



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

JOÃO MARCOS ALMEIDA FERREIRA

**MODELAGEM E SOLUÇÃO NUMÉRICA DO MOVIMENTO
UNIDIMENSIONAL DE CORPOS IMERSOS**

**MONTEIRO
2019**

JOÃO MARCOS ALMEIDA FERREIRA

**MODELAGEM E SOLUÇÃO NUMÉRICA DO MOVIMENTO
UNIDIMENSIONAL DE CORPOS IMERSOS**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada

Orientador: Prof. Dr. Brauner Gonçalves Coutinho

MONTEIRO

2019

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

F383m Ferreira, Joao Marcos Almeida.
Modelagem e solução numérica do movimento unidimensional de corpos imersos [manuscrito] / Joao Marcos Almeida Ferreira. - 2019.
57 p. : il. colorido.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas , 2019.
"Orientação : Prof. Dr. Brauner Gonçalves Coutinho ,
Coordenação do Curso de Matemática - CCHE."
1. Modelagem matemática. 2. Princípio de Arquimedes. 3. Método de Euler. 4. Matemática computacional. I. Título
21. ed. CDD 530.15

JOÃO MARCOS ALMEIDA FERREIRA

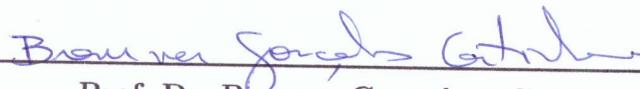
MODELAGEM E SOLUÇÃO NUMÉRICA DO MOVIMENTO
UNIDIMENSIONAL DE CORPOS IMERSOS

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

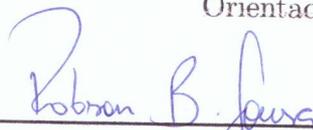
Área de concentração: Matemática aplicada

Aprovada em: 04/12/2019.

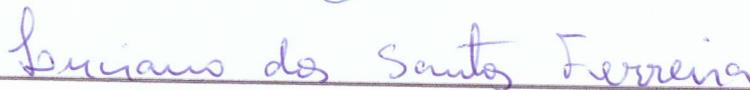
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Brauner Gonçalves Coutinho
Orientador



Prof. Me. Robson Batista de Sousa
Examinador interno (CCHE/UEPB)



Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira
Examinador interno (CCHE/UEPB)

Este trabalho é dedicado primeiramente ao meu Deus (Jeová Jiré) que mesmo eu sendo falho, acreditou que eu poderia mudar o mundo e assim, poder fazer a diferença nesta profissão tão humilde e benevolente. A minha graciosa mãe Maria do Socorro de Almeida que lutou por mim desde criança para que eu pudesse evoluir e se tornar uma pessoa melhor. Aos professores doutores, Brauner Gonçalves Coutinho e Ana Emília Victor Barbosa Coutinho por acreditarem nos meus esforços e me engajarem em seus projetos nos momentos em que eu mais precisava, sem nenhuma dúvida vocês são além de professores para mim, serão meus grandes amigos do coração. E por último, venho dedicar este trabalho a todos os amigos que não me menosprezaram, mas, acreditaram na minha capacidade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por mais uma conquista alcançada e de poder concluir o curso de Licenciatura em Matemática com maestria. Deixo meu agradecimento principal aos meus queridos e amados pais, Marcos Venícius Ferreira e Maria do Socorro de Almeida, por terem me ensinado a andar no caminho do Senhor e me ter disciplinado educativamente. E também, a minha querida tia Teresa Cristina Ferreira por ter sido tão generosa comigo durante os estudos.

