UEPB
UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I- CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSÉ ROBERTO TOMAZ

O TEOREMA DE PITÁGORAS: ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE
2019

JOSÉ ROBERTO TOMAZ

O TEOREMA DE PITÁGORAS: ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de licenciatura em matemática do Departamento de matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Me. José Hélio Henrique de Lacerda.

CAMPINA GRANDE
2019

T655t Tomaz, José Roberto.
O Teorema de Pitágoras [manuscrito] : algumas demonstrações e aplicações / Jose Roberto Tomaz. - 2019.
57 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Prof. Me. José Hélio Henrique de Lacerda , Departamento de Matemática - CCT."

1. Pitágoras. 2. Teorema de Pitágoras. 3. Matemática. I. Título

21. ed. CDD 516.22

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

JOSÉ ROBERTO TOMAZ

O TEOREMA DE PITÁGORAS: ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de licenciatura em matemática do Departamento de matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de licenciatura em Matemática.

Aprovada em: 26/08/2019.

BANCA EXAMINADORA

José Hélio Henriques de Lacerda

Prof. Me. José Hélio Henrique de Lacerda (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Adailson Ribeiro da Silva

Prof. Esp. Adailson Ribeiro da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profa. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

A DEUS primeiramente por ter iluminado e abençoado meu caminho nessa jornada acadêmica, DEDICO.
A minha família, por ser meu porto seguro, movendo montanhas para que eu chegasse até aqui, DEDICO.
A todo os meus professores e amigos, que contribuíram para o conhecimento que adquiri.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a DEUS por sempre ter iluminado minha vida, minhas escolhas, colocado pessoas boas ao meu lado, por ter me protegido nesse árduo caminho para que eu pudesse concluir mais uma etapa de minha vida.

A minha família por ter sido meu apoio, meu porto seguro me motivando a não desistir mesmo diante das grandes batalhas e sacrifícios encontrados diariamente e, mais ainda, fazendo o possível e o impossível para não me deixar desistir e, além disso, por serem o motivo de minha vida.

A todos os professores, pois através de seus ensinamentos, orientações e experiências engradeci meus conhecimentos e despertei mais ainda a vontade de ser professor e poder ajudar outras pessoas a transformarem suas vidas.

A meus amigos que dividiram conhecimentos e dificuldades, tornando o ambiente mais agradável, mais proveitoso, as vezes simplificando muitas coisas.

A aquelas pessoas que estiveram no meu caminho, mesmo que por pouco tempo, mas de forma indireta propiciaram que eu enxergasse de outra forma o mundo ao meu redor.

“A matemática é o alfabeto com o qual DEUS escreveu o universo. ”

Pitágoras

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso (TCC) é decorrência de pesquisas relacionadas ao Teorema de Pitágoras e algumas importantes descobertas matemática atribuídas a ele. Aqui abordamos um pouco da história de Pitágoras, além de algumas demonstrações e aplicações do famoso “Teorema de Pitágoras”. Nosso objetivo é que esse trabalho sirva tanto para o enriquecimento do nosso conhecimento sobre o tema, assim como também possa servir de auxílio às pessoas interessadas em conhecer um pouco sobre este importante teorema e algumas de suas aplicações em diversas áreas do conhecimento, ou até mesmo que possa ser utilizado por professores em sala de aula, de modo a despertar nos estudantes o interesse pela a matemática. Sendo subdivido em capítulos e seções, este trabalho se inicia com uma parte histórica a respeito de Pitágoras, seu teorema e a sua sociedade secreta. Em seguida, são apresentas algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, tanto no campo geométrico, envolvendo comparações de áreas, como no campo algébrico, baseadas nas relações métricas do triângulo retângulo, as quais foram exibidas por inúmeras pessoas ao longo da história. Por fim, traz algumas aplicações deste teorema no dia a dia, em diversas áreas.

Palavras-Chave: Pitágoras. Teorema. Demonstração. Aplicação.

ABSTRACT

This course completion work (TCC) is the result of related research on Pythagoras, and some mathematical findings attributed to it. Here we address a little of the history of Pythagoras, in addition to some demonstrations and applications of the famous “”Pythagoras Theorem”. Our goal is that this work does not serve only to enrich our knowledge on the subject, but which can also help people interested in getting to know a little about this important theorem and some of its applications in various areas of knowledge, or even be used by teachers in the classroom, in order to arouse interest in mathematics among students. Being subdivided into chapters and sections, this paper begins with a historical part about Pythagoras, his theorem, and his secret society. Following are some demonstrations of the Pythagorean Theorem, both in the geometric field, involving comparisons of areas, as well as in the algebraic field, based on the metric relationships of the right triangle, which have been exhibited by countless people throughout history. Finally, it brings some applications of this theorem in everyday life, in several areas.

Keywords: Pythagoras. Theorem. Demonstration. Application.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No ano de 2017 iniciamos uma jornada dupla, durante um ano inteiro. Assim como muitos universitários, estudava e trabalhava, cursava o 4º período do curso de licenciatura em matemática pela manhã e à noite ministrava aulas para quatro turmas de EJA (Educação de Jovens e Adultos) de 6º a 9º Anos na Escola municipal de ensino fundamental e médio Erasmo de Araújo Souza – EMEFEAS, na cidade de Montadas. Tal experiência foi de grande ajuda para a nossa formação, pois conseguia colocar em prática conhecimentos adquiridos nas aulas da universidade. Durante estas atividades, um tema em especial despertou nossa atenção, qual seja, o Teorema de Pitágoras, que após estudá-lo em alguns livros didáticos verificamos que muitos deles descrevem um pouco da história de Pitágoras apresentam uma demonstração do seu teorema, a qual, muitas vezes, é feita usando semelhanças entre triângulos.

Então, conforme íamos lecionando para os alunos surgiram questionamentos e reflexões que nos motivaram a pesquisar sobre o uso da história da matemática nas aulas, tanto para atrair a atenção dos alunos quanto para trabalhar com eles a importância da matemática ao longo da história, visto que de acordo com D'Ambrósio (1999):

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber (p. 97).

Outra observação foi a respeito da motivação através da contextualização de situações problemas envolvendo os conteúdos das aulas com atividades realizadas durante o dia a dia dos alunos em suas casas ou nos seus trabalhos que, ainda segundo D'Ambrosio (2012, p. 29), "do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta", logo a motivação é um elo importante para a aprendizagem do aluno, em concordância com Davydov (1988, p.97), o qual defende que "a esfera das motivações e necessidades é o componente essencial da atividade humana".

Portanto, esse trabalho tem como proposito buscar aumentar nossos conhecimentos com base na história de Pitágoras, seu teorema, demonstrações e aplicações deste, de maneira que nos torne capazes de abordar de diversas formas o conteúdo Teorema de Pitágoras em sala de aula, buscando despertar o interesse e a curiosidade dos alunos para uma melhor compreensão do assunto. Além disso, esperamos que esse trabalho possa também servir de fonte de pesquisa para as pessoas interessadas em conhecer um pouco sobre Pitágoras e este importante teorema, bem como algumas de suas aplicações em diversas áreas do conhecimento. Em especial, que possa ser útil aos professores de matemática, motivando-os a utilizarem a história da matemática em sala de aula, tornado suas aulas mais atrativas e interessantes para os alunos.

Este trabalho se inicia com uma parte histórica a respeito de Pitágoras e seu teorema e a sua sociedade secreta, depois são apresentas diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras que foram realizadas por inúmeras pessoas no decorrer tempo. Algumas dessas demonstrações podem ser encontradas no livro de Loomis (1940), o qual apresenta 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras. Por fim, veremos algumas aplicações de tal teorema em diversas áreas, tanto da matemática (geometria plana, geometria analítica, trigonometria, geometria espacial) quanto em outras áreas como: física, cálculo diferencial, construção civil, circuitos eletrônicos e no cálculo aproximado do raio da terra.

2 UM POUCO DE HISTÓRIA

De acordo com relatos históricos a Matemática surgiu na Babilônia, da necessidade de contar objetos. Com o passar dos anos, desenvolvida por grandes nomes, esta tornou-se um poderoso instrumento intelectual que através da abstração e formalização sintetiza ideias. A matemática de ontem, hoje e de amanhã sempre será de grande importância para o ser humano, por estar representada em toda a nossa volta, contribuindo de forma significativa para a melhoria das nossas vidas, pois é praticamente a linguagem utilizada para o desenvolvimento de novas tecnologias.

Tratando-se da matemática de ontem, ou melhor, da história da matemática, segundo os PCN´s (Parâmetros Curriculares Nacionais) do Ensino Médio, as competências e habilidades a serem desenvolvidas pela matemática devem conter contextualização sociocultural relacionando as etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade, ou seja, ela é o ponto essencial na aprendizagem dos alunos, visto que, ainda conforme os PCNEM, a importância da história da Matemática tem muita relevância para que o aprendizado transcenda a relação social, uma vez que ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos aprendidos.

Se analisarmos a etimologia da palavra matemática, que conforme Mol (2013), tem natureza grega: "Matemathike". "Máthema" que significa: compreensão, explicação, ciência, conhecimento, aprendizagem, e "thike" que significa arte, então teremos ela como a ciência ou arte de conhecer, entender, aprender e explicar os números e cálculos. Mesmo com sua etimologia sendo grega, a matemática esteve presente desde o início das primeiras civilizações até os tempos atuais.

Homens das cavernas do período paleolítico, (começou a cerca de 2,5 milhões de anos) que mesmo de forma irracional, a empregavam quando desenhavam nas paredes das cavernas e na fabricação e utilização das ferramentas de caça. Isso, talvez, tenha começado quando observam as formas geométricas tanto nos desenhos quanto nas armas de caça, verificando que alguns modelos seriam mais eficazes. Entretanto, se voltarmos para o assunto cronologia da matemática teremos registros matemáticos de aproximadamente 2.500 a.C. encontrados na região da mesopotâmia (tabuas de argilas com escritas cuneiformes) que, por muitos, é conhecida como o berço da civilização. Entre outros, também foram encontrados no Egito (o papiro de Rhind) e em outras civilizações como: grega, hindu, árabes e chinesas. Contudo, todos tinham em comum resoluções de problemas encontrados no dia a dia.

Conforme a sociedade foi evoluindo suas dúvidas e necessidades também aumentaram. Isso contribuiu para o surgimento de grandes pensadores matemáticos o que propiciou o enriquecimento da matemática que foi transformada em uma ciência mais sistematizada através do desenvolvimento de conceitos, teorias e teoremas que são utilizados até hoje. Quando se trata dos grandes gênios da matemática temos que falar de Pitágoras de Samos que foi um filósofo grego do final do século VI a.C. sendo considerado por muitos um dos mais importantes na história da matemática, graças ao teorema que leva seu nome "Teorema de Pitágoras". "Pitágoras foi o interlocutor da matemática geométrica, onde mobilizou todo conhecimento da antiguidade clássica (GARBI, 1997, p. 18)". Strathern (1998) define Pitágoras:

> Possivelmente foi o primeiro gênio da cultura ocidental e quem lhe deu o tom. Foi com ele que se criou a combinação do grande intelecto num grande lunático [...] O primeiro matemático, o primeiro filosofo e o primeiro a praticar a metempsicose. E isso não por ter sido a primeira pessoa a usar números, a primeira a buscar uma explicação racional para o mundo ou a primeira a acreditar que numa vida anterior sua alma havia habitada uma planta, um faraó ou algo do gênero. Foi ele quem inventou ou usou pela primeira Vez as palavras matemático, filosofo e metempsicose nos sentidos hoje aceitos e logo as aplicou a si mesmo (p.07).

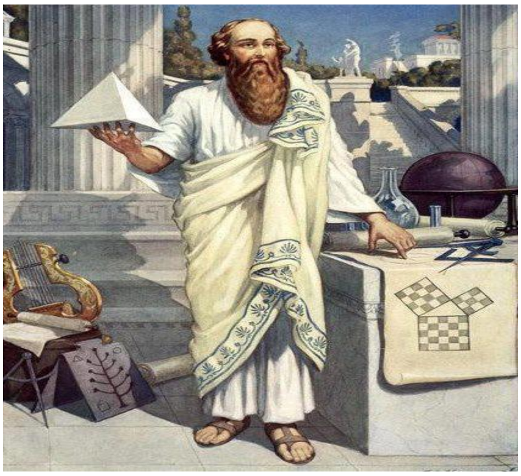
Dewdney (1999) também descreve Pitágoras como sendo um grande matemático:

> Figurou entre os maiores matemáticos do mundo, (às vezes o maior). Dois de seus feitos mais importantes foram: a descoberta das magnitudes imensuráveis e o Teorema de Pitágoras, os quais desempenharam papeis vitais nos alicerces da matemática (p.07).

2.1 Pitágoras

São poucos os indícios sobre a bibliografia do grego matemático e filosofo "Pitágoras de Samos". Embora sua biografia seja marcada por diversas lendas e fatos não comprovados pela história, vários mitos e mistérios e com isso impossíveis de verificar a veracidade, temos dados e informações importantes sobre sua vida. Segundo Strathern (1997) Pitágoras nasceu por volta de 565 a.C. em uma ilha da Grécia chamada de Samos e morreu 490 a.C. em Metaponto (região sul da Itália), filho de um rico artesão e mercador local chamado de Mnesarcos, a ilha de Samos fica próxima a Mileto, lugar onde nasceu o grande Filosofo e matemático Tales de Mileto. Samos era considerada, em sua época, a ilha mais rica do Mar do Egeu e, por conta de sua localidade próxima a Ásia Menor, talvez tenha facilitado as viagens de Pitágoras em busca de conhecimento.

Figura 1: Representação de Pitágoras



Fonte:http://www.vanialima.blog.br/2014/01/pitagoras-de-samos.htm

Por ser um jovem excepcional para sua época, os mestres das grandes escolas de Samos indicaram Pitágoras a viajar para Mileto para estudar com o filosofo, matemático e astrônomo Tales de Mileto a quem muitos atribuem a instituição da filosofia Ocidental. Tales acreditava que o universo se originava de um único elemento: a água. Quanto a matemática, existiam vários feitos atribuídos a ele, como o teorema que leva seu nome “Teorema de Tales”, o qual surgiu quando ele através de um experimento, tentava determinar a altura de uma pirâmide Quéops, no Egito, observando a sombra da pirâmide. O Teorema de Tales afirma que as interseções entre duas retas paralelas e retas transversais formam segmentos que são proporcionais.

