UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIENCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GEOVANE PEREIRA BERNARDO

UM ESTUDO SOBRE SEQUÊNCIAS: DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO, CONCEITOS E APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE - PB
2019

GEOVANE PEREIRA BERNARDO

UM ESTUDO SOBRE SEQUÊNCIAS: DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO, CONCEITOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Katia Suzana Medeiros Graciano.

CAMPINA GRANDE - PB
2019

B523e Bernardo, Geovane Pereira.

Um estudo sobre sequências [manuscrito] : desenvolvimento histórico, conceitos e aplicações / Geovane Pereira Bernardo. - 2019.

46 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Profa. Ma. Katia Suzana Medeiros Graciano , Departamento de Matemática - CCT."

1. História da Matemática. 2. Sequências numéricas. 3. Matemáticos. I. Título

21. ed. CDD 510.1

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

Geovane Pereira Bernardo

UM ESTUDO SOBRE SEQUÊNCIAS: DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO, CONCEITOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática.

Aprovada em: 02/07/2019.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano.
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maria Isabelle Silva Dias Yanes

Prof. Dra. Maria Isabelle Silva Dias Yanes.
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana R. Freitas

Prof. Dra. Luciana Rose de Freitas.
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por estar realizando mais essa conquista, e por estar sempre me abençoando.

Agradeço a todos meus familiares, que sempre acreditaram em mim e nunca me deixaram desistir. Agradeço em especial a minha mãe Ana Claudia pelas palavras, pelos conselhos, pelo afeto e amor que sempre me ofereceu. Ao meu pai Geraldo Bernardo por estar a todo momento ao meu lado, aos meus irmãos Gean Pereira e Genyson Miguel pelos momentos de felicidade juntos, e aos meus avós Severino dos Ramos e Maria José por sempre me ajudarem com o possível. Agradeço meus amigos, que estiveram sempre juntos e me deram sempre motivos para sorrir.

Agradeço aos colegas de classe pelos momentos de amizade e apoio, em especial à Raylson Bernardo, Matheus Maia, Henrique Nóbrega, Mariana Ramos, Renata Jacinto, Jailson Lourenço, Jamerson Gustavo, Newton César, entre outros.

Agradeço a professora Kátia Suzana pelas leituras sugeridas ao longo dessa orientação e pela dedicação, e também a professora Joselma Soares que me orientou no TCC 1. E Juntamente a todo corpo docente do departamento de matemática da UEPB, por todos os ensinamentos em toda minha vida acadêmica.

RESUMO

Em geral explorar e compreender os conceitos do cálculo nos permite examinar, construir e resolver uma vasta quantidade de problemas em diversas áreas, e um dos seus principais ramos são as sequências numéricas, além de possibilitar todo esse aperfeiçoamento que vem do cálculo, a mesma também tem diversas utilizações em inúmeros campos do conhecimento. Neste trabalho, pretendemos dar uma nova concepção ao conteúdo de sequências numéricas, fazendo uma coletânea das contribuições de vários matemáticos ao longo do tempo, construindo um bom alicerce para o entendimento do conteúdo em questão. Seguimos com o desenvolvimento dos principais conceitos referentes as sequências, como a definição, limite, convergência até a definição de série infinita. Posteriormente exploramos algumas aplicações no cotidiano. Com embasamento feito em diversos livros científicos e artigos, em que sua maioria estão relacionados ao componente de cálculo integral e série, constatamos que este trabalho nos possibilita uma análise básica sobre as sequências numéricas, a partir disso podemos concluir sua importância em diversas áreas do conhecimento.

Palavras-chave: Sequências numéricas. Matemáticos. Aplicações.

ABSTRACT

In general, exploring and understanding the concepts of calculus allows us to examine, construct and solve a vast amount of problems in various areas, and one of its main branches is numerical sequences, in addition to enabling all this refinement that comes from calculation, has several uses in many fields of knowledge. In this work, we intend to give a new conception to the content of numerical sequences, making a collection of the contributions of several mathematicians over time, building a good foundation for the understanding of the content in question. We continue with the development of the main concepts related to sequences, such as definition, limit, convergence until the definition of infinite series. Later we explore some applications in the daily life. Based on several scientific books and articles, most of which are related to the component of integral calculus and series, we find that this work enables us to perform a basic analysis on the numerical sequences, from which we can conclude its importance in several areas of knowledge.

Keywords: Numerical sequences. Mathematicians. Applications.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Desde os primórdios surgiram os primeiros conceitos e problematizações sobre as sequências matemáticas, consequentemente vários matemáticos exploraram e utilizaram seus princípios, formalizando as definições e os teoremas acerca do conteúdo, construindo a teoria sobre sequências numéricas tal qual temos acesso nos dias atuais.

A área de atuação das sequências numéricas é muito vasta, elas desenvolvem um importante papel na área de cálculo, na área de análise e abrangem uma grande proporção de problemas matemáticos com diversas aplicações.

No campo do cálculo integral, as sequências exercem função importante, pois as mesmas são apresentadas de forma unificada com o estudo da integração. Na área de análise na reta é bastante usada em vários conceitos que se baseiam em seus resultados diretos e também nas suas definições, propriedades e teoremas.

A finalidade deste trabalho é auxiliar tanto o docente, como o discente, de forma que o estudo das sequências seja mais didático e contextualizado, apresentando um pouco da história, alguns problemas matemáticos e aplicações, facilitando assim a aprendizagem do discente, sem tirar o foco nesse processo da importância da teoria do tema.

Neste estudo sobre sequências vamos apresentar alguns matemáticos e suas contribuições, como também apresentar, definir e desenvolver o conceito de sequências numéricas, tais como, o seu limite e sua convergência, e posteriormente exibir algumas das suas aplicações.

O que motivou a escolha do tema sobre sequências é a diversidade das suas aplicações, questões norteadoras, tais como a relação entre a sequência de Fibonacci com o “número de ouro”, as inúmeras problematizações que o tema oferece como por exemplo os paradoxos de Zenão, a utilização formal e sofisticada do método da Exaustão feita por Arquimedes, baseada em uma soma parcial de termos de uma sequências, e também do cálculo dos n primeiros termos de uma progressão aritmética feito por Gauss. Como vemos há uma ampla variedade de conceitos que abordam vários conteúdos matemáticos tanto de cálculo, como de análise, e diante dessas circunstâncias é de suma importância uma investigação mais detalhada sobre essa temática.

O referente trabalho terá como fundamentação teórica a verificação de artigos relacionados ao tema, em especial *um estudo sobre sequências e séries* do Cerqueira, relacionados ao componente de cálculo integral e séries; como também em livros científicos, tais como *Cálculo* do Thomas e o *Cálculo com geometria analítica* do Swokowski, pois os mesmos apresentam o alicerce para analisarmos e desenvolvermos o estudo das sequências. A partir daí fomos construindo um trabalho mais didático, apresentando exemplos pontuais e específicos, e finalmente aplicações para o entendimento dos conceitos estudados. Para melhor compreensão do estudo das sequências é conveniente o conhecimento prévio de alguns assuntos tais como o de funções e o de limites de funções.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: No primeiro capítulo, exibimos o contexto histórico, ou seja, alguns matemáticos e suas contribuições na área. No segundo capítulo, introduzimos e desenvolvemos o estudo das sequências de numéricas e estudamos, em especial, a sua definição, as progressões Aritméticas e Geométricas, o limite, entre outros. Já no terceiro capítulo apresentaremos aplicações das sequências, em particular das progressões no campo do cálculo financeiro, e também veremos aplicações da sequência de Fibonacci em diversas áreas do conhecimento.

1 CONTEXTO HISTÓRICO

Este capítulo destina-se a apresentação de alguns matemáticos e suas contribuições, durante a história da matemática, em especial ao estudo das sequências numéricas.

1.1 Zenão de Eleia e seus paradoxos

O filósofo Zenão de Eleia (viveu em aproximadamente 464 a.C.), foi um dos principais discípulos de Parmênides, que anunciou conceitos importantes de multiplicidade e divisibilidade.

Figura 1: Zenão de Eleia.

Fonte: Cabral (p. 1)

Zenão se destacou na área da lógica matemática por criar e desenvolver paradoxos (Ideia bem fundamentada ou apresentada de forma coerente, mas que possui subentendidos contraditórios à sua própria estrutura), que foram de extrema importância, tais paradoxos influenciaram a matemática da época, pois se destacavam da seguinte forma, considerando a sua hipótese o desenvolvimento é impossível, para notarmos a sua essência vejamos os principias paradoxos, que foram: *a Dicotomia*, *o Aquiles*, *o Estádio*, *a Flecha*, citaremos cada um desses paradoxos.

i) A Dicotomia: “Um arqueiro está distante 2 metros do alvo. Admita que a flecha ao ser lançada **percorra sempre a metade do caminho restante.** A flecha alcançara o alvo?”. Logo a flecha para alcançar o alvo, “deve inicialmente alcançar a primeira metade, mas anteriormente deve alcançar o primeiro quarto e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões.” (BOYER, 1974, p. 55). Segue então que o movimento jamais começará, já que temos um número infinito de distâncias e o infinito é uma abstração matemática que significa que algo não tem limite (ou não tem fim), do contrário, isto é, caso o movimento começasse significaria que este infinito tem um fim, o que é uma contradição, gerando assim um paradoxo.