Agradeço aos professores e professoras, Raquel Priscila Ibiapino, José Luiz, Jackson Cícero, José Roberto, Tiago Marques Madureira, Luciano dos Santos Ferreira, Izaias Nário, Adriana Ribeiro, Maciel Medeiros, Marília Lidiane, Robson Batista de Sousa, Brauner Gonçalves Coutinho, Ana Emília Victor Barbosa Coutinho, Luiz Lima de Oliveira Junior, Gilmará Gomes Meira, Tony Regy, Roger Ruben Huaman Huanca, Cristina Gladys, Rafael Ferreira, Lidiane Quirino e Diego Felix juntos vocês me capacitaram, me ensinaram coisas novas, abriram minha mente frente a novos conhecimentos e mostraram-me a grande importância que exerce um professor mediante a sociedade. Agradeço aos amigos e colegas que fiz durante todos estes períodos, em especial Sérgio, Jeferson e entre outros mais.

Agradeço a todos os funcionários da Universidade Estadual da Paraíba, campus VI em Monteiro no Estado da Paraíba, os quais envolvem o pessoal da direção, da limpeza, das coordenações e entre outros, juntos vocês realizam um ótimo trabalho. Agradeço também aos professores Bruno, Dalila Gomes, Marcelo Medeiros, Adeilson e entre outros, pelas contribuições transmitidas durante os eventos realizados no CCHE¹.

Agradeço aos demais professores que fizeram parte da minha formação, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, em que realizaram um ensino de forma contributiva e construtivista, pelo qual serão sempre lembrados.

Agradeço ao Professor Doutor Brauner Gonçalves Coutinho por ter aceitado fazer as respectivas orientações deste trabalho.

Agradeço a minha amada esposa, por estar me apoiando e por ser tão gentil comigo nestes dias finais da minha formação.

Agradeço de forma especial a todos aqueles que me ajudaram a caminhar durante toda esta trajetória e estiveram presentes comigo nos momentos mais difíceis, pois, para estar com você nos momentos tranquilos da sua vida surge uma multidão se fazendo de amigo, quando na verdade querem sugar o restante da sua energia, mas, só os verdadeiros persistem até o fim nas situações indelicadas e te socorrem quando você mais precisa.

¹ Centro de Ciência Humanas e Exatas

*“Mas os que esperam no Senhor renovarão as forças, subirão com asas
como águias; correrão, e não se cansarão; caminharão, e não se
fatigarão.”*

(Bíblia Sagrada, Isaías 40:31)

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo apresentar o desenvolvimento de um simulador para o movimento de corpos imersos em um fluido estático. O modelo matemático foi desenvolvido a partir da realização de um balanço das forças atuantes (peso, empuxo e arrasto) em um corpo imerso que se desloca em um fluido estático. O modelo de força de arrasto se baseou na Lei de Stokes, que deve ser aplicada para escoamentos com número de Reynolds inferiores a 1. Em seguida aplicou-se a Segunda Lei de Newton para a obtenção da Equação Diferencial Ordinária que modela o movimento. A solução foi numérica, obtida por meio do método explícito de Euler. O simulador foi implementado em linguagem *Python*. A simulação é apresentada na forma de uma animação 3D criada a partir da biblioteca *VPython* para tornar a visualização dos resultados mais intuitiva. Foram testados três casos distintos: no primeiro, o corpo permanece em equilíbrio, no segundo, o corpo flutua e no terceiro, o corpo submerge. Nos três casos a simulação deu os resultados esperados. Para verificar a precisão da solução, comparamos o valor da velocidade terminal calculada analiticamente com o valor numérico apresentado pelo simulador. O erro relativo total foi de cerca de 1,4 %, indicando boa proximidade entre os valores.

Palavras-chave: Princípio de Arquimedes. Modelagem matemática. Método de Euler.

ABSTRACT

The present work presents the development of a simulator for the movement of bodies immersed in a static fluid. The mathematical model was developed from the balance of forces on the body. The drag force was modeled by Stokes Law, which must be applied to Reynolds smaller than one. The Ordinary Differential Equation was obtained by applying Newton's Second Law and its numerical solution was given by Euler's explicit method. The simulator was implemented in Python. Simulation results are presented as a 3D animation created with the `textit` VPython library to make viewing results more intuitive. Three different cases were tested: in the first, the body remains static, in the second, the body floats, and in the third, the body submerges. In all three cases the results were as expected. To verify the accuracy of the solution, we compared the analytical value of terminal velocity with the numerical value generated by the simulator. The total relative error was about 1.4 %, indicating good proximity between the values.