De acordo com relatos históricos, Pitágoras também havia estudado com outros grandes filósofos que passaram a ser seus professores como o geografo, matemático, astrônomo e filosofo Anaximandro, o qual era considerado o segundo filosofo da escola de Mileto, “Anaximandro de Mileto, discípulo de Tales, que assim como seu mestre, Anaximandro realizou algumas contribuições à filosofia e à matemática. Ele também tentou explicar a origem do mundo através de uma única substancia chamada “ápeiron” e na matemática segundo Kirk; Raven; Schofield (1994, p. 100), “foi o primeiro a descobrir o equinócio e os solstícios e os indicadores das horas, e que a terra se encontra no centro” e “foi o primeiro que ousou desenhar o mundo habitado numa tábua” (KIRK; RAVEN; SCHOFIELD, 1994, p.103),

Outro professor de Pitágoras, enquanto ele esteve em Mileto, foi o filosofo Ferécidas. Segundo o filósofo Aristóteles, Ferécidas foi um teólogo que misturou filosofia e mitologia, talvez seja de onde o Pitágoras tenha tirado as suas concepções religiosas. Conforme Strathern (1997), muitos consideram como inventor da metempsicose, ou seja, transmigração das almas. De início, Pitágoras não fez uso dos ensinamentos de Ferécidas, mas sim dos conhecimentos de geometria e aritméticas dos seus mestres Tales e Anaximandro. De acordo com TARTAGLIA (2016):

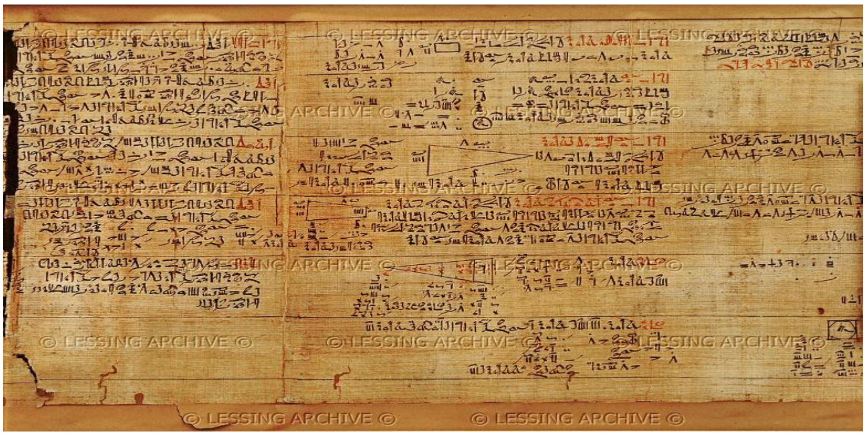
> Depois foi enviado para Mileto, uma cidade antiga do mundo grego, e lá estudou com Tales, o maior sábio da época, que impressionado com o conhecimento do aluno, passou a estudar suas descobertas de Geometria e Matemática. A fim de buscar novos conhecimentos, Pitágoras viajou pela Síria, Arábia, Caldeia, Pérsia, Índia e Egito. E foi no Egito, onde morou por mais de vinte anos, que observando as pirâmides, desenvolveu o importante "Teorema de Pitágoras". (p.15).

Para aumentar seu conhecimento Pitágoras saiu em viagem, visto que, naquela época, era considerada uma forma de adquirir ou ampliar seus conhecimentos, então Pitágoras viajou para o Egito, que considerado por muitos, uma sociedade mais culta que a própria Grécia, como diz a Aristóteles citado em Strathern (1997, p.17): "No Egito tiveram início as ciências matemáticas, pois lá a nação dos sacerdotes gozava de tempo livre".

No Egito ele aprendeu muito sobre a aritmética e a geometria egípcia, ocorrendo que essa geometria foi bastante importante para Pitágoras. A palavra geometria deriva dos termos gregos "geo" (terra) e "métron" (medir), ou seja, medir a terra. Por volta de 600 a.C. após as cheias do Rio Nilo, as marcações de terras utilizadas para a agricultura eram apagadas e tinham de ser refeitas. Para isso, os egípcios utilizavam-se de cordas com 12 nós (corda fechada) com 12 comprimentos iguais, e com essas cordas com nós eles sabiam que se formava um triângulo de lados 3, 4 e 5 e por vez um ângulo reto.

Conforme Strathern(1997), um escriba egípcio Ahmés escreveu por volta de 1650 a. C. afirmando que a área do círculo era igual ao quadrado de 8/9 do seu diâmetro, ele não descobriu o π, mas essa constante utilizada por ele era de 3,165 que se erra por aproximadamente 2%. Esse mesmo escriba é o autor de um importante documento chamado de Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmés, que foi adquirido pelo egiptólogo escocês Alexander Henry Rhind em 1858 no Egito. Esse documento descreve a solução de 85 problemas de aritmética, geometria, equações de 1º grau, entre outros.

Figura 2: Papiro de Ahmés.



Fonte: https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html

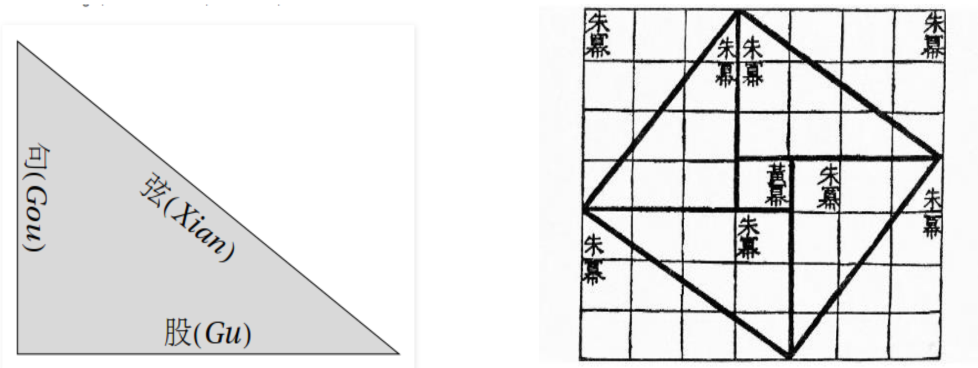
O próximo destino de viagem de Pitágoras depois do Egito foi a região da Babilônia. Os babilônios possuíam grandes conhecimentos sobre a matemática e a astronomia. Eles conseguiam calcular os eclipses solares e lunares. Assim como os egípcios, os babilônios deixaram grandes documentos que descrevem seus conhecimentos matemáticos. Hoje existem inúmeros achados arqueológicos chamados de tabuas da babilônia, umas dessas tabuas, conhecida por “Plimpton 322,” chama a atenção por ser umas das mais antigas e importantes em relação a conhecimentos trigonométricos, tem idade aproximada de 3.700 anos com bastantes conhecimentos trigonométricos, com escritas cuneiformes (escrita feitas com auxílio de objetos em formato de cunha), apresentando vários ternos pitagóricos e a utilização do sistema sexagesimal (de base 60).

Figura 3: Plimpton 322.

Fonte: http://www.naturalhistorymag.com/samplings/033410/old-math

Mesmo que não existam evidencias de que Pitágoras tenha visitado o Oriente, vale destacar que existe um documento antigo Chinês chamado de “Chou Pei” com idade aproximada de 1000 a. C. Outros documentos antigos mostram que na Índia, bem antes da era Cristã, sabia-se que os triângulos de lados 3, 4 e 5 ou 5, 12, 13 ou 12, 35, 37 são retângulos (LIMA, 1991). Um famoso livro chinês, o Zhoubi Suanjing do século 3 a.C. reuniu 246 problemas, um deles é o “Gou Gu”, o equivalente chinês do Teorema de Pitágoras. Porém, ele não é uma prova do Teorema de Pitágoras e sim apenas uma verificação dos ternos 3, 4 e 5 que corresponde proposição.

Figura 4: Representação do Gou Gu.



Fonte: https://worldhistory1isobe.wordpress.com/2013/11/11/the-gou-gu-xian-theorem/

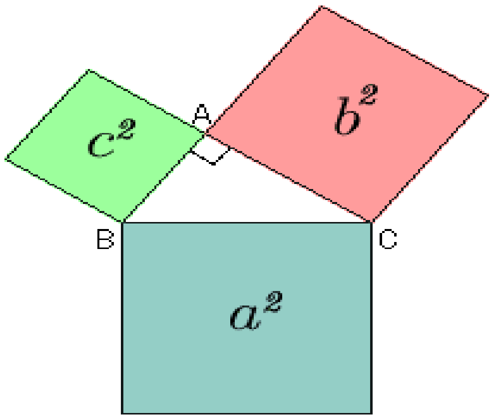
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Chou_Pei_Suan_Ching

Após essa longa viagem, Pitágoras retorna a Samos depois de uma longa busca por conhecimento, Pitágoras começou a ser reconhecido graças a seus conhecimentos, porém quando retornou a Samos, ela estava sendo governada por Polícrates. Strathern(1997) define Polícrates como um homem de personalidade astuta e cruel e que tinha o objetivo de diversificar os interesses comerciais de Samos, e mais, ele descreve que Polícrates tomou o poder de forma desleal enquanto o povo festejavam em uma festa local. Por isso, Polícrates adquiriu muitos inimigos entre eles alguns intelectuais. Porém, Strathern (1997) cita que “não está claro o papel que Pitágoras desempenhou para Polícrates em tudo isso, mas por Pitágoras o considerar superior a qualquer tirando ordinário”, e ser um homem culto e não aceita algumas atitudes de Polícrates, tais fatores, talvez, tenha sido o motivo do seu exilio em Samos, então após ser banido, Pitágoras se estabelece em colônia chamada de Crotona que fica na Itália a oeste de Samos, isso por volta de 529 a.C.

Apesar de os egípcios, babilônios e até outros povos já fazerem uso do “Teorema de Pitágoras,” mesmo que de modo informal, sendo utilizado no seu dia a dia, fica evidente que eles não conseguiram chegar a algo mais geral. Entretanto, Pitágoras ou algum Pitagórico (membro da sociedade secreta fundada por Pitágoras) alcançou a tal feito, conseguindo demonstrar a relação entre os lados de um triângulo retângulo, conforme (LIMA, 1991). Desta forma, acredita-se que Pitágoras foi o primeiro a prová-lo (ou alguém de sua escola). A demonstração original não é conhecida, porém os historiadores acreditam que deve ter sido alguma relacionada com áreas (LIMA, 1991), sendo a proposição para o teorema a seguinte:

“Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado, cujo lado tem medida igual a hipotenusa desse triângulo, é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos”.

Figura 5: Representação do gráfico do Teorema de Pitágoras



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-repensando-o-teorema-de-pitagoras

A representação gráfica acima do Teorema de Pitágoras é dada por um triângulo retângulo ABC: triângulo que possuem um ângulo de 90 graus, com o lado oposto ao ângulo reto, chamado de hipotenusa (lado maior do triângulo retângulo), e os demais lados são chamados de catetos (lados menores do triângulo retângulo).

2.2 Sociedade secreta

Após seu banimento da cidade Samos pelo governante Polícrates, Pitágoras viaja à Crotona e lá se estabelece. Como seu reconhecimento já tinha se espalhado por várias regiões, Pitágoras começou a se definir como professor e filósofo. Em Crotona, Pitágoras fundou uma sociedade secreta cuja base era o estudo da matemática e da filosofia.

A escola pitagórica tinha um código de conduta rígido, acreditava-se na transmigração das almas e, portanto, que não se devia matar ou comer um animal porque ele poderia ser a moradia de um amigo morto. Os pitagóricos imaginavam que os números ímpares tinham atributos masculinos e os pares eram femininos. Eles diziam, ainda, que o número 1 é o gerador dos outros números e o número da razão. Um outro fato incomum para aquela época era a aceitação de mulheres.

Figura 6: Representação da Escola Pitagórica.

Fonte: http://www.historiadasartes.com/sala-dos-professores/a-escola-de-atenas-rafael-sanzio/

A sociedade secreta, tinha esse nome por conta de suas reuniões escondidas e de segredos a respeito de seus estudos. Além disso, seus membros possuíam um símbolo de um pentagrama em uma de suas mãos, visto que o pentagrama era considerado pelos babilônios como o símbolo da saúde física e espiritual e tinha propriedades relacionadas a divina proporção (mais tarde relacionada como Razão de Ouro). Conforme cita Strathern(1997), seus encontros secretos eram voltados aos estudos dos números, religião, filosofia e política entres áreas, tendo como lema “o número é tudo”. Chamados de iniciantes, aqueles eram novatos na escola pitagórica, não podiam falar com o mestre ou os alunos mais velhos da sociedade secreta, que eram chamados de matemáticos. Sendo que os aprendizes mais antigos podiam fazer perguntas e até mesmo expor suas opiniões em alguns casos.

Segundo Strathern (1997) e Monk (2000, p. 13) os pitagóricos conseguiram realizar algumas atribuições para a matemática, como o primeiro número irracional a raiz de 2:

> Outra das grandes descobertas que resultaram do teorema de Pitágoras foi a dos números irracionais[...] “Os pitagóricos descobriram que o valor não podia ser encontrado. Por maiores que fossem as unidades de medição usadas e por mais precisas que fosse a régua, seu comprimento sempre ficava deslocado em alguma parte entre dois pontos da escala (STRATHERN 1997, p. 32-33).

Conforme Strathern (1997), as descobertas feitas por Pitágoras ou algum membro da sociedade secreta não podiam ser relevadas, se algum Pitagórico divulgasse alguma desses estudos secretos, esse discípulo poderia ser expulso e, em alguns casos, como cita Strathern (1997) havendo até agressões físicas por parte dos Pitagóricos a quem fez a revelação. Pois, por trás de cada estudo ou descoberta tanto existia muita matemática envolvida como também muito misticismo e crenças. Exemplo disso foi a descoberta dos números irracionais.

Como Pitágoras e os Pitagóricos acreditavam que o mundo era, de certa forma, formado por padrões e harmonias, os números irracionais não podiam ser apresentados por eles, já que não podiam ser inteiros, nem frações. Assim, eles estavam fora dos padrões e não podiam fazer parte deste mundo de equilíbrio. Monk (2000), também descreve essa descoberta dos números Irracionais pelos Pitagóricos através do Teorema de Pitágoras, que caíram em contradição com seus dogmas que ensinavam que tudo são números, ou seja, pode ser medido e representado. Tudo podia ser comensurável (medido, finito).

> De acordo com o Teorema de Pitágoras, o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo, no qual os outros dois lados possuem o comprimento de uma unidade, será igual à raiz quadrada de 2. O problema é que raiz quadrada de 2 é incomensurável, isto é, ela não pode ser expressa como relação entre dois números, ou, para dizer de outro modo, ela é "irracional". Segue-se que há pelo menos uma coisa no mundo que não é a expressão de uma relação numérica (MONK, 2000, p, 13).

Pitágoras descobriu o que hoje é chamado de harmonia músical. Para chegar nessa harmonia, ele observou que existia um padrão em relação ao comprimento de uma corda e os sons gerados por ela, esse padrão gerava sons agradáveis, sendo essa harmonia musical referente a notas musicais como dó, ré, mi, fá, só, lá, si, criadas a partir de uma proporção, os experimentos que Pitágoras fazia, tinham o uso do monocórdio que é instrumento de uma corda, com seus experimentos Pitágoras descobriu que se ele colocasse seu dedo sobre a corda de forma que a medida da corda tivesse as seguintes divisões $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$, e $\frac{4}{5}$, então eram gerados sons agradáveis. Alguns consideram Pitágoras como o inventor deste instrumento.

> Descobriu que a harmonia musical numa corda esticada que se fere (ou numa coluna de ar, como na flauta) obedece a razões. Com efeito, as mais belas (agradáveis) harmonias correspondiam as mais belas (mais simples) razões. Uma oitava corresponde a razão de 2:1. Uma quinta corresponde a razão 3:2, uma quarta a razão 4:3(STRATHERN ,1998, p.35).

Conforme Strathern (1998), Pitágoras classificou os números em pares (machos) e ímpares (fêmeas), porém com essa ideia sugiram algumas dificuldades do tipo: o número 1 não poderia ser o primeiro número, por que era todo indivisível e, por outro lado, 2 não podia ser o primeiro número, pois Pitágoras e os Pitagóricos consideravam ele como fêmea. Então Pitágoras decidiu que 3 era o primeiro número, pois tinha começo, meio e fim.

> Os pitagóricos tiveram grandes influencia no misticismo dos números, mas não foram os únicos a imaginar os números ímpares como sendo masculinos e os pares femininos; afirmavam que os impares exerciam supremacia sobre os pares, pois a soma de dois impares gera um número par e a de dois pares sempre gera um número par (CYRINO, 2006, p. 46).

Outra descoberta atribuída a Pitágoras foi a classificação dos números em números perfeitos, o número que eles tinham como perfeito era o 6. Nos Elementos de Euclides, mais precisamente, no livro IX, na proposição 36 que se refere a números perfeito, verifica-se como podem ser calculados os números perfeitos. De acordo com Araújo H.; Garapa M.; Luiza R, a proposição de 36 do livro IX de Euclides é:

> Se tantos números quantos se queira começando a partir da unidade forem dispostos continuamente numa proporção duplicada até que a soma de todos resulte num número primo, e se a soma multiplicada pelo último origina algum número, então o produto será um número perfeito.
> Se $2^{\mathrm{p}} - 1$ é um número primo, então n = $(2^{\mathrm{p}} - 1).(2^{\mathrm{p}-1})$ é um número perfeito (2005, p.37)".

Utilizando esta proposição de Euclides mostraremos que o número 6, como dito por Pitágoras, era de fato perfeito. Seja $\mathrm{p} = 2$, temos

$$2^{\mathrm{p}} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Como 3 é primo, então para $\mathrm{p} = 2$ é verdade, agora verifiquemos que:

$$\mathrm{n} = (2^{\mathrm{p}} - 1).(2^{\mathrm{p}-1}) \rightarrow n = (2^2 - 1).(2^{2-1})$$

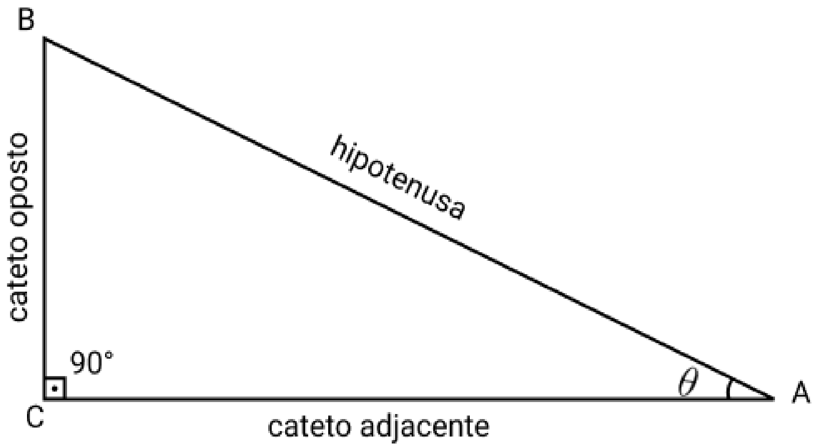
$$\mathrm{n} = (4 - 1).(2^1) \rightarrow n = (3).(2) \rightarrow n = 6$$

Até o séculos XV, só sabia-se a existência de 4 números perfeitos o 6, 28, 496 e 8128. Outra descoberta atribuída aos Pitagóricos foi que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, conforme Guedj (1999, p.111).

3 TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras, como visto anteriormente, foi desenvolvido e demonstrado por Pitágoras ou por um de seus alunos, com base nos conhecimentos obtidos com as viagens para outras regiões. Nesse resultado, ele expressa a relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. Lembrando que um triângulo retângulo é uma figura geométrica formada por três lados, que possui um ângulo interno reto, ou seja, um ângulo de 90 graus, e os demais ângulos agudos (menores que 90 graus). Além disso, a soma dos ângulos internos igual a 180 graus, o lado maior que sempre fica oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os outros lados menores do triângulo são chamados de catetos. Considerando o ângulo θ, como na figura, os catetos são classificados como cateto oposto e cateto adjacente a θ.

Figura 7: Triângulo Retângulo.



Fonte: https://matematicabasica.net/seno-cosseno-e-tangente/

A área do triângulo retângulo é igual à metade do produto de um lado pela altura correspondente. Além disso, no triângulo retângulo, são definidas as seguistes relações trigonométricas.

Seno (α) = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotensa}}$;

Cosseno (α) = $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$;

Tangente (α) = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$;

3.1 DEMONSTRAÇÕES

Hoje a maioria dos livros didáticos apresentam a demonstração do Teorema de Pitágoras por semelhança de triângulos. Porém, existem inúmeras demonstrações para esse teorema. Por exemplo, um livro em que podemos encontrar essas diversas demonstrações é o livro que tem como título “The Phytagorean Proposition” (A proposição Pitagórico), de autoria do professor de matemática Elisha Scott Loomis, sua segunda edição foi publicada em 1940 pelo The National Coucil of Teachers of Mathematics (O Conselho Nacional de Professores de Matemática), na série Classics in Mathematics Education (Clássicos em Educação Matemática), conforme se encontra no prefácio do livro, o primeiro manuscrito desse trabalho foi preparado em 1907 e sua primeira edição é de 1927. A segunda edição foi publicada após sua morte com autorização da família. O livro de Loomis apresenta 370 provas, que são classificadas em quatro tipos: Provas algébricas, por relações lineares (109 provas), provas geométricas (255 provas), provas baseadas em operações vetoriais (4 provas) e provas dinâmicas que são baseados em massa e velocidade, dinâmica (2) encontra:

> Em 1927 (quando já era professor universitário), Loomis publicou A proposição pitagórica, livro contendo 230 provas; em 1940, então aos 87anos, Loomis publicou uma segunda edição, com 370 provas (LIMA, 1991).
>
> [...] A última frase de sua segunda edição e: “E ainda não chegamos ao fim”. Loomis estava certo; não era o fim. O site Guinness World Records, sob o título “Maior quantidade de provas do teorema de Pitágoras”, recentemente apontou um grego que diz ter descoberto 520 provas distintas. (CREASE, 2011, p. 24 e 25) e (CASTRO, 2013).

3.1.1 Demonstração supostamente de Pitágoras

Como já foi citado neste trabalho, não há evidências de que a demonstração a seguir foi realizada por Pitágoras, pois ele não deixou trabalhos escritos, como cita Roque (2012, p.112). No entanto, Eves (2011, p.103), assim como outros autores, atribuem a ele a autoria desta demonstração.

Figura 8: Demonstração de Pitágoras.

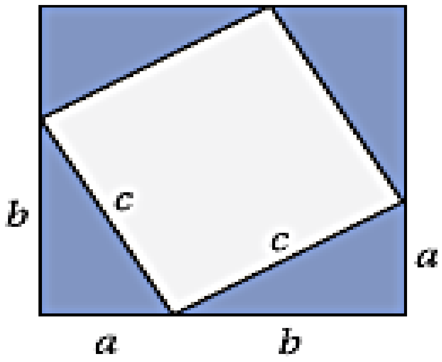
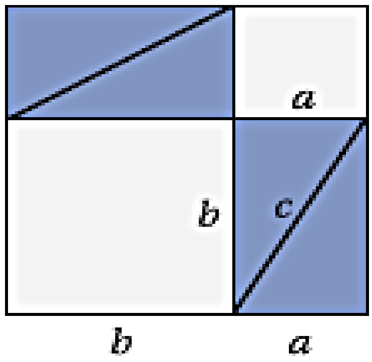


Figura 9: Demonstração de Pitágoras.



Fonte: http://www.rpm.org.br/cdrpm/74/6.html

A ideia dessa demonstração é bem simples, classificada como geométrica sendo sua prova por meio de comparação das áreas das figuras 8 e 9 que são quadrados de lado $a + b$, sendo que na figura 8 temos um quadrado de lado c que corresponde a hipotenusa dos triângulos retângulos presentes na figura 8. Ao retiramos esses 4 triângulos congruentes e reorganizando na figura 9 de forma dois a dois formaremos dois retângulos de bases b e alturas a e sobrando assim dois quadrados de lados a e b, respectivamente, onde a soma de suas áreas corresponde a área do quadrado de lado c. Assim temos $c^2 = b^2 + a^2$.

Também podemos provar esse Teorema de Pitágoras através dessas figuras de forma algébrica, isto, é:

$$c^2 + (\frac{a.b}{2} + \frac{a.b}{2} + \frac{a.b}{2} + \frac{a.b}{2}) = b^2 + a^2 + (a.b + a.b)$$

$$c^2 + \frac{4.a.b}{2} = b^2 + a^2 + 2ab$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$

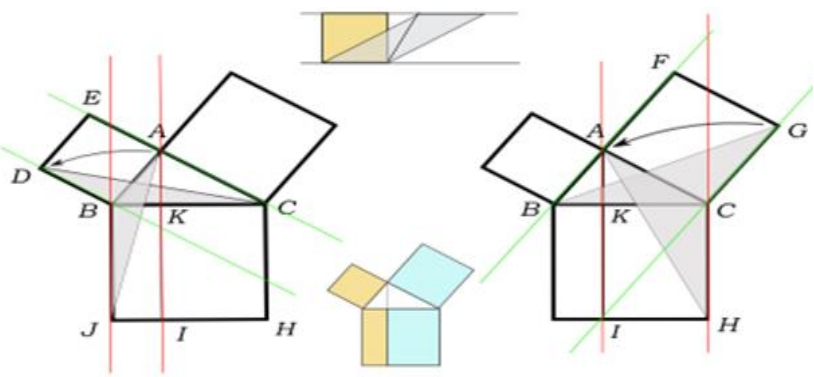
3.1.2 Demonstração de Euclides

A demonstração de Euclides é considerada uma das mais famosas e uma das mais antigas demonstrações do Teorema de Pitágoras. Ela é encontrada no livro I na proposição 47, da coleção de 13 livros de título "*Os Elementos*" escritos por Euclides, Loomis (1940, p. 119) também a apresenta na demonstração 33, figura 134, ela também pode ser classificada como geométrica e pode ser realizada através de comparação de áreas. De acordo com Frederico Commandino, a demonstração seguinte foi apresentada por Euclides.

> Proposição XLVII. Em todo o triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto (Fig. 69.). (Euclides, Elementos de Geometria, Frederico Commandino, São Paulo, 1944, p. 28).
> **DEMONSTRAÇÃO**. Seja o triângulo retângulo ABC, cujo ângulo reto seja BAC. Digo que o quadrado feito sobre o lado BC é igual aos quadrados descritos sobre os lados BA, AC, que formam o ângulo reto BAC. Descreva-se sobre BC o quadrado BDEC (Pr. 46.1.), e sobre BA, AC os quadrados GB, HC. Pelo ponto A tirasse AL, paralela (Pr. 31.1.) a BD, ou CE, tirem-se também as retas AD, FC. Porque os ângulos BAC, BAG são retos (Def. 30.), as duas retas CA, AG estão em direitura uma com outra (Pr. 14.1.). O mesmo será a respeito das duas AB, AH. Os ângulos DBC, FBA, por serem retos, são iguais. Ajunte-se lhes o mesmo ângulo ABC. Logo, o total DBA será igual ao total FBC (Ax. 2.). E sendo as duas AB, BD iguais às duas ELEMENTOS DE GEOMETRIA 28 EUCLIDES FB, BC, cada uma a cada uma, e o ângulo DBA = FBC, será o triângulo ABD = FBC outro triângulo (Pr. 4.1.). Mas o paralelogramo BL é o dobro (Pr. 41.1.) do triângulo ABD, porque está sobre a mesma base BD, e entre as mesmas paralelas BD, AL; e o quadrado GB é o dobro do triângulo FBC, porque tem a base comum FB, e estão entre as mesmas paralelas FB, GC. Logo, sendo iguais os dobros de quantidades iguais (Ax. 6.), deve ser o paralelogramo BL igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, tiradas as retas AE, BK, se demonstra, que o paralelogramo CL é igual ao quadrado HC. Logo, o quadrado inteiro BDEC, feito sobre o lado BC oposto ao ângulo reto BAC, é igual aos dois quadrados GB, HC formados sobre os lados BA, AC, que fazem o mesmo ângulo reto BAC. (Euclides, Elementos de Geometria, Frederico Commandino, São Paulo, 1944, p.28-29).

