UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

IDALIANE VIRGÍNIA VICENTE SILVA

CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO UTILIZANDO ORIGAMIS MODULARES

CAMPINA GRANDE - PB
2019

IDALIANE VIRGÍNIA VICENTE SILVA

CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO UTILIZANDO ORIGAMIS MODULARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof.ª Me Kátia Suzana Medeiros Graciano

CAMPINA GRANDE - PB
2019

S586c Silva, Idaliane Virgínia Vicente.

Construção dos poliedros de Platão utilizando origamis modulares [manuscrito] / Idaliane Virginia Vicente Silva. - 2019.

56 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano , Departamento de Matemática - CCT."

1. Geometria. 2. Poliedros de Platão. 3. Origamis modulares. 4. Material didático. I. Título

21. ed. CDD 516

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

IDALIANE VIRGÍNIA VICENTE SILVA

CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO UTILIZANDO ORIGAMIS MODULARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Aprovada em: 14/08/2019.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof.ª Me Kátia Suzana Medeiros Graciano (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Castor da Paz Filho

Prof. Me. Castor da Paz Filho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana Freitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Aos meus pais, pela dedicação, companheirismo e amizade, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a DEUS que me deu o dom da vida e por me abençoar todos os dias com o seu amor infinito, sempre ao meu lado em todos os momentos da minha vida. Que me deu forças para não desistir e continuar firme e forte nessa jornada acadêmica. Obrigada por todas as vitórias alcançadas.

Agradeço a todos que estiverem presentes que me ajudaram para a realização desse trabalho, em especial, aos meus pais, que palavras não seriam suficientes para agradecer, pois sem eles eu não seria quem sou hoje. Minha amada mãe, Josefa Maria e meu querido pai, Antônio Izauri (in memorian) que foram fundamentais para a minha formação pessoal e profissional, por todo amor, carinho e dedicação, por todo o incentivo e esforço para que eu chegasse até aqui. A vocês, serei eternamente grata.

Aos meus irmãos, Caio César e Isaac Newton que mesmo de longe me deram o apoio necessário para eu conseguisse chegar nessa etapa da minha vida.

Ao meu amado e querido esposo, Leandro da Silva, por toda sua paciência, pelo o respeito e por ter suportado todas as minhas crises de estresses, por achar que não iria conseguir. Seu suporte foi fundamental para que eu conseguisse realizar esse sonho, sou grata por todos seus conselhos e incentivo na minha vida profissional.

Aos meus professores do centro de ciência e tecnologia, no qual eu tive o orgulho e prazer de ter sido aluna e em especial a minha querida orientadora Prof.ª Me Kátia Suzana Medeiros Graciano, por toda dedicação, paciência, apoio e incentivo que foram indispensáveis para a realização desse trabalho. Sem ela, eu não conseguiria.

A minha querida amiga de infância, Suzana Vieira de Freitas (in memorian), que infelizmente não viu esse sonho se realizar, mas graças a ela, escolhi a profissão certa, obrigada por toda sua ajuda, conselhos e ensinamento nessa jornada acadêmica. Obrigada amiga, sentirei eternas saudades.

Aos meus amigos de graduação, Andrea Montenegro, Cinthia Silva, Girlan Guedes, Klecio Emanuel e Joelma Alves pela amizade e parceria na vida acadêmica, pelas as tardes de estudos e aprendizados. Por todos os momentos incríveis que passamos juntos.

Aos meus amigos e amigas do trabalho, que me incentivaram e me apoiaram para a conclusão do curso.

Por fim, os meus agradecimentos se estendem a todos que, diretamente e indiretamente contribuíram de alguma forma para a realização desse trabalho.

A todos, o meu muito obrigado!

“A parte que ignoramos é muito maior que tudo quanto sabemos.”

Platão

RESUMO

O presente trabalho pretende ser um material facilitador da aprendizagem para os alunos do 7º ano do ensino fundamental II, no que diz respeito a compreensão do conteúdo de geometria em específico, os poliedros de Platão, já que é um conteúdo pouco abordado nos livros didáticos e são explorados de maneira sucinta. Utilizamos um recurso didático, lúdico e interessante, que foram as dobraduras, a técnica dos origamis modulares. A utilização de materiais didáticos facilita a compreensão e possibilita ao aluno um melhor entendimento do conteúdo, fazendo com que o mesmo coloque em prática o que foi estudado na teoria, tornando o ato de aprender algo prazeroso. A partir das construções trabalhamos os conceitos e definições de sólidos geométricos. Foi aplicado um questionário simples, antes e depois das construções dos sólidos geométricos utilizando os origamis modulares. Os resultados foram satisfatórios, especificando a melhor absorção dos conceitos geométricos para a maioria dos alunos e ressaltamos que o origami é uma ótima ferramenta metodológica para o ensino da geometria.

Palavras-Chave: Geometria. Poliedros de Platão. Material didático. Origamis modulares.

ABSTRACT

This paper aims to be a learning facilitating material for students of 7th grade elementary school, as regards the understanding of the content of specific geometry, Plato's polyhedra, since it is a content little addressed in textbooks and are explored succinctly. We used a didactic, playful and interesting resource, which were the folding, the technique of modular origami. The use of teaching materials facilitates the understanding and allows the student a better understanding of the content, making it put into practice what was studied in theory, making the act of learning something pleasurable. From the constructions we work the concepts and definitions of geometric solids. A simple questionnaire was applied before and after the construction of geometric solids using modular origami. The results were satisfactory, specifying the best absorption of geometric concepts for most students and we emphasize that origami is a great methodological tool for teaching geometry.

Keywords: Geometry. Plato's polyhedra. Courseware. Modular origami.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Tsuru.. 15
Figura 2 – Platão.. 18
Figura 3 – Leonhard Euler.. 29
Figura 4 – Linhas ou contornos.. 21
Figura 5 – Região plana... 21
Figura 6 – Sólidos geométricos.. 21
Figura 7 – Poliedro... 22
Figura 8 – Corpos redondos ou não poliedro.. 22
Figura 9 – Outros sólidos geométricos... 22
Figura 10 – Elementos de um poliedro... 23
Figura 11 – Poliedro convexo... 25
Figura 12 – Poliedro não convexo.. 26
Figura 13 – Poliedros regulares... 30
Figura 14 – Poliedro de Platão... 31
Figura 15 – Planificação dos poliedros Platônicos.. 32
Figura 16 – Passo a passo do módulo do triângulo equilátero...................... 37
Figura 17 – Passo a passo do módulo do triângulo equilátero...................... 37
Figura 18 – Passo a passo do módulo do triângulo equilátero...................... 37
Figura 19 – Passo a passo do módulo do quadrado..................................... 38
Figura 20 – Passo a passo do módulo do quadrado..................................... 39
Figura 21 – Passo a passo do módulo do quadrado..................................... 39
Figura 22 – Passo a passo do módulo do quadrado..................................... 40
Figura 23 – Passo a passo do módulo de pentágono regular........................ 40
Figura 24 – Passo a passo do módulo do pentágono regular 41
Figura 25 – Passo a passo do módulo do pentágono regular 41
Figura 26 – Passo a passo do módulo de pentágono regular 41
Figura 27 – Passo a passo do módulo de pentágono regular........................ 42
Figura 28 – Passo a passo do módulo de encaixe.. 42
Figura 29 – Passo a passo do módulo de encaixe.. 43
Figura 30 – Passo a passo do módulo de encaixe 43
Figura 31 – Módulos de encaixe produzidos pelos alunos............................ 44

Figura 32 – Alguns sólidos geométricos construídos pelos os alunos................. 44
Figura 33 – Resolução de um aluno que utilizou a planificação........................... 46
Figura 34 – Momento da construção dos módulos.. 47
Figura 35 – Momento da construção dos sólidos... 48
Figura 36 – Resolução do aluno 6.. 48

SUMÁRIO

1.	Introdução	12
2.	Fundamentação histórica	14
2.1	Breve histórico da geometria	14
2.2	Breve histórico sobre origami	15
2.3	O origami no ensino da geometria	16
2.4	Uma breve biografia dos matemáticos	17
2.4.1	Platão	17
2.4.2	Leonhard Euler	19
3.	Fundamentação teórica	21
3.1	Figuras geométricas	21
3.2	Poliedros convexos	21
3.3	Relação de Euler	23
3.3.1	Poliedros Eulerianos	26
3.4	Poliedros de Platão	26
3.4.1	Propriedade	26
3.4.2	Consequência	29
3.4.3	Nomenclatura dos poliedros de Platão	29
3.5	Poliedros Regulares	30
3.5.1	Propriedades	30
3.5.2	Planificação dos poliedros de Platão	31
4.	Metodologia	33
4.1	Procedimentos metodológicos	33
4.2	Descrição da atividade proposta	34
4.3	Construção dos poliedros de Platão	35
4.3.1	Módulo do triângulo equilátero	36
4.3.2	Módulo do quadrado	38
4.3.3	Módulo do pentágono regular	40
4.3.4	Módulo de encaixe	42
5.	Resultados e discussões	45
5.1	Resultados sem a utilização da construção dos poliedros de Platão utilizando origamis modulares	45

5.2 Resultados com a utilização da construção dos poliedros de Platão utilizando origamis modulares... 47
6. Conclusão.. 50
Referências.. 51
Apêndice.. 53

1. INTRODUÇÃO

O trabalho que desenvolvemos parte da premissa de ser um material facilitador da aprendizagem para os alunos do ensino fundamental II anos finais, cujas aplicações foram feitas na turma do 7º ano em uma escola particular da cidade de Campina Grande - PB. A metodologia proposta partiu do questionamento de alguns alunos que seria mais fácil “pegar” no sólido geométrico e analisar seus elementos, do que apenas enxergar sua planificação e o esboço no papel. O uso dos origamis modulares como um material concreto possibilita ao aluno a manipulação desses sólidos de maneira lúdica. O material utilizado que foram as dobraduras, além de ser um recurso facilitador e acessível para o professor, também estimula o raciocínio lógico do aluno, ajudando a desenvolver o pensamento geométrico e a habilidade de visualização espacial.

Então, sentimos a necessidade de procurar um recurso didático, que pudesse facilitar a compreensão do conteúdo abordado em sala, no qual escolhemos os Poliedros de Platão que são cincos sólidos geométricos (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro) e são conhecidos por terem sido estudados pelos gregos desde a antiguidade, é um assunto importante e muito interessante, pois o mesmo faz uma relação com os elementos da natureza. Vale salientar que é um conteúdo abordado de maneira sucinta e pouco explorado em alguns livros didáticos.

