UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

INGRID HAPUK DIAS DA SILVA

ESTUDOS SOBRE OS QUATÉRNIONS

MONTEIRO
2019

INGRID HAPUK DIAS DA SILVA

ESTUDOS SOBRE OS QUATÉRNIONS

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura

Orientador: Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira

MONTEIRO
2019

S586e Silva, Ingrid Hapuk Dias da.

Estudos sobre os Quatérnions [manuscrito] / Ingrid Hapuk Dias da Silva. - 2019.

55 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas , 2019.

"Orientação : Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira , Coordenação do Curso de Matemática - CCHE."

1. Quatérnios (Álgebra). 2. Números Complexos . 3. Rotação tridimensional. I. Título

21. ed. CDD 512.5

Elaborada por Suzana Q. da Costa - CRB - 15/660 BSC6/UEPB

INGRID HAPUK DIAS DA SILVA

ESTUDOS SOBRE OS QUATÉRNIOS

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura

Aprovada em: 21/08/2019.

BANCA EXAMINADORA

Luciano dos Santos Ferreira

Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira
Orientador

Robson B. Sousa

Prof. Me. Robson Batista de Sousa
Examinador interno (CCHE/UEPB)

Luiz Lima de Oliveira Junior

Prof. Me. Luiz Lima de Oliveira Junior
Examinador interno (CCHE/UEPB)

'Este trabalho é dedicado, a todos os amantes das ciências exatas.'

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pelo dom da vida por ter permitido que mais esta realização da minha vida pudesse ser concluída.

Ao Prof. Ms Luciano dos Santos Ferreira pela paciência, apoio, dedicação e seu conhecimento indispensável para que houvessem o desenvolvimento do mesmo; além da compreensão e auxílio quando necessário, no período em que era coordenador do curso de Licenciatura em Matemática.

Ao Prof. Ms Luiz Lima atual coordenador do curso, pela assistência.

Ao Prof. Ms Robson Batista por ter aceitado o convite de participar da banca e pelas suas aulas, em que aprendi muito sobre Física.

A CAPES, pelo projeto Residência Pedagógica que tive o prazer de participar, que contribuiu bastante para minha experiência como professora, com incentivo e vivências que sem dúvidas me ajudaram na construção do próprio perfil profissional docente, além da minha Preceptora Vanda Félix, e orientador do projeto Roger Huanca, que tiveram papel principal em minha trajetória durante toda a residência, desde incentivos, á apoio e orientação.

Ao meu esposo Djanildo e a minha filha Iasmim Danielle pela compreensão todo esse tempo por algumas ausências, e pelo apoio, companheirismo, e incentivo para que eu chegasse até aqui.

A todos os professores, que passaram em todo esse período em que estive na Universidade, visto que, cada um teve de certa forma uma contribuição, tal como, proporcionar meu crescimento científico, profissional e intelectual.

"Aquele que habita no esconderijo do Altíssimo, à sombra do Onipotente descansará. Direi do Senhor: Ele é o meu Deus, o meu refúgio, a minha fortaleza, e nele confiarei. Porque ele te livrará do laço do passarinheiro, e da peste perniciosa. Ele te cobrirá com as suas penas, e debaixo das suas asas te confiarás; a sua verdade será o teu escudo e broquel. Não terás medo do terror de noite nem da seta que voa de dia, Nem da peste que anda na escuridão, nem da mortandade que assola ao meio-dia. Mil cairão ao teu lado, e dez mil à tua direita, mas não chegará a ti. Somente com os teus olhos contemplarás, e verás a recompensa dos ímpios. Porque tu, ó Senhor, és o meu refúgio. No Altíssimo fizeste a tua habitação. Nenhum mal te sucederá, nem praga alguma chegará à tua tenda. Porque aos seus anjos dará ordem a teu respeito, para te guardarem em todos os teus caminhos. Eles te sustentarão nas suas mãos, para que não tropeces com o teu pé em pedra. Pisarás o leão e a cobra, calcarás aos pés o filho do leão e a serpente. Porquanto tão encarecidamente me amou, também eu o livrarei, pô-lo-ei em retiro alto, porque conheceu o meu nome. Ele me invocará, e eu lhe responderei; estarei com ele na angústia; dela o retirarei, e o glorificarei. Fartá-lo-ei com longura de dias, e lhe mostrarei a minha salvação."

(Bíblia Sagrada, Salmos 91)

RESUMO

A pesquisa e o estudo da área dos quatérnios, ou seja, o campo dos números complexos é de extrema importância, levando em consideração que tal assunto apresenta suas relevantes vantagens, como: utilização de um número menor de coordenadas, quando comparado com as matrizes de rotação, existência de apenas duas possibilidades de representação de uma rotação, evitando a ocorrência de perdas de graus de liberdade quando os eixos de rotação se encontram sobrepostos. Algumas de suas vantagens e aplicações serão apresentadas durante este trabalho, com o objetivo de descrever seu surgimento, ou seja, quanto à origem dos quatérnios e como Hamilton chegou a eles, algumas de suas inúmeras finalidades e possibilidades de uso, bem como suas operações. Mas é importante destacar que apesar das vantagens em utilizar os quatérnios no estudo de rotações e suas aplicações no estudo tridimensionais, ainda verifica-se a escassez de referencial teórico, o que dificulta o estudo.

Palavras-chave: Quatérnios. Números Complexos. Rotações.

ABSTRACT

The research and study of the area of quaternions, that is, the field of complex numbers is extremely important, considering that such subject has its relevant advantages, such as: the use of a smaller number of coordinates, when compared to the matrix of rotation, there are only two possibilities of representing a rotation, avoiding the loss of degrees of freedom when the rotation axes are overlapping. Some of its advantages and applications will be presented during this paper, with the purpose of describing their emergence, that is, as to the origin of quaternions and how Hamilton came to them, some of their many purposes and possibilities of use, as well as their operations. But it is important to note that despite the advantages of using quaternions in the study of rotations and their applications in the three-dimensional study, there is still a lack of theoretical framework, which makes the study difficult.

Keywords: Quaternions, Complex Numbers and Rotations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A escolha do respectivo tema, foi resultado de algumas circunstâncias tal como, a leitura do livro “ Modelos Matemáticos nas Ciências não - Exatas ” especificamente falando do capítulo 4, o qual se refere ao Quatérnions , e o fato do mesmo ser um conteúdo tanto quanto complexo e com poucos estudos realizados , o que despertou minha curiosidade não só para realizar o Trabalho de Conclusão sobre este enunciado, mas também para incentivar que mais alunos se interessem por este tema, que apesar de não ser algo novo, é o primeiro trabalho na Universidade Estadual da Paraíba -UEPB com o mesmo, além disso, na própria grade curricular não consta nenhuma cadeira que aborde o estudo dos Quatérnions, sendo também uma dificuldade, consequentemente a partir da decisão fui a procura de artigos, outros TCCs e demais trabalhos que pudessem encontrar para ter como base de orientação, e então me deparei com uma grande dificuldade, como já dita anteriormente; a escassez de referências, sendo assim um grande desafio para o desenvolvimento deste, que exigiu o empenho completo para a sua conclusão. Por conseguinte, percebe-se então que todos os pretextos que justificam a escolha são os respectivos obstáculos a serem superados.

Levando-se em conta o que foi observada a importância deste trabalho data da necessidade do encorajamento de mais pessoas iniciem a investigação sobre os Quatérnions, visto que, sua alta complicação deve-se a falta de estudiosos dispostos a aprofundar seus estudos neste Universo, tanto dos Quatérnions como os números complexos em geral, logo se entende que se houvesse o detalhamento de mais variedade de pesquisa muitas barreiras seriam derrubadas facilitando até mesmo o entendimento sobre o assunto, até pelo fato de muitas pessoas até mesmo os próprios universitários, estudantes do curso de licenciatura em matemática desconhecerem este campo de estudo.

Todos sabem que, a matemática ao longo dos anos evoluiu, assim como as demais ciências, e no decorrer dos anos e no desenvolvimento intelectual do homem conjuntos numéricos foram não criados, mas sim descobertos, como já dizia os matemáticos gregos no início do seu estudo, assim surgiu os conjunto dos números naturais, depois os inteiros, racionais, irracionais, completando assim o conjunto universal dos reais, porém algo ainda não estava completo, determinados cálculos, pediam algum conjunto mais elaborado para seu desenvolvimento, e a partir desta necessidade aparece os números complexos, especificamente falando dos quatérnions, um grupo de quatro números deste conjunto, e o principal estudioso nesta etapa da matemática foi Sr.Hamilton no ano de 1843, que realizou tal proeza a partir da análise do sistema algébrico de forma que pudesse agir no espaço tridimensional de uma forma parecida com os números complexos no plano; e sua descoberta deu possibilidade de melhor compreender os sistemas de álgebra no espaço tridimensional, bem como os vetores, e de acordo com sua pesquisa ocorrerá o desenrolar deste trabalho, seguindo um cronograma estratégico exemplificado a seguir:

Capítulo 2: Introdução a História dos Quatérnions, pág.14.

Tem como objetivo trazer aspectos históricos sobre o tema, para introduzir o a explicação do estudo, para que o leitor possa entender não só a definição do que realmente se trata o assunto, e a partir disto compreender sua importância no contexto histórico e evolutivo da matemática e nos cálculos dos sistemas de álgebra no espaço tridimensional; tendo abordagem o processo da sua descoberta e desenvolvimento, que como dito anteriormente deu-se com Sr. Hamilton, tendo como referência vale ressaltar que a declaração propriamente dita do que são os Quatérnions, será complementada no capítulo 3 e 4, que trataram do Conjunto dos Números Complexos e da Noção de Quatérnions respectivamente.

Capítulo 3:Números Complexos, pág.17.

Neste tópico, abordamos sobre alguns aspectos deste peculiar conjunto numérico, os Complexos, onde serão subdivididos em determinados temas, como a sua Construção, O Conjunto propriamente dito, Operações com Pares Ordenados, e Operações Elementares nos Números Complexos, com intuito de introduzir o leitor neste universo numérico, totalmente diferente dos demais conjuntos, fazendo com que ele se inclua neste âmbito, para que mais a frente possa facilmente identificar os Quatérnions como um quarteto de números complexos, como se um grupo reservado, levando em consideração um leitor que desconheça ou tenha pouco conhecimento sobre o assunto.

Capítulo 4: Os Quatérnions, pág.25.

Iniciando realmente o enfoque principal deste trabalho, onde haverá a exemplificação do que são os Quatérnions e suas características gerais de início, com algumas Noções dos Quatérnions Reais, e em seguida partimos para a melhor parte desta tese, como todos os números existentes, este quarteto também possui operações, que por sua vez tem suas peculiaridades, sendo estes conceitos a maior parte deste ponto, são eles: Operações, Igualdade e Adição entre quatérnions; Subtração, Multiplicação, Conjugada e norma de Um Quatérnio, além da Norma de um Quatérnio, o Quatérnio unitário e por fim a Divisão de Quatérnios. Objetivando esclarecer com isso, a forma a qual foi realizado o estudo dos Quatérnions por Hamilton, visando demonstrar alguns pontos de seu estudo como as operações e suas propriedades, que serão ainda mais acrescentadas a partir do esclarecimento das Representações dos Quatérnios, nos próximos capítulos.