Tal paradoxo pode ser ilustrado através de uma sequência, deste modo, sem perda de generalidade consideremos que um objeto percorre 1 u.d.(unidade de distância), mas antes disso percorre $\frac{1}{2}$, e antes $\frac{1}{4}$, e antes $\frac{1}{8}$, e assim sucessivamente, logo, temos a sequência finita:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^{n}}\right) \text{ ou } \left(\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots, \frac{1}{2^n}\right)$$

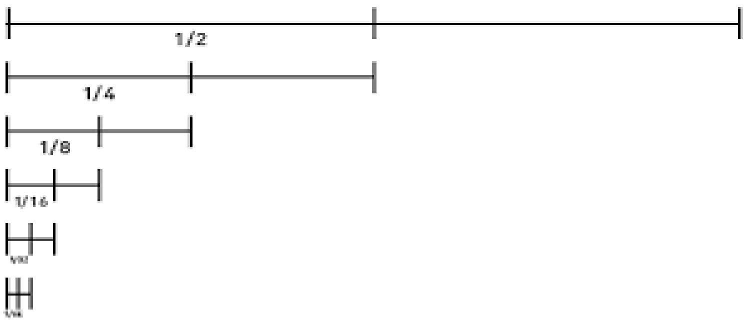
E mais, a distância percorrida pelo objeto é dada pela soma infinita

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots,$$

ou seja, pela série infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

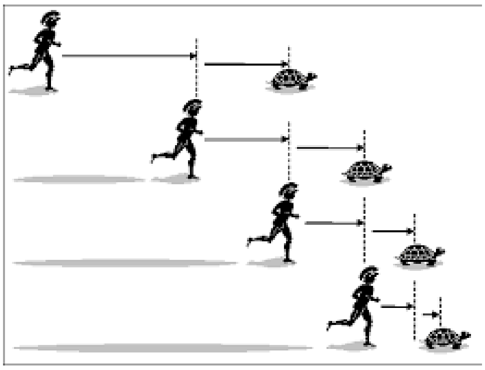
Figura 2: Dicotomia.



Fonte: Machado (2013, p. 1).

ii) O Aquiles: esse paradoxo é semelhante ao da dicotomia a única diferença é que a subdivisão invés de ser regressiva agora é progressiva. Neste paradoxo, o herói grego Aquiles aposta uma corrida com uma tartaruga que sai com vantagem, afirma Zenão que por mais depressa que fosse Aquiles nunca alcançará a tartaruga, pois quando Aquiles chegar em uma posição inicial a tartaruga terá avançado um pouco mais. E o processo ocorre várias vezes, com isso Aquiles nunca alcançará a tartaruga.

Figura 3: O Aquiles e a tartaruga.



Fonte: Cerqueira (2013, p. 56).

iii) A Flecha: Zenão afirma que um objeto em voo ocupa um lugar no espaço igual a si mesmo, mas segundo ele, aquilo que ocupa um lugar no espaço igual a si mesmo está sempre parado, portanto a flecha em voo está sempre parada, então não há movimento.

iv) O Estádio: sejam corpos de mesmo tamanho A_1, A_2, A_3 e A_4, considere também corpos B_1, B_2, B_3 e B_4, de mesmo tamanho que os de A, sendo que estes, os corpos B, se movem para a direita, de modo que, cada B passa por um A em um único mínimo intervalo de tempo possível, agora considere também corpos C_1, C_2, C_3 e C_4 também de mesmo tamanho que os de A e B, movendo-se de mesma maneira que os de B só que para a esquerda, e que em algum intervalo de tempo os corpos de C passam por os de A. Suponhamos que inicialmente temos os corpos na seguinte posição:

A_1	A_2	A_3	A_4

B_1	B_2	B_3	B_4

C_1	C_2	C_3	C_4

Então, passando por um único intervalo de tempo as posições serão:

A_1	A_2	A_3	A_4

B_1	B_2	B_3	B_4

C_1	C_2	C_3	C_4

Logo, note que C_1 terá passado por dois de B, o B_2 e B_3 logo o instante não é o menor intervalo de tempo possível, pois podemos tomar como uma unidade de tempo possível o que os corpos de C que passa por único de B.

Note que todos os paradoxos de Zenão podem ser representados por sequências em que cada intervalo de tempo temos um instante do espaço.

1.2 Arquimedes e o método da exaustão

Arquimedes de Siracusa é considerado o maior matemático da antiguidade, estima-se que nasceu em 287 a.C., nesta época o centro de toda atividade matemática ficava na cidade de Alexandria, ele nasceu e passou a maior parte de sua vida na cidade de Siracusa, apesar de ter estudado por algum tempo em Alexandria. Arquimedes desenvolveu diversos conceitos nos ramos da matemática, física e astronomia.

Figura 4: Arquimedes.

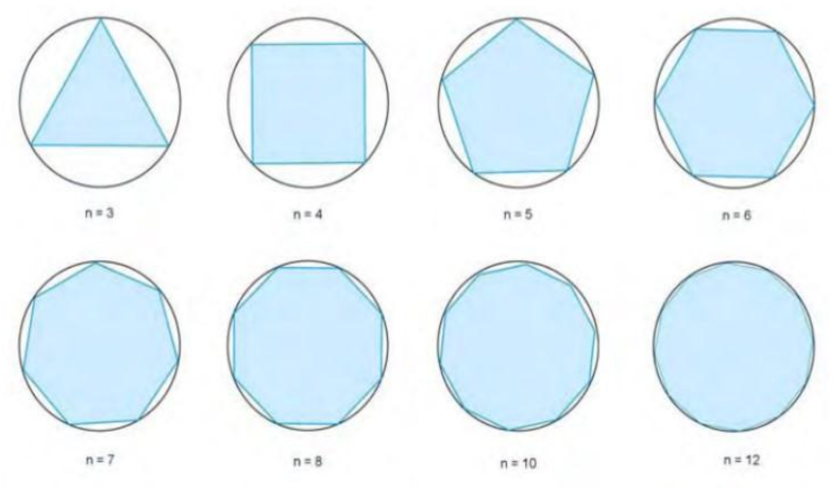
Fonte: Eves (2004, p. 192).

Dentre eles, um dos mais importantes foi o **método da exaustão**,

> Em seu trabalho, desenvolveu também o método de exaustão, creditado a Eudoxo, pelo qual se aproxima a quantidade desejada pelas somas parciais de uma série ou pelos termos de uma sequência. Obteve aproximações da área de um círculo comparando-a com as áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos. (Boyer, 1995, p. 93).

Note que, quanto maior o número de lados do polígono inscrito no círculo, menor a diferença da área do círculo e a área do polígono, então considerando que o número de lados do polígono se aproxime ao infinito, a diferença das áreas torna-se insignificante, portanto, conclui-se que as áreas são iguais. Basicamente o método da exaustão fundamenta-se nas somas dos termos de uma sequência, mostrando a importância das mesmas.

Figura 5: Moldes do método da exaustão.



Fonte: Cerqueira (2013, p. 15).

Segundo Eves “quem aplicou de maneira mais elegante o método de exaustão e quem mais se aproximou da atual e verdadeira integração, sem dúvida foi Arquimedes.” Ele aplicou o método para mostrar a área de uma parábola, a palavra parábola não era utilizada pelos matemáticos da época, mas sim, o termo secção de um cone reto. Para a demonstração ele considerou uma parábola, sobre a mesma, um triângulo inscrito ABC, de base AC, usando a geometria plana mostrou que, a área do triângulo ABC é quatro vezes a soma das áreas dos triângulos correspondentes inscritos sobre cada um dos lados AB e BC como base, repetindo sucessivas vezes esse raciocínio, temos que a área da parábola é dada pela soma de uma série infinita, considere T a área do triângulo ABC, logo a área da parábola é dada por:

$$\mathrm{T}+\frac{\mathrm{T}}{4}+\frac{\mathrm{T}}{4^2}+\frac{\mathrm{T}}{4^3}+\cdots+\frac{\mathrm{T}}{4^{n-1}}+\cdots$$

Daí, colocando T em evidência, temos:

$$\mathrm{T}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}+\cdots\right)$$

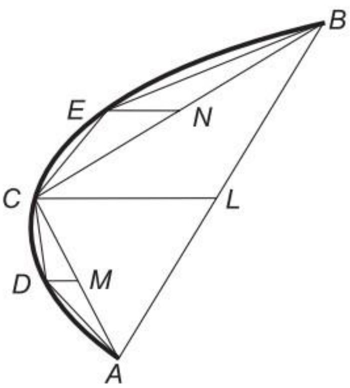
Note que, a soma obtida entre parênteses é uma série infinita, em que sua soma (conforme mostraremos posteriormente) é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{4}{3}.$$

Arquimedes demostrou usando os moldes do método de exaustão, que a área da parábola é:

$$A_P = \frac{4}{3}T$$

Figura 6: Cálculo da parábola.



Fonte: Eves (2004, p. 421).

1.3 A Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa (1175 – 1250), ou Fibonacci, nasceu na cidade de Pisa na Itália, considerado o matemático mais talentoso da Idade Média.

Figura 7: Fibonacci.

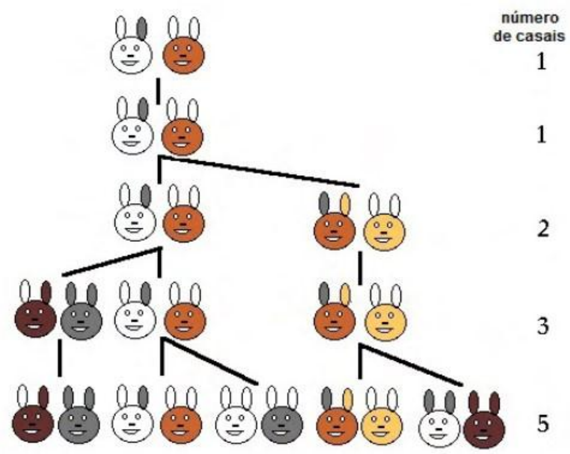
Fonte: Eves (2004, p. 293).

Em 1202, Fibonacci publicou sua obra mais famosa intitulada *Liber abaci* (traduzido para o português como Livro do Cálculo), mas o livro não foi tão apreciado quanto se imaginava e foi pouco útil para as instituições de ensino da época, o trabalho possui uma farta gama de problemas, dos quais na seção 2-10 apontamos um dos mais interessantes e mais famosos do *Liber abaci*.

“**Problema:** Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando por um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês.”

A resolução de tal problema é simples. Para um primeiro momento, ou seja, o primeiro mês temos um único par de coelhos, no segundo mês o par de coelhos ainda estará infértil continuando assim com um único par de coelhos, a partir daí no terceiro mês o par de coelho torna-se fértil gerando um novo par de coelhos, tendo agora dois pares. No quarto mês, o casal que nasceu mês anterior ainda não é fértil, porém o primeiro casal sim, e gera um novo casal, resultando agora em três pares. No quinto mês os dois primeiros casais geram dois novos pares, com o último casal que foi gerado anteriormente obtemos cinco pares de coelhos, e assim o processo continua indefinidamente.

Figura 8: Reprodução de coelhos.



Fonte: Cerqueira (2013, p. 15).

Notemos que a quantidade de pares de coelhos se dá por uma sequência, em que o termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores, assim temos:

$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots, m, n, m+n, \ldots)$, sendo m e n termos quaisquer da sequência.

A sequência acima é chamada de sequência de Fibonacci, tal sequência tem propriedades notáveis e de extrema importância. Por isso no capítulo três apresentaremos algumas de suas aplicações em diversas áreas.

1.4 Gauss "o príncipe dos matemáticos"

Carl Friedrich Gauss é considerado o maior matemático do século XIX e ao lado de Arquimedes e Isaac Newton, como um dos maiores de todos os tempos.

Figura 9: Gauss.

Fonte: Eves (2004, p. 521).

Gauss nasceu na cidade de Brunswick na Alemanha em 1777. Seu pai era um trabalhador braçal que tinha uma opinião desfavorável quanto a educação de seu filho, no entanto sua mãe era quem o encorajava e que futuramente orgulhava-se das realizações do filho.

Desde criança Gauss mostrava-se como um prodígio, há uma história de que aos 10 anos de idade, quando seu professor da escola pública passou a tarefa de somar de 1 a 100, terminou quase que imediato, e além de ser o único a acertar o resultado correto, o que mais surpreendeu foi que o mesmo utilizou nenhum cálculo, pois ele tinha calculado mentalmente a soma da progressão aritmética:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$$

Ele observou que:

$$1 + 100 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$3 + 98 = 101$$

E assim por diante, com os 50 pares de números possíveis, logo obteve

$$50 \text{ x } 101 = 5050$$

A partir deste cálculo feito por Gauss, que foi obtido o resultado da soma dos n primeiros termos da progressão aritmética.

Mas tarde em 1796 começou um diário onde registrava algumas de suas maiores descobertas, esse diário de apenas dezenove páginas é talvez o mais precioso documento da história da matemática. Um ano depois, em sua tese de doutorado, na universidade de Helmstädt, Gauss deu a primeira demonstração satisfatória do teorema fundamental da álgebra.

Gauss morreu em sua casa no observatório de Göttingen em 1855, logo depois o rei de Hannover ordenou que se preparasse uma medalha em sua homenagem com a seguinte gravura “Georgius V rex Hannoverge mathematicorum principi (Jorge V rei de Hannover ao príncipe da matemática”. Desde então Gauss é conhecido como “o príncipe da matemática”.

Este capítulo fez uma breve viagem na história das sequências, destacando alguns grandes matemáticos e suas contribuições.

2 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

O estudo das sequências numéricas é de extrema importância, pois existem várias aplicações e resultados fundamentais para o cálculo matemático. Neste capítulo iremos estudar a definição de sequências, bem como algumas de suas propriedades e resultados necessários para a continuidade do trabalho.

Definição 1: Uma sequência de números reais é uma função $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número natural n a um número real f(n). O valor f(n), para todo n ∈ $\mathbb{N}$, será representado por a_n e denominado enésimo termo da sequência.
Notação: $\{a_1, \ a_2, \ \dots \ , a_n, \ \dots\}$, ou $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente, $\{a_n\}$, que será a mais utilizada para indicar uma sequência.

Considere a sequência abaixo:

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n\}$$

temos uma sequência finita em que, o número a_1 é o primeiro termo, o a_2 é o segundo termo, e assim sucessivamente, até o a_n que é o enésimo termo da sequência, em que a_n é o comportamento da sequência. Uma sequência é dita infinita se o número de seus termos for infinito, ou seja:

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

2.1 Lei de formação

A lei de formação de uma sequência permite determinar qualquer termo de uma sequência, ou por meio de uma fórmula de recorrência, ou, expressando cada termo em função de sua posição.

2.1.1 Fórmula de recorrência

Primeiramente é determinado alguns dos primeiros termos da sequência $\{a_1, a_2, \dots\}$, e em seguida, é determinado cada termo a_n da sequência a partir dos seus anteriores $\{a_{n-1}, a_{n-2}, \dots\}$.

Exemplo 1. O primeiro e o segundo termo de uma sequência são $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$. Cada um dos termos seguintes é a soma dos dois últimos antecessores:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Escreva os n primeiros termos da sequência.

Solução:

Para os dois primeiros termos já se tem o resultado, agora para n>2, temos:

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5,$$

repetindo o processo (n - 2) vezes, obtemos:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots, a_{n-2}, \quad a_{n-1}, a_{n-1} + a_{n-2}, \ldots)$$

A sequência acima é denominada, sequência de Fibonacci.

2.1.2 Expressando cada termo em função da sua posição

Essa lei permite expressar cada termo a_n da sequência em função da sua posição n que ocupa.

Exemplo 2: Encontre os valores de a_1, a_2, a_3 e a_4 das sequências abaixo:

a) $a_n = \frac{1-n}{n^2}$

b) $a_n = \frac{1}{n!}$

c) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

Solução:

a) Calculando o primeiro termo, ou seja, para n = 1, temos:

$a_1 = \frac{1-1}{1^2} = \frac{0}{1} = 0$

Analogamente calculamos os demais termos:

Para $n = 2$, $a_2 = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$.

Para $n = 3$, $a_3 = \frac{1-3}{3^2} = -\frac{2}{9}$.

Para $n = 4$, $a_4 = \frac{1-4}{4^2} = -\frac{3}{16}$.

b) Calculando o primeiro termo, ou seja, para n = 1, temos:

$a_1 = \frac{1}{1!} = \frac{1}{1} = 1.$

Analogamente calculamos os demais termos.

Para $n = 2$, $a_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$.

Para $n = 3$, $a_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

Para $n = 4$, $a_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$.

c) Calculando o primeiro termo, ou seja, para n = 1, temos:

$a_1 = \frac{(-1)^{1+1}}{2.1-1} = \frac{(-1)^2}{2-1} = \frac{1}{1} = 1.$

Analogamente calculamos os demais termos.

Para $n = 2$, $a_2 = \frac{(-1)^{2+1}}{2.2-1} = \frac{(-1)^3}{4-1} = \frac{-1}{3}$.

Para $n = 3$, $a_3 = \frac{(-1)^{3+1}}{2.3-1} = \frac{(-1)^4}{6-1} = \frac{1}{5}$.

Para $n = 4$, $a_4 = \frac{(-1)^{4+1}}{2.4-1} = \frac{(-1)^5}{8-1} = \frac{-1}{7}$.

2.2 Progressões Aritméticas e Geométricas

Existem dois casos especiais de sequências numéricas, que são de grande importância nesse estudo e que possuem diversas aplicações, que são as Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas.

Definição 2: Progressão Aritmética (PA) é uma sequência dada pela fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

Onde a e r são números reais dados, em que a é o primeiro termo, e r é a razão, da progressão aritmética, r é dada por:

$$r = a_n - a_{n-1}$$

Logo uma PA é uma sequência que cada termo, é soma do anterior mais uma constante.

Exemplo 3: Determine a razão das PAs abaixo:

a) $p_1 = (4, 7, 10, 13, 16, \ldots)$

b) $p_2 = (0, -2, -4, -6, -8, \dots)$

c) $p_3 = (4, 4, 4, 4, 4, \dots)$

d) $p_4 = (10, 6, 2, -2, -6, \dots)$

e) $p_5 = (\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4}, \dots)$

Solução:

a) Calculando a razão de p_1, temos:

$$r = a_n - a_{n-1} = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$$

b) Calculando a razão de p_2, temos:

$$r = a_n - a_{n-1} = a_4 - a_3 = -6 - (-4) = -2$$

c) Calculando a razão de p_3, temos:

$$r = a_n - a_{n-1} = a_2 - a_1 = 4 - 4 = 0$$

d) Calculando a razão de p_4, temos:

$$r = a_n - a_{n-1} = a_3 - a_2 = 2 - 6 = -4$$

e) Calculando a razão de p_5, temos:

$$r = a_n - a_{n-1} = a_2 - a_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Agora utilizando a fórmula de recorrência pela qual definimos uma PA e dados o primeiro termo a_1, a razão r e o índice n de um termo desejado, temos:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$\dots \quad \dots$$
$$a_n = a_{n-1} + r$$

Somando as $(n - 1)$ igualdades, obtemos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + (n-1).r$$

Cancelam-se:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1}$$

em ambos os termos da igualdade, logo:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

Tal expressão é chamada de fórmula do termo geral de uma PA.

Teorema 1: Uma PA em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r, o enésimo termo é

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

Prova: Para a demonstração do teorema utilizaremos o princípio de indução finita

i) Para $n = 1$, temos:

$a_1 = a_1 + (1 - 1).r = a_1 + 0.r = a_1$ (sentença verdadeira).

ii) Admitimos a validade da fórmula para $n = k$, então:

$a_k = a_1 + (k - 1).r$ (hipótese de indução)

E provemos a validade para $n = k + 1$

$$a_{k+1} = a_k + r = [a_1 + (k - 1).r] + r = a_1 + kr - r + r = a_1 + \big((k + 1) - 1\big).r$$

Como $n = k + 1$, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

Encerrado a demonstração.

Exemplo 4: Obter o primeiro termo da PA de razão 4 cujo 23° termo é 86.

Solução: Utilizando o Teorema 1, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r \to a_{23} = a_1 + (23 - 1).4 \to 86 = a_1 + 22.4$$

Daí obtemos:

$a_1 = 86 - 88 = -2.$

Vejamos agora a soma de todos os termos de uma progressão aritmética não finita.

Teorema 2: Seja uma PA de razão r, a soma dos n primeiros termos é:

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Prova: Sabemos que:

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

e

$s_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$

Somando termo a termo as duas igualdades, temos:

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1)$$

Note que todos os parênteses são iguais, ao passar de parênteses o índice da primeira parcela aumenta um r, e o índice da segunda parcela diminui um r, e também temos um total de n parcelas iguais a $(a_1 + a_n)$,

$(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = \cdots = (a_n + a_1)$ e $(a_1 + a_n) + \cdots + (a_n + a_1) = (a_1 + a_n).n$

sendo assim, temos:

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Exemplo 5: Qual é a soma dos 20 primeiros números pares positivos? E a soma dos n primeiros?

Solução: A PA dos números positivos é $(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$, em que $a_1 = 2$ e $r = 2$. Calculando o s_{20}, obtemos:

$$s_{20} = \frac{(2 + a_{20}).20}{2}$$

Agora,

$$a_{20} = a_1 + 19.r = 2 + 19.2 = 40$$

Logo,

$$s_{20} = \frac{(2 + 40).20}{2} = \frac{42.20}{2} = 420$$

Agora calcularemos s_n

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} = \frac{(a_1 + (a_1 + (n-1).r)).n}{2} = \frac{(2 + (2 + (n-1).2)).n}{2}$$

$$= \frac{(2 + (2 + 2n - 2)).n}{2} = \frac{(2 + 2n).n}{2} = \frac{2n + 2n^2}{2} = n + n^2$$

Portanto

$$s_n = n + n^2$$

Definição 3: Progressão geométrica (PG) é uma sequência dada pela fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1}.q, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

Onde a e q são números reais dados, em que a é o primeiro termo e q é a razão, da progressão aritmética, em que q é dada por:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Assim uma PG é uma sequência de termos, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constate q dados.

Exemplo 6: Eis alguns exemplos de PGs abaixo:

$p_6 = (4, 8, 16, 32, 64, \dots)$

$p_7 = \left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$

$p_8 = (4, 4, 4, 4, 4, \dots)$

$p_9 = (2, -6, 18, -54, \dots)$

Agora utilizando a fórmula de recorrência pela qual definimos uma PG e assumindo o primeiro termo $a_1 \neq 0$ e a razão $q \neq 0$ e o índice n de um termo desejado, temos:

$$a_2 = a_1.q$$
$$a_3 = a_2.q$$
$$a_4 = a_3.q$$
$$\dots \quad \dots$$
$$a_n = a_{n-1}.q$$

Multiplicando as $(n-1)$ igualdades, obtemos:

$$a_2.a_3.a_4.\dots.a_n = a_1.a_2.a_3.a_4.\dots.a_{n-1}.q^{n-1}$$

Cancelam-se:

$$a_2.a_3.a_4.\dots.a_{n-1}$$

em ambos os termos da igualdade, logo:

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

Teorema 3: Uma PG em que o primeiro termo é a_1 e a razão é q, o enésimo termo é

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

Prova: A demonstração é análoga ao caso de PA, utilizaremos o princípio de indução finita

i) Para $n = 1$, temos:

$a_1 = a_1.q^{1-1} = a_1.q^0 = a_1.1 = a_1$ (sentença verdadeira).

ii) Admitimos a validade da fórmula para $n = k$, então:

$a_k = a_1.q^{k-1}$ (hipótese de indução)

E provemos a validade para $n = k + 1$

$$a_{k+1} = a_k.q = (a_1.q^{k-1}).q = a_1.q^{k-1}.q = a_1.q^k$$

Como $n = k + 1$, temos:

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

Encerrado a demonstração.

Exemplo 7: Obter o 10° termo da PG $(2, 6, 18, \dots)$.

Solução: Temos que a razão da PG é:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{6}{2} = 3$$

logo, obtemos:

$$a_{10} = a_1 . q^{10-1} = 2.3^9 = 2.19683 = 39366$$

Como no caso das PAs também existe uma relação para descobrimos a soma dos infinitos termos de uma PG.

Teorema 4: Seja uma PG de razão q, com $q \neq 1$, a soma dos n primeiros termos é:

$$s_n = \frac{a_1 .(1 - q^n)}{1 - q}$$

Prova: Para a demonstração do teorema utilizaremos o princípio de indução finita

i) Para $n = 1$, temos:

$$s_1 = \frac{a_1 .(1 - q^1)}{1 - q} = a_1$$

Sentença verdadeira

ii) Admitimos a validade da fórmula para um n qualquer, então:

$$s_n = \frac{a_1 .(1 - q^n)}{1 - q}$$

Esta sentença é a hipótese de indução

E agora, provemos a validade para $n + 1$

$$s_{n+1} = s_n + a_1 . q^n$$

Usando a hipótese de indução, obtemos:

$$s_{n+1} = \frac{a_1 .(1 - q^n)}{1 - q} + a_1 . q^n = a_1 . \frac{1 - q^n + q^n .(1 - q)}{1 - q} = a_1 . \frac{1 - q^n + q^n - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$= a_1 . \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Logo, temos:

$$s_{n+1} = \frac{a_1 .(1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

Encerrado a demonstração.

Exemplo 8: Calcular a soma dos 12 termos iniciais da PG $(1, 3, 9, 27, \dots)$

Solução: Primeiramente calculamos a razão da PG

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{3}{1} = 3$$

Logo pelo **Teorema 4**, sabemos que:

$$s_n = \frac{a_1.(1 - q^n)}{1 - q}$$

Obtendo o s_{12}, temos:

$$s_{12} = \frac{1.(1 - 3^{12})}{1 - 3} = \frac{1 - 531441}{-2} = -\frac{531440}{2} = 265720.$$

Em seguida definiremos o que é o limite de uma sequência infinita, e observaremos a sua convergência, a partir daí introduziremos alguns teoremas e definições envolvendo o limite de sequências.

2.3 Limites de uma sequência

Definição 4: Uma sequência $\{a_n\}$ tem por limite L ou converge para L
Se para todo $\varepsilon > 0$, existe um número inteiro positivo N, tal que $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, ou $|a_n - L| < \varepsilon$, sempre que n > N. Se tal número L não existe, a sequência não tem limite, ou diverge.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \text{ ou } a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

Observação: Esta definição é quase a mesma estudada para definir o limite de uma função real, isto é, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. A única diferença é que se $f(n) = a_n$, o domínio de f é o conjunto de inteiros positivos, e não um intervalo infinito de números reais.

Exemplo 9: Use a definição e mostre que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Solução: Seja $\varepsilon > 0$ dado. Devemos mostrar que existe um N inteiro de forma que, para todo n,

$$n > N, \text{ então } \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Note que para todo $\varepsilon > 0$, se $N > \frac{1}{\varepsilon}$, a implicação valerá para todo n > N, pois

n > N > $\frac{1}{\varepsilon}$, o que implica que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Portanto $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Teorema 5: Seja $\{a_n\}$ uma sequência convergente. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, então $a = b$.

Prova:

Seja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ dado qualquer $b \neq a$, mostraremos se tem $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Para isso tomemos $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2} > 0$ para este ε, temos que os intervalos $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ são disjuntos. De fato, pois se existe $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ teríamos $|x-a| < \varepsilon$ e $|x-b| < \varepsilon$, onde $|a-b| \leq |a-x| + |x-b| < 2\varepsilon = |a-b|$, um absurdo. Agora com $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, existe N_0 tal que para $n > N_0$, $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, e portanto $a_n \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, para todo $n > N_0$, logo $\lim_{n\to\infty} a_n \neq b$, portanto $a = b$.

Definição 5: A sequência $\{a_n\}$ diverge ao infinito se para cada número M houver um número inteiro N, tal que para todo n maior do que $N, a_n > M$. Se essa condição for verdadeira, escrevemos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ ou } a_n \to \infty.$$

De maneira semelhante, se para cada número m existir um número inteiro N, de forma que, para todo $n > N$ tenhamos $a_n < m$ então dizemos que $\{a_n\}$ diverge ao menos infinito e escrevemos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{ou} \quad a_n \to -\infty.$$

Teorema 6: Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e f estiver definida para todo inteiro positivo, então $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$, com $f(n) = a_n$, quando n for um número inteiro positivo qualquer.

Prova:

Suponha que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, então, para cada número inteiro positivo ε, existe um número n_0, tal que para todo x,

$$x > n_0, \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Logo, temos $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, como todo número natural é um número real, temos que para todo $n > n_0$.

$$a_n = f(n) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$.

Observação: O **Teorema 6** é importante porque nos permite usar os resultados estudados sobre limites de funções reais, para investigar a convergência ou divergência de sequências. Além disso, nos permite utilizar a regra de L'Hospital para encontrar limites de algumas sequências.

Teorema 7: Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências de números reais, e sejam L e M números reais. As seguintes regras se aplicam se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = M$.

i) $\lim_{n\to\infty} K = K$, sendo K uma constante qualquer.

ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = L \pm M$

iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n = L.M$

iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{L}{M}$

Prova:

i) Seja $\varepsilon > 0$ dado. Devemos mostrar que existe um N inteiro de forma que, para todo n,

$$n > N, \text{ então } |K - K| < \varepsilon$$

Logo para $N > 0$, a implicação será verdadeira, portanto, $\lim_{n\to\infty} K = K$.

ii) Por hipótese temos $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N_1 > 0$, tal que:

$$n > N_1 \text{ , então } |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

E, sendo $\lim_{n\to\infty} b_n = M$ significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N_2 > 0$, tal que:

$$n > N_2 \text{ , então } |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Logo, como

$$|(a_n + b_n) - (L + M)| = |(a_n - L) + (b_n - M)|,$$

usando a desigualdade triangular e considerando $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, obtemos que para todo n, $n > N$

$$|(a_n - L) + (b_n - M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

A demonstração da propriedade da subtração é análoga à da adição trocando-se apenas o sinal.

iii) Pela definição formal de limite temos dado $\varepsilon > 0$, existem $n > N_1, N_2$

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ e } |b_n - M| < \varepsilon$$

Queremos mostrar que

$$|a_n . b_n - L.M| < \varepsilon$$

Tomando $N = \min\{N_1, N_2\}$, temos:

$$\begin{aligned} |a_n . b_n - L.M| &= |(a_n - L).(b_n - M) + L(b_n - M) + M(a_n - L)| \\ &\leq |a_n - L|.|b_n - M| + |L|.|b_n - M| + |M|.|a_n - L| \end{aligned}$$

Nesta última linha aplicamos a desigualdade triangular. Em seguida, basta utilizar as hipóteses dos limites de a_ne b_n

$$|a_n. b_n - L.M| \leq \varepsilon.\varepsilon + |L|.\varepsilon + |M|.\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon + |L| + |M|)$$

Portanto, temos que o limite da multiplicação é equivalente à multiplicação dos limites.

iv) Como acabamos de mostrar a propriedade do produto. Podemos manipular da seguinte forma:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n.\frac{1}{b_n}) = L.\frac{1}{M}$$

Basta mostrar então que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{M}, \text{ para } M \neq 0$$

Dado $\varepsilon > 0$, existem $N_1 > 0$ e $N_2 > 0$ tais que

$$N_1 > 0 \to |b_n| > \frac{|b_n|}{2}$$

e

$$N_2 > 0 \to |b_n - M| < \varepsilon$$

Assim, tomando $N = \min\{N_1, N_2\}$, onde $N > 0$, temos:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - b_n}{b_n.M}\right| = \frac{|M - b_n|}{|b_n|.|M|} < \frac{|M - b_n|}{\frac{|M|}{2}.|M|} = \frac{2}{M^2}|M - b_n| < \frac{2}{M^2}.\varepsilon$$

Assim concluímos a demonstração.

Exemplo 10: Verifique quais das sequências convergem e divergem, e encontre seu limite.

a) $a_n = \frac{n+3}{n^2+5n+6}$

b) $b_n = \frac{1-5n^3}{n^3+8n^2}$

c) $c_n = 2n^3$

Solução: Para resolvermos este exemplo, usaremos o **Teorema 6** e os resultados estudados para limites de funções reais

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+5n+6} = \frac{\infty + 3}{\infty^2 + 5.\infty + 6} = \frac{\infty}{\infty}$$

(Está é uma forma indeterminada. Então iremos dividir cada termo por n^2).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+5n+6} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{5n}{n^2}+\frac{6}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}$$

Conforme n se aproxime de ∞ cada uma das expressões se aproxima de 0.

$$\frac{0+0}{1+0+0} = 0$$

Logo a_n, converge para 0.

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-5n^3}{n^3+8n^2} = \frac{1-5\infty^3}{\infty^3+8\infty^2} = -\frac{\infty}{\infty}$$

(Está é uma forma indeterminada. Então iremos dividir cada termo por n^3).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-5n^3}{n^3+8n^2} \cdot \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}-\frac{5n^3}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}+\frac{8n^2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}-5}{1+\frac{8}{n}}$$

Conforme n se aproxime de ∞ cada uma das expressões se aproxima de 0.

$$= \frac{0-5}{1+0} = \frac{-5}{1} = -5$$

Logo, a_n converge para -5.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} 2n^3 = \infty$, logo a sequência diverge.

Exemplo 11: Mostre que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$.

Solução:

Note que $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} e^n = \infty$. Sendo assim, como as funções são deriváveis e a derivada do denominador não anula, podemos aplicar L'Hospital. Logo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

Por transitividade

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$$

Teorema 8: Sejam $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ sequências de números reais. Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ for verdadeira para todo n além de algum índice N, e se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ também.

Prova: Sendo $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N_a \in \mathbb{N}$ tal que, “para todo $n \geq N_a$, tem se $L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$.”

Analogamente, sendo $\lim_{n\to\infty} c_n = L$ existe $N_c \in \mathbb{N}$ tal que,

“para todo $n \geq N_c$, tem se $L - \varepsilon \leq c_n \leq L + \varepsilon$.”

Considere $N = \text{máx}\{N_a, N_c\}$, então para $n > N$, temos que $L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$ e $L - \varepsilon \leq c_n \leq L + \varepsilon$. Logo, $L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$, assim $\lim_{n\to\infty} b_n = L$, como queríamos mostrar.

Exemplo 12: A sequência $\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen } n}{n}$, converge ou diverge? E encontre seu limite se for convergente.

Solução:

Temos que $-1 \leq \text{sen } n \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, consequentemente,

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\text{sen } n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Agora, note que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Logo, pelo **Teorema 8,** concluímos que $\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen } n}{n} = 0$, ou seja, a sequência converge para 0.

Exemplo 13: Utilize o Teorema 7 e mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} . \frac{\cos n}{n} = 0$.

Solução:

Pelo o item (**iii**) do Teorema 7 temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} . \frac{\cos n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} . \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n}$$

Resolvendo os limites separadamente:

- ✓ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1+0} = 2$
- ✓ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n}$

Note que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

E como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Então, pelo Teorema 8

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$$

Daí, obtemos que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} \cdot \frac{\cos n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 2.0 = 0$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} \cdot \frac{\cos n}{n} = 0.$$

Agora veremos o conceito de sequência limitada, e limitante de uma sequência.

Definição 6: Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existe um número M tal que $a_n \leq M$ para todo n. O número M é um limitante superior para $\{a_n\}$. Se M é um **limitante superior** para $\{a_n\}$, mas nenhum número menor que M é um limitante superior para $\{a_n\}$, então M é o menor limitante superior para $\{a_n\}$.

Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada inferiormente** se existe um número m tal que $a_n \geq m$ para todo n. O número m é um **limitante inferior** para $\{a_n\}$. Se m é um limitante inferior para $\{a_n\}$, mas nenhum número maior que m é um limitante inferior para $\{a_n\}$, então m é o maior limitante inferior para $\{a_n\}$.

Se $\{a_n\}$ é limitada superior e inferiormente, então $\{a_n\}$ é **limitada**. Se $\{a_n\}$ não é limitada, então dizemos que $\{a_n\}$ é uma sequência ilimitada.

Exemplo 14:

a) A sequência $a_n = n$ é limitada inferiormente, pois $a_n > 0$, mas não é limitada superiormente, pois não existe um número M, tal que $a_n \leq M$.

b) $b_n = \frac{n}{n+1}$ é limitada, pois $0 < b_n < 1$, para todo n.

c) $c_n = (-1)^n$ é limitada, pois $-1 \leq c_n \leq 1$ ou, $|c_n| \leq 1$.

Podemos classificar as sequências quanto ao seu crescimento, levando em consideração a sua ordem observe a definição a seguir.

Definição 7: Uma sequência $\{a_n\}$ é **crescente** se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n, ou $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$. A sequência é **decrescente** se $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n, A sequência $\{a_n\}$ é **monotônica** se ela for crescente ou decrescente.

Exemplo 15:

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ é crescente, pois para a_{n+1} temos:

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+1+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

agora note que,

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$$

ou seja,

$$a_n < a_{n+1}$$

Para todo n.

b) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ é decrescente, pois para a_{n+1} temos:

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} = \frac{n+1}{n^2+2n+1+1} = \frac{n+1}{n^2+2n+2}$$

agora note que, $a_n > a_{n+1}$, ou seja

$$\frac{n}{n^2+1} > \frac{n+1}{n^2+2n+2}$$

pois, comparando as frações, obtemos:

$$\frac{n}{n^2+1} . \frac{n^2+2n+2}{n^2+2n+2} > \frac{n+1}{n^2+2n+2} . \frac{n^2+1}{n^2+1} \to \frac{n^3+2n^2+2n}{n^4+2n^3+3n^2+2n+2} > \frac{n^3+n^2+n+1}{n^4+2n^3+3n^2+2n+2}$$

Teorema 9: Se uma sequência $\{a_n\}$ é limitada e monotônica, então a sequência converge.

Prova:

De início consideremos que a sequência seja não decrescente, como a sequência é limitada, então existe um número M tal que $a_n \leq M$, para todo n. Afirmamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = M$. Dado $\varepsilon > 0$, como $M - \varepsilon < M$, o número M não é limitante inferior da sequência, logo existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M - \varepsilon < a_{n_0}$. Como a sequência é monótona,

$$n > n_0 \to a_{n_0} \leq a_n$$

Portanto,

$$M - \varepsilon < M$$

E como $a_n \leq M$, para todo n, temos que

$$n > n_0 \to a_n \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$$

Assim completamos a nossa demonstração.

Exemplo 16: A sequência $a_n = \frac{n}{n+1}$ é convergente.

Solução:

Nos **Exemplos 14** e **15**, vimos que $a_n = \frac{n}{n+1}$ é limitada e monotônica (crescente), portanto pelo **Teorema 9** concluímos que a sequência $a_n = \frac{n}{n+1}$ é convergente.

2.4 Série infinita

Uma **série infinita** é a soma de uma sequência infinita de números.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + \ a_n \ + \cdots$$

Mas como a uma quantidade infinita de termos é mais viável somar uma quantidade finita de termos, a soma dos n primeiros termos

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + \ a_n$$

Esta soma é denominada, enésima soma parcial.

Definição 8: Dada a sequência de números $\{a_n\}$, uma expressão da forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + \ a_n \ + \cdots$$

É uma série infinita, ou simplesmente série. O número a_n é o enésimo termo da série. A sequência $\{S_n\}$ definida por:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

...

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + \ a_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$$

...

É a **sequência de somas parciais** da série, o número S_n sendo **a enésima soma parcial**.

Definição 9: Uma série a_n é convergente (ou converge), se a sequência de somas parciais converge, ou seja

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L$$

para algum número real L. ou também podemos escrever:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

Caso a sequência de somas parciais da série não converge, dizemos que a série diverge.

Exemplo 17: Encontre a fórmula para a enésima soma parcial da série e use-a para encontrar a soma da série se ela convergir.

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{(n+1).(n+2)} + \cdots$$

Solução: Para achar S_n escreveremos os termos da série de uma forma diferente, para isso utilizaremos frações parciais

$$\frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} \rightarrow 1 = A(n+2) + B(n+1) \rightarrow 1 = An + 2A + Bn + B$$

$$\rightarrow 0n + 1 = (A+B)n + 2A + B$$

Por igualdade de polinômios, temos

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima

$A = 1$ e $B = -1$

Assim obtemos:

$$a_n = \frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Consequentemente, a soma parcial da série pode ser escrita

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

Reagrupando, vemos que todos os termos, exceto o primeiro e o último, cancelam-se e então

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2(n+2)}$$

E por fim, utilizando a fórmula de S_n obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2}$$

Portanto, a série converge e tem por soma $\frac{1}{2}$

3 APLICAÇÕES

Este capítulo destina-se as aplicações das sequencias numéricas, o qual está dividido em duas partes, a primeira reservada a resolução de problemas envolvendo a área de cálculo financeiro e a segunda parte, a aplicabilidade da sequência de Fibonacci em diversas áreas do conhecimento.

3.1 Aplicações em cálculo financeiro

Uma das principais aplicações das sequências em particular aos casos da progressão aritmética e progressão geométrica é na área de matemática financeira, em que temos uma relação entre progressão aritmética e juros simples e também a cerca de progressão geométrica e juros compostos. Uma operação básica na matemática financeira é o empréstimo, onde temos um capital (C), emprestado por um determinado tempo e após esse período há o acréscimo de uma remuneração chamada Juros (J); a soma do capital inicial com o juro é chamada de montante (M); a razão entre o juro e o capital é chamada de taxa de crescimento do capital. Com isso é trivial resolver alguns problemas de matemática financeira utilizando o conhecimento de progressões.

Problema 1: Um investidor quer aplicar a quantia de R$ 800,00 por 4 meses, a uma taxa de 8% ao mês em juros simples. Quanto ele vai ganhar em cada um dos meses?

Solução: Note que o capital $(c = 800)$, representa o primeiro termo da PA e a taxa é dada por $(i = 8\% = 0{,}08)$, usando o cálculo de juros simples, obteremos o montante de cada mês, observe:

No primeiro mês, ou seja $t = 1$ e $n = 2$, pois a_1 representa o capital, temos que o juro é dada por:

$j = c.i.t$

$j = a_1.\,0{,}08.1$

$j = 800.0{,}08.1 = 64$

Note que o juro é a razão da PA, logo,

$a_2 = a_1 + r = 800 + 64 = 864$

Analogamente, no segundo mês, $(n = 3)$ teremos:

$a_3 = a_1 + 2.r = 800 + 2.r = 928$

No terceiro mês, $(n = 4)$

$a_4 = a_1 + 3.r = 800 + 3.64 = 992$

E no quarto mês, $(n = 5)$

$a_5 = a_1 + 4.r = 800 + 4.r = 1056$

A sequência obtida com os valores é uma PA crescente de 5 termos e de razão igual a 64

$$(800, 864, 928, 992, 1056)$$

Resposta: Portanto o investigador ganhará R$864,00, R$928,00, R$992,00, R$1056,00, em cada um dos próximos 4 meses.

Problema 2: Em janeiro de um certo ano o preço de um automóvel era de R$ 120.000,00. O dono da concessionaria afirmou que a cada ano o preço do automóvel cai em 4%. Quanto irá custar o automóvel em cada um dos próximos 5 anos?

Solução: Note que o capital, preço inicial do automóvel, $(C = 120.000)$, representa o primeiro termo da PA e o preço do automóvel cai em uma taxa constante de 4%, usando o cálculo de juros simples, obteremos o montante de cada mês, mas primeiramente calcularemos o juros, que é na verdade a razão da PA, mas como o valor está decrescendo a razão será negativa, então:

$j = c.i.t$

$j = 120000.0{,}04.1$

$j = 4800$

e

$r = -4800$

Logo no primeiro ano $(n = 2)$, pois a_1 é o capital, temos:

$a_2 = a_1 + r = 120000 - 4800 = 115200$

Analogamente, no segundo ano, $(n = 3)$ teremos:

$a_3 = a_1 + 2.r = 120000 + 2.(-4800) = 110400$

No terceiro ano, $(n = 4)$

$a_4 = a_1 + 3.r = 120000 + 3.(-4800) = 105600$

No quarto ano, $(n = 5)$

$a_5 = a_1 + 4.r = 120000 + 4.(-4800) = 100800$

E no quinto ano, $(n = 6)$

$a_5 = a_1 + 5.r = 120000 + 5.(-4800) = 96000$

A sequência obtida com os valores é uma PA decrescente de 6 termos e de razão igual a -4800

$$(120000{,}115200, 110400, 105600, 100800, 96000)$$

Resposta: Logo o preço do automóvel será R$120000,00, R$115200,00, R$110400,00, R$100800,00, R$96000,00, em cada um dos próximos 5 anos.

Problema 3: Qual é o preço final de um apartamento, após 8 anos, que tem um preço inicial de R$ 340.000,00 e que seu valor aumenta a uma taxa anual de 2,5% em juros simples?

Solução: Observe que o capital, preço inicial do apartamento é o primeiro termo da PA, ($C = 340.000$), e que a taxa de juros é 2,5% ao ano, calculando o juro:

$j = c.i.t$

$j = 340000.0{,}025.1$

$j = r = 8500$

Agora, determinando o valor do apartamento após 8 anos, ou seja, o nono termo da PA,

$a_9 = a_1 + 8.r = 340000 + 8.8500 = 340000 + 68000 = 408000$

Resposta: Portanto, o preço do apartamento depois de 8 anos é de R$ 408000,00.

Problema 4: Uma certa empresa investiu R$ 12000,00, em um investimento que rende 8% ao ano em juros compostos. Determine quantos reais esta empresa terá em cada um dos quatro primeiros anos?

Solução: Neste caso tem-se que capital ($C = 12000$) representa o primeiro termo da PG, a razão será 1,08 (que é quanto o valor inicial vai variar mês a mês, ou seja, o juros, $j = q$), agora obteremos o montante de cada um dos quatro primeiros anos, para o primeiro ano, $n = 2$, teremos:

$a_2 = a_1.q^{2-1} = 12000.(1{,}08)^1 = 12960$

Analogamente, no segundo ano, ($n = 3$) teremos:

$a_3 = a_1.q^{3-1} = 12000.(1{,}08)^2 = 12000.1{,}166 = 13992$

No terceiro ano, ($n = 4$)

$a_4 = a_1.q^{4-1} = 12000.(1{,}08)^3 = 12000.1{,}25 = 15000$

No quarto ano, ($n = 5$)

$a_5 = a_1.q^{5-1} = 12000.(1{,}08)^4 = 12000.1{,}36 = 16320$

A sequência obtida com os valores é uma PG de 5 termos e de razão igual a $1{,}08$

$$(12000{,}12960, 13992, 15000, 16320)$$

Resposta: Em cada um dos quatro anos a empresa terá R$12960,00, R$13992,00, R$15000,00, R$1632,00.

Problema 5: Um fazendeiro fez um empréstimo de R$ 20.000,00, com taxa de juros de 4% ao mês, ele deve quitar em um único pagamento a sua dívida depois de 8 meses. Quanto ele deverá pagar?

Solução: Observe que o capital, preço inicial do apartamento é o primeiro termo da PG, ($C = 20.000$), e que a razão é 1,04($j = q$), portanto daqui a 8 meses teremos ($n = 9$):

$a_9 = a_1 . q^{n-1} = 20000 . (1{,}04)^{9-1} = 20000.1{,}368 = 27360$

Resposta: Portanto, o fazendeiro pagará depois de 8 meses um total de R$ 27360,00.

Problema 6: Luciano fez um empréstimo no valor de R$ 1800,00 ao final de um ano ele quitou a dívida do empréstimo em um pagamento único de R$ 3231,00. Qual foi a taxa de juros em juros compostos deste empréstimo?

Solução: Note que o primeiro termo da PG é 1800, e que enésimo termo é 3231 e que a quantidade de termos é 13, sedo assim, temos:

$a_n = a_1 . q^{n-1} =$

$3231 = 1800 . q^{13-1}$

$q^{12} = \dfrac{3231}{1800}$

$q^{12} = 1{,}795$

$q = \sqrt[12]{1{,}795}$

$q = 1{,}05$

Resposta: Como a razão da PG é 1,05 pode-se afirmar que a taxa de juros do empréstimo é de 0,05, ou, 5%.

3.2 Aplicações da sequência de Fibonacci

3.2.1 Fibonacci e o número de ouro

A relação entre o número de ouro, também conhecido pela letra grega Φ(phi) e representada pelo numero $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618$, com a sequência de Fibonacci é dada ao efetuarmos a divisão de cada número da sequência pelo seu posterior esse resultado tende a aproximar-se a $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, ou seja, ao número de ouro, então temos o seguinte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Para ficar de forma mais clara mostraremos esse processo por meio da tabela abaixo:

Tabela 1: Relação do número de ouro e a Sequência de Fibonacci.

n	a_n	a_{n+1}	$\frac{a_n}{a_{n+1}}$
1	1	1	1
2	1	2	0,5
3	2	3	0,666...
4	3	5	0,6
5	5	8	0,625
...	...	...	...
12	144	233	0,6180257511
...	...	...	...

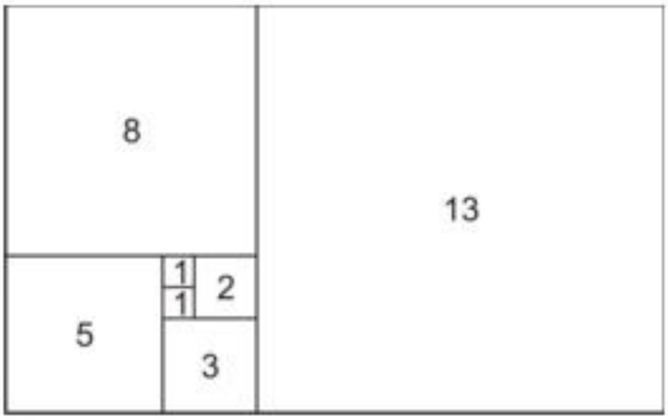
Fonte: Próprio autor.

Note que quando n tende ao infinito temos uma aproximação cada vez mais exata do número de ouro.

3.2.2 Retângulos áureos

Inicialmente consideremos a sequência de Fibonacci $(1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots)$ a partir daí construímos um retângulo unitário, agora anexando outro retângulo unitário, obtemos um retângulo 2x1, acrescentando um quadrado de lado 2, que é soma dos lados dois retângulos unitários, teremos agora um retângulo 3x2, repetindo o processo novamente, ou seja, anexando um quadrado de lado 3, que é soma dos lados do retângulos unitário com o quadrado de lado 2, continuando este processo de adicionar quadrados igual à soma dos comprimentos dos dois quadrados anteriores, a sequência dos lados dos comprimentos dos quadrados é $(1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots)$, que é exatamente a sequência de Fibonacci. Observe a representação abaixo

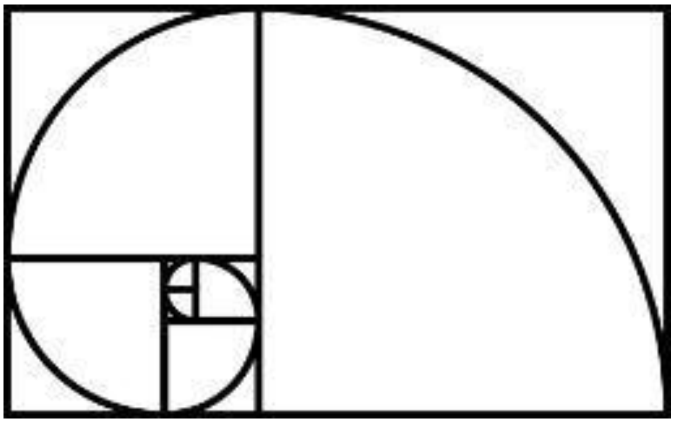
Figura 10: Construção do espiral de Fibonacci.



Fonte: Próprio autor.

Traçando um quarto de círculo no quadrado de lado 13, de acordo com a figura abaixo, analogamente repetindo este procedimento nos quadrados de lados 8, 5, 3, 2, 1 e 1, logo temos:

Figura 11: Espiral de Fibonacci.



Fonte: Hiper cultura (p. 1)

Considerando esta curva obtemos uma espiral, que é bem presente em diversas formas na natureza e bastante utilizado em diversas áreas.

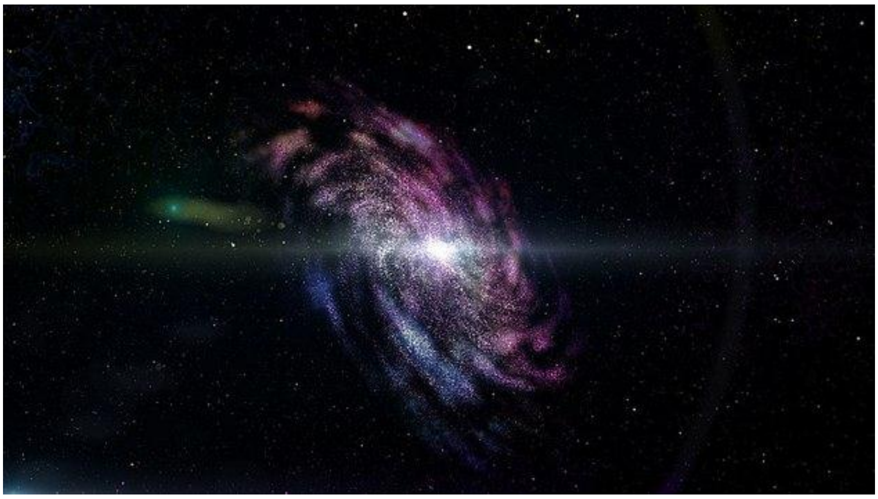
É possível aplicar com perfeição a sequência de Fibonacci na anatomia de um caracol.

Figura 12: Caracol e a sequência de Fibonacci.

Fonte: Hiper cultura (p. 1)

Devido a estudos astrônomos percebesse que uma galáxia com formato de um espiral segue a proporção da Sequência de Fibonacci.

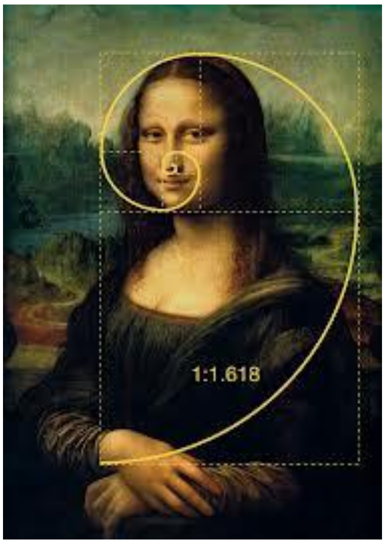
Figura 13: Galáxia.



Fonte: Hiper cultura (p. 1)

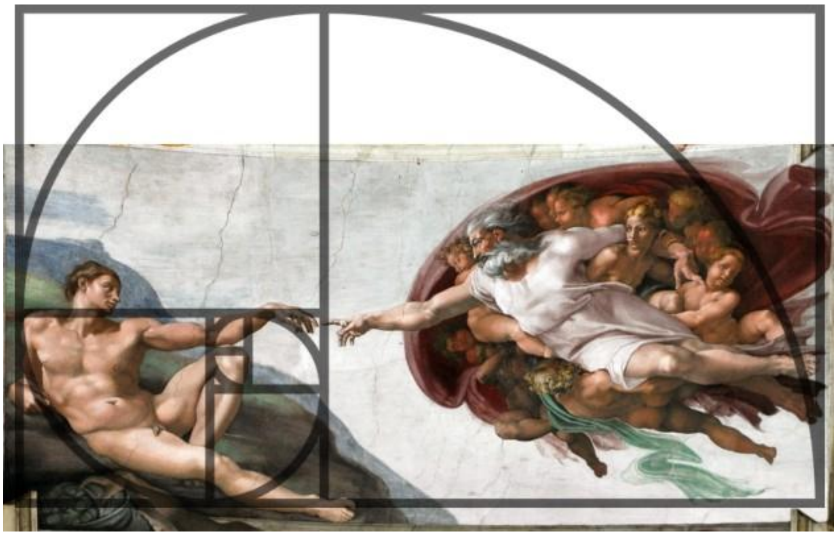
A proporção da Sequência de Fibonacci foi bastante usada no mudo das artes, por famosos artistas e pintores tais como Leonardo da Vinci e Michelangelo, com suas obras mais conhecidas e renomadas “Mona Lisa” e “A Criação de Adão” respectivamente.

Figura 14: A relação da arte e a sequência de Fibonacci 1.



Fonte: Hiper cultura (p. 1)

Figura 15: A relação da arte e a sequência de Fibonacci 2.



Fonte: Hiper cultura (p. 1)

Este capitulo mostrou algumas aplicações das sequências em áreas do conhecimento, destacando sua diversidade e importância nas mesmas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho abordamos o conteúdo de sequências numéricas, em que apresentamos alguns dos principais matemáticos que contribuíram neste ramo. Além disso, vimos a definição de sequências, alguns casos particulares das mesmas, como as progressões, definimos o seu limite, e analisamos as suas convergências, seguimos estudando algumas de suas propriedades e teoremas, para posteriormente explorar a aplicabilidade do tema em diversas áreas. De modo geral, foi exibido as contribuições históricas, os principais conceitos, definições e teoremas, e também a sua aplicabilidade.

Com base nos conceitos vistos nesse trabalho, esperamos ter dado a devida a importância às colaborações históricas feitas pelos matemáticos citados, ter construído os principais fundamentos das sequências numéricas, e por fim auxiliado na construção lógica do pensamento matemático, para compreender a resolução de problemas utilizando o conhecimento de sequências numéricas.

Percebemos que o conteúdo de sequências numéricas tem extrema relevância para diversas áreas do conhecimento, não apenas para o ramo do cálculo, análise, física, mas também para as ciências da natureza, artes, entre outras.

Este trabalho permite que os discentes possam entender de maneira mais simples o estudo das sequências em componentes curriculares, e que também possam resolver problemas em situações do seu cotidiano.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1974.

CABRAL, João F. P. **Zenão**; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/filosofia/zenao.htm. Acesso em 23 de fevereiro de 2019.

CERQUEIRA, Ana C. S. **Um estudo sobre sequências e séries**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

HIPER CULTURA. **Sequência de Fibonacci**. Disponível em: https://www.hipercultura.com/sequencia-fibonacci/. Acesso em 12 de abril de 2019.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**, Vol. 4. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004.

LEITHOLD, Louis. **Cálculo com geometria analítica**, Vol. 2. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

MACHADO, Alexandre N. **Paradoxo da dicotomia (Zenão)**; Problemas filosóficos. Disponível em: http://problemasfilosoficos.blogspot.com/2013/04/paradoxo-da-dicotomia-zenao.html. Acesso em 15 de março de 2019.

MUNEM, Mustafa A. e FOULIS, David J. **Cálculo**. Vol. 2. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1982.

SANTOS, Gabriel P. **Sequências numéricas e Aplicações**. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com geometria analítica**. Vol. 2. São Paulo: Makron Books, 1994.

THOMAS, George B. **Cálculo**. Vol.2. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.