A ideia da demonstração de Euclides traduzida por Federico Commandino (1944) é a seguinte: consideremos o triângulo retângulo ABC, cujo ângulo reto é $\mathrm{B\hat{A}C}$, e agora construímos quadrados ABDE, ACGF e BCHJ sobre os lados AB, AC e BC respectivamente. Os quadrados $\mathrm{ABDE}, \mathrm{ACGF}$ e BCHJ possuem lados medindo a, b e c respectivamente, agora tracemos um segmento AI perpendicular à BC passando pelo ponto K, conforme a figura abaixo.

Figura 10: Demonstração de Euclides.



Fonte: http://enciclotest.us.es/images/5/5c/Euclides.Teorema_de_Pit%c3%a1goras.png

Agora consideremos os triângulos DBC e ABJ, sabendo que $\mathrm{BA} = \mathrm{BD}$ e $\mathrm{BC} = \mathrm{BJ}$, sendo o ângulo $\mathrm{A\hat{B}C} = \alpha$, logo o ângulo $\mathrm{D\hat{B}C} = \mathrm{D\hat{B}A} + \mathrm{A\hat{B}C} = 90º + \alpha$ e mais o ângulo $\mathrm{A\hat{B}J} = \mathrm{C\hat{B}J} + \mathrm{A\hat{B}C} = 90º + \alpha$, portanto os ângulo a $\mathrm{B\hat{D}C}$ e $\mathrm{A\hat{B}J}$ são congruentes, logo pelo critério lado, ângulo, lado os triângulos DBC e ABJ são congruentes, sendo que a área do triângulo DBC é descrita por $\frac{1}{2}\,(\mathrm{DB}\,.\,\mathrm{DE})$ e o triângulo ABJ tem área $\frac{1}{2}(\mathrm{BJ}\,.\,\mathrm{BA})$, com isso temos que a área do quadrado ABDE é igual a 2 vezes a área do triângulo DBC . Da mesma forma tem-se que a área do retângulo BKIJ é igual a 2 vezes a área do triângulo ABJ, sabendo que a área do quadrado ABDE é a^2então a área do retângulo BKIJ é igual a^2.

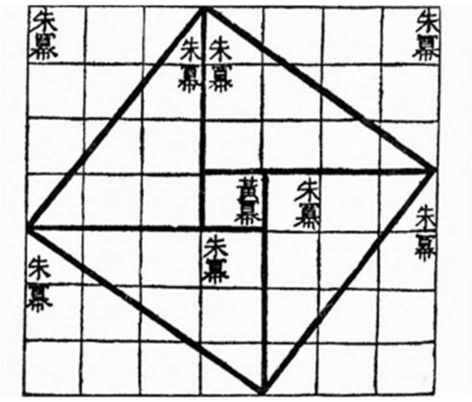
De forma análoga temos: considerando os triângulos BCG e ACH, sabendo que $\mathrm{CB} = \mathrm{CH}$ e $\mathrm{CA} = \mathrm{CG}$, sendo o ângulo $\mathrm{B\hat{C}A} = \beta$, logo o ângulo $\mathrm{B\hat{C}G} = \mathrm{B\hat{C}A} + \mathrm{A\hat{C}G} = \beta + 90º$ e o ângulo $\mathrm{A\hat{C}H} = \mathrm{B\hat{C}A} + \mathrm{B\hat{C}H} = \beta + 90º$, portanto os ângulos a $\mathrm{B\hat{C}G}$ e $\mathrm{A\hat{C}H}$ são congruentes, logo pelo critério lado, ângulo, lado os triângulos BCG e ACH são congruentes, a área do triângulo BCG é descrita por $\frac{1}{2}(\mathrm{CG.\,GF})$ e o triângulo ACH tem área $\frac{1}{2}(\mathrm{CH}\,.\,\mathrm{HI})$, com isso temos que a área do quadrado ACGF é igual a 2 vezes a área do triângulo BCG . Da mesma forma, tem-se que a área do retângulo CKIH é igual a 2 vezes a área do triângulo ACH, sabendo que a área do quadrado ACGF é b^2, e, sabendo que os triângulos BCG e ACH são congruentes então suas áreas também são congruentes, por conseguinte a área do retângulo CKIH é igual ao do quadrado. Como o quadrado BCHJ possui lado medido c, sua área é c^2, porém ele é formado pelos retângulos $BKIJ$ e CKIH tendo área iguais a a^2 e b^2. Portanto: $\mathrm{c}^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2$.

3.1.3 Demonstração de Bhaskara

Bhaskara (1114 -1185), conhecido no Brasil por conta da fórmula resolutiva das equações do 2º grau. Porém há indícios de que as resoluções das equações já apareciam acerca 1000 a. C. nas tabuas babilônicas. Foi um matemático hindu que ensinou em Ujjain, um dos maiores centros de matemática e astronomia da época, a demonstração de Bhaskara para o Teorema de Pitágoras. Conforme destaca Barbosa (1993), ele apresentou apenas a figura e uma palavra que tem significado “veja” ou “contemple “. A demonstração de Bhaskara também encontrada em Loomis (1940, p. 50).

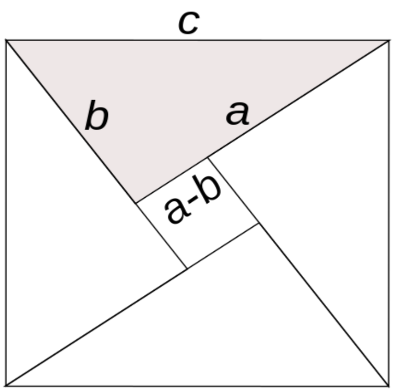
Alguns escritores dizem que a demonstração de Bhaskara é baseada Gou Gu, (representação chinesas do Teorema de Pitágoras com base em relações de áreas das figuras), pois se assemelham por conta de as figuras utilizadas serem parecidas. Diferenciando-se à medida que o Gou Gu utiliza medidas fixas, enquanto Bhaskara faz uso de uma forma mais geral para demonstrar o Teorema de Pitágoras. No Gou Gu, o quadrado tem lado igual a 5 unidades, os triângulos retângulos possuem medidas 3 e 4 unidades para seus catetos e sua hipotenusa mede 5. Além disso, no centro do quadrado apresenta um quadrado de medida 1 unidade (ver na figura). Sabendo que a área de cada triângulo retângulo é $(\frac{base\,.altura}{2})$, logo a área de cada triângulo retângulo corresponde a 6 unidades. Portanto o quadrado maior apresenta $(4.6) + 1 = 25.$

Figura 11: Demonstração de Gou Gu.



Fonte:https://pt.wikipedia.org/wiki/Chou_Pei_Suan_Ching

Figura 12: Representação de Bhaskara.



Fonte: https://ca.wikipedia.org/wiki/Bhaskara_II

Já na demonstração de Bhaskara, inicia-se com a figura de um quadrado de lado c, com quatro triângulos retângulos congruentes inscritos nele, as hipotenusa c e catetos a e b e um quadrado de lado $a - b$, sendo que a área do quadrado de lado c é igual a soma das áreas dos quatro triângulos mais a área do quadrado central de lado $a – b$. A área do quadrado de lado c é dada por c^2, e a área do triângulo é:

$$c^2 = (a - b)^2 + (\frac{4ba}{2})$$

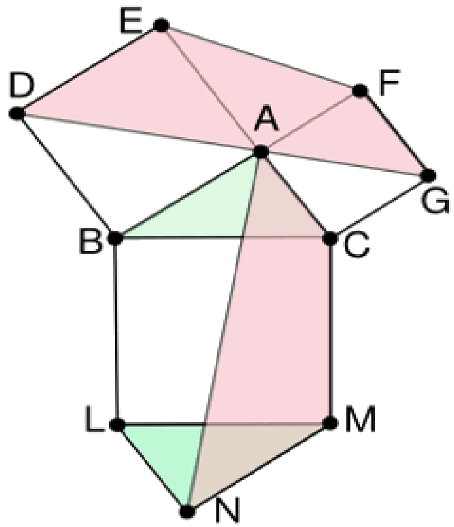
$$c^2 = a^2 - 2ba + b^2 + 2ba$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

3.1.4 Demonstração de Leonardo da Vinci

O “grande” Leonardo da Vinci, foi e é um artista bastante conhecido até os tempos atuais, muitos o conhecem de suas artes, por exemplo, a Última Ceia(1498) ou a Mona Lisa (1503-1505), O Homem Vitruviano (1492), entre outras. Leonardo da Vinci, viveu na época do Renascimento período entre a Idade Média e a Idade Moderna, nasceu em 15 de abril de 1452 em uma vila da Itália chamada de Toscana, considerado por muitos um homem que viveu a frente de seu tempo, devido ao estudo nas mais diversas áreas: anatomia humana, óptica, engenharia civil e matemática, sendo responsável por uma demonstração do Teorema de Pitágoras, baseada na figura abaixo.

Figura 13: Demonstração de Leonardo da Vinci.



Fonte: http://www.tikalon.com/blog/blog.php?article=2013/Leonardo_Pythagoras

Sua demonstração também pode ser encontrada no livro de Loomis (1940, p.129), ela começa a partir de um triângulo retângulo ABC com ângulo reto em $\mathrm{B\hat{A}C}$. Nos lados AC, AB e BC são formados quadrados $\mathrm{ABDE}, \mathrm{ACGF}$ e BCML, respectivamente, no lado do quadrado BCML é feito um triângulo idêntico ao ABC e depois traça-se um segmento entre os pontos EF também o formando um triângulo congruente ao ABC, e em seguida, traça-se os segmentos DG e NA, formando assim a figura acima.

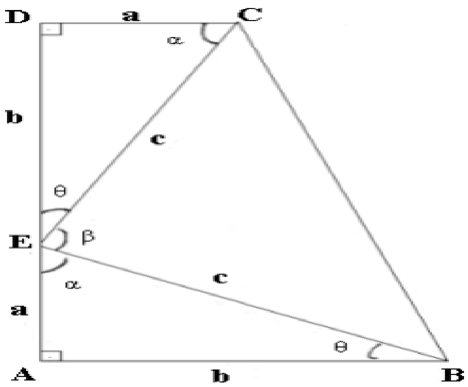
Observando-se que os quadriláteros ABLN, ACMN, DBCG e DEFG, são congruentes, e que a área de $\mathrm{ABLN} + \mathrm{ACMN}$ é igual a área de $\mathrm{DBCG} + \mathrm{DEFG}$, e como ambos possuem dois triângulos iguais ao do triângulo ABC, então os hexágonos CBDEFG e CABLNM têm a mesma área. Portanto, a área do quadrado BCML é igual a soma das áreas dos quadrados ABDE e ACGF.

3.1.5 Demonstração do Presidente Garfield

O Presidente James A. Garfield (1831-1881), foi o vigésimo presidente dos Estados Unidos em 1881, seu mandato durou apenas 4 meses daquele mesmo ano. O presidente Garfield era um estudioso e gostava de matemática, em 1876 enquanto estava em uma câmara de representantes, rabiscou uma demonstração do Teorema de Pitágoras que foi publicada pelo New England Journal of Education. Tal demonstração pode ser encontrada em Loomis (1994, p. 231).

Inicialmente o presidente Garfield começou por um triângulo retângulo EAB de catetos a e b, e hipotenusa c, depois desenhou o mesmo triângulo retângulo que chamaremos de EDC, como na figura 14, de modo que o cateto a ficou oposto ao cateto b do segundo triângulo e, por fim, interligando os vértices dos triângulos forma-se assim um novo triângulo CEB e um trapézio retangular ABCD de bases $\mathrm{a}+\mathrm{b}$, conforme na figura 14.

Figura 14: Demonstração do Presidente Garfield.



Fonte: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96613/Fernando.pdf?sequence=1

Observando que α e θ são ângulos complementares, ou seja, a soma é igual a 90 graus e mais seja α e θ e β ângulo cuja soma é igual a $180\,\mathrm{graus}$, então β é equivalente a $90\,\mathrm{graus}$, logo o triângulo CEB é retângulo e possui ângulo reto em CEB. Sabendo que a área de um triângulo retângulo é $\left(\frac{\mathrm{base.altura}}{2}\right)$ e a área de um trapézio é $\left(\frac{\text{base maior} + \text{base}}{2}\right).\text{altura}$, agora temos que a soma das áreas dos três triângulos retângulos é igual a área do trapézio com bases a e b, e altura $\mathrm{a}+\mathrm{b}$, logo:

$$\left(\frac{a.b}{2}\right)+\left(\frac{a.b}{2}\right)+\frac{c^2}{2}=\frac{(a+b).(a+b)}{2}$$

$$2.a.b+c^2=a^2+2.a.b+b^2$$

$$c^2=a^2+b^2+2.a.b-2.a.b$$

$$c^2=a^2+b^2$$

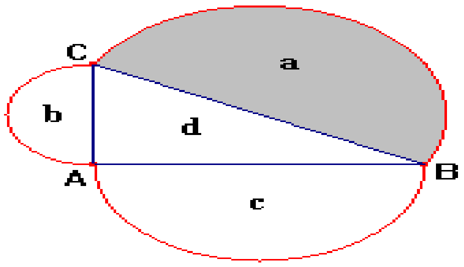
Com isso fica demonstrado o Teorema de Pitágoras do mesmo modo que o Presidente Garfield demonstrou.

3.1.6 Demonstração usando semicírculo

Da mesma forma que Euclides provou o Teorema de Pitágoras por meio da comparação de áreas de quadrados, pode-se também demostrar o Teorema de Pitágoras através da comparação de áreas de semicírculos. Tal demonstração é descrita também por Loomis (1940, p. 72-73).

Consideremos um triângulo retângulo ABC com catetos b e c, e hipotenusa a, agora construindo semicírculos a partir dos lados dos triângulos formamos a figura 15 abaixo.

Figura 15: Demonstração usando semicírculo.



Fonte:http://www.epsilones.com/paginas/problemas/problemas068lunulastriangulo.html#solucion

Sabemos que a área de um círculo é dada pela fórmula $\pi.r^2$, sendo r o raio da circuferência e sabendo que o diametro é igual $2.r$, temos que a área do semicirculo é dada por $\frac{\pi.r^2}{2}$. Logo, se representarmos as áreas dos semicirculos por S_a, S_b e S_c, temos:

$$S_a=\frac{\frac{\pi a^2}{2^2}}{2},\quad S_b=\frac{\frac{\pi b^2}{2^2}}{2},\quad S_c=\frac{\frac{\pi c^2}{2^2}}{2}$$

Assim,

$$\frac{\frac{\pi a^2}{4}}{2} = \frac{\frac{\pi b^2}{4}}{2} + \frac{\frac{\pi c^2}{4}}{2} \rightarrow \left[\frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8}\right].8$$

$$[\pi a^2 = \pi b^2 + \pi c^2] \div \pi \rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Portanto, através dos semicírculos, está demostrada a relação do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo.