Capítulo 5: Representação Matricial dos Quatérnios com Matrizes Complexas 2x2, pág.31.

Como o enunciado já demonstra este capítulo é dedicada a explicar detalhes mais gerais a representação dos Quatérnions de Forma Matricial, e para isso conta com os seguintes quesitos:

- Quatérnios Puros e Vetores Espaciais

Para demonstrar uso do Quatérnions em conjunto com os vetores Espaciais relacionando-se com suas rotações, com desenvolvimento de cálculos e demonstrações.

Capítulo 6: Representações e Obtenções de Quatérnios e Ângulos de Euler, pág.42.

Continuando com as demonstrações a partir dessas operações matriciais, mas adicionando os fundamentos do Ângulo de Euler e suas obtenções, ou seja, estabelecendo uma relação entre a representação matricial de rotação dos Quatérnions com a Conversão dos Ângulos de Euler, com objetivo de complementar a discussão do capítulo anterior e também para finalizar este trabalho; tendo assim suas subdivisões correspondentes:

- Quatérnions e Rotações
- Conversão Matriz de Rotação em Quatérnio e vice-versa
- Conversão Ângulos de Euler – Quatérnio
- Representação de Rotações em 3D com o uso dos Quatérnions
- Rotações em 2D utilizando os Números Complexos

- **Objetivos**

Definir os conceitos sobre os Quatérnions, demonstrações das operações atribuídas, apresentarem o desenvolvimento do estudo e alguns aspectos como as representações em Matriz e em relação aos Ângulos de Euler, com a finalidade de melhorar e despertar a melhor compreensão do leitor, como também a curiosidade sobre o assunto, e passe a conhecer esse tema tão esquecido muitas vezes pelos pesquisadores na matemática atual.

- **Metodologia**

Esta pesquisa pode ser considerada de caráter exploratório, pois procura explorar uma temática, de modo a fornecer informações para uma investigação mais precisa. Ela visa uma maior proximidade com o tema, que é construído com base dados bibliográficos recolhidos a partir de um livro específico já mencionado anteriormente, e outros trabalhos. Com o uso de dados Qualitativos, visto que tal tema possui poucos dados relacionados, então torna-se viável a busca de informações de forma mais apreciativa do que preocupada com a quantidade de dados, por conseguinte deixando a pesquisa mais completa, por apresentar poucos elementos porém bem relacionados entre si, ao invés de mostrar dezenas de conhecimentos porém dispersos na pesquisa.

2 INTRODUÇÃO A HISTÓRIA DOS QUATÉRNIOS

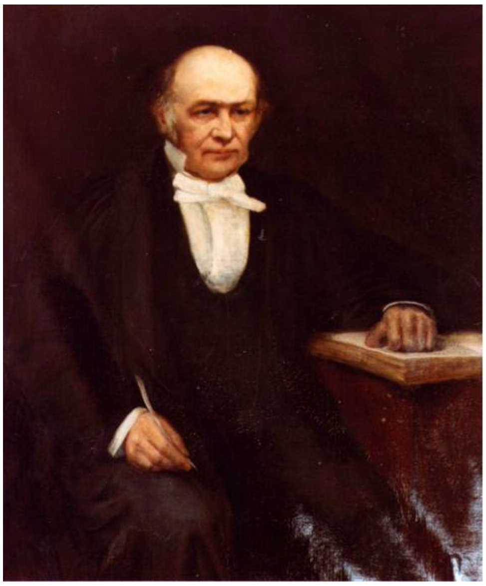
Durante a história, vários matemáticos se depararam com diversos problemas, que teriam suas soluções apresentadas no estudo dos Quatérnios que é uma extensão do conjunto dos números complexos, pesquisa que foi realizada, e teve a descoberta de sua fórmula pelo matemático Irlandês Sr. Hamilton. Assim temos que a história de Hamilton e consequentemente o desenvolvimento dos Quatérnions ocorreu segundo Adalso Costa de tal forma

> Hamilton estudava desde 1830 a interpretação geométrica da aritmética dos números complexos no plano e procurava obter resultados análogos no espaço a três dimensões. Em 1833, obteve como resultado que os números complexos formam uma álgebra de pares ordenados de números reais. Ele tentou estender este conceito a tripla de números, com um real e dois imaginários (SILVA; PEREIRA; SARAIVA, 2012, p.16).

Ainda Segundo Silva, Pereira e Saraiva (2012, p.16) “Uma das motivações de Hamilton para procurar números complexos tridimensionais, era encontrar uma descrição de rotações no espaço, análoga ao caso complexo, onde a multiplicação corresponde a uma rotação e a uma mudança de escala”.

Com essa descoberta, seu Hamilton gravou, nessa altura, a fórmula fundamental da álgebra dos quatérnios, numa pedra da ponte de Brougham (hoje com o nome de Broom Bridge). Hamilton ficou deslumbrado com uma nova possibilidade de um sistema de números análogo para ter nos estudo dos vetores e das rotações do espaço tridimensional. Assim segundo Santos. (, p.7) *“ usar quádruplas $a + bi + cj + dk$ em vez de triplas e abandonar a lei da comutatividade para a multiplicação. Subitamente nasceu a álgebra dos quatérnions, uma álgebra não-comutativa.”* Tendo os números reais como os complexos, então assim chamado os elementos de quatérnios reais. Pois, seu Hamilton definiu a adição e a multiplicação dos quatérnios, que poderemos o verificar as propriedades associativa e comutativa da adição, na multiplicação temos a associativa e distributiva em relação à adição, mas não vale a lei comutativa da multiplicação. Com isso de Sr. William Hamiltom se dedicou a sua vida toda para desenvolver as aplicações dos quatérnios. Onde foi na geometria, mecânica e física. Neste período também introduziu termos como vetor, versor, tensor, escalar, que são familiares nos nossos dias. Como resultado deste trabalho foi ainda editado 1866, a título póstumo, pelo seu filho William Edwin Hamilton, um trabalho em dois volumes: Elements of Quaternions. Com isso ele dedicou a sua obra de acordo com Carl B. Boyer e Howard Eves: “Sua obra “Suas Lectures on Quaternions” foi publicada em 1853, e depois disso dedicou-se à preparação da obra ampliada, “Elements of Quaternions”. Esta não estava terminada quando ele morreu em 1865 em Dunsink, mas foi editada e publicada como dito anteriormente, por seu filho no ano seguinte.” Portanto, teve outros conceitos os métodos dos quatérnios que motivaram, tempo depois, a introdução de análise vetorial. Com isso a Irlanda ao longo tempo,prestado homenagem ao seu ilustre matemático e cientista que passou a vida se dedicando a descoberta dos quatérnios. Foi celebrado o bicentenário do nascimento de William Rowan Hamilton no ano de 2005, o governo Irlandês ,proclamou o evento como “Hamiltom Year 2005: Celebrating Irish Scienceand Technology” foram produzidos: um selo comemorativo e uma moeda de coleção que representa a linguagem simbólica desenvolvida por Hamilton.

Figura 1 – Sr. William Rowan hamilton (1805 - 1865).



Fonte: http://www.theword.ie/cms/uploads/hamiltonportrait-web.jpgime.unicamp.

3 NÚMEROS COMPLEXOS

Neste Capitulo será apresentado um pouco da introdução dos números complexos, para ter uma melhor compreensão desse trabalho que vamos apresentar.

3.1 OS NÚMEROS COMPLEXOS

3.1.1 Construção dos Complexos

Com um passar dos anos a Aritmética e a Geometria passaram por mudanças e descobertas com o tempo foram as relações entre números e formas geométricas.

Assim a idéia de empregar sistemas de coordenadas para definir posições de pontos no plano e no espaço. Segundo Silva, Pereira e Saraiva (2012) *"já havia sido utilizada no século III a.C.por Apolônio, em seus trabalhos sobre secções cônicas"*.Pois, na metade do século XVII que os gênios matemáticos franceses Pierre de Fermat e Renê Descartes inventaram, a Geometria Analítica. Por isso a Geometria Analítica de Descartes foi o que ele estudou, entre outras como, as equações algébricas. Com esse Método Descartes segundo Silva, Pereira e Saraiva (2012) *"escreveu a seguinte frase: Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Ás vezes elas são "imaginárias"."*

Portanto esse foi o motivo, que até hoje o número $\sqrt{-1}$ é chamado de número imaginário, termo que se consagrou juntamente com a expressão "número complexo". Infelizmente, são designações um tanto inadequadas e subjetivas para objetos matemáticos.

Depois de Bombelli, em 1530, outros personagens importantes da História da Matemática deram contribuições ao desenvolvimento da teoria dos números complexos, dentre os quais o matemático francês Abraham de Moivre, amigo de Isaac Newton, e também os irmãos Jacques e Jean Bernoulli. Mas quem fez o trabalho mais importante e decisivo sobre o assunto foi Euler.

Dentre as inúmeras contribuições de Euler foi notável seu empenho na melhoria da simbologia. Muitas das notações que utilizamos hoje foram introduzidas por ele. Dentre as representações propostas por Euler destacamos o i substituindo $\sqrt{-1}$.

Euler passou a estudar números da forma $z = a + bi$ onde a e b são números reais e $i^2 = -1$. Esses números são chamados de números complexos. Um número complexo é um numero z que pode ser escrito na forma $z = a + bi$, em que a e b são números reais e i denota a unidade imaginária. Esta tem a propriedade $i^2 = -1$.

Onde a e b são chamados respectivamente parte real e parte imaginária de z. O conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$, contém o conjunto dos números reais. Com isso as operações de adição e multiplicação obtidas por extensão das operações de adição e multiplicação nos reais.

Assim, podemos definir $\mathbb{C}$ como: $\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$, onde z é o número complexo.

3.1.2 O Conjunto dos Complexos

Chama-se **o conjunto dos complexos**, é representa-se por $\mathbb{C}$, o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas as operações de igualdade, a adição e a multiplicação. É usual representar - se cada elemento $(x, y) \in \mathbb{C}$ com o simbolo de $\mathbb{R}$, portanto:

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y), \text{ sendo } x, y \in \mathbb{R}.$$

3.1.3 Operações com Pares Ordenados

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto do números reais. Consideremos o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

isto é, $\mathbb{R}^2$ é o conjunto do pares ordenados (x, y) em que x, y são números reais.

Tomamos dois pares ordenados, (a, b) e (c, d) do $\mathbb{R}^2$ para três definições importantes:

- **Igualdade**:

Dois pares ordenados são iguais se, e somente se, apresentarem primeiros termos iguais e segundo termos iguais.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

- **Adição**:

Chama-se soma de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujos primeiros e segundo termos são, respectivamente, a soma dos primeiros e a soma dos segundos termos dos pares dados.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

- **Multiplicação**:

Chama-se o produto de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujo primeiro termo é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares dados e cujo segundo termo é a soma dos produtos do primeiro termo de cada par dado pelo segundo termo do outro.

$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Propriedade da Adição

A operação de adição em $\mathbb{C}$ verifica as seguintes propriedades:

- **Propriedade Associativa**

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$

- **Propriedade Comutativa**

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

- **Existência do Elemento Neutro**

$\exists \varepsilon_a \in \mathbb{C} \mid z + \varepsilon_a = z, \forall\ z \in \mathbb{C}.$

- **Existência do Elemento Simétrico**

$\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C} \mid z + z' = \varepsilon_a.$

- **Substração**

Dados os complexos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d), \exists z \in \mathbb{C} \mid z_1 + z = z_2, z = z_2 + z_1^{'}.$

Esse número z é chamado diferença entre z_2 e z_1 e indicado por $z_2 - z_1$ portanto:

$$z_2 - z_1 = z_2 + z_1^{'} = (c, d) + (-a, -b) = (c - a, d - b).$$

Propriedade da Multiplicação

A operação de multiplicação em $\mathbb{C}$ verificar as seguintes propriedades:

- **Propriedade Associativa**

$(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

- **Propriedade Comutativa**

$z_1.z_2 = z_2.z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- **Existência do Elemento Neutro**

$\exists \varepsilon_m \in \mathbb{C} \mid z.\varepsilon_m = z, \forall z \in \mathbb{C}$

- **Existência do Elemento Inverso**

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists z'' \in \mathbb{C} \mid z.z'' = \varepsilon_m$

• **Divisão**

Dados os complexos $z_1 = (a, b) \neq (0, 0)$ e $z_2 = (c, d), \exists z \in \mathbb{C} \mid z_1.z = z_2, z = z_2.z_1''$.

Esse número z é chamado quociente entre z_2 e z_1 e indicado por $\frac{z_2}{z_1}$, portanto:

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2.z_1'' = (c, d)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{ca+db}{a^2+b^2}, -\frac{da-cb}{a^2+b^2}\right).$$

• **Propriedade Distributiva**

Em $\mathbb{C}$, a operação de multiplicação é distributiva em relação à adição:

$z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Forma Algébrica

Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$. Consideramos o subconjunto $\mathbb{R}'$ de $\mathbb{C}$ formado pelos pares ordenados cujo segundo termo é zero:

$$\mathcal{R}' = \{(a, b) \in \mathbb{C} \mid b = 0\}.$$

Consideramos uma aplicação f, de $\mathbb{R}$ em $\mathcal{R}'$, que leva cada $x \in \mathbb{R}$ ao par $(x, 0) \in \mathcal{R}'$.

$$f : \mathbb{R} \to \mathcal{R}'$$
$$x \mapsto (x, 0)$$

Observamos que essa aplicação f é bijetora, pois:

1. Todo par $(x, 0) \in \mathcal{R}'$ é correspondente, segundo f, de $x \in \mathbb{R}$, logo f é sobrejetora;
2. Dados $x \in \mathbb{R}$ e $x' \in \mathbb{R}$, com $x \neq x'$, os seus correspondentes $(x, 0) \in \mathcal{R}'$ e $(x', 0) \in \mathcal{R}'$ são distintos, de acordo com a definição de igualdade de pares ordenados, logo f é injetora.

Observamos ainda que f conserva as operações de adição e multiplicação, pois:

1. A soma $a + b$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, está associado o par $(a + b, 0)$, que é soma dos pares $(a, 0)$ e $(b, 0)$, correspondentes de a e b, respetivamente:

$$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$$

Ao produto ab, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, está associado o par $(ab, 0)$, que é o produto dos pares $(a, 0)$ e $(b, 0)$, correspondentes de a e b, respetivamente:

$$f(ab) = (ab, 0) = (ab - 0.0, a.0 + 0b) = (a, 0).(b, 0) = f(a).f(b)$$

Devido ao fato de existir uma aplicação bijetora $f : \mathbb{R} \to \mathcal{R}'$ que conserva as operações de adição e multiplicação, dizemos que $\mathbb{R}$ e $\mathcal{R}'$ são isomorfos. Devido ao isomorfismo, operar com $(x, 0)$ leva a resultado análogos ao obtidos operando com x. Com isto justifica a igualdade:

$$x = (x, 0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aceita a esta igualdade, temos em particular que $0 = (0, 0), 1 = (1, 0)$ e $\mathbb{R} = \mathcal{R}'$. Assim $\mathbb{R}$ passa ser subconjunto de $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Unidade Imaginária

Chamamos de unidade imaginária e indicamos por i o número complexo (0,1). Note que: $i^2 = i.i = (0, 1).(0, 1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0) = -1$ é a propriedade básica da unidade imaginária é:

$$i^2 = -1.$$

Definição 3.1. Dado um número complexo qualquer $z = (x, y)$, temos:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y.0 - 0.1, y.1 + 0.0) = (x, 0) + (y, 0).(0.1),$$

isto é:

$$z = x + yi.$$

Assim, todo número complexo $z = (x, y)$ pode ser escrito sob a forma $z = x + yi$, chamada forma algébrica.

O número real x é chamado parte real de z e o número real y é chamada parte imaginária de z. Em símbolos indica-se:

$x = Re(z)$ e $y = Im(z)$.

3.1.4 Operações Elementares nos Números Complexos

Definição 3.2. Sejam z e w dois números complexos dados por $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$ então definem-se as relações e operações elementares tal como segue:

- **Igualdade**

$z = w$ se, e somente se, $a = b$ e $c = d$

- **Soma**

$z + w = w + z = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

- **Produto**

$z.w = w.z = (a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

- **Conjugado**

Dado o número complexo $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$, o conjugado de z é definido por $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$.

- **Produto de um complexo pelo seu conjugado**

Seja $z = a + bi$ e $\overline{z} = a - bi$ temos:

$$z.\overline{z} = (a + bi).(a - bi) = a^2 + b^2.$$

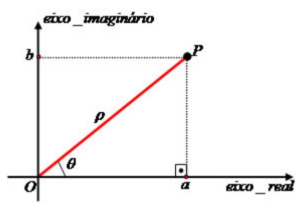
Observe que o produto $z.\overline{z}$ é a soma dos quadrados de dois números reais a e b portanto, o produto $z.\overline{z}$ é um número real e recebe a denominação de norma de z, é definido por:

$$N(z) = z.\overline{z} = a^2 + b^2.$$

- **Representação geométrica de um número complexo**

Um número complexo da forma $z = a + bi$, pode ser representado geometricamente no plano cartesiano, como sendo um ponto (par ordenado) tomando-se a abscissa deste ponto como a parte real do número complexo a no eixo ox e a ordenada como a parte imaginária do número complexo z no eixo oy, sendo que o número complexo $0 = 0 + 0i$ é representado pela própria origem (0,0) do sistema.

Figura 2 – Representação geométrica de um número complexo



Fonte: Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/plano-argand-gauss.htm.

• Módulo de um número complexo

No gráfico anterior podemos observar que existe um triângulo retângulo cuja hipotenusa correspondente à distância entre a origem 0 e o número complexo z, normalmente denotada pela letra grega ρ, o cateto horizontal tem comprimento igual à parte real a do número complexo e o cateto vertical corresponde à parte imaginária b do número complexo z.

Desse modo, se $z = a + bi$ é um número complexo, então:

$$\rho^2 = a^2 + b^2$$

e a medida da hipotenusa será por definição, o módulo do número complexo denotado por $\mid z \mid$, isto é:

$$\mid z \mid = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

4 OS QUATÉRNIOS

Nesse capítulo será feita uma breve abordagem sobre os Quatérnios reais, e as tentativas do Sir Hamilton de definir (x, y, z) com as mesmas propriedades da multiplicação, com isso neste capitulo terá algumas aplicações que serão definidas e as principais operações que corresponderá as propriedades, sendo assim também apresentada de uma forma matricial dos Quatérnios.

4.1 NOÇÕES DOS QUATÉRNIOS REAIS

Definição 4.1. O conjunto dos números quatérnios, denotado por $\mathbb{H}$, é definido como

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}.$$

Temos que os quatérnios é um espaço vetorial real cuja base é $1, i, j, k$, ou seja, formada pela unidade e pelas unidades imaginárias. Quando a for zero chamaremos este número de quatérnios puro. A multiplicação dos quatérnios é a multiplicação algébrica usual considerando-se as seguintes regras quanto as unidades imaginárias,

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j.$$

Um quatérnio pode também ser entendido como sendo composto por duas partes: uma *parte escalar ou real*, isto é, $q_0 \in \mathbb{R}$ e outra *parte vetorial*, isto é, $q' = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$. Observe ainda que q pode ser também escrito como $q = (q_0, q')$. Quando a parte escalar desse número é igual a zero, então o quatérnio é escrito como $q = (0, q')$ e é chamado de **quatérnio puro**.

Nessa representação o quatérnio é dado por:

$$q = q_0 + q' = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

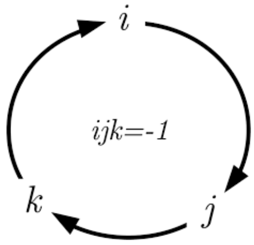
em que i, j, k satisfazem as seguintes propriedades de regras de multiplicação não comutativas:

4.2 OPERAÇÕES ENTRE QUATÉRNIOS

Tomamos dos Quatérnios da forma:

$x = x_0 + X = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ e $w = w_0 + W = w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k$.

Figura 3 – Representação não-comutatividade das multiplicações dos quatérnions



Fonte:.ime.unicamp.br

http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0015

4.3 IGUALDADE DE QUATÉRNIOS

Dois quatérnios $p = p_0 + p' = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$, $q = q_0 + q' = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, são iguais quando $p_0 = q_0$, $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$ e $p_3 = q_3$.

4.4 ADIÇÃO DE QUATÉRNIOS

Sejam $p = p_0 + p' = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$, $q = q_0 + q' = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ e então $p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k$, com p_n e q_n números reais e $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

A operação de adição é comutativa, associativa, possui elemento neutro e elemento oposto. De fato:

i) **Comutativa.** Usando que $p_n + q_n = q_n + p_n$, pois são números reais, segue que

$$p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k =$$

$$(q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)i + (q_2 + p_2)j + (q_3 + p_3)k = q + p,$$

ou seja, $p + q = q + p$.

ii) **Associativa.** Dado $r = r_0 + r' = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k$ e usando que $(p_n + q_n) + r_n = q_n + (p_n + r_n)$, a adição de quatérnio é associativa, pois

$$[p + q] + r = [(p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k] + r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k =$$

$$((p_0 + q_0) + r_0) + ((p_1 + q_1) + r_1)i + ((p_2 + q_2) + r_2)j + ((p_3 + q_3) + r_3)k =$$

ii) **Elemento neutro**

O quatérnio $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$ é o elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{H}$, isto é, $1p = p1 = p$ para qualquer $p \in \mathbb{H}$.

iii) **Elemento inverso**

Para todo quatérnio não nulo $p \in \mathbb{H}$, existe $p^{-1} \in \mathbb{H}$ tal que $pp^{-1} = p^{-1}p = 1$. O elemento p^{-1} é chamado de inverso de p.

iv) **Distributiva**

Para quaisquer $p, q, r \in \mathbb{H}$, valem

$$p(q + r) = pq + pr \quad \text{e} \quad (p + q)r = pr + qr.$$

Observe que a multiplicação de quatérnio não é comutativa, isto é, $pq \neq qp$.

A operação de multiplicação de quatérnios pode ser desenvolvida usando uma notação mais simplificada,

$$pq = p_0q_0 - p' \cdot q' + p_0q' + q_0p' + p' \times q',$$

em que " $\cdot$ " e " $\times$ ", representam respectivamente, o produto escalar e o produto vetorial entre os vetores p' e q' do espaço $\mathbb{R}^3$.

De fato, sendo $p' = (p_1, q_2, q_3)$ e $q' = (q_1, q_2, q_3)$, tem-se que:

(1) $p' \cdot q' = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$

(2) $p_0q' = (p_0q_1,\ p_0q_2,\ p_0q_3)$

(3) $q_0p' = (q_0p_1,\ q_0p_2,\ q_0p_3)$.

(4) $p' \times q' = \begin{pmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = -p_3q_2i - p_1q_3j - p_2q_1k + p_2q_3i + p_3q_1j + p_1q_2k.$

Então $pq = (1) - (2) + (3) + (4)$.

4.4.3 Multiplicação de um Escalar por um Quatérnio

Definição 4.2. Seja λ um número real e $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ um quatérnio, o produto de λ por p, denotado por λp, é o quatérnio $\lambda p_0 + \lambda p_1i + \lambda p_2j + \lambda p_3k$.

A multiplicação escalar de quatérnions satisfaz as propriedades:

i) $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p$
De fato,

$$\alpha(\beta p) = \alpha(\beta p_0 + \beta p_1 i + \beta p_2 j + \beta p_3 k) = \alpha\beta p_0 + \alpha\beta p_1 i + \alpha\beta p_2 j + \alpha\beta p_3 k =$$

$$\alpha\beta(p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k) = (\alpha\beta)p.$$

Isto é, $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p$.

ii) $(\alpha + \beta)p = \alpha p + \beta p$
De fato,

$$(\alpha + \beta)p = (\alpha + \beta)p_0 + (\alpha + \beta)p_1 i + (\alpha + \beta)p_2 j + (\alpha + \beta)p_3 k =$$

$$\alpha p_0 + \alpha p_1 i + \alpha p_2 j + \alpha p_3 k + \beta p_0 + \beta p_1 i + \beta p_2 j + \beta p_3 k = \alpha p + \beta p.$$

Ou seja, $(\alpha + \beta)p = \alpha p + \beta p$.

iii) $\alpha(p + q) = \alpha p + \alpha q$
De fato,

$$\alpha(p + q) = \alpha((p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k) + (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)) =$$

$$\alpha((p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k) =$$

$$\alpha p_0 + \alpha q_0 + \alpha p_1 i + \alpha q_1 i + \alpha p_2 j + \alpha q_2 j + \alpha p_3 k + \alpha q_3 k =$$

$$\alpha(p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k) + \alpha(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = \alpha p + \alpha q.$$

Assim, $\alpha(p + q) = \alpha p + \alpha q$.

4.4.4 Conjugado de um Quatérnio

Dado um quatérnio $p = p_0 + p' = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$, o conjugado de p, denotado por p^* é dado por $p^* = p_0 - p' = p_0 - p_1 i - p_2 j - p_3 k$.

4.4.5 Norma de um Quatérnio

Seja $x \in \mathbb{H}$. Defini-se norma (ou valor absoluto) de x, como sendo o número não negativo, $\|x\| = \|x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k\| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

A norma possibilita na álgebra dos quatérnios, tratar de conceitos como comprimento e distância entre quatérnios.

Quando $\|p\| = 1$, o quatérnio p recebe o nome de quatérnio unitário e, geometricamente pertence à esfera de raio 1 no $\mathbb{R}^4$.

É importante apresentar que um quatérnio unitário pode-se atribuir um ângulo, pois é possível expressar todo quatérnio p com norma igual a 1,

$$p = p_0 + p_1 = \cos\,(\theta) + u\ sen\ (\theta)$$

em que $-\pi \leq \theta \leq \pi$ e $u \in \mathbb{R}^4$ é um vetor unitário com a mesma direção do vetor p.

Usando os conceitos de conjugado e norma é possível estabelecer uma fórmula para o inverso de um quatérnio, é que $p^{-1} = p^*$ quando p é unitário, isto é, se p é unitário o inverso de p é igual ao seu conjugado.

4.4.6 Quatérnio unitário

Um quatérnio $x \in \mathbb{H}$ diz-se unitário se $\|x\| = 1$. Ao longo deste texto, iremos usar, por simplificação de escrita,

- $\mathbb{H}_1$ para denotar o conjunto dos quatérnios unitários;
- $\mathbb{H}_0$ como o conjunto dos quatérnios não nulos.

4.4.7 Inverso de um Quatérnio não Nulo

Seja $x \in \mathbb{H}_0$. Então existe $x^{-1} \in \mathbb{H}_0$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. Além disso, x^{-1} é único e é dado por:

$$x^{-1} = \tfrac{\overline{x}}{\|x\|^2},$$

em que a divisão de um quatérnio por um escalar real corresponde à divisão por componente.

4.4.8 Divisão de quatérnios

Sejam $x \in \mathbb{H}$ e $w \in \mathbb{H}_0$. A divisão de x por w define-se como:

- $divisão\quad à\quad esquerda:$

$$\frac{x}{w} = w^{-1}x;$$

- *divisão* à *direita* :

$$\frac{x}{w} = xw^{-1}.$$

5 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DOS QUATÉRNIOS COM MATRIZES COMPLEXAS 2×2

Nesse capitulo iremos representar os quatérnios com as matrizes, em que a adição e a multiplicação de quatérnios tem que corresponder a adição e multiplicação de matrizes (isto é, homomorfismos matrizes-quatérnios), que poderá ser realizada as matrizes complexas 2×2. Vamos relembrar se os números complexos são isomorfos então às matrizes reais da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}.$$

Qualquer número complexo $z = a + bi$, pode ser escrito como

$$z = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = aE + bI,$$

onde E é a matriz identidade e $I^2 = -E$.

A adição e a multiplicação de números complexos corresponderá à adição e multiplicação das matrizes associadas. Consideremos os complexos $-1 + 2i$ e $4 - i$. O produto destes números complexos pode ser expresso matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ -9 & -2 \end{bmatrix},$$

o resultado do produto corresponde ao número complexo $-2 + 9i$.

Se considera agora um quatérnio $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$. Como $ij = k$, é possível escrever x na forma $x = z + qj$, onde $z = x_0 + x_1 i$ e $q = x_2 + x_3 i$.

Então a representação é complexa de um quatérnio. O produto de w e p é dado por :

$$w = w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k = z_1 + q_1 j = (w_0 + w_1 i) + (w_2 + w_3 i)j$$

e

$$p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k = z_2 + q_2 j = (p_0 + p_1 i) + (p_2 + p_3 i)j$$

e pode ser reescrito, em termos de variáveis complexas, do seguinte modo:

$$w.p = (z_1 + q_1 j)(z_2 + q_2 j) = z_1 z_2 + q_1 j q_2 j + q_1 j z_2 + z_1 q_2 j = (z_1 z_2 - q_1 \overline{q_2}) + (z_1 q_2 + q_1 \overline{z_2}).$$

$$(p_0 + (q_0 + r_0)) + (p_1 + (q_1 + r_1))i + (p_2 + (q_2 + r_2))j + (p_3 + (q_3 + r_3))k =$$

$$p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k + [(q_0 + r_0) + (q_1 + r_1)i + (q_2 + r_2)j + (q_3 + r_3)]k = p + [q + r],$$

ou seja, $[p + q] + r = p + [q + r]$.

$iii)$ **Elemento neutro.** O quatérnio $0 = 0 + 0i + 0j + 0k$, chamado de quatérnio nulo é o elemento neutro da adição, pois:

$$p + 0 = (p_0 + 0) + (p_1 + 0)i + (p_2 + 0)j + (p_3 + 0)k = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k = p.$$

$iv)$ **Elemento oposto.** Sendo $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$, então o elemento $-p = -p_0 - p_1 i - p_2 j - p_3 k$ é o chamado oposto de p, visto que

$$p+(-p) = (p_0+(-p_0))+(p_1+(-p_1))i+(p_2+(-p_2))j+(p_3+(-p_3))k = 0+0i+0j+0k = 0.$$

4.4.1 Substração entre Quatérnios

Definimos Subtração entre Quatérnios da seguinte forma:

$$x - w = (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) - (w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k)$$

$$x - w = (x_0 - w_0) - (x_1 + w_1)i - (x_2 + w_2)j - (x_3 + w_3)k$$

4.4.2 Multiplicação de Quatérnio

Sejam $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ e $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, então

$$pq = (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) + (p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2)i +$$

$$(p_0 q_2 + p_2 q_0 + p_3 q_1 - p_1 q_3)j + (p_0 q_3 + p_3 q_0 + p_1 q_2 - p_2 q_1)k.$$

A multiplicação de quatérnios é associativa, possui elemento neutro, os quatérnios não nulos tem elemento inverso e é distributiva em relação a adição.

$i)$ **Associativa**

Isto é, para quaisquer $p, q, r \in \mathbb{H}$, vale $p(qr) = (pq)r$.