Key-words: Archimedes Principle. Mathematical modeling. Euler's method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Arquimedes em seu banho.	19
Figura 2 – Medida de um dinamômetro: peso aparente.	21
Figura 3 – Uma bola tende a flutuar após ser imersa na água.	22
Figura 4 – Corpo imerso no líquido.	23
Figura 5 – Caso 1: $P = E$	24
Figura 6 – Caso 2: $P > E$	25
Figura 7 – Caso 3: $P < E$	25
Figura 8 – Método explícito de passo simples.	32
Figura 9 – Método explícito de Euler.	33
Figura 10 – Solução numérica da EDO.	34
Figura 11 – Valores solução numérica e analítica da EDO.	35
Figura 12 – Erro no método de Euler.	36
Figura 13 – Exemplo de realidade virtual.	37
Figura 14 – Vpython em glowscript.	39
Figura 15 – Código vpython.	39
Figura 16 – Forças atuantes em uma esfera.	41
Figura 17 – Fases para uma submersão.	45
Figura 18 – Cena com a modelagem 3D do reservatório com fluido e do corpo imerso.	46
Figura 19 – Código do simulador.	47
Figura 20 – Esquema mostrando a posição inicial da esfera.	48
Figura 21 – Posição da bola a $0,2\text{ m}$ de profundidade.	49
Figura 22 – Gráfico da posição do centro da esfera com o tempo para o caso 1.	50
Figura 23 – Simulação do caso 2.	51
Figura 24 – Análise gráfica do caso 2: a) posição do centro da esfera versus o tempo e b) número de Reynolds versus o tempo.	51
Figura 25 – Simulação do caso 3.	53
Figura 26 – Análise gráfica do caso 3: a) posição do centro da esfera versus o tempo e b) número de Reynolds versus o tempo.	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros dos casos simulados.	49
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
2.1	A LENDA DE ARQUIMEDES	18
2.2	A FÍSICA DOS CORPOS FLUTUANTES	20
2.2.1	Peso aparente	20
2.2.2	Propriedades dos fluidos	21
2.2.2.1	Densidade ou massa específica	21
2.2.2.2	Viscosidade	22
2.2.3	Uma análise de corpos imersos e o princípio de Arquimedes .	22
2.2.4	Movimento unidimensional	26
2.2.5	As leis de Newton do Movimento	26
2.2.5.1	Primeira Lei de Newton	26
2.2.5.2	Segunda Lei de Newton	27
2.2.5.2.1	<i>Força</i>	27
2.2.5.2.2	<i>Massa</i>	27
2.2.5.3	Terceira Lei de Newton	28
2.3	EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA	29
2.3.1	Solução via métodos numéricos	31
2.3.1.1	Métodos explícitos de passo simples	31
2.3.1.1.1	<i>O Método Explícito de Euler</i>	32
2.3.1.2	Erros em soluções via métodos numéricos	35
2.4	MODELAGEM 3D	36
2.5	VPYTHON	37
3	METODOLOGIA	40
3.1	MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL	40
3.1.1	Balanco de forças para corpos submersos	40
3.1.1.1	Força peso (\vec{P})	40
3.1.1.2	Força de empuxo (\vec{E})	41
3.1.1.3	Força de arrasto (\vec{F}_a)	42
3.1.2	Aplicação da Segunda Lei de Newton	43
3.2	SOLUÇÃO NUMÉRICA VIA MÉTODO DE EULER	44
3.2.1	Cálculo do volume submerso de uma esfera	45
3.3	MODELAGEM 3D	46
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	48
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	54