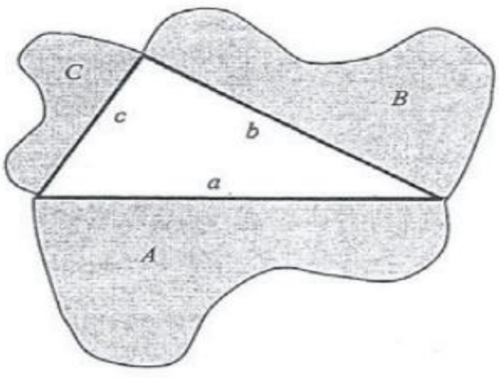
3.1.7 Generalização do Teorema de Pitágoras

Conforme visto neste trabalho na seção 1.1 p. 20, o Teorema de Pitágoras afirma que a área do quadrado construído a partir da hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Vimos ainda, que esse teorema pode ser demonstrado de diversas formas como, por exemplo, pela comparação de áreas de figuras (quadrados, triângulos, semicírculos e entre outros polígonos regulares).

Conforme Wagner (2010, p.11-12) podemos generalizar o Teorema de Pitágoras fazendo uso de qualquer figura semelhante, ou seja, “dado um triângulo retângulo, a área da figura construída sobre sua hipotenusa é igual a soma das áreas das figuras construídas sobre seus catetos”.

Para demonstrar esta generalização utilizaremos um triângulo retângulo de catetos com medidas b e c, e hipotenusa medindo a, em seguida selecionaremos três figuras semelhantes A, B e C que são construidas sobre a hipotenusa e os catetos, respectivamente, conforme a figura 16.

Figura 16 : Generalização do Teorema de Pitágoras



Fonte:https://www.locus.ufv.br/bitstream/handle/123456789/5882/texto%20completo.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Fazendo uso da propriedae que diz “a razão das áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança”, temos:

Logo, $\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$ e $\frac{A}{C} = \frac{a^2}{c^2} \rightarrow \frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}$

Como, $\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$ e $\frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}$, então $\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}$

Agora, $\frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2}$, portanto $\frac{A}{a^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2}$.

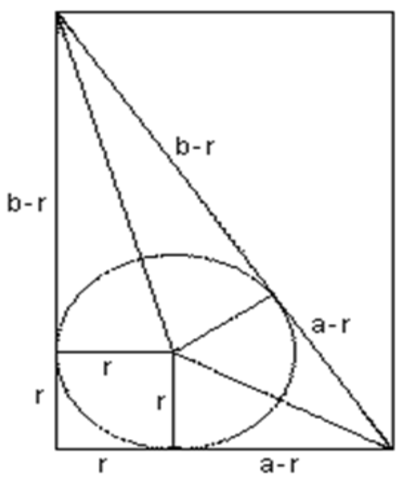
Desse modo, $A = B + C$, e assim demonstrada uma generalização do Teorema de Pitágoras para figura semelhante.

3.1.8 Demonstração de Jack Oliver

Esta demonstração foi feita por Jack Oliver e publicada em uma revista chamada The Mathematical Gazette de volume 81, p. 117-118, em março de 1997.

A figura 16 representa o diagrama de Jack Oliver que é constituído de um triângulo retângulo com uma circunferência de raio r inscrita neste triângulos, de catetos a, b e hipotenusa c, tal que $c = (a - r) + (b - r)$, ou $r = p - c$, sendo chamado de p o semiperímetro (medida da metade do perímetro de uma figura geométrica) do triângulo retângulo o qual é equivalente $p = \frac{a.b.c}{2}$.

Figura 17: Diagrama de Jack Oliver.



Fonte: https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/ index.shtml

A área do triângulo é calculada da seguinte forma:

$$p.(p - c) = \frac{a.b}{2}$$

$$\left[\frac{a+b+c}{2} . \frac{a+b-c}{2} = \frac{a.b}{2}\right] .2$$

$$\frac{(a + b + c).(a + b - c)}{2} = a.b$$

$$(a + b + c).(a + b - c) = 2.a.b$$

$$(a + b)^2 - c^2 = 2.a.b$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = 2.a.b$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab - 2.a.b$$

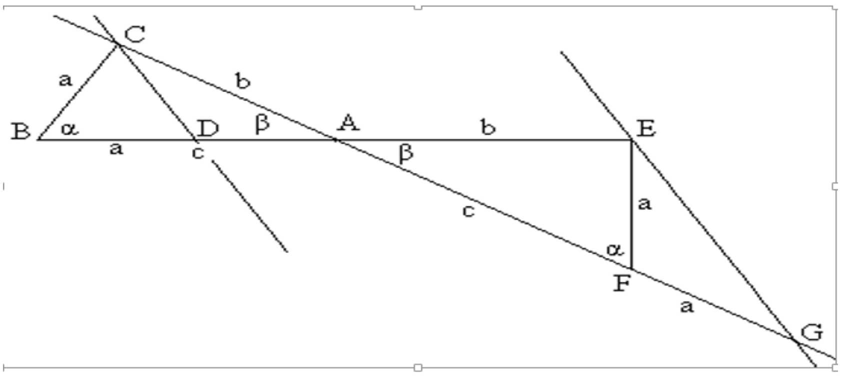
$$a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

3.1.9 Demonstrações Adam Rose

Essa prova do Teorema de Pitágoras foi apresentada por Adam Rose (2004). Adam começa sua demonstração pela construção do seu diagrama, ela esboça dois triângulos retângulos congruentes: ABC e AFE de catetos a, b e hipotenusa c, sendo que ambos possuem o vértice A em comum, formado através da intersecção dos segmentos BE e CF. Logo, após são traçadas duas retas uma passando pelo vértice C do triângulo retângulo ABC e intersectando o segmento AB no ponto D, tal que $BC = BD$, ou seja, de comprimento a, e de forma análoga a segunda reta passa pelo ponto vértice E do triângulo retângulo AFE e intersecta na extensão do segmento AF no ponto G de modo que, $FG = EF = a$, desta forma cria-se três novos triângulos o BCD, ACD e EFG.

Figura 18: Diagrama de Adam Rose



Fonte: https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/

Os triângulos BCD e EFG são isósceles, pois possuem dois lados iguais de medida a, logo o ângulo BCD = $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$. Agora, o ângulo ACD = $\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})=\frac{\alpha}{2}$. E mais, como o ângulo AFE é exterior ao triângulo EFG, então $\mathrm{AFE}=\alpha=\mathrm{FEG}+\mathrm{FGE}$ que são ângulos da base do triângulo EFG que é isósceles, isso implica que os ângulo FEG e FGE são iguais e valem $\frac{\alpha}{2}$, como os ângulos $\mathrm{AGE}=\mathrm{FGE}$, portanto $\mathrm{AGE}=\frac{\alpha}{2}$.

Agora temos duas retas que contêm os segmentos, CD e EG, cruzadas por segmento CG com dois ângulos internos alternados, e como os ângulos ACD e AGE são iguais. Conclui-se que o segmento CD é paralelo ao segmento EG. Dado que os triângulos ACD e AGE possuem os ângulos congruentes (na mesma ordem) logo são semelhantes então existe uma proporção entre seus lados:

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AG}$$

$\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}-\mathrm{a}}=\frac{\mathrm{c}+\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$. Assim temos,

$$\mathrm{b}^2=\mathrm{c}^2-\mathrm{a}^2$$

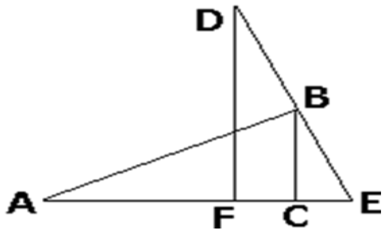
$$\mathrm{c}^2=\mathrm{b}^2+\mathrm{a}^2$$

3.1.10 Demonstrações Michelle Watkins

Esta prova é uma das três demonstrações feitas por Michelle Watkins, uma estudante da Universidade do Norte da Flórida, que foi pubicada na revista Math Spectrum no ano de 1997/98, v.30, n. 3, p. 53-54, que se encontra disponivel em: http://www.appliedprobability.org/data/files/MS%20issues/Vol30_No3.pdf

A demonstração inicia-se de forma similar a algumas outras, começando pela construção do diagrama, considere dois triângulo retângulo e congruentes sendo eles ABC e DEF de tal forma que o vértice B do triângulo esteja no segmento DE e os pontos $\mathrm{A,F,C,E}$ sejam colineares (pertecem a mesma reta). E fazendo com que os segmentos $\mathrm{BC}=\mathrm{EF}=\mathrm{a},\mathrm{AC}=\mathrm{DF}=\mathrm{b},\mathrm{AB}=\mathrm{DE}=\mathrm{c}$. Obviamente, o segmento AB é perpendicular ao segmento DE, agora traçando um segmento interligando os vertices A do triângulo ABC com o vertice D do triângulo retângulo, construimos um novo triângulo ADE.

Fonte 19 : Diagrama de Michelle Watkins



Fonte: https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/

Para o cálculo da área do triângulos ADE existem dois modos distintos, a primeira maneira é $\frac{AB\ .\ DE}{2} = \frac{c^2}{2}$ que chamaremos de i e a segunda maneira é igual $\frac{DF\ .\ AE}{2} = \frac{b\ .\ AE}{2}$ que chamaremos ii. Sabendo $AE = AC + CE = b + CE$. Como o segmento CE pode ser encontrado nos triângulos semelhantes BCE e DFE e $CE = \frac{BC \cdot FE}{DF} = \frac{a.a}{b} = \frac{a^2}{b}$. Igualando i com ii, temos: $\frac{c^2}{2} = \frac{b\ .\ AE}{2}$, substituindo AE por $b + CE$, tem-se: $\frac{c^2}{2} = \frac{b\ .(b + CE)}{2}$, agora substituindo CE por $\frac{a^2}{b}$:

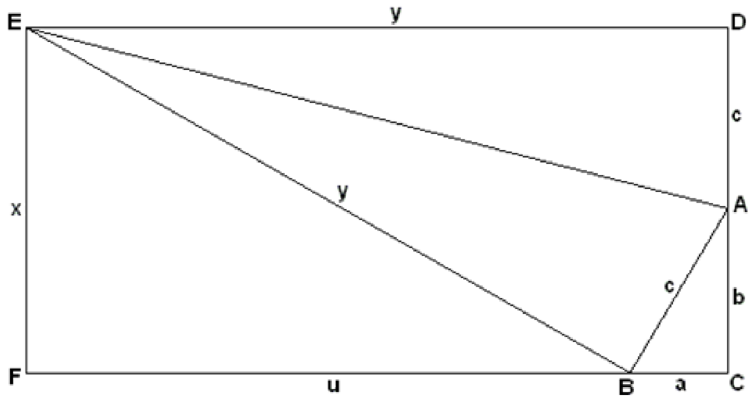
$$\frac{c^2}{2} = \frac{b\ .(b + \frac{a^2}{b})}{2} \rightarrow \frac{c^2}{2} = \frac{b^2 + \frac{ba^2}{b}}{2} \rightarrow c^2 = b^2 + a^2$$

3.1.11 Demonstração de Larry Hoehn

Esta prova é das demonstrações atribuídas a Larry Hoehn que foi publicada na revista The Mathematics Teacher, 88 (1995), p. 168, disponível em: http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml.

Larry Hoehn inicia pela construção da figura 20 para facilitar a compreensão. Prolongue o segmento AC do triângulo retângulo ABC até o ponto D de modo que o segmento $\mathrm{AD} = \mathrm{AB} = \mathrm{c}$, como no diagrama, no ponto D desenhe uma perpendicular ao segmento CD. No vértice A do triângulo retângulo desenhe uma bissetriz do ângulo BAD. Deixe as duas linhas se encontrarem com o ponto E de forma análoga construa no ponto C uma perpendicular ao segmento CD. Finalmente, deixe EF ficar perpendicular à CF. Por esta construção, os triângulos ABE e ADE tem o lado AE em comum e possuem os outros dois lados iguais: $\mathrm{AD} = \mathrm{AB}$, bem como os ângulos formados por esses lados: $\mathrm{B\hat{A}E} = \mathrm{D\hat{A}E}$. Portanto, os triângulos ABE e ADE são congruentes pelo LAL (Lado, ângulo, lado). Segue-se então que nos triângulos retângulos ABC e BEF os ângulos $A\hat{B}C$ e $E\hat{B}F$ somam 90 °.

Fonte 20: Demonstração de Larry Hoehn



Fonte: https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/

Portanto $A\hat{B}C = B\hat{E}F$ e $B\hat{A}C = E\hat{B}F$. Logo, os triângulos ABC e BEF são semelhantes, agora sabendo que $\frac{x}{a} = \frac{u}{b} = \frac{y}{c}$. Mas, $EF = CD$, ou $x = b + c$, que em combinação com a proporção acima dá $u = \frac{b(b+c)}{a}$ e $y = \frac{c(b+c)}{a}$. Porém, $y = u + a$, onde,

$$\frac{c(b+c)}{a} = \frac{b(b+c)}{a} + a \rightarrow \frac{cb+c^2}{a} = \frac{b^2+bc}{a} + a$$

$$\frac{a(cb+c^2)}{a} = \frac{a(b^2+bc)}{a} + a.a \rightarrow cb + c^2 = b^2 + bc + a^2$$

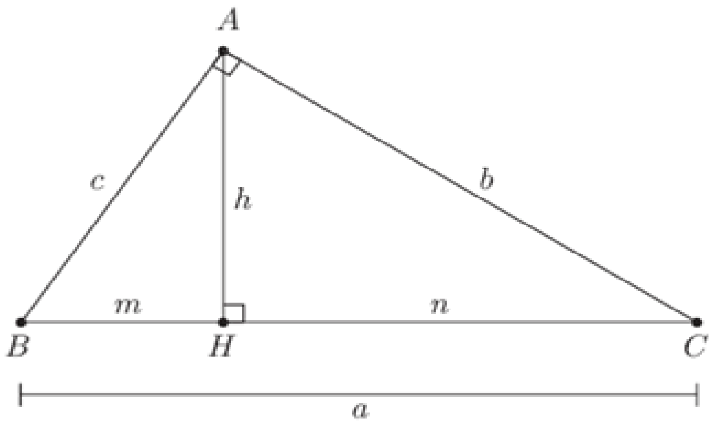
$$c^2 = b^2 + a^2$$

3.1.12 Demonstrações semelhanças entre triângulos

Essa demonstração é conhecida por muitos como sendo a tradicional, pois ela é encontrada em diversos livros didáticos que abordam o Teorema de Pitágoras e é trabalhada de uma forma curta e simples. Vejamos.