Então essa representação do produto será de um quatérnios corresponde a multiplicação das matrizes:

$$\begin{bmatrix} z_1 & q_1 \\ -\overline{q_1} & \overline{z_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_2 & q_2 \\ -\overline{q_2} & \overline{z_2} \end{bmatrix}.$$

Assim, cada quatérnio $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k = z + qj$ pode ser associado com a matriz complexa

$$\begin{bmatrix} z & q \\ -\overline{q} & \overline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + x_1 i & x_2 + x_3 i \\ -x_2 + x_3 i & x_0 - x_1 i \end{bmatrix},$$

obtendo-se assim a representação matricial complexa de um quatérnio. Qualquer quatérnio pode ainda ser escrito como

$$x = x_0 E + x_1 I + x_2 J + x_3 K$$

onde

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Se notarmos, tal como seria de a espera,

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E,$$

$$IJ = -JI = K,$$

$$JK = -KJ = I,$$

$$KI = -IK = J.$$

Os quatérnios $x = -1 + 2i + j - k$ e $w = 2 - i + 3j - k$ podem representar-se na forma complexa, respectivamente, como

$$x = (-1 + 2i) + (1 - i)j, w = (2 - i) + (3 - i)j.$$

Por isso que , as matrizes complexas correspondentes aos quatérnios x e w são, respectivamente:

$$X = \begin{bmatrix} -1+2i & 1-i \\ -1-i & -1-2i \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 2-i & 3-i \\ -3-i & 2+i \end{bmatrix}.$$

O produto

$$X.W = \begin{bmatrix} -1+2i & 1-i \\ -1-i & -1-2i \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2-i & 3-i \\ -3-i & 2+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+7i & 2+6i \\ -2+6 & -4-7i \end{bmatrix},$$

corresponde ao quatérnio $-4+7i+(2+6i)j = -4+7i+2j+6k$, ou seja, ao resultado de $x.w$. De $x = z+qj$, conclui-se, de imediato que, se Q é a representação matricial de um quatérnio x, então:

- *se* $\mathrm{x}_2 = x_3 = 0$, isto é, se x é um número complexo, Q é uma matriz diagonal;
- $\| x \|^2 = det(Q)$;
- *a representação matricial de* $\overline{x}$ é $\overline{Q}^T$;
- *se* $\mathrm{x} \in \mathbb{H}_1$, isto é, se $\| x \| = 1$, então $det(Q) = 1$ e $Q\overline{Q}^T = E$, isto é, Q é uma matriz unitária.

Proposição 5.1. $\mathbb{H}$ *e* $\mathbb{R}^4$ *formam espaços vetoriais isomorfos.*

Definição 5.1. O conjugado do quatérnio r, denotado por $\overline{r}$, é definido por

$$\overline{r} = a - bi - cj - dk.$$

Proposição 5.2. *Sejam* $r, s \in \mathbb{H}$. *Temos que:*

1. $\overline{r.s} = \overline{s} \,.\, \overline{r}$

2. $r\overline{r} = \overline{r}r = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Demonstração:

(item 1)

$r.s = (a+bi+cj+dk)(e+fi+gj+hk)$

$= (ae-bf-cg-dh)+(af+be+ch-dg)i+(ag+df-bh+ce)j+(ah+bg-cf+de)k$

$\overline{r.s} = (ae-bf-cg-dh)-(af+be+ch-dg)i-(ag-df+bh-ce)j-(ah+bg-cf+de)k$

$\overline{s} \,.\, \overline{r} = (e-fi-gj-hk)(a-bi-cj-dk)$

$= (ae-bf-cg-dh)+(-af-be-ch+dg)i+(-ag-df+bh-ce)j+$

$(-ah-bg+cf-de)k$

$= (ae-bf-cg-dh)-(af+be+ch-dg)i-(ag-df+bh-ce)j-(ah+bg-cf+de)k$

(item 2)

$r\overline{r} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk)$

$= a^2 - abi - acj - adk + abi + b^2 - bck + bdj + acj + bck + c^2 - cdi + adk - bdj +$ $cdi + d^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

$\overline{r}r = (a - bi - cj - dk)(a + bi + cj + dk)$

$= a^2 + abi + acj + adk - abi - b^2 - bck + bdj - acj + bck + c^2 - cdi - adk - bdj +$ $cdi + d^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$

Definição 5.2. Seja $q \in \mathbb{H}^*$, definimos a conjugação de q como a aplicação

$$Ad_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

$$r \mapsto qrq^{-1}$$

Proposição 5.3. *Sejam $p, q \in \mathbb{H}^*$, então*

1. $Ad_q(\lambda r + s) = \lambda Ad_q(r) + Ad_q(s)$, para quaisquer $r, s \in \mathbb{H}$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. $Ad_q(rs) = Ad_q(r)Ad_q(s)$, para quaisquer $r, s \in \mathbb{H}$.

3. $Ad_p \circ Ad_q = Ad_{pq}$.

4. $Id_{\mathbb{H}} = Ad_1$.

5. $(Ad_q)^{-1} = Ad_{q^{-1}}$

Demonstração:

1. Sejam $r, s \in \mathbb{H}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$Ad_q(\lambda r + s) + q(\lambda r + s)q^{-1} =$$

$$= q\lambda rq^{-1} + qsq^{-1} =$$

$$= \lambda qrq^{-1} + qsq^{-1} =$$

$$= \lambda Ad_q(r) + Ad_q(s).$$

2. Para $r, s \in \mathbb{H}$, temos

$$Ad_q(rs) = qrsq^{-1} = qrq^{-1}qsq^{-1} = Ad_q(r)Ad_q(s).$$

3. Seja $r \in \mathbb{H}$, então

$$\begin{aligned} Ad_p \circ Ad_q(r) &= Ad_p(qrq^{-1}) \\ &= p(qrq^{-1})p^{-1} \\ &= (pq)rq^{-1}p^{-1} \\ &= (pq)r(pq)^{-1} \\ &= Ad_{pq}(r). \end{aligned}$$

4. Para qualquer $r \in \mathbb{H}$, temos $Ad_1(r) = 1r1^{-1} = 1r1 = r$. Portanto, $Ad_1 = Id_{\mathbb{H}}$.

5. Vamos fazer uso dos resultados provados nos ítens 3) e 4). De fato,

$$Ad_q \circ Ad_{q-1} = Ad_{qq-1} = Ad_1 = Id_{\mathbb{H}}$$

e

$$Ad_{q-1} \circ Ad_q = Ad_{q-1q} = Ad_1 = Id_{\mathbb{H}}.$$

O que resulta em

$$Ad_{q-1} = (Ad_q)^{-1}.$$

Os ítens 1), 2) e 5) da proposição acima dizem que para todo $q \in \mathbb{H}^*$ a aplicação Ad_q é um automorfismo da álgebra [4] dos quatérnios. Em particular, cada aplicação Ad_q é uma aplicação linear inversível em $\mathbb{H}$, logo, um elemento do grupo das transformações lineares inversíveis $GL(\mathbb{H})$. Portanto, podemos considerar a aplicação

$$\begin{aligned} Ad : \mathbb{H}^* &\to GL(\mathbb{H}) \\ q &\mapsto Ad_q \end{aligned}$$

O ítem 3) da proposição acima garante que está aplicação é um homomorfismo de grupos entre o grupo multiplicativo $\mathbb{H}^*$ e o grupo linear $GL(\mathbb{H})$. De acordo com (**????**) *"veremos adiante que é possível, para cada $q \in \mathbb{H}$, restringir a ação de Ad_q a um subespaço tridimensional dos quatérnios que será considerado como o espaço euclidiano tridimensional usual."* Foi possível concluir esse cálculos de Euclidiano.

Definição 5.3. Seja $r \in \mathbb{H}$. A norma ou módulo de um quatérnio r pode ser definida como

$$\| r \| = \sqrt{r\overline{r}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

A norma de um quatérnio r é igual ao seu comprimento como um vetor do $\mathbb{R}^4$. Um quatérnio é dito unitário quando a sua norma é igual a 1.

Proposição 5.4. *Sejam r e s dois quatérnios unitários. Então $\| rs \| = \| s \| \| r \|$.*

Demonstração:

$$\| rs \| = \sqrt{rs.\overline{rs}} = \sqrt{rs\overline{s}\ .\ \overline{r}} = \| s \| \sqrt{r\overline{r}} = \| s \| \| r \| .$$

Devido a esta propriedade multiplicando-se dois quatérnios unitários produz-se outro quatérnio de comprimento unitário. O conjunto dos quatérnios unitários pode ser visto como um conjunto de pontos do $\mathbb{R}^4$, conjunto este denominado esfera $\mathbb{S}^3$. Existe a divisão por qualquer quatérnio não-nulo à direita ou à esquerda, ou seja, há soluções únicas para as equações, $xr = s$ e $ry = s$ que são respectivamente,

$$x = \frac{s\overline{r}}{\|r\|^2} \text{ e } y = \frac{\overline{r}s}{\|r\|^2}.$$

Proposição 5.5. *Todo quatérnio diferente de zero possui um inverso multiplicativo, denotado por r^{-1}, é definido como*

$$r^{-1} = \frac{\overline{r}}{\|r\|^2}.$$

Demonstração: Consideremos r^{-1} o inverso à direita.

$$rr^{-1} = \frac{r\overline{r}}{\|r\|^2} = \frac{\|r\|^2}{\|r\|^2} = 1.$$

Usando a Proposição 5.2, concluímos que o inverso à direita é igual ao inverso à esquerda.

Proposição 5.6. *O conjunto dos quatérnios é um anel de divisão ou um corpo não comutativo.*

Demonstração. Segue dos resultados expostos anteriormente.

Corolário 5.1. Seja $\hat{r}$ um quatérnio unitário. Então $\hat{r}^{-1} = \hat{r}$.

É muito importante observarmos que operações e propriedades do espaço podem ser codificadas nos quatérnios, por exemplo, a operação de multiplicação. Vejamos a proposição abaixo.

Proposição 5.7. *Sejam p e q dois quatérnios puros. Então*

$$pq = - < p, q > + (p \times q).$$

Demonstração: Ainda concluindo com a demostração de (**????**)

Sejam $p = xi + yj + zk$ e $q = bi + cj + dk$. Temos que

$$pq = (xi + yj + zk)(bi + cj + dk)$$

$$= -xb + xck - xdj - ybk - yc + ydi + zbj - zci - zd$$

$$= -(xb + yc + zd) + (yd - zc)i + (-xd + zb)j + (xc - yb)k. \ (*)$$

Como $< p, q >= xb + yc + zd \ (**)$ e

$$p \times q = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ b & c & d \end{bmatrix} = (yd - zc)i + (-xd + zb)j + (xc - yb)k. \ (***)$$

Como $(*)$ é igual ao inverso de $(**)$ mais $(***)$, podemos concluir que

$$pq = - < p, q > + p \times q.$$

5.1 QUATÉRNIOS PUROS E VETORES ESPACIAIS

Um quatérnio $p \in \mathbb{H}$ é dito ser um quatérnio puro se sua parte real for igual a zero, ou seja,

$$p = xi + yj + zk.$$

Nosso propósito é identificar o espaço euclidiano tridimensional usual como o subespaço dos quatérnios puros e mostrar como as propriedades geométricas do espaço podem ser codificadas pela estrutura algébrica dos quatérnios. Para tornarmos mais precisa esta identificação, temos o seguinte resultado:

Proposição 5.8. *A aplicação*

$$\imath : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$$

$$(x, y, z) \mapsto xi + yj + zk$$

é uma aplicação linear injetiva.