REFERÊNCIAS 55

1 INTRODUÇÃO

A partir das discussões recentes acerca de possibilidades metodológicas, a educação passou a ser pensada de forma mais crítica, buscando-se por inovações no ensino com a finalidade de mudar o conceito mecanizado ou tradicionalista de passar os conteúdos. Segundo Onuchic (1999, p.200), “[...] discussões no campo da Educação Matemática no Brasil e no mundo, mostram a necessidade de se adequar o trabalho escolar às novas tendências [...]”. A autora argumenta que, a partir do século XX no Brasil, surgiram alguns movimentos de reorientação curricular que não se sobressaíram muito bem em relação a mudança de postura do professor e na prática docente regida pelo processo mecanizado de ensino em sala de aula, movimentos estes que queriam colocar fim neste pensar mecanizado e, assim, dar maior qualidade ao ensino.

Assim, teve início algumas reflexões acerca da educação e do processo de ensino e aprendizagem do aluno além de possibilidades para envolvê-la em uma nova dinâmica. Com isso, foram discutidas alternativas para a inserção de aparatos tecnológicos, de forma específica, as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), fruto da modernização de nossa sociedade. Assim, as TIC passaram a serem vistas como forte tendência metodológica, onde o computador tornou-se um dos principais mecanismos para o ensino, possibilitando, se usado adequadamente, a construção do conhecimento pelos alunos.

A necessidade de inserir as TIC na educação provocou, inicialmente, certa resistência por parte dos professores, por acharem difícil de manusear, ter um custo elevado, ou mesmo pela falta de espaços adequados, além de outros fatores socioeconômicos. Contudo, com a ascensão tecnológica advinda do século XXI, essa realidade precisou, aos poucos, ser mudada, pois como argumenta Borba (2000, p.23) as instituições devem “ajustar e/ou eliminar práticas e regras já existentes e concentrar esforços na criação de situações novas”, para que haja progresso nos ensinamentos a partir das tecnologias informáticas. Neste sentido, cabe aos docentes adquirirem a incumbência de se responsabilizar pelo espaço de aprendizado dos alunos de acordo com os fatores que lhe são submetidos, o que na maioria das vezes pode tirá-los de uma “zona de conforto” e colocá-los em uma “zona de risco”.

De acordo com Valente (1995) o professor deve estabelecer uma alteração da sua postura; ter um olhar diferenciado para o ensino através da informática com o uso do computador; e repensar os métodos utilizados para passar o conteúdo para seus alunos, orientando-o na construção do seu próprio saber, para que posteriormente possa usar seus conhecimentos em outras atividades, a exemplo, na resolução de problemas. A utilização das tecnologias em sala de aula não implica na substituição do professor pela máquina, como se acreditava anteriormente, uma vez que o professor é o grande mediador entre o aluno e o saber, sendo o computador uma ferramenta para subsidiar esse processo. Com

isto, é necessário que o professor esteja em contínua formação, se capacitando para aprender e ensinar através das Tecnologias de Informação e Comunicação que se modernizam dia a dia em meio ao cenário atual.

Com o avanço das tecnologias informáticas, Fiolhais e Trindade (2003) argumentam que os computadores tendem a possuir cada vez mais capacidade de tratamento de dados e de representação, além passar por melhorias nas interfaces, fazendo surgir novas e oportunas formas de auxiliar na educação e concretizar outros meios de aprendizagens. Além disso, os autores ressaltam que o computador oferece grandes possibilidades para se resolver problemas concretos, decorrentes do ensino das ciências. Concomitante isso, Valente (2008) afirma que o computador pode ser usado como uma poderosa ferramenta educacional com a qual o aluno pode desenvolver algo e aprender pelo fato de estar executando uma tarefa subsidiada pelo uso do computador, a exemplo, na resolução de problemas com a representação da solução a partir de uma linguagem de programação.