Seja um triângulo retângulo ABC, de catetos b, c e hipotenusa a, e altura h. Considere pé da perpendicular baixada do ponto A, como na figura abaixo. Com isso temos o segmento AH, que divide o triângulo retângulo em dois triângulo retângulos o AHB e o AHC que são semelhantes com o triângulo retângulo ABC pelo critério $AA(\text{ângulo, ângulo})$ pois possuem dois pares de ângulos correspondentes congruentes ($B\hat{A}H = \hat{C}$, complemento de $\hat{B}$, $C\hat{A}H = \hat{B}$, complemento de $\hat{C}$).

Figura 21: Demonstração por semelhança entre triângulos



Fonte: http://www.blogviche.com.br/2006/12/15/semelhanca-entre-triangulos/

Agora sabendo que os triângulos retângulos AHB e AHC são semelhantes então seus lados são proporcionais, isto é:

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \rightarrow b^2 = a.n \quad (i)$$

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \rightarrow c^2 = a.m \quad (ii)$$

Somando $(i) + (ii)$, temos,

$$b^2 + c^2 = (a.n) + (a.m)$$

Colocando a em evidência tem- se,

$$b^2 + c^2 = a(n + m)$$

Sabendo que $a = n + m$, resulta:

$$b^2 + c^2 = a.a \rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

E assim fica demonstrado o Teorema e Pitágoras pelo método de semelhanças entre triângulos.

4 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

São inúmeras as aplicações do Teorema de Pitágoras. Dentre as clássicas encontradas nos livros didáticos destacamos:

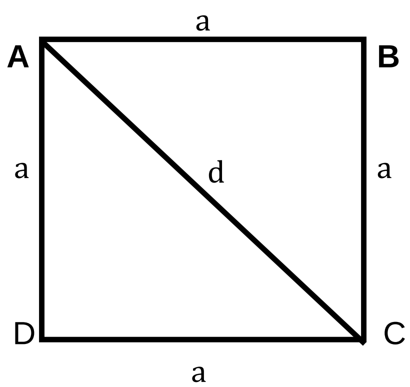
- Geometria Plana (Cálculo da diagonal de um quadrado e altura de um triângulo equilátero);
- Geometria Analítica (Distância entre dois pontos);
- Trigonometria (Cálculo de senos, cossenos e tangentes de ângulo notáveis);
- Geometria Espacial (Cálculo da diagonal de um bloco retangular);

O Teorema de Pitágoras também é aplicado em diversas áreas como: física, biologia, engenharias (civil, mecânicas, produção etc.), logística aeronáutica e outras. No cotidiano, é comum utilizarmos o Teorema de Pitágoras mesmo sem conhecê-lo ou sem sabermos que estamos utilizando-o. Por exemplo, na construção civil, muitos pedreiros (que as vezes nunca nem ouviram falar sobre esse teorema) fazem uso do Teorema de Pitágoras, para o que eles chamam de “esquadrejar ou colocar no esquadro” o que nada mais é do que tomar medidas de modo que nos cantos das paredes formem ângulos retos.

4.1 Aplicação na diagonal de um quadrado

Dado um quadrado $ABCD$ (como na figura abaixo) de lado a, tracemos um segmento AC de comprimento d que representa a diagonal do quadrado $ABCD$.Com isso formamos dois triângulos retângulos o ADC e ABC.

Figura 22: Quadrado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

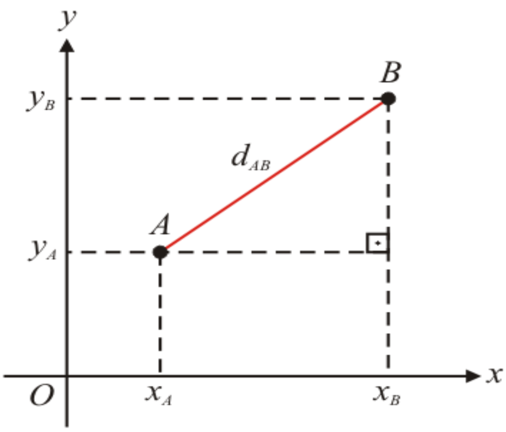
Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ADC, obtemos:

$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 2.a^2$$
$$d = a\sqrt{2}$$

4.2 Aplicação na distância entre dois pontos

Consideremos dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ no plano cartesiano xy, como na figura 23abaixo, após interligar os pontos A e B por um segmento que chamaremos de AB. Note que distância dAB, entre os pontos A e B é igual ao comprimento do segmento AB. Além disso, de acordo com a figura 23 abaixo podemos formar um triângulo retângulo, cujos catemos medem $y_B - y_A$ e $x_B - x_A$ e sua hipotenusa mede dAB.

Figura 23: representação da distância entre dois pontos no plano (xy).



Fonte: https://www.obaricentrodamente.com/2013/06/distancia-entre-dois-pontos-no-plano.html

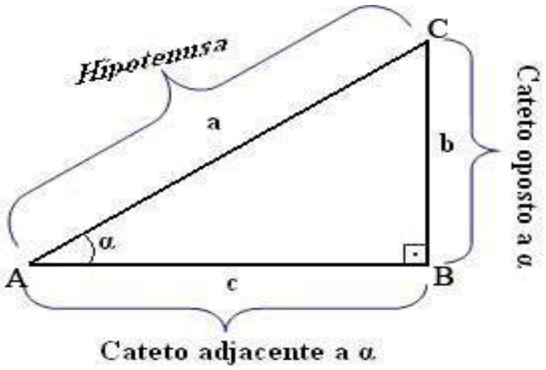
Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo conseguimos calcular a distâncias entres os pontos A e B, da seguinte forma:

$$(d_{AB})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$
$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

4.3 Cálculo de senos, cossenos e tangentes de ângulos notáveis

Dado um triângulo retângulo, é possível estabelecer relações trigonométricas entre seus ângulos internos e dois dos seus lados. Estas relações recebem os nomes de: seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente. Por exemplo, considerando o triangulo retângulo ABC de catetos b e c, e hipotenusa a, conforme a figura abaixo, temos:

Figura 24: Triângulo retângulo



Fonte:http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/rived/modulo_trigonometria2/teoria.htm

$$\mathrm{Seno}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \qquad \mathrm{Cossecante}\ (\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$

$$\mathrm{Cosseno}(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}} \qquad \mathrm{Secante}(\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}$$

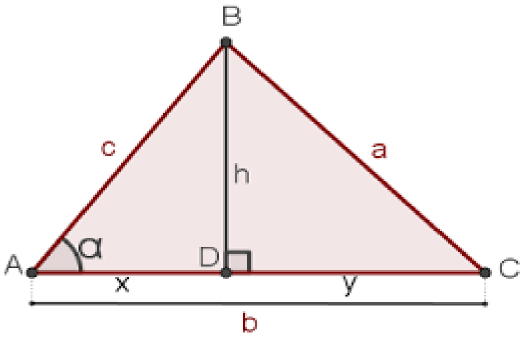
$$\mathrm{Tangente}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}} \qquad \mathrm{Cotangente}(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}$$

Agora aplicando o Teorema de Pitágoras demonstraremos uma das relações fundamentais da trigonometria qual seja, $\mathrm{seno}(\alpha)\ ^2 + \mathrm{cosseno}(\alpha)^2\ = 1$. De fato:

$$seno^2(\alpha) + \mathrm{cosseno}^2(\alpha)\ = \left(\frac{b^2}{a}\right) + \left(\frac{c^2}{a}\right) = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Novamente fazendo uso do Teorema de Pitágoras, usaremos ele para demonstra a Lei dos Cossenos, desta vez usaremos um triângulo qualquer ABC de altura h e lados a, b e c.

Figura 25: Triângulo ABC.



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-lei-dos-cossenos.htm

Já de início utilizaremos o Teorema de Pitágoras,

$a^2 = y^2 + h^2 \rightarrow h^2 = a^2 - y^2$, que chamaremos de (i);

$c^2 = x^2 + h^2 \rightarrow h^2 = c^2 - x^2$, que chamaremos de (ii);

igualando (i) com (ii), temos:

$$a^2 - y^2 = c^2 - x^2$$

como $y = b - x$, tem-se

$$a^2 - (b - x)^2 = c^2 - x^2 \rightarrow a^2 + (-b + x)^2 = c^2 - x^2$$

$$a^2 - b^2 - 2bx + x^2 = c^2 + x^2$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bx + x^2 - x^2$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bx$$

entretanto $x = c.\cos\alpha$, logo

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc.\cos\alpha$$

De forma análoga pode –se demonstrar que

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac.\cos\widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba.\cos\widehat{C}$$

4.4 Aplicação na altura de um cone circular reto

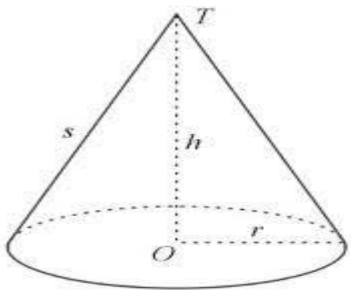
Seja um cone circular reto de vértice T, geratriz s e altura h, observando a representação do cone circular reto da figura 27 temos um triângulo retângulo composto por catetos h (altura do cone) e r (raio da circunferência da base do cone) e hipotenusa s (geratriz do cone). De forma bem simples fazendo uso do Teorema de Pitágoras obtemos a altura do cone dada por:

$$s^2 = h^2 + r^2$$

$$h^2 = s^2 - r^2$$

$$h = \sqrt{s^2 - r^2}$$

Figura 27: Cone circular reto.



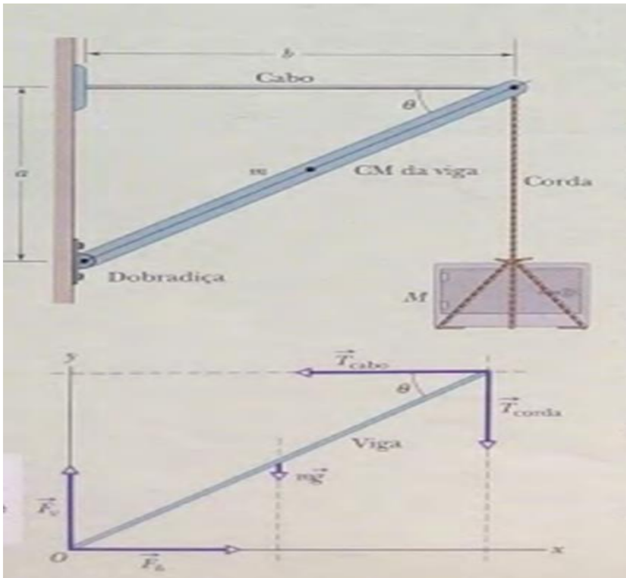
Fonte: https://www.todamateria.com.br/cone/

4.5 Aplicação em Física

Este exemplo de aplicação do Teorema de Pitágoras é encontrado no livro "Fundamentos de Física dos autores Halliday & Resnick (ed.9ª, v. 2, 2012, p. 8)". Por isso, o leitor interessado em um estudo detalhado sobre as propriedades físicas utilizadas neste exemplo, recomendamos a referência acima citada.

A Figura abaixo lado mostra um cofre, de massa $\mathrm{M} = 430\ \mathrm{kg}$, pendurado por uma corda presa a uma lança de guindaste de dimensões $\mathrm{a} = 9\ \mathrm{metros}$ e $\mathrm{b} = 2{,}5\ \mathrm{metros}$. A lança é composta por uma viga articulada e um cabo horizontal. A viga, feita de material homogêneo, tem uma massa, m de $85\ \mathrm{kg}$, as massas do cabo e da corda são desprezíveis. Determine o módulo F da força exercida pela dobradiça sobre a viga

Figura 28: Lança de guindaste segurando cofre.



Fonte: Halliday & Resnick

(a) Um cofre está pendurado em uma lança de guindaste composta por uma viga uniforme e um cabo de aço horizontal. (b) Diagrama de corpo livre da viga.

Resposta: No caso do equilíbrio na horizontal, a força resultante é nula, por isso escrevemos $\mathrm{F}_{\mathrm{res\,.\,x}} = 0$. Como: $\mathrm{F}_{\mathrm{h}} - \mathrm{T}_{\mathrm{cabo}} = 0$, e, portanto, $\mathrm{F}_{\mathrm{h}} = \mathrm{T}_{\mathrm{cabo}} = 6093\ \mathrm{N}$.

No caso do equilíbrio na vertical escrevemos $\mathrm{F}_{\mathrm{res\,.\,y}} = 0$, como $\mathrm{F}_{\mathrm{v}} - \mathrm{mg} - \mathrm{T}_{\mathrm{corda}} = 0$. Substituindo $\mathrm{T}_{\mathrm{corda}}$ por Mg e explicitando Fv, obtemos $\mathrm{F}_{\mathrm{v}} = (\mathrm{m} + \mathrm{M})\mathrm{g} = (85\ \mathrm{kg} + 430\ \mathrm{kg}).(9{,}8\ \mathrm{m/s^2}) = 5047\ \mathrm{N}$.

De acordo com o Teorema de Pitágoras, temos:

$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = \sqrt{(6093\ N)^2 + (5047\ N)^2} = 7900\ N.$$

(Resposta) Note que F é bem maior do que a soma dos pesos do cofre e da viga, $5000N$, e que a tensão do cabo horizontal, $6100\ N$.

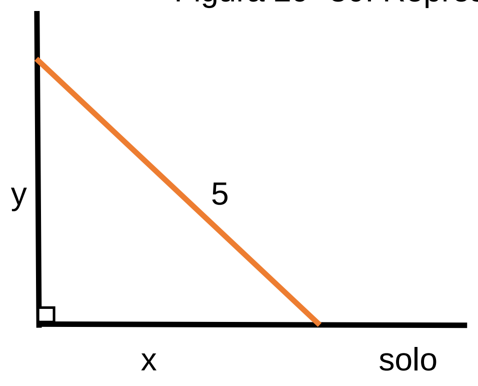
4.6 Aplicação no Cálculo Diferencial

As aplicações 4.6.1 e 4.6.2, a seguir, são exemplos de utilizações do Teorema de Pitágoras. Por se tratar de um conteúdo que requer um pouco mais de conhecimento específico, ao leitor interessado em entender as propriedades do cálculo diferencial aqui utilizadas, recomendamos a referência: “Cálculo do autor James Stewart (ed. 7ª norte americana, v.1, 2013, p. 221-222)”.Este livro contém os exemplos apresentados nas aplicações 4.6.1 e 4.6.2.

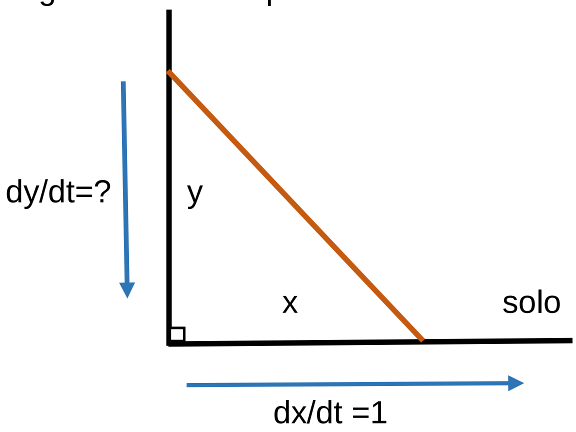
4.6.1 Aplicação em Cálculo Diferencial - Exemplo 1

Uma escada com $5\ \text{metros}$ de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede a uma taxa de $1\ \text{ms(milisegundo)}$, quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo na parede quando a base da escada está a $3\ \text{metros}$ da parede?

Figura 29 -30: Representação gráfica do exemplo 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

SOLUÇÃO: Primeiro desenhe um diagrama e coloque legendas, como na Figura 29. Sejam x metros a distância da base da escada à parede, e y metros a distância do topo da escada ao solo. Observe que x e y são ambas funções de t (tempo, medido em segundos).

Foi-nos dado que $\frac{dx}{dt} = 1\ m/s$, e nos foi pedido para encontrar $\frac{dy}{dt}$ quando $x = 3$ metros (veja a Figura 30). Neste problema, a relação entre x e y é dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Derivando cada lado em relação a t usando a Regra da Cadeia, obtemos:

$$2x\left(\frac{dx}{dt}\right) + 2y\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

Agora isolando a taxa desejada, obtemos

$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{x}{y}\right).\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Quando, $x = 3$ o Teorema de Pitágoras fornece $y = 4$ e, portanto, substituindo esses valores e $\frac{dx}{dt} = 1$, temos:

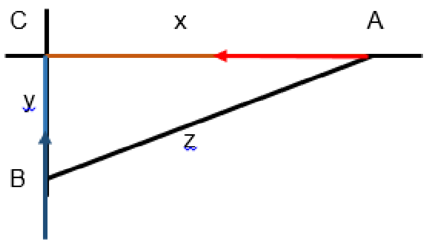
$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{3}{4}\right).1 = -\frac{3}{4}\ m/s$$

O fato de $\frac{dy}{dt}$ ser negativo indica que a distância do topo da escada ao solo está decrescendo a uma taxa de $\frac{3}{4}\ m/s$, em outras palavras, o topo da escada está deslizando para baixo a uma taxa de $\frac{3}{4}\ m/s$.

4.6.2 Aplicação em Cálculo Diferencial - Exemplo 2

O carro A está se movimentando para o oeste a $90\ km/h$ e o carro B está se movimentando para o norte a $100\ km/h$. Ambos vão em direção à intersecção de duas estradas. Qual taxa os carros se aproximam um do outro quando o carro A está a $60\ m$ e o carro B está a $80\ m$ da intersecção?

Figura 31: Representação gráfica do exemplo 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

SOLUÇÃO: Desenhamos a Figura 31, onde C é a intersecção das estradas. Em um dado instante t, seja x a distância entre carro A e C, seja y a distância do carro B a C, e seja z a distância entre os carros, em que x, y e z são medidos em quilômetros.

Foi-nos dado que $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = -90\,\mathrm{km/h}$ e $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -\ 100\,\mathrm{km/h}$. (As derivadas são negativas porque x e y são decrescentes.) Foi-nos pedido para encontrar $\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}}$. A equação que relaciona x, y e z é dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$\mathrm{z}^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2$$

Derivando cada lado em relação a t, temos:

$$2z.\left(\frac{dz}{dt}\right) = 2x.\left(\frac{dx}{dt}\right) + 2y.\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}.\left(x\frac{dx}{dt} + y\ \frac{dy}{dt}\right)$$

Quando $x = 0{,}06\ km$ e $y = 0{,}08\ km$, o Teorema de Pitágoras nos dá $z = 0{,}1\ km$, portanto:

$$\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = \frac{1}{0{,}1}[\ 0{,}06\ (-90\ ) + 0{,}08\ (-100)]$$

$$\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = -134\,\mathrm{km/h}$$

Os carros aproximam-se um do outro a uma taxa de $134\ km/h$.

4.7 Aplicação na Construção Civil

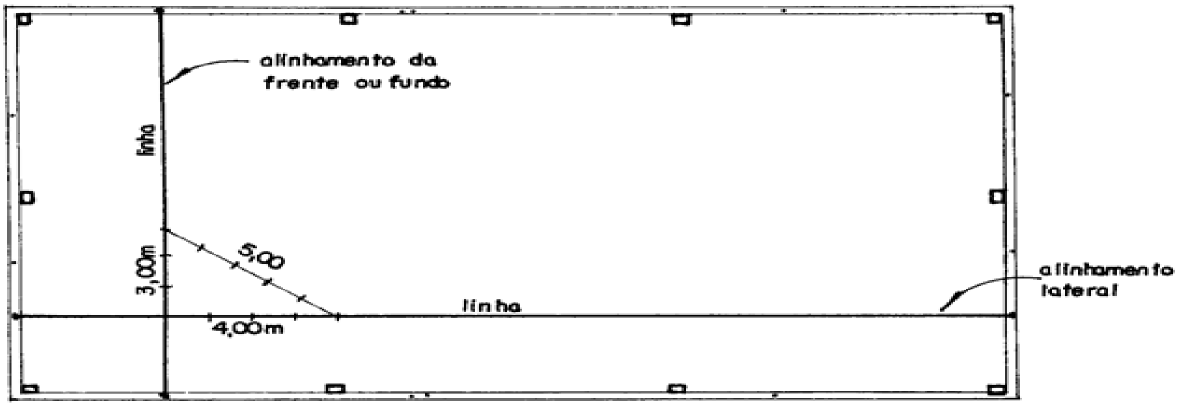
Em muitos momentos os alunos perguntam aos professores aonde podem utilizar certas fórmulas matemáticas e as vezes aplicações podem ser encontradas em coisas simples do cotidiano e fazendo até mesmo parte da vida do aluno, um exemplo disso é a utilização do Teorema de Pitágoras na construção civil pelo pedreiros ou ajudantes de pedreiros que, por muitas vezes sem os mesmos não saberem que estão utilizado de um conhecimento antigo e de grande contribuição para matemática que é o Teorema de Pitágoras .

Mesmo sem ter muitos conhecimentos de matemática ou até mesmo ter frequentado pouco a escola é fascinante o quanto de matemática é utilizada na construção civil por esses profissionais, sejam conhecimentos de geometria, aritmética, trigonometria entre outras, um exemplo é o cálculo de volume de recipientes de agua(cisternas, piscinas) que são construídos por esses trabalhadores que realizam os cálculos de quantidades de matérias que serão utilizados nas obras e impressionante também que sem auxílio de ferramentas sofisticadas e fazendo o uso de utensílios simples conseguem fazer atividades grandiosas, em exemplo disso uso simples de uma mangueira transparente com agua para verificar o nivelamento do solo ou piso.

A utilização do Teorema de Pitágoras na construção civil pode se dizer que começa desde o alicerce da obra ou demarcação da planta baixa até o acabamento, que por eles, é considerado o fim da obra. O emprego do Teorema de Pitágoras por esses trabalhadores tem como função conseguir um ângulo reto através da construção de um triângulo retângulo, que é chamado por eles de "deixar no esquadro", a obtenção desse ângulo reto vem por meio de construções de triângulos retângulos que na maioria das vezes apresenta as seguintes medidas: catetos de 30 e $40\,\mathrm{cm}(\mathrm{centimetros})$ e hipotenusa $50\,\mathrm{cm}(\mathrm{centimetro})$ ou catetos de 60 e $80\,\mathrm{cm}(\mathrm{centimetros})$ e hipotenusa $1\,\mathrm{metro}$. Com essas medidas, muitos pedreiros constroem seus próprios gabaritos de esquadro, feitos de madeira, alumínio ou ferro.

A aplicação no Teorema de Pitágoras para a demarcação do terreno para deixá-lo com os cantos (quinas) com $90^{\underline{o}}$, eles procuram deixar cada canto esquadrejado apenas, utilizando apenas, três estacas e linhas para construção e ferramenta de medição trenas ou réguas. Plantando a primeira estaca na quina do terreno, em seguida se amarra duas linhas, de modo que a verificação de quando elas estão perpendiculares uma com a outra é feita (mesmo sem saberem disso) utilizando o Teorema de Pitágoras, através da exigência de que a soma dos quadrados de dois dos lados do triângulo seja igual ao quadrado da medida do terceiro lado deste mesmo triângulo. Veja a figura abaixo

Figura 32: Alinhamento do terreno.



Fonte: https://www.meiacolher.com/2014/07/aprenda-como-tirar-o-esquadro-de-um.html

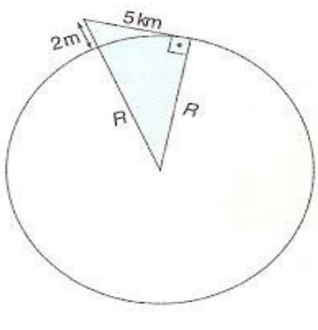
Essa mesma técnica pode ser utilizada na colocação de porta, pisos, janelas e telhado (colocação de estruturas de madeiras para telhados), esse modo de utilização do Teorema de Pitágoras se assemelha ao usado pelos egípcios com o auxílio da cordas de 12 nós (corda fechada) ou 13 nós (corda aberta) para demarcar as terras cujas as marcações eram desfeitas pelas enchentes do Rio Nilo.

4.8 Aplicação no Raio da terra

Como podemos medir o raio da terra? Essa é uma pergunta muito interessante que ao longo do tempo tem chamado a atenção de muitos matemáticos e astrônomos. Essa pergunta também pode ser feita em sala de aula para aumentar a curiosidade e o interesse dos alunos quando o tema da aula for o Teorema de Pitágoras. Hoje podemos encontrar diversas formas de se calcular o raio da terra, porém o método que utiliza o Teorema de Pitágoras para encontrar o raio é bastante simples e criativo, podendo chamar a atenção dos alunos.

De início, imagine-se na praia olhando para o horizonte (parte que parece o céu tocar a terra ou o mar) supondo que a sua altura (até a altura dos olhos) em relação ao nível da praia seja de 2 metros . Suponha, ainda, que perpendicular a você tenha uma barco saindo em direção ao horizonte. Supondo que a distância entre você até o barco sumir no horizonte seja de aproximadamente $5{,}048\text{km}$.

Figura 33: Representação do cálculo do raio da terra



Fonte: http://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/mc9.pdf

Agora, consideremos o raio da terra sendo R e a altura entre seus olhos e o solo chamaremos de A . A distância aproximada referente ao horizonte será representada por H. Para facilitar a compreensão, faremos a conversão de metros para quilômetros, logo 2 metros equivalem $0{,}002 \text{ quilômetros}$ e agora fazendo uso do Teorema de Pitágoras temos:

$$(\mathrm{R}+0{,}002)^{\ 2} = \mathrm{R}^2 + \mathrm{H}^2$$

$$(\mathrm{R}+0{,}002)^{\ 2} = \mathrm{R}^2 + 5{,}048^2$$

$$\mathrm{R}^2 + 0{,}004\mathrm{R} + 0{,}000004 = \mathrm{R}^2 + 25{,}482304$$

$$0{,}004\mathrm{R} = 25{,}482304 - 0{,}000004 + \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}^2$$

$$0{,}004\mathrm{R} = 25{,}4823$$

$$\mathrm{R} = \frac{25{,}4823}{0{,}004} \rightarrow \mathrm{R} = 6,.370{,}57\ \mathrm{km}$$

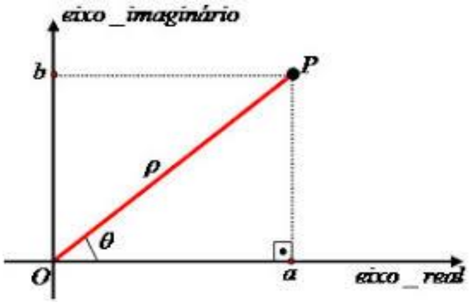
Métodos mais específicos indicam que o raio da Terra tem aproximadamente, ou seja, esse procedimento utilizando o Teorema de Pitágoras é bastante preciso.

4.9 Aplicação em números complexos

Os números Complexos são descritos na forma algébrica da seguinte maneira $\mathrm{z} = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$, sendo a, b números reais e $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ a unidade imaginaria. Consideremos "a" como sendo a parte "real" do número complexo, representada por $\mathrm{Re(z)}$ e "b" a parte "imaginaria" representada por $\mathrm{Im(z)}$, o conjunto dos números complexos e indicado por C, tal que $\mathrm{C} = \{\mathrm{a} + \mathrm{i.b} : \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{R}\}$.

O Plano de Argand-Gauss, é um plano cartesiano usado para representar números complexos na forma algébrica $\mathrm{z} = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$ para a forma geométrica através de um ponto que neste caso, chamaremos de $\mathrm{P} = (\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathrm{R}^2$.

Figura 34: Representa gráfica dos números complexos.



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/plano-argand-gauss.htm

Em que a parte imaginária de um número complexo é representada pelo eixo das ordenada e a parte real pelo eixo das abcissas, e o ângulo θ é denotado de argumento de z.