Demonstração: Dada esta inclusão canônica, podemos ver que a multiplicação de dois quatérnios puros codifica duas operações existentes entre vetores de $\mathbb{R}^3$, o produto escalar e o produto vetorial.

Proposição 5.9. *Sejam dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^3$. Então*

$$\imath(v)\imath(w) = -\langle v, w\rangle + \imath(v \times w),$$

onde $v \times w$ é o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$ de v com w.

Demonstração: Denotando $\imath(v) = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ e $\imath(w) = x_2 i + y_2 j + z_2 k$, temos $\imath(v)\imath(w) = (-x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2) + (y_1z_2 - z_1y_2)i + +(z_1x_2 - x_1z_2)j + (x_1y_2 - y_1x_2)k =$ $= -\langle v, w\rangle + \imath(v \times w)$. Onde $v \times w$ se escreve como o vetor

$$v \times w = det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix},$$

isto é, $v \times w$ é o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$ de v com w.

Para simplificarmos a notação, vamos omitir a injeção canônica, denotando do mesmo modo o vetor em $\mathbb{R}^3$ e sua imagem como um quatérnio puro.

Proposição 5.10. *Sejam $q \in \mathbb{H}^*$ e w um quatérnio puro. Então $Ad_q(w)$ também é um quatérnio puro.*

Demonstração: Denotemos $q = a + bi + cj + dk$ e $w = xi + yj + zk$, então

$Ad_q(w) = qwq^{-1} = qw\frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{1}{\|q\|^2}(a+bi+cj+dk)(xi+yj+zk)(a-bi-cj-dk) =$

$= \frac{1}{\|q\|^2}[(-bx - cy - dz) + (ax + cz - dy)i+$

$(ay + dx - bz)j + (az + by - cx)k](a - bi - cj - dk) =$

$\frac{1}{\|q\|^2}([(-bx - cy - dz)a + (ax + cz - dy)b + (ay + dx - bz)c+$

$+(az + by - cx)d] + (...)i + (...)j + (...)k).$

Podemos verificar facilmente que a componente real de $Ad_q(w)$ é igual a zero, portanto $Ad_q(w)$ é um quatérnio puro. Como queríamos mostrar.

Com isto, podemos fazer a co-restrição da a aplicação Ad para

$$Ad : \mathbb{H}^* \to GL(3, \mathbb{R})$$
$$q \mapsto Ad_q$$

Entendendo-se este grupo de transformações lineares em $\mathbb{R}^3$ como sendo as transformações lineares no subespaço dos quatérnios puros.

5.2 QUATÉRNIONS E ROTAÇÕES ESPACIAIS

Agora vamos entender á aplicação Ad quando restringimos o domínio deste morfismo apenas aos quatérnios unitários $\mathbb{S}^3$. Vamos ver que, neste caso, o conjunto imagem corresponde exatamente ao grupo de rotações $SO(3)$.

Teorema 5.1. *Considere a aplicação*

$$Ad : \mathbb{S}^3 \to GL(3, \mathbb{R})$$

$$q \mapsto Ad_q$$

Então Ad é um homomorfismo de grupos cujo conjunto imagem é exatamente o subgrupo $SO(3)$, das rotações espaciais.

Devido ao Teorema anterior podemos concluir que Ad_q é uma rotação espacial.

Vamos analisar mais de perto para vermos como o eixo de rotação e o ângulo de rotação podem ser determinados a partir das componentes do quatérnio $q = a+bi+cj+dk \in \mathbb{S}^3$. O eixo de rotação da transformação Ad_q é o vetor

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}(b, c, d,) \in \mathbb{R}^3.$$

De fato, seja o quatérnio $N = bi+cj+dk$, na qual podemos verificar que $Ad_q(N) = N$. Vejamos:

$$Ad_q(N) = qNq^{-1} = qN\overline{q} = (a+bi+cj+dk)(bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk)$$

$$= (abi + acj + adk - b^2 + bck - bdj - bck - c^2 + cdi + bdj - cdi - d^2)(a - bi - cj - dk)$$

$$= (-b^2 - c^2 - d^2 + abi + acj + adk)(a - bi - cj - dk)$$

$$= b(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)i + c(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)j + d(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)k$$

$$= (bi + cj + dK) = N.$$

Logo, N é um autovetor com autovalor igual a 1. Como o eixo de rotação tem que ser um vetor unitário, é só multiplicarmos o inverso da norma de N por N, obtendo assim

$$n = \frac{1}{\parallel N \parallel}.N = \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}(bi + cj + dk) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}(bi + cj + dk).$$

Teorema 5.2. *O ângulo de rotação é dado por $\psi = 2arccos\ a$.*

De fato, como o eixo de rotação está na direção (b, c, d), basta tomarmos um vetor v perpendicular ao eixo de rotação e o ângulo ψ entre os vetores $Ad_q(v)$ e v :

$$\cos\psi = \frac{\langle Ad_q(v), v\rangle}{\| Ad_q(v) \| \| v \|} = \frac{\langle Ad_q(v), v\rangle}{\| v \|^2}.$$

Tome $v = ci - bj$, é fácil ver que $v \perp n$. Temos ainda que $\| v \|^2 = b^2 + c^2$. Portanto, a única informação que precisamos é a parte real do produto $Ad_q(v)v$. Usando as operações, teremos:

$$Ad_q(v)v = qvq^{-1}v = (1 - 2a^2)(b^2 + c^2) + (...)i + (...)j + (...)k.$$

Portanto,

$$\langle Ad_q(v), v\rangle = (2a^2 - 1)(b^2 + c^2),$$

o que resulta em

$$\cos\psi = \frac{(2a^2 - 1)(b^2 + c^2)}{b^2 + c^2} = 2a^2 - 1.$$

Mas,

$$\cos\psi = 2\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right) - 1,$$

assim

$$\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) = a,$$

resultando em

$$\psi = 2arccos\ a.$$

Teorema 5.3. *Mostraremos que* $q = cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + sen\left(\frac{\psi}{2}\right) n$.

De fato, sabemos que $\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) = a$ e

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}(bi + cj + dk).$$

E além disso,

$$\|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 = \cos^2\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}.$$

Portanto, $sin\frac{\psi}{2} = \sqrt{1-a^2}$.

Temos,

$$sin\frac{\psi}{2}(n) = \frac{b}{\sqrt{1-a^2}} \sin\frac{\psi}{2}i + \frac{c}{\sqrt{1-a^2}} sin\frac{\psi}{2}j + \frac{d}{\sqrt{1-a^2}} sin\frac{\psi}{2}k,$$

ou seja,

$$\sin\frac{\psi}{2}(n) = bi + cj + dk.$$

Logo,

$$q = cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + sen\left(\frac{\psi}{2}\right) n.$$

Como foi mostrado anteriormente pelo teorema podemos ver vantagem na utilização dos quatérnios para que podemos descrever as rotações no espaço tridimensional. Pois,com essa estrutura algébrica dos quatérnios é uma vantagem. Já que pareça os cálculos dos quatérnios são extremamente longos e complexos se for feitos à mão, mas ainda são extremamente mais rápidos do que os cálculos matriciais, inclusive se for usado para as implementações em computadores.

6 REPRESENTAÇÕES E OBTENÇÕES DE QUATÉRNIOS E ÂNGULOS DE EULER

6.1 QUATÉRNIOS E ROTAÇÕES

Os quatérnios apresentam uma importante propriedade a que eles podem representar rotações no espaço tridimensional.

O ponto $p' = (p_1, p_2, p_3)$ sobre o qual se quer executar uma rotação será representado por um quatérnio puro $p = (0, p')$.

A rotação em torno de p' será representada por um quatérnio unitário $q = (q_0, v')$, com $v' = (v_1, v_2, v_3)$, isto é, um quatérnio q tal que $qq^* = 1$.

Agora, será demonstrado que o resultado da rotação de p em torno de q é dado por

$$R_q(p) = qpq^{-1}.$$

Desde que q é unitário, segue que

$$qq^* = 1 \Rightarrow q^{-1}qq^* = q^{-1} \Rightarrow q^* = q^{-1}.$$

Com efeito, a expressão $R_q(p) = qpq^{-1}$, poder ser escrita como:

$$R_q(p) = qpq^*.$$

Desenvolvendo esta última expressão, obtém-se:

$$qpq^* = (q_0, v')(0, p')(q_0, -v') = (q_0, v')(0q_0 - p' \cdot (-v'), -0v' + q_0p' + p' \times (-v')) =$$

$$(q_0, v')(p' \cdot v', \quad q_0p' - p' \times v') =$$

$$(q_0(p' \cdot v') - v' \cdot (q_0p' - p' \times v'), \quad q_0(p_0p' - p' \times v') + (p' \cdot v')v' + v' \times (q_0p' - p' \times v')) =$$

$$(q_0(p' \cdot v') - q_0(v' \cdot p') + v' \cdot (p' \times v'), \quad q_0^2p' + q_0v' \times p' + (p' \cdot v')v' + q_0v' \times p' + v' \times (p' \times v') =$$

$$(v' \cdot (p' \times v'), \quad q_0^2p' + (p' \cdot v')v' + 2q_0v' \times v' + (v' \cdot p')v' - (v' \cdot v')p') =$$

$$(0, \quad q_0^2p' - (v' \cdot v')p' + 2(v' \cdot p')v' + 2q_0p' \times v').$$

Além disso, sendo $q = (q_0, v')$ unitário, tem-se que $\| q \|= 1$, isto é, $q_0^2 + \| v' \|^2 = 1$. Então, pela identidade fundamental da trigonometria, existe um θ tal que $q_0 = \cos\ \theta$ e $\| v' \| = \ sen\ \theta$. Dessa forma,

$$q = (q_0, v') = (\cos\ \theta,\ sen\ \theta\ n')$$

em que $n' = (n_1, n_2, n_3)$ e $\| n' \| = 1$.

Substituindo $q = (\cos\ \theta,\ \ sen\ \theta\ n')$ na expressão deduzida anteriormente e usando as identidades

$$t' \cdot t' = \| t' \|^2, \quad t' = (t_1, t_2, t_3)$$
$$\cos^2\theta - \ sen^2\theta = \cos\ 2\theta$$
$$2\ sen^2\theta = (1 - \cos\ 2\theta)$$
$$2\cos\ \theta\ sen\ \theta = \ sen\ 2\theta,$$

obtém-se:

$$(0,\ \ q_0^2 p' - (v' \cdot v')p' + 2(v' \cdot p')v' + 2q_0 p' \times v') =$$
$$(0,\ (\cos 2\theta)p' + (1 - \cos 2\theta)(n' \cdot p')n' + \ sen\ 2\theta(n' \times p')).$$

Comparando essa última expressão com

$$(0, (\cos\ \theta)p' + (1 - \cos\ \theta)(n' \cdot p')n' + \ sen\ \theta(n' \times p')$$

que dar o ponto resultante da realização de uma rotação de ângulo θ de n' em torno de p', chega-se que

$$q = (\cos\ (\theta/2),\ \ sen\ (\theta/2)\ n').$$

Noutras palavras, quando se deseja a um ponto p' do espaço uma rotação no sentido anti-horário de um ângulo θ ao redor do eixo definido por n', é possível fazer isso através de quatérnio da seguinte forma:

- Represente p' pelo quatérnio $p = (0,\ p')$
- Represente a rotação desejada pelo quatérnio $q = (\cos\ (\theta/2),\ \ sen\ (\theta/2)\ n')$
- Efetue a operação $R_q(p) = qpp^*$
- A parte real do resultado será zero e a parte vetorial conterá o resultado da rotação.

Foi visto acima que

$$qpq^* = (0,\ \ q_0^2 p' - (v' \cdot v')p' + 2(v' \cdot p')v' + 2q_0(p' \times v')),$$

com efeito, desconsiderando a parte nula e organizando a equação chega-se que

$$R_q(p) = 2(v' \cdot p')v' + (q_0^2 - (v' \cdot v'))p' + 2q_0(p' \times v').$$

Desenvolvendo o primeiro termo da equação acima, tem-se:

$$2(v' \cdot p')v' = 2(v_1p_1 + v_2p_2 + v_3p_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_1v_2 & v_2^2 & v_2v_3 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & v_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Já o segundo termo, sendo desenvolvido chega-se:

$$(q_0^2 - (v' \cdot v'))p' = (q_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

E o terceiro termo desenvolvido, obtém-se:

$$2q_0(p' \times v') = 2q_0 \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Assim, chega-se que:

$$R_q(p) = 2 \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_1v_2 & v_2^2 & v_2v_3 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & v_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + (q_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$+2q_0 \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Simplificando esta última equação, obtém-se a matriz de rotação R dada por:

$$R_q = \begin{pmatrix} q_0^2 + v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 & 2(v_1v_2 - q_0v_3) & 2(v_1v_3 + q_0v_2) \\ 2(v_1v_2 + q_0v_3) & q_0^2 - v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 & 2(v_2v_3 - q_0v_1) \\ 2(v_1v_3 - q_0v_2) & 2(v_2v_3 + q_0v_1) & q_0^2 - v_1^2 - v_2^2 + v_3^2 \end{pmatrix}.$$

Os quatérnios apresentam uma importante propriedade a que eles podem representar rotações no espaço tridimensional.

Para tanto é necessário obter um operador linear definido por meio dos quatérnios que manipule adequadamente vetores do $\mathbb{R}^3$, ou seja, o resultado da ação deste operador sobre um vetor do $\mathbb{R}^3$ resulte ainda num vetor em $\mathbb{R}^3$, e no qual seja possível associar um ângulo com este operador linear.

Assim, considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o operador aqui desejado é definido como

$$\begin{array}{rccl} L_p \ : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & v' & \longmapsto & L_p(v') = \ pv'p^* \end{array}$$

em que p é um quatérnio unitário.

A expressão $pv'p^*$ representa um produto entre quatérnios, em que p^* representa o conjugado de p, e desde que p é unitário, segue que $p = p^*$ e $v' \in \mathbb{R}^3$ é um quatérnio com a parte escalar igual a zero (quatérnio puro).

Sendo $p = (p_0, p')$ com $p' = (p_1, p_2, p_3)$ um quatérnio unitário, então a ação do operador linear L_p sobre um vetor $v \in \mathbb{R}^3$, pode ser interpretada como uma rotação do vetor $v = (0, v')$ com $v' = (v_1, v_2, v_3)$ e com efeito

$$L_p(v') = pv'p^* = w$$

em que $w = (0, w')$ com $w' = (w_1, w_2, w_3)$.

Para cada quatérnio unitário, a ação do operador linear L_p sobre um vetor $v' = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ pode ser interpretada como uma rotação do vetor v' de um ângulo 2θ, em torno do eixo de rotação determinado por $p' = (p_1, p_2, p_3)$, o qual é a parte vetorial de p.

Em particular, quando um quatérnio $p = p_0 + p'$ for unitário, então a rotação representada por este quatérnio, tem um ângulo de rotação θ_{rot} e um vetor unitário na direção do eixo de rotação $eixo_{rot}$, os quais são dados por:

$$\theta_{rot} = 2\cos^{-1}(p_0) \quad \text{ e } \quad eixo_{rot} = \frac{p'}{\parallel p \parallel}.$$

Ademais, é possível concluir que quando se representa uma rotação por meio de um quatérnio, obtém-se o vetor que define o eixo de rotação e um ângulo de rotação em torno deste eixo.

6.2 CONVERSÃO MATRIZ DE ROTAÇÃO EM QUATÉRNIO E VICE-VERSA

Na seção acima, foi apresentado o operador quatérnio de rotação o qual tem um papel fundamental para problemas que envolvem rotações no espaço $\mathbb{R}^3$. No campo da Biomecânica, as matrizes de rotação e ângulo de Euler são os métodos clássicos usados para estudar rotações.

Como forma de dinamizar o processo, deve haver uma relação algébrica entre esses métodos clássicos de abordagem, os tornando mais comuns.

Por exemplo, partir de uma matriz de rotação é possível obter o quatérnio (unitário) que representa a mesma rotação. Nesse contexto, é importante que seja apresentado o procedimento de conversão.

Seja um vetor $v' = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, então aplica-se uma matriz de rotação M tem-se como resultado um novo vetor $w' = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, o qual, geometricamente, é o resultado da rotação do vetor $v = (0, v')$ de um certo ângulo θ em torno de algum eixo.

Ademais, a mesma rotação pode ser obtida por meio da teoria dos quatérnios aplicando-se ao vetor $v = (0, v')$ o operador quatérnio de rotação L_p .

Em notação matemática escreve-se respectivamente $w' = Mv'$ e $w' = L_p(v')$.

Dessa forma, a conexão entre uma matriz de rotação M e um quatérnio (unitário) p, ambos descrevendo a mesma rotação, é obtida da equação $Mv' = pv'p^*$.

Por conseguinte, desenvolvendo $pv'p^*$ esse produto chega-se que

$$pv'p^* = (2p_0^2 - 1)v' + 2(p' \cdot q')p' + 2p_0(p' \times v').$$

Para verificar isso, seja

$p = (p_0, p')$, $v' = (0, v')$ e $p^* = (p_0, -p')$, então

$$pv'p^* = (p_0, p')(0p_0 - v' \cdot (-p'), -0p' + p_0v' + v' \times (-p')) =$$

$$(p_0, p')(v' \cdot p', \ \ p_0v' - v' \times p') =$$

$$(p_0(v' \cdot p') - p' \cdot (p_0v' - v' \times p'), \ \ p_0(p_0v' - v' \times p') + (v' \cdot p')p' + p' \times (p_0v' - v' \times p')) =$$

$$(p_0(v' \cdot p') - p_0(p' \cdot v') + p' \cdot (v' \times p'), \ \ p_0^2v' + p_0p' \times v' + (v' \cdot p')p' + p_0p' \times v' + p' \times (v' \times p') =$$

$$(p' \cdot (v' \times p'), \ \ p_0^2v' + (v' \cdot p')p' + 2p_0v' \times p' + (p' \cdot v')p' - (p' \cdot p')v') =$$

$$(0, \ \ p_0^2v' - (p' \cdot p')v' + 2(p' \cdot v')p' + 2p_0v' \times p')$$

Assim, $Mv' = (2p_0^2 - 1)v' + 2(p' \cdot q')p' + 2p_0(p' \times v')$.

Resolvendo essa seguinte igualdade entre matrizes, chega-se:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_0^2 - 1 + 2p_1^2 & 2p_1p_2 - 2p_0p_3 & 2p_1p_3 + 2p_0p_2 \\ 2p_1p_2 + 2p_0p_3 & 2p_0^2 - 1 + 2p_2^2 & 2p_2p_3 - 2p_0p_1 \\ 2p_1p_3 - 2p_0p_2 & 2p_2p_3 + 2p_0p_1 & 2p_0^2 - 1 + 2p_3^2 \end{pmatrix}.$$

Assim, os componentes do quatérnio p, em termos dos elementos da matriz de rotação M, podem ser obtidos a partir dos seguindo os casos:

Caso 1: A soma da diagonal principal é maior ou igual a zero, isto é,

$$m_{11} + m_{12} + m_{33} \geq 0.$$

Tem-se:

$$p_0 = \frac{1}{2}\sqrt{m_{11} + m_{22} + m_{33} + 1}$$
$$p_1 = \frac{m_{32} - m_{23}}{4p_0}$$
$$p_2 = \frac{m_{13} - m_{31}}{4p_0}$$
$$p_3 = \frac{m_{21} - m_{12}}{4p_0}.$$

Caso 2: A soma da diagonal principal é menor do que zero, isto é,

$$m_{11} + m_{12} + m_{33} < 0 \quad \text{e} \quad m_{11} \geq max\left\{m_{22}, m_{33}\right\}.$$

Tem-se:

$$p_1 = \frac{1}{2}\sqrt{m_{11} - m_{22} - m_{33} + 1}$$
$$p_0 = \frac{m_{23} - m_{32}}{4p_1}$$
$$p_2 = \frac{m_{12} + m_{21}}{4p_1}$$
$$p_3 = \frac{m_{13} + m_{31}}{4p_1}.$$

Caso 3: A soma da diagonal principal é menor do que zero, isto é,

$$m_{11} + m_{22} + m_{33} < 0 \quad \text{e} \quad m_{22} \geq max\left\{m_{11}, m_{33}\right\}.$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\sqrt{-m_{11} + m_{22} - m_{33} + 1}$$
$$p_2 = \frac{m_{31} - m_{13}}{4p_2}$$
$$p_1 = \frac{m_{12} + m_{21}}{4p_2}$$

$$p_3 = \frac{m_{23} + m_{32}}{4p_2}.$$

Caso 4: A soma da diagonal principal é menor do que zero, isto é,

$$m_{11} + m_{22} + m_{33} < 0 \ \text{ e } \ m_{33} \geq max\left\{m_{11}, m_{22}\right\}.$$

$$p_3 = \frac{1}{2}\sqrt{-m_{11} - m_{22} + m_{33} + 1}$$
$$p_0 = \frac{m_{12} - m_{21}}{4p_3}$$
$$p_1 = \frac{m_{13} + m_{31}}{4p_3}$$
$$p_2 = \frac{m_{23} + m_{32}}{4p_3}.$$

Já, para obter a matriz de rotação a partir de um quatérnio p é suficiente construir a matriz de rotação M, de tal forma que seus elementos sejam dados em termos das componentes do quatérnio pela igualdade entre matrizes dada acima.

6.3 CONVERSÃO ÂNGULOS DE EULER – QUATÉRNIO

Considere as três rotações do sistema xyz. Primeiro, o sistema sofre uma rotação no eixo x de um ângulo ϕ. Em seguida, o novo sistema de coordenadas $x'y'z'$ sofre uma rotação no eixo y' de um ângulo θ.

Por fim, o novo sistema $x"y"z"$ sofre uma rotação no eixo $z"$ de um ângulo ψ, resultando um novo sistema de coordenadas $x_1y_1z_1$. Os três ângulos, ϕ, θ e ψ, determinam a orientação do novo sistema de coordenadas de forma única, e são os *ângulos de Euler.*

São doze as possíveis sequências para representação de uma rotação no espaço $\mathbb{R}^3$ utilizando os ângulos de Euler.

Aqui será utilizada a sequência na qual o primeiramente eixo sobre x, e depois sobre o eixo y e finalmente sobre o eixo z e também já era nas duas operações anteriores.

Para fazer uma representação de duas base Segundo (**??**) "Desta forma, a partir de duas bases ortonormais definidas, obtêm-se os ângulos $phi(\phi)$, theta (θ) e psi (ψ). Assim, através das equações abaixo,faz-se a conversão dos ângulos de Euler para os quatérnions:"

$$q_0 = \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}$$

$$q_1 = \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} - \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}$$

$$q_2 = \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}$$

$$q_3 = \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}.$$

Por exemplo, se $\phi = 45$, $\theta = 45$ e $\psi = 30$, então $q = (0,862,\ \ 0,250,\ \ 0,433,\ \ 0,079)$.

Uma forma interessante de notação para representar um quatérnio unitário e que facilita a sua representação é apresentar sua parte escalar em graus e sua parte vetorial em coordenadas esféricas (longitude, latitude e raio). E neste caso, a parte escalar foi normalizada (norma euclidiana 1) para representações em uma esfera unitária de raio 1.

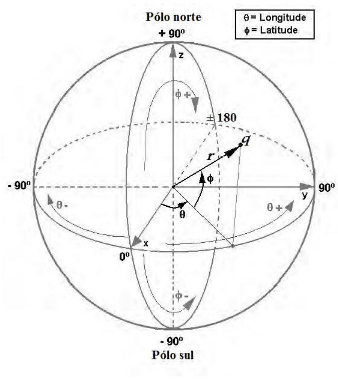
$$\text{ângulo de rotação} = \theta_{rot} = 2\cos^{-1}(q_0)\frac{180}{\pi}$$

$$\text{Latitude} = tg^{-1}\left(\frac{q_3}{\sqrt{(q_1)^2 + (q_2)^2}}\right)\frac{180}{\pi}$$

$$\text{longitude} = tg^{-1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right)\frac{180}{\pi}.$$

A figura 4 abaixo ilustra uma representação da parte vetorial de um quatérnio p através de coordenada esférica.

Figura 4 – Representação da parte vetorial normalizada de um quatérnio P através das coordenadas esféricas (longitude $= \theta$, latitude $= \phi$ e raio $= r$)



Fonte:ime.unicamp.br

Portanto se trata de algumas aplicações voltadas a biomecânica e as representações usando as coordenadas esféricas, pois será interessante reduzir os números de variáveis a ser apresentadas.

6.4 REPRESENTAÇÃO DE ROTAÇÕES EM 3D COM O USO DOS QUATÉRNIOS

Nessa representação iremos observar, que tera uma utilização das rotações em torno de eixos cartesianos e ângulos. O qual os quatérnios poderá nós fornecer com um sistema de rotação que será usado nas rotações

6.5 ROTAÇÕES EM 2D UTILIZANDO OS NÚMEROS COMPLEXOS

De acordo com vários aspectos, os quatérnios podem ser encarados como uma generalização, no espaço tridimensional, do que os números complexos representam para o espaço bidimensional. Um número complexo é definido através de dois parâmetros, números reais usualmente chamados de a e b.

O números complexo $(0, 1)$, normalmente chamado de i. Portanto, outra forma de representar um número complexo é dessa forma

$$\mathrm{c} = a + bi.$$

De acordo (**??**BIASE,) "*As propriedades de adição e multiplicação dos números complexos são definidas de tal forma que, entre outras propriedades importantes, eles podem ser utilizados para representar rotações no plano.*" Sendo assim cada número complexo é dado por dois parâmetros, que podemos interpretar como umas coordenadas cartesianas planas.

O parâmetro a corresponde a coordenada x e o parâmetro b à coordenada y. Portanto, podemos ver um número complexo como um vetor no plano.

Podemos representar, de outra forma que será importante para operarmos com uma rotação, e uma forma polar, na qual um vetor é descrito através de sua norma e de seu deslocamento angular de rotação anti-horária em torno da origem a partir do eixo dos x.

Em fim, podemos pensar no número complexo sendo uma soma algébrica de um número real com um número imaginário, na forma $a + bi$, como um vetor cartesiano (a, b) ou como um vetor polar (r, θ).

Vamos utilizar a soma de dois números complexos dada simplesmente pela soma vetorial cartesiana, componente a componente, com a qual estamos acostumados, assim:

$$a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$$

ou seja, o mesmo que

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Na multiplicação, temos as seguintes propriedades se multiplicamos os dois números complexos, teremos um vetor que a norma dele é o produto das normas dos vetores assim os multiplicados são os deslocamento angular e tendo a soma como os deslocamentos angulares de cada um dos vetor na coordenadas polares, para isso resulta uma em:

$$(r_1, \theta_1)(r_2, \theta_2) = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2).$$

Nessas propriedades dos deslocamentos angulares que se somam, significa que podemos pensar nas multiplicações entre dois complexos com a mesma operação de uma rotação.

Já de um complexo com a norma unitária, teremos a representação de uma rotação pura, que numa operação de multiplicação poderá não só apenas alterar a orientação de um outro vetor sem que ele se modifique na sua norma.

Sendo assim, em outro caso particular e o imaginário puro i, que será corresponde ao vetor polar no $(1, 90)$, sempre representará uma rotação de anti-horária de 90 graus em torno da sua origem.

Veremos um exemplo mas preciso. Se na multiplicação o vetor cartesiano é $(1, 1)$, que corresponde a um vetor polar ($\sqrt{2}$, 45), pelo qual o vetor cartesiano (0,1), será corresponde ao vetor polar (1,90), sendo assim obteremos o vetor polar $(\sqrt{2}, 45)(1, 90) = (\sqrt{2}, 90 + 45) = (\sqrt{2}, 135)$, que será corresponde ao vetor cartesiano (-1,1).

Neste resultado poderá ser interpretado tanto como o vetor cartesiano $(1, 1)$ ou rotacionado de 90 graus no sentido anti-horário quanto como o vetor é $(1, 0)$ escalado por um fator de $\sqrt{2}$ e rotacionado de 45 graus no sentido anti-horário.

É fácil verificar que como a multiplicação de normas quanto a soma dos ângulos de rotação plana são comutativas, então para a multiplicação de números complexos é, necessário, ser sempre comutativa, como pudemos observar no exemplo acima.

Se observamos as operações de uma forma algébrica, pode ser operado diretamente sobre as coordenadas cartesianas.

Na multiplicação se realizamos na forma algébrica entre os dois complexos, obteremos

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) =$$

$$a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 i a_2 + b_1 i b_2 i =$$

$$a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i + b_1 b_2 i^2.$$

Agora o que devemos fazer com o termo que apareceu i^2. Qual será o seu significado. Suponhamos que:

Como seria fazer valer algumas propriedades previamente exposto de uma multiplicação, então somos levados a concluir que i^2 deverá calcular como a multiplicação de um vetor cartesiano (0,1) por si mesmo.

Dessa forma a multiplicação do vetor polar (1,90) por si mesmo, cujo resultado é (1,180). Retornando às coordenadas cartesianas, verificamos que obtivemos o vetor (-1,0).

Melhor dizendo que o número i, ao operar uma rotação de 90 graus sobre o vetor (0,1), produz o vetor (-1,0). Logo,

$$i^2 = -1.$$

Concluímos que podemos agora escrever a expressão final dessa multiplicação :

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

Agora com essas definições para as operações envolvendo números complexos, conseguimos representar e operar as orientações e rotações bidimensionais de uma forma prática e automática.

7 CONCLUSÃO

Tendo por base os estudos desses conceitos dos Quatérnios , apresentados neste trabalho, constata-se então que tal temática traz singularidades diferentes, o que faz que os Quatérnios tornem-se um mecanismo de estudo tanto quanto interessante, talvez assim sendo por ser ainda de certa forma desconhecida pelos pesquisadores desta área, porém, assim como qualquer outra metodologia de estudo apresenta vantagens e desvantagens, facilidades e dificuldades, mas de fato, o que o difere, é números utilizados em suas aplicações, sim os números, o uso dos números complexos ou imaginários, que apenas o uso deles já representa a tamanha complexidade de tal assunto, o que faz com que muitos estudiosos, aprofundem-se mais em pesquisas sobre Quatérnios,para de alguma forma conseguir compreender este artifício matemático magnífico, que infelizmente ainda desconhecido.Com esse estudo espero ter ajudado aos estudante da UEPB para pesquisar mas , e ser como base para outros trabalhos de conclusão de curso. Entretanto, vale ressaltar que sua utilização não se limita a matemática, mas estendendo-se por variadas ciências, como a computação. Por conseguinte, podemos concluir que os quatérnios, têm sim semelhanças e algumas características de outros tipos de mecanismos de estudo, porém têm peculiaridades únicas, o que os faz uma temática de estudo intrigante e ao mesmo tempo fascinante.felizmente ainda desconhecido.

REFERÊNCIAS

BATISTA, Eliezer e Santos, Michel Valmor dos. Rotações, Quatérnions e Álgebras de Clifford – Unicamp: Campinas, 2012.

BIASI, S. C. e. G. M. Utilização de Quatérnios para representação de rotações em 3D. Citado na página 51.BOYER, Carl B., História da Matemática, Edgard Blücher, São Paulo, 1974.

EVES, Howard, Introdução à História da Matemática, Unicamp, Campinas, 1997.

IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática, 6. Vol.1, 7o Edição. São Paulo: Atual, 2005.

NEVES, Robson Coelho. Os Quatérnios de Hamilton e o Espaço - Rio de Janeiro, 2008.

NOGUEIRA, Eduardo Arantes; MARTINS, Luis E. Barreto; BRENZIKOFER, Rener. Modelos Matemáticos nas ciências não - exatas. São Paulo: Blucher, 2008.

SANTIAGO, Paulo Roberto Pereira. Rotações tridimensionais em biomecânica via quatérnions: aplicação na análise dos movimentos esportivos – Rio Claro, 2009.

SANTOS, Michel Valmor dos. Números Complexos, Quatérnions e Rotações – Florianópolis, 2012.

SILVA , ADALSON COSTA DA; PEREIRA, J. M. e. S. L. F. L. Os Complexos, 0s Quatérnios e os Octônios: Os Números imaginários. Citado na página 16.