As linguagens de programação podem desempenhar importante papel na educação, pelo fato de despertar os saberes cognitivos do aluno através do raciocínio lógico, fazendo-o pensar para desenvolver o seu próprio algoritmo, ou seja, uma sequência finita de passos que deve ser seguida para realização de uma tarefa ou solução de um problema específico. Um fato importante argumentado por Garlet, Bigolin e Silveira (2016, p.2) é que “no meio em que vivemos cada vez é maior a necessidade de saber programar para que não sejamos apenas consumidores de tecnologias, mas sim que saibamos produzi-las”.

A partir de uma linguagem de programação, pode-se criar, por exemplo, programas de simulação que, segundo Valente (2008), podem ser usados com fins pedagógicos. De acordo com o autor, a simulação é a criação de modelos dinâmicos que podem representar fenômenos do mundo real permitindo ao aluno desenvolver e testar hipóteses, averiguar seus resultados e delimitar conceitos. Os testes e as validações de resultados após a criação do algoritmo do simulador são importantes para que o aluno possa construir o conhecimento.

Simulações podem ser usadas em diversas áreas do conhecimento, inclusive para fins didáticos. Oliveira e Freira (2014) enfatizam que o ensino de conceitos físicos pode ser mediado através de simulações, o que aumenta o grau de interesse dos alunos para o aprendizado. Com isso, segundo os autores, ao fazer uso de simuladores ou de experimentos o aluno tem a oportunidade de manusear o que aprendeu em sala de aula, desenvolvendo com eficácia novas “competências e habilidades”.

Como os problemas físicos são modelados a partir de equações matemáticas, torna-se imprescindível estudar o problema de um ponto de vista de modelagem matemática:

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade

em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (BASSANEZI, 2002, p. 24).

Assim, a modelagem matemática faz com que os problemas físicos de uma situação real estejam conectados com a matemática por intermédio do modelo. Esta concepção é baseada nas palavras de autores como Biembengut e Hein (2002).

Para Biembengut e Hein (2002) o processo de obtenção de um modelo depende exclusivamente do conhecimento matemático que cada indivíduo possui. Se o conhecimento é restrito à “matemática elementar”, o modelo pode estabelecer limites. Quanto maior for o conhecimento matemático, maior será a possibilidade de resolver situações complexas. Entretanto, os autores ressaltam que o valor do modelo não está restrito à sofisticação matemática. Neste sentido, Fiolhais e Trindade (2003, p. 263) chamam de “modelização” a programação de um modelo e afirmam que, “ao permitir realizar ‘experiências conceituais’, a modelação/simulação está muito próxima de uma forma de aprendizagem designada por ‘descoberta’.”

Sabe-se que a matemática aplicada é mais intuitiva, pois, além de aplicar-se ao mundo real, é mais prática, dinâmica podendo gerar um maior grau de interesse pelos alunos. Além disso, o simples fato de inovar o ensino através de novas metodologias na educação, podem tornar as aulas mais participativas. Neste sentido, este trabalho se justifica pela possibilidade de desenvolver uma ferramenta digital que pode ser usada em sala de aula para um estudo interdisciplinar, envolvendo matemática aplicada e física.

O presente trabalho visa estudar o problema físico dos corpos flutuantes e, por meio da aplicação das Leis de Newton, obter a equação diferencial que modela o movimento destes corpos. Em seguida, a partir de soluções numéricas feitas a partir de um programa de computador, realizar simulações e realizar análises experimentais de corpos diversos imersos em um fluido.

Como este trabalho faz um estudo acerca dos corpos flutuantes, podemos separar seus objetivos específicos através dos seguintes pontos:

- Trazer uma breve reflexão acerca do princípio de Arquimedes e de como o problema físico de corpos flutuantes se aplica na resolução de situações do mundo real;
- Estudar o problema físico dos corpos flutuantes através da aplicação do princípio de Arquimedes e das Leis de Newton;
- Averiguar através de uma análise, as principais forças que agem no corpo que será colocado em um fluido, aplicando-as nas equações diferenciais do movimento;