A distância do ponto $\mathrm{P(a, b)}$ á origem será representada por $\rho(\mathrm{Rô}) = |\mathrm{z}|$, fazendo uso do Teorema de Pitágoras temos que,

$$\rho^2 = |\mathrm{z}|^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2$$

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Agora a distância representada por d, entre dois números complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2$ é dada por:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

4.10 Aplicação em circuitos eletrônicos

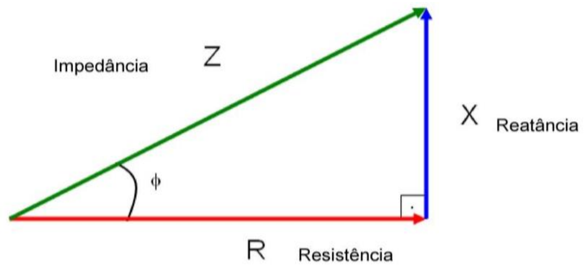
O exemplo a seguir de aplicação do Teorema de Pitágoras em circuitos eletrônicos é encontrado nas páginas 194-195 do documento chamado Eletricidade, escrito pelo professor Evandro Carlos Ferreira para o curso profissionalizante em manutenção de aeronaves- Habilitação grupo de motopropulsor da instituição Aero TD Escola de Aviação Civil, disponível no endereço eletrônico: https://aerotd.com.br/decoleseufuturo/wp-content/uploads/2015/05/ELETRICIDADE-B%c3%81SICA.pdf .

O autor inicia descrevendo alguns termos usados no texto para facilitar a compreensão do assunto, depois ele apresenta um gráfico com o triângulo retângulo e descreve o Teorema de Pitágoras para depois utilizá-lo nas aplicações.

Seja um circuito de corrente alternada (C.A.) ou seja um circuito que possui corrente elétrica cujo sentido varia ao logo do tempo, ao contrário da corrente contínua cujo sentido permanece constante durante todo o tempo, quando ele contém resistência "R" (grandeza que expressa o impedimento a passagem da corrente elétrica) e também indutância ou capacitância, a impedância, "Z" (é uma função da resistência, capacitância e indutância. Indutores e capacitores acumulam tensões que se opõem ao fluxo de corrente. Esta oposição, chamada reatância, deve ser combinada com a resistência para se encontrar a impedância).

A impedância é a oposição total do circuito para o fluxo de corrente. Num circuito de C.A., está oposição consiste de resistência e reatância indutiva ou capacitiva, ou elementos de ambas. A resistência e a reatância não podem ser somadas diretamente, mas podem ser consideradas duas forças agindo em ângulos retos entre si. Assim sendo, a relação entre resistência, reatância e impedância pode ser ilustrada por um triângulo retângulo. A fórmula para achar a impedância, ou total oposição ao fluxo de corrente num circuito de C.A. pode ser obtida pelo uso de lei dos triângulos-retângulos, chamada de Teorema de Pitágoras, aplicável a qualquer triângulo retângulo.

Figura 35:Triângulo de Impedância



Fonte: https://slideplayer.com.br/slide/11927729/

O autor utiliza de uma característica do Teorema de Pitágoras para encontrar o valor dos lados do triângulo retângulo, “assim, o valor de qualquer lado de um triângulo retângulo pode ser encontrado se os dois outros lados forem conhecidos”. Se um circuito de C.A. contiver resistência e indutância, como mostrado na figura, a relação entre os lados pode ser determinada assim:

$$Z^2 = R^2 + X^2$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Exemplo: Qual é a impedância de um circuito em série, consistindo de um capacitor com reatância de 7 ohms, um indutor com uma reatância de 10 ohms e um resistor com resistência de 4 ohms?

Solução: Consideremos

$\text{Resistencia} = R = 4 \text{ ohms};$

$\text{Reatância Capacitiva} = Xc = 7\text{ohms};$

$\text{Reatância Indutiva} = Xl = 10 \text{ ohms};$

$X = Xl - Xc = 10 - 7 = 3 \text{ ohms};$

Agora fazendo uso do Teorema de Pitágoras para r a impedância, obtemos:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \rightarrow Z = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$Z = \sqrt{16 + 9} \rightarrow Z = \sqrt{25} \rightarrow Z = 5 \text{ ohms}$$

4.11 Aplicações encontradas em livros didáticos

A aplicação a seguir é encontrada como atividade para os alunos responderem no livro didático de matemática do 9º Ano voltado para Educação de Jovens e Adultos, EJA Educação de Jovens e Adultos, Coleção tempo de Aprender. 2. Ed. v. 4. São Paulo. IBEP, 2009 nas páginas 193-194 dos autores: PACHI, Clarice G. da F.; VALENTINI, Sonia M. F. Trata-se de um livro bastante educativo, contendo uma grande diversidade de temas relacionados a conteúdos de matemática utilizados no o dia a dia do aluno. Neste livro, o Teorema de Pitágoras começa a ser abordado pelo um breve texto complementar a respeito da história de Pitágoras, depois este decorre sobre triângulo retângulo (nomenclatura dos lados, área) e por fim demonstra o Teorema de Pitágoras de forma simples, construindo quadrados subdivididos em quadrados menores de $1\ \mathrm{cm(centimetros)}$ a partir dos lados de um triângulo retângulo, onde as áreas dos quadrados são $25\ \mathrm{cm(centimetros)}$ para o quadrado formado a partir da hipotenusa igual $5\ \mathrm{cm(centimetros)}$ do triângulo retângulo e quadrados de áreas 9 e $16\ \mathrm{cm(centimetros)}$. Para os outros quadrados de lados iguais aos catetos de 3 e $4\ \mathrm{cm(centimetros)}$ de lado. Concluindo que a área do quadrado maior de lado igual a hipotenusa é igual soma das áreas dos quadrados de lados iguais aos catetos, $5^2 = 3^2 + 4^2$.

As aplicações encontradas no livro citado são apresentadas em forma de exercícios para os alunos, conforme os dois exemplos abaixo:

Exemplo 1: Uma torre vertical é presa por cabos de aço fixos no chão, em um terreno plano horizontal. Se o ponto A está a $15\ \mathrm{metros}$ da base B da torre e o ponto C está a $20\ \mathrm{metros}$ de altura, então qual é comprimento do cabo AC?

Solução: Considerando que o poste forma um ângulo de $90\ \mathrm{graus}$ com o solo que representa um dos catetos do triângulo retângulo e a medida do cabo de aço corresponde a hipotenusa que será representada por X, temos

$$\mathrm{X}^2 = 15^2 + 20^2 \ \rightarrow\ \mathrm{X}^2 = 225 + 400$$

$$\mathrm{X}^2 = 625 \rightarrow \mathrm{X} = \sqrt{625} \rightarrow \mathrm{X} = 25\ \mathrm{metros}$$

Exemplo 2: Um certo avião, voando a $60\ \mathrm{metros}$ de altitude, lança uma carga, e essa carga toca o solo somente $25\ \mathrm{metros}$ á frente. Qual é a distância percorrida pela carga desde que foi lançada do avião até o momento em que tocou o solo?

Solução: Analisando o enunciado da questão tem-se que a distância percorrida pela carga é igual a hipotenusa do triângulo retângulo. Representando por h a hipotenusa temos.

$$\mathrm{h}^2 = 25^2 + 60^2 \ \rightarrow\ \mathrm{h}^2 = 625 + 3600$$

$$\mathrm{h}^2 = 4250 \ \rightarrow\ \mathrm{h} = \sqrt{4250} \ \rightarrow\ \mathrm{h} = 65{,}19\ \mathrm{metros}$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fica evidente neste trabalho o quanto Pitágoras foi uma figura importante para sua época e para os tempos atuais, tanto com relação as descobertas atribuídas a eles ou aos Pitagóricos (alunos de Pitágoras), assim como a ideia que mesmo naquele tempo difícil sem tecnologias, a educação e a busca por novos conhecimentos com auxílio de professores, mestres ou documentos antigo, como foi o caso de Pitágoras viajando para outras regiões em busca de conhecimento de outras civilizações e até mesmo observações e experimentos como foi o caso dos números irracionais, das notas musicais.

Tais fatos, serviram de impulso para a construção de sociedades melhores e, através desses conhecimentos, também foi possível obter avanços em diversas áreas do conhecimento científico.

Com relação as demonstrações vemos que elas nos fizeram perceber o quanto é fascinante a matemática e quanto foram criativas as pessoas autoras das demonstrações, tendo em vista as formas utilizadas para realiza-las. Verificamos ainda, que a realização deste trabalho contribuiu ricamente para nosso amadurecimento e aprofundamento no estudo da história e da aplicação da matemática, em especial do teorema de Pitágoras. Procuramos conduzir esse trabalho, na perspectiva de este pudesse contribuir não apenas para o nosso enriquecimento intelectual e profissional, mas que possa também servir de auxílio como fonte de consulta para professores e estudantes de Matemática de modo que estes se sintam motivados a desenvolver atividades educacionais e novas investigações sobre as relações entre a história e as aplicações dos conteúdos desta ciência tão fascinante que é a Matemática.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO H.; GARAPA M.; LUÍS R. **Elementos de Euclides Livros VII e IX**. 2005.Trabalho Acadêmico elaborado no âmbito da Disciplina de Fundamentos Históricos da Matemática Inserida no Mestrado em Matemática. Universidade da Madeira. Funchal, 2005.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões Pitagóricos: geométricos e numéricos**. 1. ed. São Paulo: Atual, 1993.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**: Matemática. Brasília. MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília. MEC, 2006.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; DASSIE, Bruno Alves. **O TEOREMA DE PITÁGORAS E MATEMÁTICOS AMADORES DO BRASIL**, Revista Brasileira de História da Matemática – v. 4, n. 8, pág. 123 – 147, outubro/2004 - março/2005 - (Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática). Disponível em: http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20%20vol.4%20no8,%20outubro%20(2004)/3%20-%20Pitombeira.pdf. Acesso em:28 de julho de 2019.

CASTRO, W. M. F. de. **Sobre o Teorema de Pitágoras**. Março 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Fluminense-UFF, Niterói, Profmat, 2013.

CREASE, Robert P. **As grandes equações: a história das fórmulas matemáticas mais importantes e os cientistas que as criaram**. Tradução: Alexandre Chermam. Rio de Janeiro: Zahar, 2011.

CYRINO, Hélio Fernando Ferreira. **Matemática & Gregos**. São Paulo. Editora Átomo, 2006.

COELHO, Alex de B. **Teorema de Pitágoras: qual a sua importância para o ensino das ciências da natureza?.**2010. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade do Grande Rio – UNIGRANRIO, Rio de Janeiro, 2010.

DAVYDOV, Vasily V. **Problemas do ensino desenvolvimento: a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia**. Tradução: José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas. Revista Educação Soviética, agosto, v. 30, n. 8, 1988

D´AMBROSIO, Ubiratan. **A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática**. In: BICUDO, M. A. V.(org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

D´AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 23 ed. Campinas: Papirus, 2012.

DEWDNEY, A. K. **20.000 Léguas Matemáticas -** Um passeio pelo misterioso mundo dos números. São Paulo: Editora Jorge Zahar, 2000.

EUCLIDES, **Elementos de Geometria**. Tradução: COMMANDINO, Frederico. São Paulo: Edições Cultura, 1944.

EVES, HOWARD. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas – São Paulo: Editora Unicamp, 2011.

FERREIRA, Evandro Carlos. **Eletricidade**. Curso profissionalizante em manutenção de aeronaves-Habilitação grupo de motopropulsor. Aero TD Escola de Aviação Civil. Florianópolis, 2015. Disponível em: https://aerotd.com.br/decoleseufuturo/wpcontent/ uploads/2015/05/ELETRICIDADE-B%c3%81SICA.pdf. Acesso em 16 de agosto de 2019.

GARBI, Gilberto Geraldo. **O Romance das equações Algébricas**. São Paulo: Makron Books, 1997.

GUEDJ, Denis. **O teorema do papagaio**. Tradução: Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

HALLIDAY, David; RESNICK, R. **Fundamentos de Física, – Gravitação, Ondas e Termodinâmica**. Tradução: Ronaldo Sergio de Biasi. 9 ed. v.2, São Paulo: LTC, 2012.

HOEHN, Larry. Revista: The Mathematics Teacher, v. 88, p. 168, 1995. Disponível em: http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml. Acesso em: 16 de Agosto de 2019.

KIRK G. S.; RAVEN J. E.; SCHOFIELD M. **Os Filósofos Pré-Sócrates**.Tradução: Carlos Alberto Louro Fonseca. 7 ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian,1994.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

LOOMIS, Elisha Scott. **The Phytagorean Proposition**, Classics in Mathematics Education Series, 2 ed. Washington: National Coucil of Teachers of Mathematics, 1940.

MONK, R. BERTRAND RUSSEL - **Matemática: sonhos e pesadelos**. Coleção Grandes Filósofos. São Paulo: UNESP, 2000.

OLIVER, Jack. Revista: The Mathematical Gazette – v.81, n.490, p.117-118, março/1997. Disponível em: https://www.jstor.org/journal/mathgaze.pf. Acesso em:16 de agosto de 2019.

PACHI, Clarice G. da F.; VALENTINI, Sonia M. F.**EJA Educação de Jovens e Adultos,** Coleção tempo de Aprender. 2. Ed. v. 4. São Paulo. IBEP, 2009.

REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar da. **Geometria Analítica**. 2ª Ed. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1995.

RIBEIRO. Vanessa, V. S. M. **Revisitando o Teorema de Pitágoras**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Viçosas – UFV, Viçosas, 2013.

ROQUE, T. **História da matemática**: **Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1. ed. Rio de Janeiro: ZAHAR, 2012.

RUSSEL, B. apud STRATHERN, Paul. **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos**. Tradução: Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

STRATHERN, Paul, **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos**. Tradução: Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

STEWART, James. **Cálculo** – Tradução da 7 ed. norte-americana, v.1, São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TARTAGLIA, Leonardo F. **Teorema de Pitágoras, aplicações de demonstrações em sala de aula**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, São Carlos, 2016.

WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e Áreas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2010.

WATKINS, Michelle; SPRADLIN, Mickey. **Three New Proofs of the Pythagorean Theorem.** Revista: Math Spectrum – v.30, n. 3, p.53-54, 1997-1998. Disponível em: http://www.appliedprobability.org/data/files/MS%20issues/Vol30_No3.pdf. Acesso em:16 de agosto de 2019.