Ao trabalharmos de forma tradicional uma aula de geometria espacial, ou seja, uma aula expositiva e dialogada, que tem como subsidio apenas o quadro, pincel, instrumentos de desenho geométrico e o livro didático como suporte, iremos nos deparar com duas grandes dificuldades: a do professor de matemática para desenhar figuras tridimensionais no quadro e dos alunos de entender o que foi desenhando e transcrever essa imagem para o caderno. Por isso é importante despertar o interesse dos professores e dos alunos nas aulas de geometria. De acordo com os PCN’S,

> “No entanto, a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que

> favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações”. (BRASIL, 1998, pág. 122)

O trabalho obteve a seguinte estrutura, no próximo capítulo, iremos abordar sobre uma breve história da geometria, um pouco da origem dos origamis, a relação dos origamis na geometria e a biografia dos filósofos, Platão e Euler e suas contribuições para a matemática. No terceiro capítulo, apresentaremos algumas definições, demonstrações e teoremas sobre geometria espacial, especificando os poliedros convexos, poliedros regulares e a relação de Euller. No quarto capítulo, além de abordar a metodologia que aplicamos na sala de aula, faremos as construções dos poliedros de Platão utilizando os origamis modulares e as aplicações da relação de Euler nesses sólidos, para melhor assimilação do conteúdo nas turmas do 7º ano do ensino fundamental II. E no último capítulo apresentaremos os resultados e discussões ocorridas na sala de aula no momento do trabalho, sobre os questionários (apêndice) respondidos pelos alunos e as construções dos poliedros de Platão.

Por fim, apresentaremos as nossas considerações finais e referências.

2. FUNDAMENTAÇÃO HISTÓRICA

Neste capítulo abordaremos um breve histórico da geometria, um pouco sobre a origem do origami, uma arte milenar, que foi passada de geração em geração, na China e no Japão, concluindo com algumas contribuições feitas por Platão e Euler para o desenvolvimento da matemática.

2.1 BREVE HISTÓRICO DA GEOMETRIA

A geometria está presente no nosso cotidiano e utilizamos dos conhecimentos geométricos em tudo que fazemos. Estudar geometria é fundamental para o desenvolvimento do ser humano, pois auxilia na compreensão do mundo, desenvolve o raciocínio lógico e permite um melhor entendimento das outras áreas de conhecimento, sendo assim à geometria atribui-se uma grande importância na vida de qualquer individuo. Um dos primeiros relatos que o homem teve sobre a geometria partiram da necessidade em entender o lugar onde viviam. Dessa forma o termo geometria tem a derivação grega, geo = terra + metria = medição, logo geometria significa medição de terra.

Não temos como saber de fato a origem da geometria, mas de acordo com Boyer (1974 – página 4) “as afirmações da origem da matemática, seja aritmética ou geométrica, são necessariamente arriscadas, pois os primeiros dos assuntos são mais antigos que a arte de escrever” e que “Heródoto mantinha que a geometria se oriunda no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade da prática de fazer novas medidas de terra após cada inundação anual no vale do rio”.

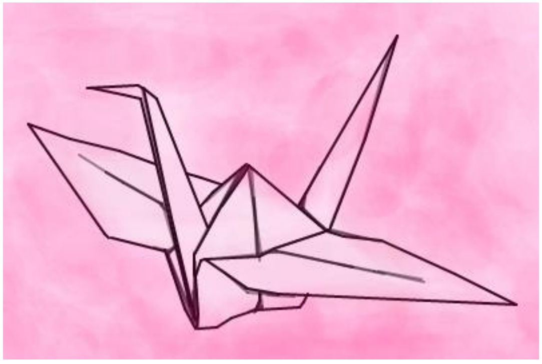
Segundo Eves (2011), as primeiras descobertas feitas a respeito da geometria são antigas e se originou com uma simples observação e reconhecimento de figuras, comparar tamanhos e formas. Uma das primeiras definições e conceitos geométricos a serem desenvolvidos e analisados foi à noção de distância, a necessidade de demarcar terras levou a noção das figuras mais simples, por exemplo: quadrado, retângulo e triângulo.

2.2 BREVE HISTÓRICO SOBRE O ORIGAMI

O origami é uma arte antiga tradicional japonesa, que tem o significado ori = dobrar + kami = papel, ou seja, dobrar papel e segundo (RAFAEL, 2011) em qualquer livro que se trata da especialidade, pode-se ler: “O origami é a arte japonesa de dobrar papel”. A origem do origami está diretamente ligada a história do papel, que por sua vez chegou ao Japão por volta de VI d.C. e foi nesse país que o origami se desenvolveu tal como conhecemos hoje.

De acordo com (RAFAEL, 2011), a história pode ser dividida em três grandes períodos: O período Heian (794 – 1185), nesse tempo o origami era utilizado apenas para divertimento das classes mais ricas, pois eram as únicas que podiam comprar o papel. O período Muromachi (1338 – 1573), nessa época o papel se tornou mais acessível e o origami começou a ser utilizado para diferenciar através dos adornos que as pessoas usavam as inúmeras classes sociais. E por fim, o período Tokugawa (1603 – 1867) onde surgiram os primeiros livros de origami, nessa época ficou marcado como o período da democratização do papel. A dobradura mais conhecida visualmente perfeita e antiga que se tem conhecimento é o tsuru, uma ave sagrada do Japão e que para a sua construção precisamos apenas de uma folha de formato quadrado.

Figura 1: Tsuru



Fonte: https://gartic.com.br/iamalone/desenho-livre/tsuru

As formas mais originais dos origamis dispensam outros recursos, como por exemplo, a cola, régua ou tesoura para auxiliar nas suas construções, mas na sala de aula podemos adaptar para ser o mais didático possível, pois o mais importante é analisar sua eficiência e contribuição como um recurso didático.

2.3 O ORIGAMI NO ENSINO DA GEOMETRIA

O origami pode se tornar um grande aliado para o professor nas aulas de geometria, pois é um recurso didático, dinâmico, lúdico e atrativo. Podemos utilizar essa arte de inúmeras maneiras na geometria, principalmente na exploração das propriedades geométricas, reconhecimento de figuras, noções sobre ângulos e entre outros. Na construção e na manipulação dos sólidos geométricos, Ribeiro comenta que quando utilizamos a arte do origami são desenvolvidos alguns benefícios e aspectos importantes, como o raciocínio lógico, a visualização tridimensional, a identificação das figuras planas, a paciência e criatividade. (RIBEIRO, 2010, pág. 78)

> No origami, enquanto as mãos se movimentam ativam os dois lados do cérebro. A zona do tato, motora e visual está em atividade e os sentimentos são de satisfação, orgulho e alegria ao completar uma dobradura. Outros benefícios do origami são o desenvolvimento da inteligência espacial, atenção, paciência, memória e imaginação.

A utilização do origami (dobraduras) como material concreto no meio educativo (na sala de aula) é muito recente. Alguns estudiosos como Rêgo, Rêgo e Gaudêncio (2003, pág.18) afirmam que:

> “O Origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que o cercam. Com uma atividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Artes”.

Segundo Genova (2008), quem manipula o papel valoriza o movimento das mãos, estimula as articulações e o cérebro, sendo possível estabelecer relações entre a confecção do material concreto e a abstração de conceitos matemáticos estudados, ocasionando aulas mais dinâmicas, lúdicas e atrativas.

O origami é um recurso didático que pode contribuir satisfatoriamente para o entendimento de vários conceitos geométricos ou de propriedades que estejam relacionadas à geometria. A compreensão dos conteúdos pode ser obtida de diferentes formas e utilizando vários recursos. Dentre esses recursos, utilizamos um material acessível e de baixíssimo custo, o papel.

Diante disso, acredita-se que o uso das dobraduras, em especifico o origami como um recurso didático, auxilia com o desenvolvimento do raciocínio investigativo, a criatividade e o senso estético do aluno, além de proporcionar a interação de forma cooperativa como indicam os PCN’S: (BRASIL, 1998, p. 48).

> "Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles".

O origami é um material concreto que desperta nos alunos o interesse pela disciplina de matemática, já que na maioria das vezes eles preferem esse tipo de metodologia para ser trabalhada em aula, pois envolve o lúdico e fazemos a relação do conteúdo que ministramos na sala de aula com o material concreto, com isso facilitamos a visualização tridimensional, desta maneira o aluno não permanece preso apenas ao livro didático e a aula expositiva. Assim o origami contribui para estimular e melhorar na competência e habilidade de concentração, no desenvolvimento da coordenação motora e auxilia no crescimento do conhecimento geométrico.

Utilizaremos essa arte como um dos recursos facilitadores de ensino e aprendizagem na Matemática, de modo que os conteúdos ministrados possam ser visualizados de forma mais lúdica e didática para os alunos.

2.4 UMA BREVE BIOGRAFIA DOS MATEMÁTICOS

Iremos falar um pouco sobre Platão e Euler, que foram grandes matemáticos cuja importância para história da matemática se deve as suas grandes contribuições, em especial na geometria.

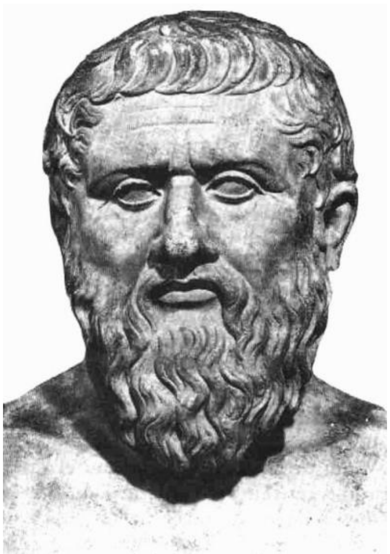
2.4.1 PLATÃO (427 - 347 a.C.)

Foi um filósofo grego e matemático da antiguidade, nasceu em Atenas (ou perto) na Grécia e pertenciam a uma das famílias mais nobres da sociedade. Segundo (Eves, 2011) Platão se tornou discípulo de Sócrates e depois de estudar filosofia com ele, saiu pelo o mundo à procura do saber. Estudou matemática, com Teodoro de Cirene na África e se tornou um amigo particular de Arquitas. Depois de retornar para Atenas por volta de 387 a.C. fundou sua famosa academia. E de acordo com Eves,

> "Quem converteu Platão a uma visão matemática foi certamente Arquitas, um amigo a quem ele visitou na Sicília, 388 a.C.. Provavelmente tenha sido nessa época que ele soube dos cincos sólidos regulares, que eram associados aos quatros elementos da natureza"

E por veneração dos pitagóricos o dodecaedro tinha sido o que Platão levou a considerar o quinto e último poliedro regular, como símbolo do universo. Platão foi muito importante na história da matemática principalmente pelo seu papel inspirador e guia de outros.

Figura 2: Platão



Fonte: http://www.usp.br/aun/antigo/imagens/Platao.jpg

De acordo com Boyer, “a Academia Platônica de Atenas tornou-se o centro de matemática do mundo e dessa escola provieram os principais mestres e pesquisadores durante os meados do quarto século a.C”.

> “Embora o próprio Platão não tenha dado contribuição especifica digna de nota a resultados matemáticos técnicos, ele era o centro da atividade matemática da época e guiava e inspirava seu desenvolvimento. Sobre a sua escola lia-se: “Que ninguém que ignore a geometria entre aqui”, seu entusiasmo pelo assunto fez com que se tornasse conhecido não como matemático, mas como “o criador dos matemáticos”.”. (Boyer, 1974, pág. 62):

Segundo (Eves, 2011, pág. 131), depois de dirigir a Academia por toda sua vida, morreu em Atenas no ano de 347 a.C., com a venerável idade de 80 anos”. E ainda ressalta que quase todos os trabalhos importantes do século IV a.C. foram feitos por amigos ou discípulos de Platão, tornando assim a Academia um elo da matemática dos pitagóricos mais antigos.

2.4.2 LEONHARD EULER (1707 – 1783)

Segundo Boyer, Euler foi um dos mais importantes matemáticos que nasceu na Suíça, na Basileia em 1707, filho de uma família bem estruturada, estudou no campo da teologia, com o incentivo do seu pai, Paul Euler, que era pastor da igreja Calvinista e sonhava que seu filho seguisse seus caminhos. Euler encontrou sua verdadeira vocação na matemática de onde teve o incentivo da Família Bernoulli, pois o mesmo havia estudado matemática com seu amigo, Jacob Bernoulli.

De acordo com (Simmons, 2002), iniciou sua vida acadêmica aos 14 anos, ingressou na Universidade de Basileia, onde inicialmente estudou Medicina, Teologia e Ciências Humanas, dois anos depois, nessa mesma universidade estudou matemática.

Segundo Eves, em 1727, quando Euler tinha 20 anos, com a ajuda de Daniel e Nicolaus Bernoulli, que pertenciam a Academia de São Petersburgo, ele foi indicado membro da instituição, com o retorno de Daniel para seu país, para então ocupar a cadeira de matemática na Universidade de Basileia, Euler tornou-se cabeça da seção de matemática na Academia.

Figura 3: Leonhard Euler

Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/leonhard-euler/

Após 14 anos de dedicação na academia de São Petersburgo, a convite de Frederico, o Grande, Euler aceita o convite para se tornar o chefe da seção de matemática da Academia em Berlim, onde ele se manteve durante 25 anos.

Segundo (Eves, 2011) e (Boyer, 1974) desde 735, Euler era cego do olho direito, mas sua produtividade não foi prejudicada e mesmo com essas condições não diminuiu em nada sua produção de pesquisa. Depois que o mesmo retornou para São Petersburgo, ficou completamente cego, a cegueira poderia ser um obstáculo, mas mesmo diante dessas dificuldades ele continuou o seu trabalho.

> “A cegueira poderia parecer um obstáculo intransponível para um matemático, mas, assim como a surdez de Beethoven não o impediu de compor, Euler conseguiu manter extraordinária atividade produtiva depois de sofrer essa perda. Ajudado por uma memória fenomenal e por um poder de concentração incomum e imperturbável, Euler continuou seu trabalho criativo com a ajuda de um secretário que anotava suas ideias, expressas verbalmente ou escrito com giz num grande lousa”. (Eves, 2011, pág. 472)

De acordo com (Eves, 2011) “Euler foi um escritor prolífero, sem dúvida insuperável quanto a isso na história matemática, não há ramo na matemática em que seu nome não se figure”. Morreu inesperadamente em 1783 com 76 anos, mesmo com a sua carreira longa, ele nunca ocupou um cargo de professor. Publicou mais de 530 trabalhos entre livros e artigos durante toda a sua vida e mesmo depois da sua morte, deixou um acervo de manuscritos que melhoraram as publicações da Academia de São Petersburg que continuou publicando por mais de 47 anos.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

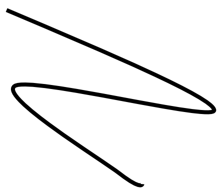
Neste capítulo iremos abordar alguns conceitos, definições e teoremas sobre geometria espacial, em específico os sólidos geométricos, relação de Euler e os poliedros regulares, poliedros de Platão.

3.1 FIGURAS GEOMÉTRICAS

Tudo que possui forma é considerado como uma figura geométrica, nosso cotidiano está cercada de objetos que nos lembram dessas figuras, é possível encontrá-las em casa, na escola, na rua, enfim, em quase todos os lugares. As figuras geométricas podem ser classificadas de diversas maneiras, de acordo com as dimensões, sendo assim podemos classificar usando linhas, regiões planas e sólidos geométricos.

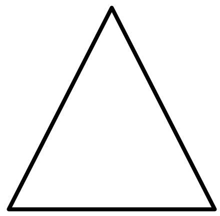
Definição 1: Linhas ou contornos são figuras unidimensionais, ou seja, com uma dimensão: comprimento. Podem ser classificadas em abertas e fechadas, as regiões planas são figuras bidimensionais, ou seja, com duas dimensões: comprimento e largura e o sólido geométrico são figuras tridimensionais, ou seja, três dimensões: comprimento, largura e altura.

Figura 4: Linhas ou contornos.



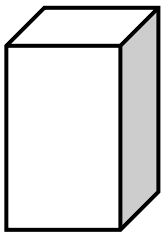
Fonte: próprio autor

Figura 5: Região Plana.



Fonte: próprio autor

Figura 6: Sólidos geométricos.

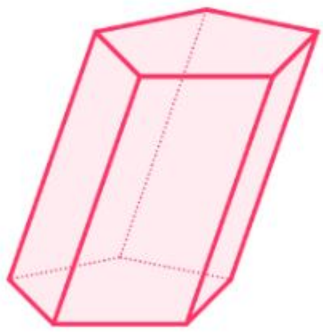


Fonte: próprio autor

3.2 POLIEDROS CONVEXOS

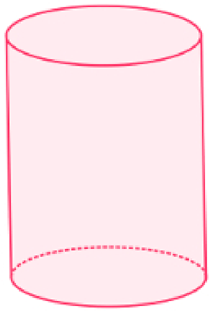
Definição 2: Os sólidos geométricos que possuem apenas faces planas: são os poliedros. Há outros que têm pelo menos uma parte não plana (“arredondada”) que faz com que eles rolem facilmente: são os não poliedros, conhecidos como corpos redondos. E há alguns sólidos geométricos que nem são poliedros e nem são corpos redondos, classificado assim em outros sólidos geométricos, eles possuem partes não planas, mas não rolam facilmente.

Figura 7: Poliedros



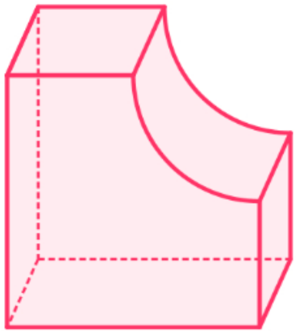
Fonte: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/solidos-geometricos.htm

Figura 8: Corpos redondos ou não poliedros



Fonte: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/solidos-geometricos.htm

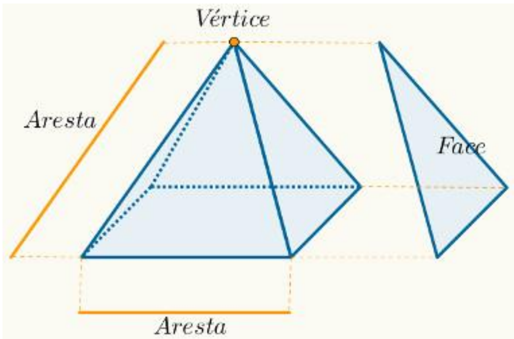
Figura 9: Outros sólidos geométricos



Fonte: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/solidos-geometricos.htm

Definição 3: Os elementos de um poliedro são: os vértices, as arestas e as faces. Cada vértice é um ponto, e o encontro de arestas. Cada aresta é um segmento de reta e o encontro de duas faces. E cada face é uma forma plana poligonal.

Figura 10: Elementos de um poliedro



Fonte: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/poliedros.html

Definição 4: Superfície poliédrica limitada convexa é uma reunião de um número finito de polígonos planos e convexos (ou regiões poligonais convexas), tais que:

a) Dois polígonos não estão num mesmo plano;

b) Cada lado de um polígono não está em mais do que dois polígonos;

c) Havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno.

d) O plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semiespaço (condição de convexidade);

As superfícies poliédricas limitadas convexas que tem contornos são chamadas de abertas. As que não têm contorno são chamadas de fechada.

Elementos: uma superfície poliédrica limitada e convexa tem:

- Faces: são os polígonos.
- Arestas: são os lados dos polígonos.
- Vértices: são os vértices dos polígonos.
- Ângulos: são os ângulos dos polígonos.

3.3 RELAÇÃO DE EULER

De acordo com DOLCE, para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação $V – A + F = 2$, em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

Demonstração:

a) Por indução finita referente ao número de faces, vamos provar de caráter preliminar, que, para uma superfície poliédrica e limitada convexa e *aberta*, vale a relação:

$$V_A + A_A + F_A = 1$$

Em que,

V_A é o número de vértices,

A_A é o número de arestas e

F_A é o número de faces da superfície poliédrica limitada aberta

1) Para $F_A = 1$.

Neste caso a superfície se reduz a um polígono plano convexo de n lados e, então, $V_A = n$, $A_A = n$. Temos:

$$V_A – A_A + F_A = n – n + 1 = 1 \rightarrow V_A – A_A + F_A = 1.$$

Logo, a relação está verificada para $F_A = 1$.

2) Admitindo que a relação vale para uma superfície de F' faces (que possui V' vértices e A' arestas), vamos provar que também vale para uma superfície de F' + 1 faces (que possui F'+ 1 = F, faces, V_A vértices e A_A arestas).

Por hipótese, para a superfície de F' faces, A' arestas e V' vértices vale:

$$V' – A' + F' = 1$$

Acrescentando a essa superfície (que é aberta) uma face de p arestas (lados) e considerando q dessas arestas (lados) coincidem com arestas já existentes, obtemos uma nova superfície com F_A faces, A_A arestas e V_A vértices tais que:

$$F_A = F' + 1.$$

$$A_A = A' + p – q \text{ (q arestas coincidirem)}$$

$$V_A = V' + p – (q + 1) \text{ (}q\text{ arestas coincidirem, q + 1 vértices coincidem).}$$

Formando a expressão $V_A - A_A + F_A$ e substituindo os valores acima, vem:

$$V_A - A_A + F_A = V' + p - (q + 1) - (A' + p - q) + (F' + 1) =$$
$$V' + p - q - 1 - A' - p + q + F' + 1 = V' - A' + F'$$

Com $V_A - A_A + F_A = V' - A' + F'$ provamos que essa expressão não se altera se acrescentarmos (ou retirarmos) uma face da superfície.
Como, por hipótese, $V' - A' + F' = 1$, vem que $V_A - A_A + F_A = 1$ o que prova a relação preliminar.

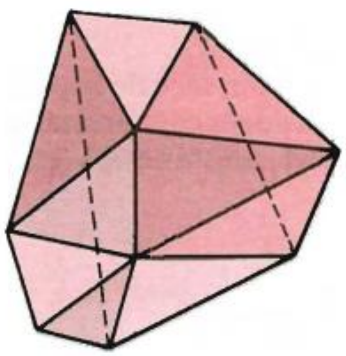
b) Tomemos a superfície de qualquer poliedro convexo ou qualquer superfície poliédrica limitada convexa fechada (com V vértice, A arestas e F faces) e dela retiremos uma face. Ficamos, então, com uma superfície aberta (com V_A vértices, A_A arestas e F_A faces) para qual vale a relação:

$$V_A - A_A + F_A = 1$$

Como,
$V_A = V$, $A_A = A$ e $F_A = F - 1$, vem $V - A + (F - 1) = 1$, ou seja, $V - A + F = 2$

Nota: O teorema de Euler está ligado a um conceito que engloba o poliedro convexo, razão pela qual vale para este.
Exemplo 1:

Figura 11: Poliedro Convexo



$V - A + F = 9 - 18 + 11 = 2$

Fonte: DOLCE, Oswaldo e POMPEO.

3.3.1 POLIEDROS EULERIANO

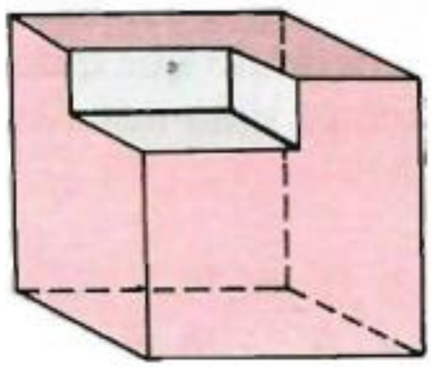
Definição 5: Os poliedros para os quais é válida a relação de Euler são chamados de poliedros eulerianos.

Todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo poliedro euleriano é convexo.

Na figura 11, mostramos um poliedro convexo e euleriano.

Na figura 12, temos um poliedro euleriano, mas não é convexo.

Figura 12: Poliedro não convexo



V + F – A = 14 – 21 + 9 = 2.

Fonte: DOLCE, Oswaldo e POMPEO.

3.4 POLIEDROS DE PLATÃO

Definição 6: Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

a) Todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas;

b) Todos os ângulos poliédricos tem o mesmo número (m) de arestas;

c) Vale a relação de Euler, V – A + F = 2. (pode-se dizer é um poliedro euleriano)

3.4.1 Propriedade: Existem cinco e somente cinco, classes de poliedros de Platão.

Demonstração

Usando as condições que devem ser verificadas por um poliedro de Platão, temos:

a) Cada uma das F faces tem n arestas ($n \geq 3$), e com cada aresta está em duas faces;

$$n.F = 2.A \rightarrow F = \frac{2A}{n} \qquad (1)$$

b) Cada um dos V ângulos poliédricos tem m arestas (m ≥ 3), e como cada arestas contém dois vértices:

$$m.V = 2.A \rightarrow V = \frac{2A}{m} \qquad (2)$$

c) V – A + F = 2 (3)

Substituindo (1) e (2) em (3) e depois dividindo por 2A, obtemos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \qquad (4)$$

Sabemos que n ≥ 3 e m ≥ 3. Notemos, porém, que se m e n fossem simultaneamente maiores que 3 teríamos:

$m > 3 \rightarrow m \geq 4 \rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4}$ (5)

$n > 3 \rightarrow n \geq 4 \rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4}$ (6)

Somando (5) e (6), temos:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq 0$$

O que contraria a igualdade (4), pois A é um número positivo.

Concluímos então que, nos poliedros de Platão, m = 3 ou n = 3 (isto significa que um poliedro de Platão possui, obrigatoriamente, triedro ou triângulo):

1. Para m = 3. (supondo que tem triedro)

Em (4) vem:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \rightarrow n < 6$$

Então, n = 3 ou n = 4 ou n = 5.

(respectivamente faces triangulares ou quadrangulares ou pentagonais)

m	n
3	3
3	4
3	5

2) Para n= 3 (supondo que tem triângulo)

Em (4) vem:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \rightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \rightarrow m < 6$$

Então, m = 3 ou m = 4 ou m = 5.

(respectivamente ângulos triédricos ou tetraédricos ou pentaédricos)

m	n
3	3
4	3
5	3

Resumindo os resultados encontrados no 1 e 2, concluímos que os poliedros de Platão são determinados pelos pares (m, n) da tabela ao lado, sendo, portanto, cinco, e somente cinco, as classes dos poliedros de Platão.

m	n
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

3.4.2 CONSEQUÊNCIA

Para saber o número de arestas A, o número de faces F e o número de vértices V de cada poliedro de Platão, basta substituir em (4) os valores de m e n encontrados e depois trabalhar com (1) e (2).

Exemplo 2:

Uma das possibilidades encontradas para m e n foi m = 3 e n = 5.

Com esses valores em (4), temos:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{A}\rightarrow\frac{1}{30}=\frac{1}{A}\rightarrow A=30$$

Em (2): $V=\frac{2.30}{3}\rightarrow V=20$

Em (1): $F=\frac{2.30}{5}\rightarrow F=12$

Como é o número de faces que determina nome, o poliedro do nosso exemplo é dodecaedro.

Notemos que m = 3 significa ângulos triédicos (ou triedros) e n = 5, faces pentagonais.

3.4.3 NOMES DOS POLIEDROS DE PLATÃO

Procedemos como indicamos no problema acima, temos, em resumo:

Nomenclatura	**Faces**	**Vértices**	**Arestas**	**m**	**n**
Tetraedro	4 faces triangulares	4	6	3	3
Hexaedro	6 faces quadrangulares	8	12	3	4
Octaedro	8 faces triangulares	6	12	4	3
Dodecaedro	12 faces pentagonais	20	30	3	5
Icosaedro	20 faces triangulares	12	30	5	3

3.5 POLIEDROS REGULARES

Definição 6: Os poliedros regulares são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares iguais e que, em todos os vértices, convergem o mesmo numero de arestas.

3.5.1 Propriedade: Existem cinco, e somente cinco tipos de poliedros regulares.

Demonstração:

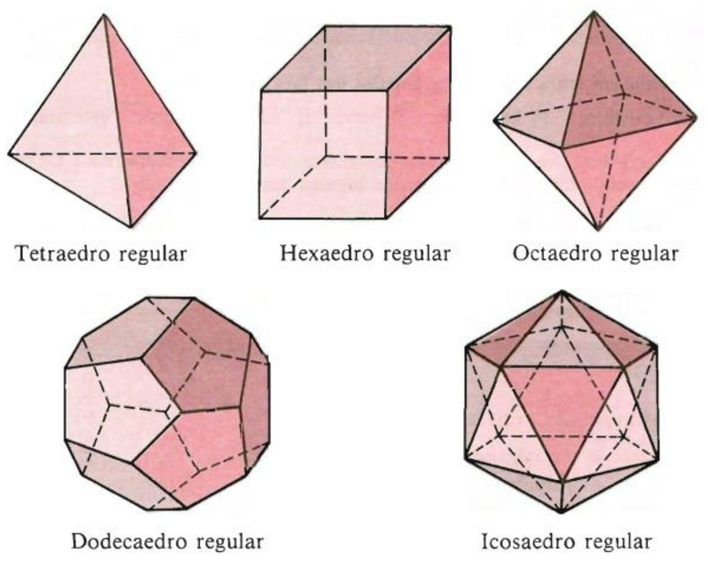
Usando as condições para um poliedro regular, temos:

a) Suas faces são polígonos regulares e congruentes, então todas têm o mesmo número de arestas;

b) Seus ângulos poliédricos são congruentes, então todos tem o mesmo número de arestas.

Por essas conclusões temos que os poliedros regulares são poliedros de Platão e, portanto existem cinco e somente cinco tipos de poliedros regulares: tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.

Figura 13: Poliedros regulares

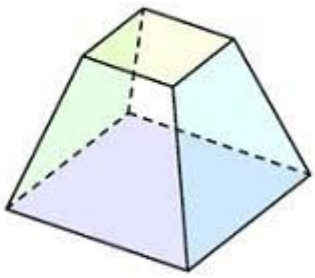


Fonte: DOLCE, Oswaldo e POMPEO.

Observação: Todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é poliedro regular.

Exemplo 3: Na figura 14, temos um poliedro de Platão (pois, todas as suas faces tem-se o mesmo número de arestas, todos os vértices convergem o mesmo número de arestas e é válida a relação de Euler), mas, não é um poliedro regular (pois, suas faces não são polígonos regulares).

Figura 14: Poliedro de Platão



$$V + F – A = 8 + 6 – 2 = 2$$

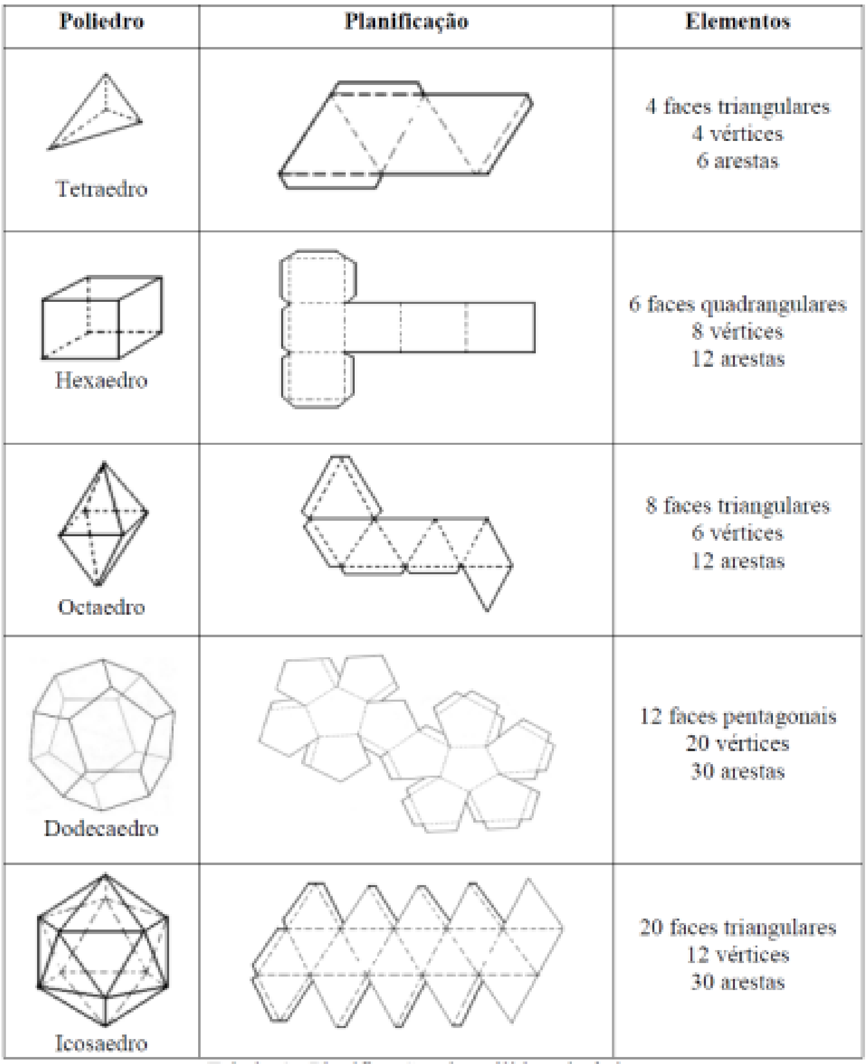
Fonte: https://definicion.de/hexaedro/

3.5.2 PLANIFICAÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO

Definição 7: A superfície de um poliedro, que é formada por superfícies poligonais planas, pode ser projetada sobre um plano, de tal modo que cada uma das faces do poliedro tenha pelo menos um lado em comum com outra face. Obtemos, assim, uma figura plana, que costuma ser chamada de molde do poliedro, planificação da superfície do poliedro ou, simplesmente, planificação do poliedro. As faces de um poliedro podem ser arranjadas de vários modos, desde que cada face esteja ligada a outra por pelo menos um de seus lados.

Na figura 15 a seguir, temos o esboço, planificação e os elementos dos poliedros Platônicos.

Figura 15 – Planificação dos Poliedros Platônicos



Poliedro	Planificação	Elementos
Tetraedro		4 faces triangulares 4 vértices 6 arestas
Hexaedro		6 faces quadrangulares 8 vértices 12 arestas
Octaedro		8 faces triangulares 6 vértices 12 arestas
Dodecaedro		12 faces pentagonais 20 vértices 30 arestas
Icosaedro		20 faces triangulares 12 vértices 30 arestas

Fonte: https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/MC-Mohr-004.498.660-25.pdf

Veremos a metodologia e os procedimentos da utilização do material didático abordado na sala de aula.

4. METODOLOGIA

Neste capítulo vamos abordar a metodologia e os procedimentos da utilização do material concreto para a construção dos poliedros regulares, os poliedros de Platão em sala de aula.

4.1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Evidenciamos na metodologia a importância da história da matemática, e inicializamos a atividade abordando um pouco sobre o conceito, definições e teoremas dos poliedros (destacando os poliedros regulares e o teorema de Euler), comentamos um pouco sobre a história da geometria e de Platão, por ter relacionado os elementos da natureza com os cincos poliedros regulares. Foram utilizados alguns recursos como vídeo curto sobre a construção dos poliedros utilizando as dobraduras, questionário aplicado no início e no final do trabalho, tabelas, objetos concretos no qual utilizamos as dobraduras com e sem colagem (origamis modulares), apesar de que para os especialistas em origamis não se faz o procedimento de colagem nas peças, mas foi sugerido, pois tínhamos um grau de dificuldade para encaixar os módulos e de que eles não se soltassem. Trabalhamos em equipes com o intuito de desenvolver a cooperação nas atividades que foram propostas.

Durante a construção de cada módulo, relembramos alguns conceitos de geometria plana, estabelecendo uma relação com geometria espacial, identificando cada forma e cada elemento que foi estudado.

Com o objetivo de mostrar como a matemática se faz presente no nosso cotidiano foram apresentadas algumas aplicações dos sólidos geométricos, de forma que os alunos pudessem enxergar os sólidos existentes ao nosso redor, contribuindo o despertar do pensamento crítico para a matemática.

Aplicamos um questionário, relacionando a teoria da aula expositiva, que foi utilizado apenas livro didático, quadro e um vídeo. Esse mesmo questionário foi aplicado depois da construção dos poliedros no qual utilizamos dobraduras com e sem colagem (origamis modulares). O objetivo era reduzir as dificuldades no conteúdo proposto e despertar o interesse do aluno com a utilização do material concreto.

4.2 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE PROPOSTA

O trabalho foi realizado com a turma do 7º ano de uma escola particular da cidade de Campina Grande, com o total de 36 alunos. A atividade teve como objetivo principal a construção dos poliedros de Platão utilizando uma ferramenta metodológica de grande importância, tanto para o professor como para o aluno, pois permite que o aluno possa aprender a visualizar e manipular os sólidos geométricos de maneira lúdica e atrativa. Para realizar esse trabalho, foram destinados seis encontros e com duração de 50 minutos cada.

O primeiro encontro foi destinado a uma explicação geral sobre a Geometria Espacial, o reconhecimento dos sólidos geométricos através do seu esboço e sua planificação e os elementos que os compõem, estudamos a definição e sua classificação: corpos redondos e poliedros, a fim de apresentar os Poliedros regulares e relacionar aos poliedros de Platão. Esta aula foi expositiva e dialogada e teve o auxílio apenas do quadro e o livro didático.

No fim desse primeiro encontro explicamos como seriam realizados os próximos encontros, falamos sobre as dobraduras (origamis) e as construções através das planificações, foi pedido para que os alunos fizessem uma pesquisa sobre os poliedros e as dobraduras.

No segundo encontro aplicamos um questionário individual, no qual se encontra no apêndice, que durou em torno de 20 a 30 minutos, sobre o que estudamos e aprendemos no primeiro encontro. Nesse questionário foram colocadas questões subjetivas que envolvem os conceitos de poliedros, poliedros regulares, poliedros de Platão, planificações, relação de Euller e os elementos que compõe os poliedros, pedimos para que os alunos respondessem de acordo com os seus conhecimentos prévios e vistos em sala de aula.

Alguns alunos tiveram dificuldades para definir os poliedros e poliedros regulares, porém, a maior dificuldade para a maioria dos alunos foram diferenciar os elementos que compõe um sólido geométrico e “contar” os elementos dos poliedros tanto de forma planificada como em forma de esboço, ou seja, em 3D, principalmente a quantidade de arestas dos poliedros que possuem o número maior de faces, que são o dodecaedro e o icosaedro.

Os outros três encontros foram para a construção dos poliedros regulares, conhecidos como os sólidos de Platão. A dinâmica utilizada foi à separação da turma em equipes e providenciamos o recurso necessário para a construção dos poliedros platônicos (folha A4 colorida, régua, tesoura e cola). Tiveram como estímulo o trabalho cooperativo de modo que os colegas ajudaram uns aos outros, pois nem todos os alunos possuem habilidades para realizar as dobraduras, mas com a cooperação da turma e com a orientação do professor foi possível obter os resultados esperados das atividades propostas.

Separamos os alunos em equipe com o objetivo de facilitar no momento da montagem dos sólidos, os grupos levaram o material solicitado (folha A4 colorida, régua, tesoura e cola) e foi pedido para que prestassem muita atenção no momento de cada etapa, seguindo corretamente cada passo a passo dos módulos, para então finalizar com a construção dos sólidos.

Na construção de cada sólido geométrico, o aluno também constrói seu conhecimento, relacionando a teoria com a prática, pois cada conceito estudado em sala vai sendo enxergado de forma diferente, a cada dobradura feita para a construção dos módulos, sejam eles, um triângulo equilátero, um quadrado ou um pentágono regular, relacionamos com a geometria plana, e quando construímos e encaixamos os módulos até torna-se o sólido geométrico desejado, relacionamos com a geometria espacial.

Separamos um encontro para a exposição dos sólidos e discussões dos resultados obtidos, e finalizamos com o mesmo questionário realizado no segundo encontro, retiramos desse questionário apenas o esboço e a planificação dos sólidos, pois utilizamos os poliedros de Platão que foram construídos em sala como subsidio para resolução do questionário. Então, para finalizarmos, analisamos o rendimento dos alunos depois da execução do trabalho.

4.3 CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO

Para produzirmos os sólidos geométricos, se faz necessário a construção de módulos, os quais, juntos formaram um poliedro platônico. Para a construção desses módulos utilizamos apenas folha A4, após serem dobrados de acordo com as etapas e o passo a passo para cada tipo de poliedro, resultaremos um módulo, que será um polígono que pode ser (triângulo equilátero, quadrado e o pentágono regular), cada módulo construído podem ter abas, nos quais utilizaremos como encaixe para as montagens dos sólidos ou precisaremos construir um módulo suporte.

Para a dinâmica das aulas sugerimos trabalhar em grupo, de modo que selecionamos alguns alunos para auxiliar aqueles que possuíam dificuldades para a realização das dobraduras, tendo em vista que nem todos possuem habilidades para que conseguíssemos alcançar os resultados esperados.

Para a construção de cada poliedro foram distribuídos para cada grupo o seguinte material:

- Tetraedro – 4 folhas A4 no qual construiremos 4 módulos do triângulo equilátero.
- Hexaedro – 6 folhas A4 e construiremos 6 módulos do quadrado.
- Octaedro – 8 folhas A4 e construiremos 8 módulos do triângulo equilátero.
- Dodecaedro – 12 folhas A4 e construiremos 12 módulos do pentágono.
- Icosaedro – 20 folhas A4 e construiremos 20 módulos do triângulo equilátero.

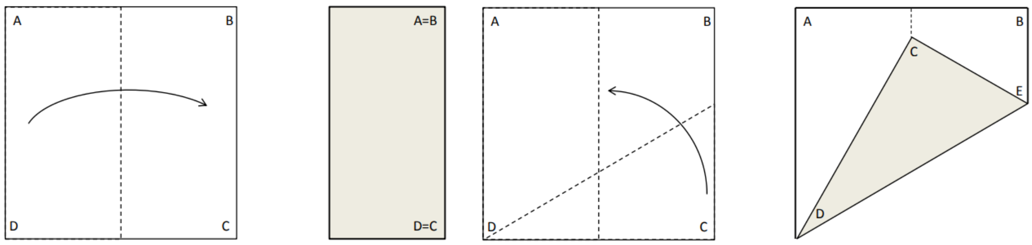
Alguns poliedros foram necessários à utilização da colagem, para que os sólidos que fossem construídos não se desmontassem após as manipulações, são eles: tetraedro, octaedro e icosaedro, esses sólidos possuem as faces triangulares equiláteras e utilizamos módulos de encaixes para a construção de cada sólido. O hexaedro e o dodecaedro não utilizaram o uso da colagem, já que seus módulos possuem as abas que servem para o encaixe.

4.3.1 MÓDULO DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Para construir os sólidos platônicos: tetraedro, octaedro e o icosaedro, utilizamos o módulo do triângulo equilátero. Para confeccionar um triângulo equilátero, é necessária uma folha A4, a primeira dobradura é em formato de um quadrado, dobramos um dos vértices da folha, aliando o mesmo com o seu lado oposto, recortamos e descartamos a parte que “sobra” da folha. E com o quadrado desempenhamos as seguintes etapas, realizando o passo a passo, de acordo com as figuras a seguir:

A primeira etapa, como mostra a figura 16, dobramos o quadrado ABCD ao meio, aliando os pontos A com B e D com C, dessa maneira desfazemos a dobra e de acordo com a marcação feita, levamos o vértice C até a dobra onde dividimos o quadrado ao meio, e em seguida marcamos o ponto E.

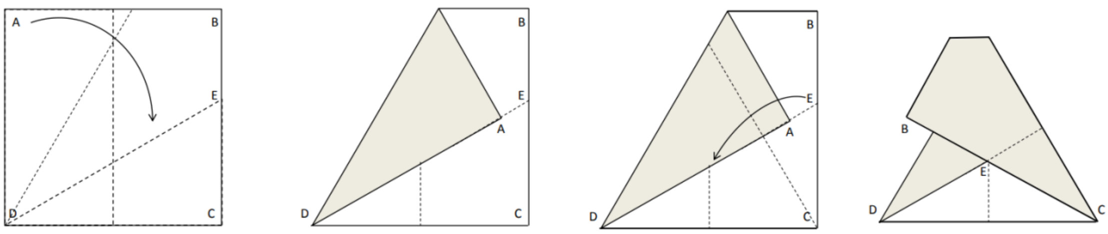
Figura 16 – Passo a passo do Módulo do triângulo equilátero.



Fonte: http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf

Na segunda etapa, como mostra a figura 17, abrimos a marcação feita no primeiro passo e encontramos o vértice A com o segmento DE, fazemos uma dobra levando o ponto E até a primeira dobra (quando dividimos o quadrado ao meio) que fizemos na figura 16.

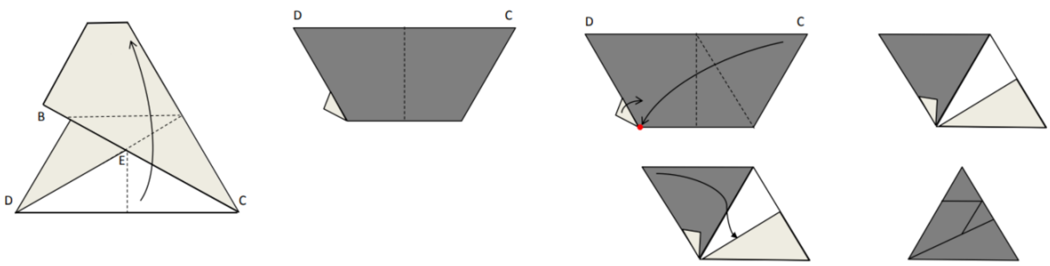
Figura 17: Passo a passo do Módulo do triângulo equilátero



Fonte: http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf

Na terceira etapa, como mostra a figura 18 abaixo, seguimos os seguintes passos de acordo com a seta, e em seguida levamos o vértice C ao ponto em vermelho indicado e dobramos a aba do canto esquerdo. Finalizamos com o encaixe conforme a figura 18 e montamos o módulo do triângulo equilátero.

Figura 18: Passo a passo do Módulo do triângulo equilátero.



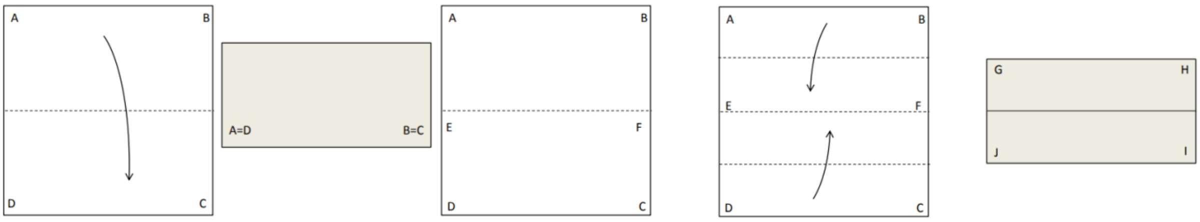
Fonte: http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf

4.3.2 MÓDULO DO QUADRADO

Para construir o hexaedro, utilizamos o módulo do quadrado que já possuem as abas de encaixe. Para confeccionar o quadrado é necessária uma folha A4, a primeira dobradura é em formato de um quadrado, dobramos um dos vértices da folha, aliando o mesmo com o seu lado oposto, recortamos e descartamos a parte que "sobra" da folha. E com o quadrado desempenhamos as seguintes etapas, e realizamos o passo a passo, de acordo com as figuras a seguir:

Para a primeira etapa, dobramos ao meio o quadrado como mostra a figura 18, fazendo coincidir os lados AB com CD, marcamos o ponto E, que será o ponto de interseção entre a dobra dos pontos A e D, e o ponto F, que será o ponto de interseção entre a dobra e os pontos B e C. Abrimos a folha, e dobramos ao meio novamente para que os lados AB e EF e os lados DC e EF se coincidam, e marcamos os pontos GHIJ, formando assim um retângulo.

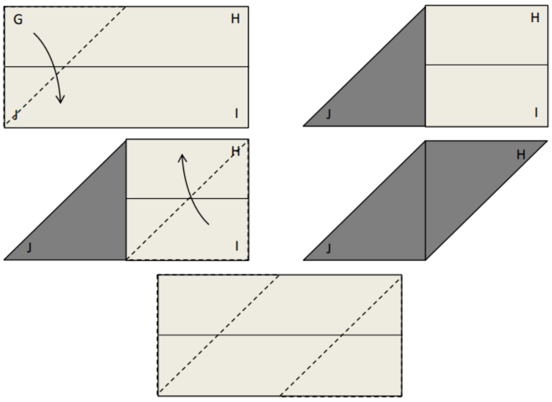
Figura 19: Passo a passo do Módulo do quadrado.



Fonte: http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf

Para a segunda etapa, iremos levar o vértice G para o lado IJ conforme a figura 20 abaixo, e fazemos o mesmo com o vértice I para o lado GH, formando assim um paralelogramo, e depois dessas marcações, desdobramos a folha.

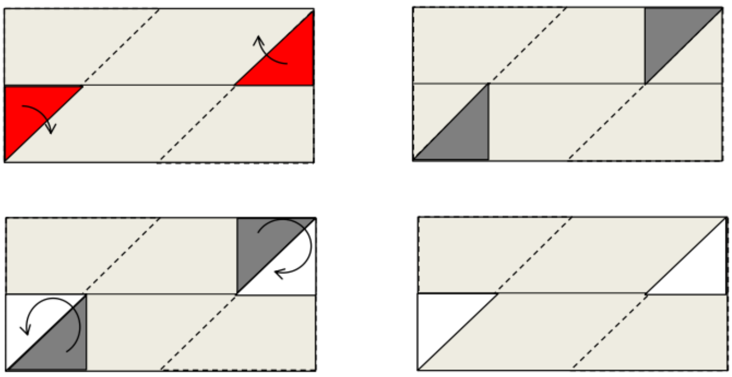
Figura 20: Passo a passo do Módulo do quadrado.



Fonte: http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf

Para a terceira etapa, dobramos os dois triângulos retângulos destacados de vermelho para dentro, de acordo com o passo a passo da figura 21 abaixo.

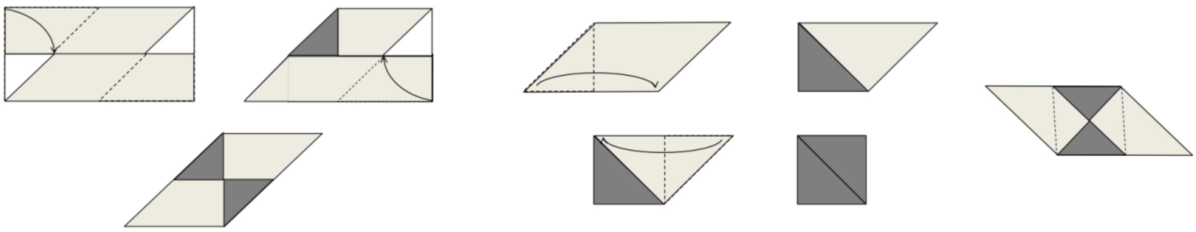
Figura 21: Passo a passo do Módulo do quadrado.



Fonte: http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf

Para a quarta etapa, realizamos o mesmo passo da segunda etapa, mas de forma que colocamos o vértice superior esquerdo dentro da parte inferior da peça e o vértice inferior direito dentro da parte superior da peça, conforme a figura 22 abaixo. Viramos a peça. Façamos uma dobra de modo que os dois vértices da base do paralelogramo coincidam. Façamos o mesmo com os vértices superiores. Desfazemos o último passo e viramos a peça, formando assim um quadrado com duas abas de encaixe.

Figura 22: Passo a passo do Módulo do quadrado.



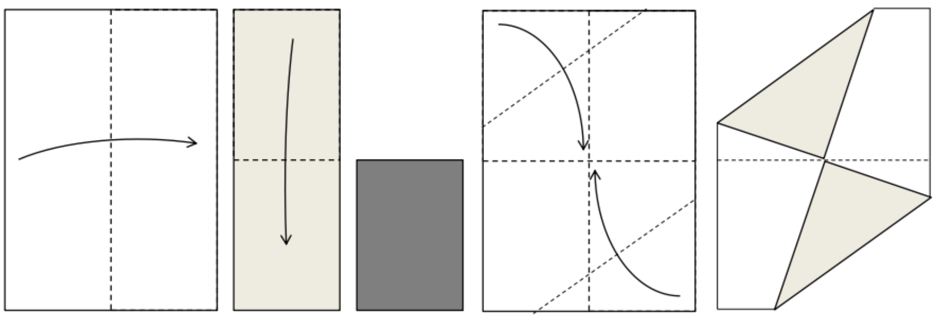
Fonte: http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf

4.3.3 MÓDULO DO PENTÁGONO REGULAR

Para construir o dodecaedro, utilizamos o módulo do pentágono regular que já possuem as abas de encaixe. Para confeccionar um módulo do pentágono é necessária uma folha A4. E com a folha desempenhamos as seguintes etapas, de acordo com o passo a passo, das figuras a abaixo.

Na primeira etapa, dobramos a folha A4, ao meio e sem seguida dobramos ao meio novamente. Abrimos, dobramos os vértices, superior esquerdo e o inferior direito no centro da folha. Conforme a figura 23, a seguir:

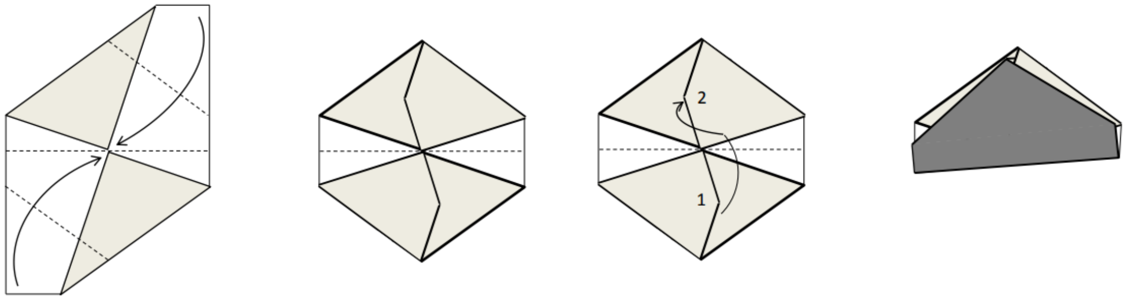
Figura 23: Passo a passo do módulo de pentágono regular.



Fonte: http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf

Procedemos ao mesmo passo, com a etapa anterior, então na segunda etapa, dobramos os vértices, superior direito e o inferior esquerdo no centro da folha. Em seguida sobramos ao meio e encaixamos a parte 1 por baixo da parte 2. De acordo com a figura 24 abaixo.

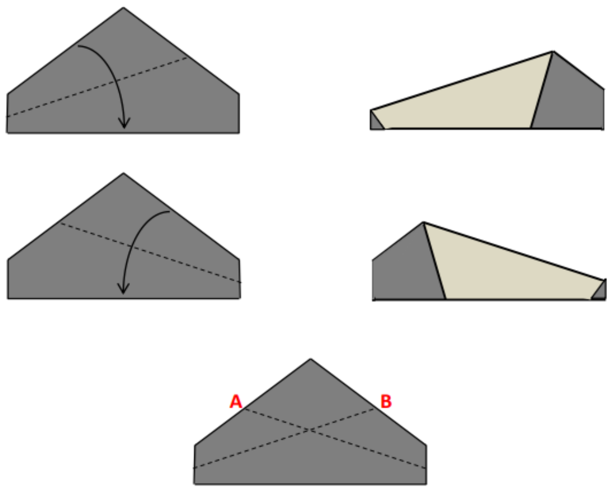
Figura 24: Passo a passo do módulo do pentágono regular.



Fonte: http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf

Nesta terceira etapa de dobraduras, desempenhamos os seguintes passos conforme a figura 25 abaixo.

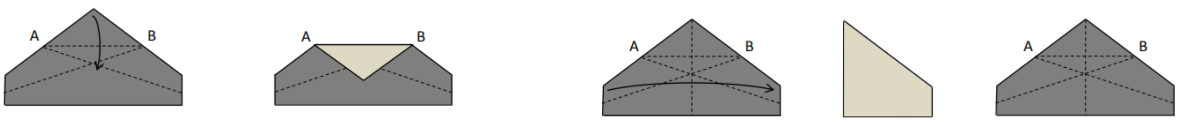
Figura 25: Passo a passo do módulo do pentágono regular



Fonte: http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf

Na quarta etapa, seguimos dobrando conforme a figura 26 abaixo, e em seguida dobramos e fazemos a marcação ao meio do módulo, e então desdobramos.

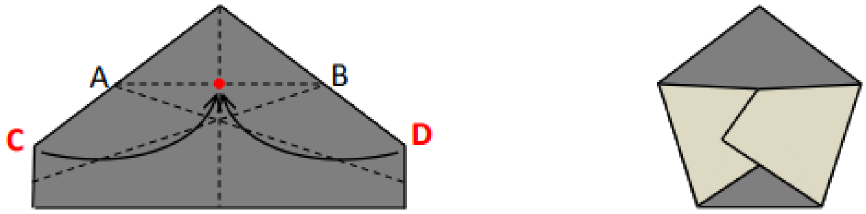
Figura 26: Passo a passo do módulo do pentágono regular.



Fonte: http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf

E a última etapa como na figura 27, levamos os pontos C e D, ao ponto vermelho destacado, formando assim o pentágono regular com abas de encaixe.

Figura 27: Passo a passo do módulo do pentágono regular.

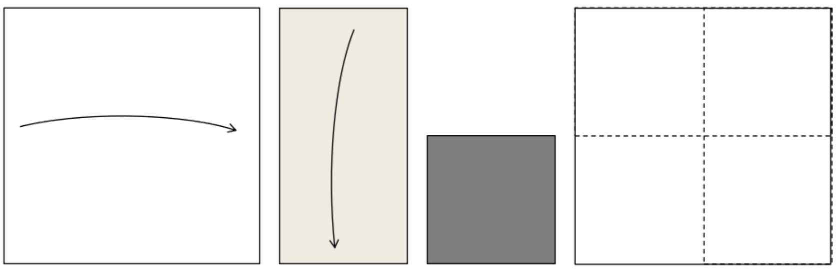


Fonte: http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf

4.3.4 MÓDULO DE ENCAIXE

Para a construção dos sólidos (tetraedro, octaedro e icosaedro), precisamos do módulo do triângulo equilátero, e para encaixarmos esses módulos sem que eles desmontem, é necessário um módulo de encaixe. Para a construção do módulo de encaixe, utilizamos uma folha A4 e fazemos a dobradura do quadrado, e a partir dele marcamos ao meio, e novamente ao meio e dividimos em quatro partes iguais, conforme a figura 28, abaixo:

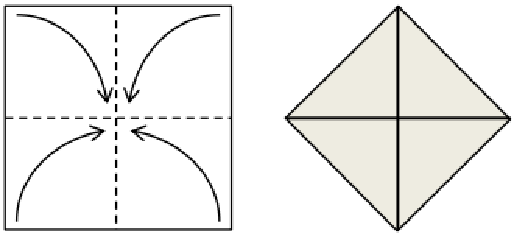
Figura 28: Passo a passo do módulo de encaixe.



Fonte: http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf

Recortamos e com um dessas partes, procedemos conforme a marcação da figura 28, logo em seguida levamos os quatros vértices do quadrado ao centro (interseção das marcações), conforme a figura 29.

Figura 29: Passo a passo do módulo de encaixe.



Fonte: http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf

Então, para finalizarmos o módulo de encaixe, viramos e dobramos ao meio, de acordo com a figura 30.

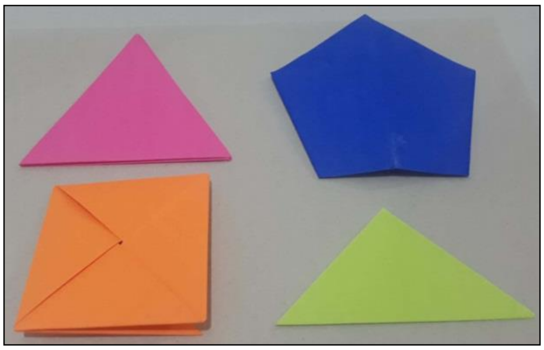
Figura 30: Passo a passo do módulo de encaixe.

Fonte: http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf

Para construção do tetraedro, utilizamos 4 módulos do triângulo equilátero e 6 módulos de encaixe, o octaedro são 8 módulos do triângulo equilátero e 12 módulos de encaixe, e para o icosaedro são 20 módulos do triângulo equilátero e 30 módulos de encaixe.

As figuras 30 e 31 a seguir, foram alguns resultados obtidos da construção de cada módulo através das dobraduras, como podemos observar (folha rosa: módulo do triângulo equilátero, folha laranja: módulo do quadrado, folha azul: módulo do pentágono regular e a folha amarela: módulo de encaixe) e os sólidos construídos pelos alunos através dos encaixes dos módulos.

Figura 31: Os módulos de encaixe produzidos pelos alunos.



Fonte: próprio autor.

Figura 32: Alguns Sólidos construídos pelos alunos

Fonte: próprio autor.

Por fim, iremos para os resultados e discussões do trabalho.

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Durante o trabalho os alunos responderam um questionário antes das construções dos sólidos geométricos e responderam novamente o mesmo questionário após as construções. Neste capítulo apresentaremos os resultados e discussões no que ocorreu na sala de aula no momento do trabalho e sobre os questionários respondidos pelos alunos e as construções dos poliedros de Platão.

5.1 Resultados sem a utilização da construção dos Poliedros de Platão utilizando os origamis modulares.

Depois do primeiro encontro, onde a aula foi expositiva e dialogada sobre geometria espacial, definindo as figuras geométricas, sólidos geométricos, suas classificações, poliedros e os elementos que o compõem, definindo cada elemento e identificando através de um esboço que teve como o auxilio o quadro. Aplicamos um questionário individual, que durou em torno de 20 a 30 minutos, onde no questionário continha questões subjetivas e uma questão sobre os elementos que compõem os poliedros, que precisava da visualização do sólido em 3D em forma de esboço ou sua planificação.

Ao receber o questionário, alguns alunos perguntaram se podiam responder com suas palavras as questões subjetivas e se poderiam deixar questões sem responder, caso não lembrassem a definição.

A primeira pergunta, era pra definir os poliedros regulares, percebemos que a minoria responderam de forma coerente, como o aluno 1, que a sua resposta foi a seguinte: “São sólidos que tem todas as faces planas e iguais”, o aluno 2 “Um poliedro regular: é quando um poliedro tem faces e ângulos iguais”. E a maioria dos alunos, ficaram confusos na formulação de sua resposta, como o aluno 3, que respondeu da seguinte forma: “São poliedros de mesmo tamanho”, e o aluno 4, “são poliedros que tem todas as faces planas com o mesmo comprimento”. Como também tinham alunos que não souberam definir, como o aluno 5, “são poliedros que se regulam”.

A segunda pergunta, pedimos que eles definissem o que era um poliedro de Platão, e dizer quais era a nomenclatura desses poliedros. Da mesma forma como a primeira pergunta, os resultados em relação à definição, eram os mesmos. Alguns alunos relacionaram com os poliedros regulares e outros, já foram dizendo quais era a nomenclatura desses sólidos, sem definir os poliedros de Platão, já que no verso do questionário tinha a nomenclatura, o esboço e a planificação de cada poliedro de Platão.

A terceira e última questão, pedimos que eles completassem uma tabela, com a nomenclatura, a forma das faces, o número de faces, número de vértices e o número de arestas de cada poliedro, e como auxilio para a resolução dessa pergunta, no verso do questionário tinha o esboço e a planificação de cada poliedro de Platão. Percebemos muitas dificuldades, principalmente no momento da contagem dos elementos, alguns alunos utilizaram o esboço, mas se perdiam na contagem, e outros utilizaram a planificação por achar mais fácil, mas sem perceber que contavam uma aresta, duas vezes.

Figura 33: Resolução de um aluno que utilizou a planificação.

3. De acordo com os sólidos a seguir (poliedros de Platão), complete a tabela e responda o que se pede:

Nome do Poliedro	Forma das faces	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas
Tetraedro regular	Triangulo	4	4	6
Hexaedro regular	quadrado	6	8	12
actaedro regular	triangulo	8	6	12
Dodecaedro regular	Pentagonal	12	30	48
Icosaedro Regular	triangulo	20	60	47

Fonte: próprio autor.

Ainda na terceira questão, além de completarem a tabela, eles tinham que responder algumas perguntas, como: comparar a soma dos vértices e faces com o valor de arestas, que nome se dava para o contorno das faces dos poliedros. De acordo com a definição de poliedro regular, se um prisma de base hexagonal poderia ser considerado um poliedro de Platão e junto com a sua resposta tinha que ter a sua justificação. Percebemos que os alunos possuíram muitas dificuldades para comparar a soma dos vértices e faces em relação a arestas, alguns perguntavam: “é pra dar o quanto?”, ou “utilizei a relação de Euler e está tudo errado, contei errado”. Em relação ao nome do contorno que se dá as faces do poliedro, percebemos que a pergunta era confusa, pois a maioria dos alunos respondeu que eram arestas, mas, no entanto a resposta correta seria um polígono.

5.2 Resultados com a utilização da construção dos Poliedros de Platão utilizando os origamis modulares.

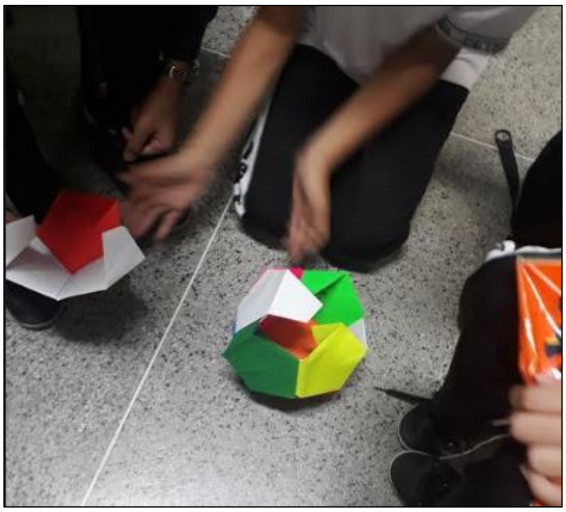
Depois das construções dos poliedros de Platão utilizando os origamis modulares, aplicamos novamente o mesmo questionário sem o esboço e planificação dos sólidos, já que eles iam utilizar como suporte os poliedros que foram construídos nas aulas. Percebemos que os alunos ficaram mais entusiasmados, já que eles puderam manusear o sólido e visualizar de forma lúdica os seus elementos.