- Apresentar os métodos numéricos como ferramenta de solução para modelos físicos-matemáticos mais complexos, o qual possibilita à solução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO);
- Desenvolver um programa de computador capaz de ser utilizado para simulações de problemas com corpos flutuantes;
- Estudar as Equações Diferenciais por meio de uma abordagem teórica e prática;
- Apresentar o computador como poderoso meio para a investigação científica;

Este trabalho está de acordo com a metodologia de ensino conhecida como STEM que, no inglês representa as iniciais de Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática, propõe trabalhar simultaneamente com conhecimentos dessas quatro áreas, tornando mais prática as atividades em sala de aula. Esta metodologia está sendo bastante discutida por educadores matemáticos como fundamental para o processo de ensino aprendizagem. De acordo com Caron (2017), o STEM é capaz de incentivar a interdisciplinaridade com foco na participação prática do aprendizado, podendo preparar os alunos para o mercado de trabalho.

Além disso, o presente trabalho está alinhado com as competências gerais da educação básica enumeradas pela BNCC¹, mais especificamente as seguintes que gostaríamos de destacar:

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

[...]

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018).

O trabalho está organizado em cinco capítulos. No Capítulo 2 falaremos sobre a lenda de Arquimedes, em seguida, conheceremos um pouco mais sobre a física dos corpos flutuantes, das propriedades dos fluidos e das leis de Newton do movimento. O capítulo ainda trata de equações diferenciais ordinárias, de como se dá a solução numérica e finalmente, será discutido acerca da modelagem 3D e da biblioteca *VPython*. No Capítulo 3, iremos fazer o balanço de forças e mostrar como, a partir da aplicação da Segunda Lei de Newton é possível obter o modelo matemático do problema em questão. O capítulo ainda mostra como obter a solução via método de Euler, como foi modelado o volume

¹ Base Nacional Comum Curricular

submerso da esfera, além da modelagem 3D do simulador criado no *Visual Python*. Em seguida, serão apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir do simulador. Serão tratados três casos distintos. No último capítulo são feitas as considerações finais. Logo após, encontram-se as referências que auxiliaram em todas as etapas da pesquisa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, será apresentada a famosa e curiosa lenda de Arquimedes. Em seguida será discutido acerca da física dos corpos flutuantes, através de uma análise de forças que atuam nos mesmos e das Leis de Newton do movimento, que serão importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Definiremos o que é uma Equação Diferencial Ordinária e como podem ser solucionadas por meio de métodos numéricos. Por fim, trataremos sucintamente do uso da modelagem 3D VPython usando a biblioteca VPython.

2.1 A LENDA DE ARQUIMEDES

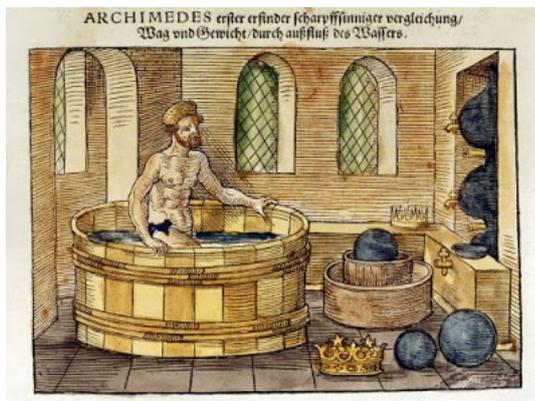
O princípio de Arquimedes nasce provavelmente através de uma situação problema, onde o rei Hieron de Siracusa fica indignado após saber por rumores que a sua coroa, a qual era para ter sido feita com ouro, possuía uma certa quantidade de prata misturada. Com isto, pediu para Arquimedes de Siracusa (282-212 a.C.) solucionar um possível caso de fraude, conforme descreve Vitruvius (1969 apud MARTINS, 2000, p. 117-118):

Quanto a Arquimedes, ele certamente fez descobertas admiráveis em muitos domínios, mas aquela que vou expor testemunha, entre muitas outras, um engenho extremo. