

- ✓ Saldo devedor ao final do 3º período: $SD_3 = PV - Amort_1 - Amort_2 - Amort_3$.

Assim, o saldo devedor ao final de qualquer período $k, k = 1,2,3,\dots,n$, é apurado da seguinte forma:

$$SD_k = PV - Amort_1 - Amort_2 - Amort_3 - \cdots - Amort_k.$$

Como $Amort_k = Amort_1 \times (1+i)^{k-1}$, obtemos:

$$SD_k = PV - Amort_1 - Amort_1 \times (1+i) - Amort_1 \times (1+i)^2 - \cdots - Amort_1 \times (1 + i)^{k-1}$$

$$\Rightarrow SD_k = PV - Amort_1[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{k-1}],$$

onde na segunda parcela temos a soma dos termos de uma PG, assim,

$$SD_k = PV - Amort_1 \times \frac{1-(1+i)^k}{1-(1+i)}.$$

Mas, vimos que $Amort_1 = PMT \times (1+i)^{-n}$ e $PV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$, assim,

$$SD_k = \left[PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}\right] - \left[\frac{PMT}{(1+i)^n}\right] \times \frac{1-(1+i)^k}{-i}$$

$$\Rightarrow SD_k = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} + \frac{1-(1+i)^k}{(1+i)^n \times i}\right]$$

$$\Rightarrow SD_k = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n \times i}\right]$$

$$\Rightarrow SD_k = PMT \times \left[\frac{(1+i)^{n-k+k} - (1+i)^k}{(1+i)^n \times i}\right]$$

$$\Rightarrow SD_k = PMT \times \frac{(1+i)^k \times [(1+i)^{n-k} - 1]}{(1+i)^n \times i}$$

$$\Rightarrow SD_k = PMT \times \frac{(1+i)^k \times [(1+i)^{n-k} - 1]}{(1+i)^{n-k+k} \times i},$$

consequentemente,

$$SD_k = PMT \times \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{(1+i)^{n-k} \times i},$$

ou ainda,

$$SD_k = PMT \times FPV(i, n-k), \text{ onde } FPV(i, n-k) = \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{(1+i)^{n-k} \times i}.$$

Denotaremos por SD_0, o valor inicial PV (saldo devedor na data zero).

Juros (J): incide sobre o saldo devedor apurado no início de cada período. Considerando J_k: o valor do juro do período k, $k = 1,2,3, \dots, n$,, conforme já mencionado ao obtermos a expressão do cálculo do valor da amortização, temos:

$$J_1 = PV \times i = SD_0 \times i$$

$$J_2 = SD_1 \times i = (PV - Amort_1) \times i$$

$$J_3 = SD_2 \times i = (PV - Amort_1 - Amort_2) \times i$$

$$J_4 = SD_3 \times i = (PV - Amort_1 - Amort_2 - Amort_3) \times i$$

E assim sucessivamente. Daí, para um momento k qualquer, $k = 1, 2,3, \dots, n$, temos:

$$J_k = SD_{k-1} \times i.$$

Exemplo 4.6.1: Um equipamento no valor de $R\$\ 350.000{,}00$ está sendo financiado por um banco pelo prazo de 5 anos. A taxa de juros contratada é de 15% *ao ano* e as amortizações são efetuadas pelo Sistema Francês. O banco concede ainda uma carência de 3 anos para o início dos pagamentos, sendo os juros cobrados neste intervalo de tempo. Elaborar uma planilha financeira deste financiamento.

Resolução: Dados do problema,

$PV = R\$\ 350.000{,}00$

$i = 15\% ao\ ano\ ou\ 0{,}15\ ao\ ano$

$n = 5\ anos$

Como o financiamento é feito pelo SAF, usando a expressão $PMT = PV \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$, vamos obter o valor da prestação, ou seja,

$$PMT = 350.000,00 \times \frac{(1+0,15)^5 \times 0,15}{(1+0,15)^5 - 1},$$

$$\Rightarrow PMT = 350.000,00 \times \frac{0,301703578125}{1,0113571875}$$

$$\Rightarrow PMT = R\$\ 104.410,44.$$

Como os juros serão pagos durando o período de carência (do 1º ao 3º ano), e:

$$J = PV \times i \Rightarrow J = 350.000,00 \times 0,15 \Rightarrow J = R\$\ 52.500,00.$$

Então, as prestações do 1º ao 3º ano serão todas iguais à $R\$$ 52.500,00, não sendo abatido nada do saldo devedor durante este período. A partir do 4º ano consecutivo o valor da prestação será a soma dos juros e da amortização, assim começa a ser calculado o valor da amortização.

Para o 1º ano após a carência (4º ano do financiamento), temos:

$$J_1 = PV \times i = 350.000,00 \times 0,15 = R\$\ 52.500,00,$$

$$Amort_1 = PMT - J_1 = 104.410,44 - 52.500,00 = 51.910,4 \text{ e}$$

$$SD_1 = PV - Amort_1 = 350.000,00 - 51.910,44 = R\$\ 298.089,56.$$

Para encontrar o valor das demais amortizações e dos juros usaremos as fórmulas:

$$Amort_k = Amort_1 \times (1+i)^{k-1} \text{ e } J_k = SD_{k-1} \times i.$$

Daí, para o 2º ano após a carência (5º ano do financiamento), temos:

$$Amort_2 = 51.910.44 \times (1+0,15)^{2-1} \Rightarrow Amort_2 = 59.697,01,$$

$$SD_2 = SD_1 - Amort_2 = 298.089,56 - 59.697,01 = R\$\ 238.392,55 \text{ e}$$

$$J_2 = SD_1 \times i = 298.089,56 \times 0,15 = 44.713,43.$$

Procedemos de modo análogo, até chegarmos a 5ª amortização (8º ano do financiamento), que irá liquidar a dívida. Logo, obtemos a seguinte planilha:

Tabela 11. SAF com carência.

Períodos (Anuais)	*Saldo Devedor ($)*	*Amortização ($)*	*Juros ($)*	*Prestações ($)*
0	350.000,00	–	–	–
1	350.000,00	–	52.500,00	52.500,00
2	350.000,00	–	52.500,00	52.500,00
3	350.000,00	–	52.500,00	52.500,00
4	298.089,56	51.910,44	52.500,00	104.410,44
5	238.392,55	59.697,01	44.713,43	104.410,44
6	169.740,99	68.651,56	35.758,88	104.410,44
7	90.791,70	78.949,29	25.461,14	104.410,44
8	–	90.791,70	13.618,75	104.410,44
Total	–	350.000,00	329.552,20	679.552,20

Fonte: O autor.

Neste exemplo, ao invés de usarmos a fórmula para encontrar a amortização, poderíamos determinar primeiro o valor da prestação e a cada período, determinar o valor dos juros (que incidem sobre o saldo devedor do período anterior) e, em seguida obter a amortização fazendo a diferença entre o valor da prestação e o valor dos juros. Lembrando que o saldo devedor de cada período é obtido pela diferença entre o saldo devedor do período anterior e a amortização do período em questão.

Exemplo 4.6.2: Considerando uma amortização de uma dívida de $R\$\ 35.000{,}00$, em 180 meses, com, juros de 1% ao mês, pelo Sistema Francês. Determine o valor da centésima prestação e do estado da dívida nessa época.

Resolução: Dados do problema,

$PV = R\$\ 35.000{,}00$

$i = 1\%\ ao\ mês\ ou\ 0{,}01\ ao\ mês$

$n = 180\ meses$

$PMT_{100} = ?$

Como no SAF a prestação é constante, usando a expressão $PMT = PV \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$, temos que a centésima prestação é:

$$PMT = PV \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow PMT = 35.000{,}00 \times \frac{(1+0{,}01)^{180} \times 0{,}01}{(1+0{,}01)^{180} - 1}$$

$$\Rightarrow PMT = 35.000{,}00 \times \frac{(1,01)^{180} \times 0{,}01}{(1{,}01)^{180} - 1} \Rightarrow PMT = 35.000{,}00 \times \frac{0{,}05995802}{4{,}995802}$$

$$\Rightarrow PMT = R\$\ 420{,}05.$$

O valor do saldo devedor será obtido pela seguinte expressão $SD_k = PMT \times FPV(i, n - k)$. Assim o saldo devedor na época da centésima prestação é:

$$SD_{100} = 420{,}05 \times FPV(i, 180 - 100)$$

$$\Rightarrow SD_{100} = 420{,}05 \times FPV(i, 80)$$

$$\Rightarrow SD_{100} = 420{,}05 \times \frac{(1 + 0{,}01)^{80} - 1}{(1 + 0{,}01)^{80} \times 0{,}01}$$

$$\Rightarrow SD_{100} = 420{,}05 \times \frac{1{,}21672}{0{,}0221672}$$

$$\Rightarrow SD_{100} = R\$\ 23.055{,}83.$$

Logo, a centésima prestação é de $R\$\ 420{,}05$ e a dívida nessa época é de $R\$\ 23.055{,}83$.

Observe que, da mesma forma que vimos no SAC, o uso destas fórmulas faz-se necessário principalmente quando queremos saber o valor das parcelas em apenas um determinado período, o que diminui muito o nosso trabalho, principalmente quando temos um financiamento ou empréstimo, com um número grande de prestações.

5. CONCLUSÃO

A matemática financeira é uma ferramenta utilizada em qualquer movimentação de capital baseada em uma prévia estipulação de taxas e aplicação de juros, sejam elas recebimentos ou pagamentos, e está sempre presente no nosso cotidiano, daí a importância do seu estudo. Com este trabalho, vimos que existem dois regimes de capitalização, conforme estejam sendo utilizados os juros simples ou os juros compostos. Porém, o regime que tem mais aplicabilidade no nosso cotidiano é o regime de capitalização composto, pois, na maioria das operações financeiras, principalmente as bancárias, ocorrem os "juros sobre juros". Além disso, pelas definições vistas, podemos observar que é bastante comum, na prática, defrontar-se com operações financeiras que se representam por um fluxo de caixa, que serve para representar uma série de pagamentos ou de recebimentos que se estima ocorrer em um determinado intervalo de tempo. Sendo utilizado, por exemplo, em operações de empréstimos e financiamentos, em compras a prazo (frequente em lojas de eletrodomésticos, entre outros estabelecimentos), no recebimento ou pagamento de aluguéis. Por fim, vimos os sistemas de amortização, que nada mais são do que uma planilha que mostram como uma dívida pode ser paga. Sendo que os sistemas mais utilizados nas operações financeiras no Brasil são o Sistema de Amortização Constante SAC, que tem suas amortizações constantes no período de quitação da dívida ou financiamento e é muito utilizado no financiamento de imóveis, e o Sistema de Amortização Francês SAF ou price, que tem como característica as prestações constantes e é muito utilizado em empréstimos bancários.

Torna-se necessário salientar que o estudo da matemática financeira é de extrema importância para o consumidor em geral, e mais ainda para o mercado financeiro, tendo um papel fundamental para o setor econômico de qualquer indivíduo, pois conhecer um pouco de matemática financeira nos auxilia tanto na tomada de decisões financeiras no nosso dia a dia, fazendo com que não sejamos enganados por falsas propagandas, como também nos ajuda para que tenhamos uma melhor gestão de gastos e uma melhor aplicação do dinheiro, sejam em aplicações ou até mesmo na poupança. Além do mais, ter esse conhecimento em matemática financeira ajuda a pesquisar o melhor financiamento de um imóvel ou automóvel ou dívida buscando menores taxas, as melhores formas de parcelamentos que se encaixe no orçamento familiar ou individual, e até mesmo na compra mais simples de um eletrodoméstico seja ela a vista ou parcelada. No geral se torna fundamental esse estudo, pois um consumidor que não tem uma noção de como funciona estes sistemas na prática pode ser facilmente enganado e consequentemente ter um prejuízo.

6. REFERÊNCIAS

[1] ASSAF NETO ALEXANDRE. Matemática Financeira e suas Aplicações. Alexandre Assaf Neto. – 12 ed. – São Paulo: Atlas, 2012.

[2] COLUNISTA PORTAL. História da Matemática Financeira. Contabilidade e Finanças. Disponível em: https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/contabilidade/historia-da-matematica-financeira/51446 Acesso em: 24 de outubro de 2018.

[3] GUERRA FERNANDO. Matemática Financeira. Fernando Guerra e Inder Jeer Taneja. – 3º ed. – Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração. UFSC. 2014.

[4] RICARTE, Olívia. A evolução histórico – política dos juros na sociedade liberal capitalista. In: **Âmbito Jurídico**, Rio Grande, XIV, n. 94, nov 2011. Disponível em: >http://www.ambito-juridico.com.br/site/index.php?n_link=revista_artigos_leitura&artigo_id=10658<. Acesso em 20 de novembro de 2018.

[5] PUCCINI ERNESTO COUTINHO. Matemática Financeira e Análise de Investimentos. Ernesto Coutinho Puccini. – Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração. UFSC; [Brasília]: CAPES: UAB, 2011.