Figura 34: Momento da construção dos módulos.

Fonte: Próprio autor.

No início tivemos um pouco de dificuldade nas dobraduras, alguns alunos não conseguiam ou se perdiam em algumas etapas da construção dos módulos, mas com paciência e com o auxílio de alguns alunos que tiveram mais facilidade para as dobraduras, conseguimos realizar a atividade com êxito.

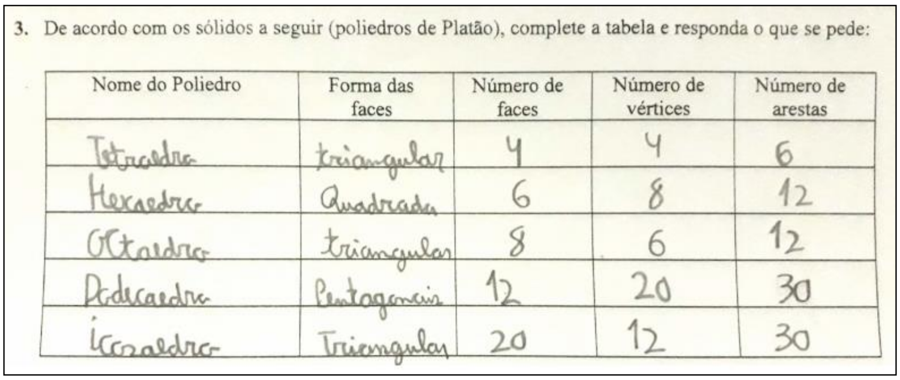
Figura 35 Momento da construção dos sólidos.



Fonte: Próprio autor.

Percebermos um grande avanço comparando com a resolução do primeiro questionário, principalmente no momento da contagem dos elementos que compõe os poliedros. Alguns alunos fizeram comentários como o aluno 6: “Agora está mais fácil de contar os elementos dos poliedros, consigo visualizar cada elemento” e o aluno 7: “Quando a gente “pega” no sólido fica mais fácil de completar a tabela dos elementos”. Na questão que pedia para comparar a soma da quantidade de vértices com a quantidade de faces e relacionar com arestas, a grande maioria responderam correto, como o aluno 8: “a soma do número de vértices com as faces é igual a soma das arestas com 2, ou seja é a relação de Euler”

Figura 36: Resolução do aluno 6.



3. De acordo com os sólidos a seguir (poliedros de Platão), complete a tabela e responda o que se pede:

Nome do Poliedro	Forma das faces	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas
Tetraedro	triangular	4	4	6
Hexaedro	Quadrado	6	8	12
Octaedro	triangular	8	6	12
Dodecaedro	Pentagonais	12	20	30
Icozaedro	Triangular	20	12	30

Fonte: Próprio autor.

Em relação às outras questões, alguns alunos ainda possuíam dificuldades para definir poliedros regulares, como o aluno 9: “poliedros regulares são poliedros que tem arestas retas”. Mas, a maior parte dos alunos conseguiu responder de forma coerente, como o aluno 10: “São poliedros que possuem faces planas e ângulos iguais”.

Por fim, as atividades que realizamos durante esses seis encontros, possibilitam ao aluno a compreensão e a clareza dos conceitos geométricos estudados em sala e com a utilização dos origamis modulares, a cada dobradura realizada para a construção de cada módulo e sólidos geométricos colocamos em prática o que aprendemos na teoria. Além de tornar as aulas mais lúdicas e atrativas, conseguimos atingir os objetivos esperados, fazendo com que os alunos construíssem os seus próprios sólidos geométricos.

6. CONCLUSÃO

Com a realização dessa atividade na aula de geometria, verificamos que o uso do origami modular se torna um excelente recurso didático no processo de ensino aprendizagem, a cada dobradura realizada, exploramos os conceitos geométricos trabalhados na sala de aula.

Ao analisarmos os questionários que foram aplicados antes e depois da utilização do material concreto que foram construídos pelos próprios alunos, e depois dessa analise, fizemos uma comparação de respostas, percebemos que o uso do material concreto como subsidio para a resolução do questionário, contribuiu de forma satisfatória na compreensão e no entendimento do conteúdo escolhido, dessa maneira conseguimos atingir os nossos objetivos.

Os questionários que foram aplicados no inicio e no fim do trabalho, foram de grande importância para que os alunos pudessem comparar as dificuldades sem a utilização desse material. No momento da contagem dos elementos de cada poliedro Platônico, os alunos sentiram muitas dificuldades olhando apenas para o esboço e a planificação dos sólidos, pois era difícil visualizar o sólido em três dimensões.

Após a construção dos poliedros, os alunos puderam visualizar e manusear o material concreto, facilitando no momento da resolução do questionário, principalmente na questão que envolvia a contagem dos elementos que compõe um poliedro e com isso, deduzimos e aplicamos a relação de Euler.

Mesmo diante de algumas dificuldades para a construção dos sólidos geométricos e por ser trabalhoso, pois utilizamos o origami, que é uma técnica que precisa ter concentração e paciência, os alunos demonstraram interesse e entusiasmo para trabalhar os poliedros de maneira lúdica e interessante.

Percebermos que o material produzido, foi muito eficaz na apresentação dos conceitos geométricos de forma diferente da tradicional, utilizando um recurso acessível e de maneira lúdica, despertamos a atenção dos alunos. Sendo assim a motivação e a contribuição dos alunos para a construção dos poliedros foram muito importantes para o seu processo formativo, pois estando motivado, se aprende.

REFERÊNCIAS

BRASIL. SEF. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BOYER, Carl. B. História da Matemática. São Paulo. Edgard Blucher, Ltda., 1974.

CONEXÕES COM A MATEMÁTICA, volume único/ obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editora executiva Juliane Matsubara Barroso. – 1. Ed. – São Paulo: Moderna, 2012 – vereda digital.

DANTE, Luiz Roberto; Projeto Teláris: Matemática, ensino fundamental 2. – 2ª ed. – São Paulo: Editora Ática, 2015.

DOLCE, Oswaldo e POMPEO, Jose Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria espacial, posição e métrica. Volume 10. 5ª ed. São Paulo: Editora Atual, 2005.

EVES, Howard. Introdução à História da matemática. Tradução Higino H Domingues. 5º Ed. Campinas - SP, Editora Unicamp, 2011.

GENOVA, C. Origami, contos e encantos. São Paulo: Escrituras Editora, 2008.

LIMA, Elon
Lages; A matemática do ensino médio – volume 2/ Elon Lages Lima, Paulo César Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. – 6ª Ed. – Rio de Janeiro: SBM 2006

MOHR, Ana Regina da Rocha; PRADO, Angélica Vanessa da Silva. Construção dos sólidos regulares utilizando um circuito de aprendizagem por meio de materiais diversificados. Bagé. Ano: 2014.

RAFAEL, Ilda. Origami. Educação e matemática, Lisboa, n. 111, Ano: 2011.

RÊGO, Rogéria Gaudêncio do; RÊGO, Rômulo Marinho; GAUDÊNCIO, Severino Júnior. A Geometria do Origami. João Pessoa, Editora Universitária/UFPB, 2003.

RIBEIRO, R. Blog: Origami: Arte e Aprendizagem. Origami e seus benefícios; Ano: 2013.

SIMMONS, J. C. Os 100 maiores cientistas da História: Uma classificação dos cientistas mais influentes do passado e do presente. DIFEL, Rio de Janeiro. 4ª ed. Editora: Bertrand Brasil Ano: 2002.

SITES CONSULTADOS:

http://www.fundasul.br/download/artigos/estudos_das_formas_geometricas.pdf
Data de acesso: 25/03/2019

http://topicosmatematicos.blogspot.com/2008/12/os-poliedros-de-plato.html
Data de acesso: 30/04/2019

https://publicacao.uniasselvi.com.br/index.php/MAD_EaD/article/view/1789/883
Data de acesso: 01/05/2019

https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/MC_GON%C3%87ALVES_00900417048.pdf
Data de acesso: 05/05/2019

http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/oficina/mategami.pdf
Data de acesso: 31/05/2019

https://gartic.com.br/iamalone/desenho-livre/tsuru
Data de acesso: 05/05/2019

http://www.usp.br/aun/antigo/imagens/Platao.jpg
Data de acesso: 04/04/2019

http://www.sbemgo.com.br/anais%20engem_2013/Relatos%20de%20Experi%C3%AAncia/re_04563410136.df.
Data de acesso: 04/04/2019

http://clubes.obmep.org.br/blog/leonhard-euler/
Data de acesso: 04/04/2019

https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/solidos-geometricos.htm
Data de acesso: 04/04/2019

https://alunosonline.uol.com.br/matematica/poliedros.html
Data de acesso: 04/04/2019

https://definicion.de/hexaedro/
Data de acesso: 04/04/2019

APÊNDICE

Questionário

1. Faça a definição de poliedros regulares.

2. O que são poliedros de Platão? E quais são eles?

3. De acordo com os sólidos a seguir (poliedros de Platão), complete a tabela e responda o que se pede:

Nome do Poliedro	Forma das faces	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas

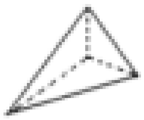
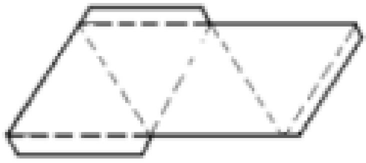
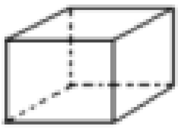
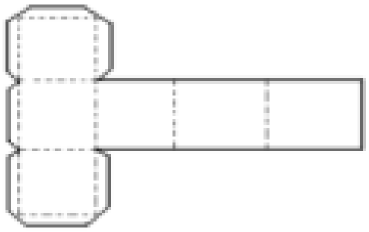
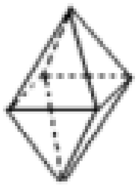
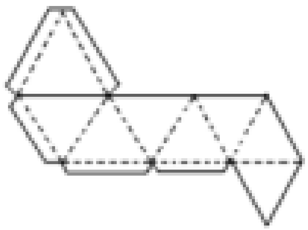
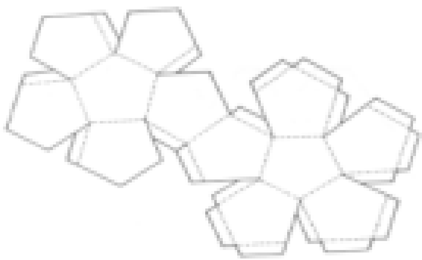
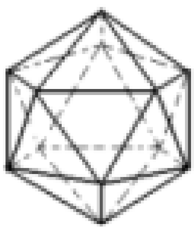
a) Compare, para cada poliedro, a soma de V + F com o valor de A. O que você descobriu?

b) Que nome se dá ao contorno das faces dos poliedros?

c) De acordo com a definição de poliedro regular, um prisma de base hexagonal pode ser considerado um poliedro de Platão? Justifique.

<u>Poliedros de Platão</u>

Esboço e planificação:

Poliedro	Planificação
 Tetraedro	
 Hexaedro	
 Octaedro	
 Dodecaedro	
 Icosaedro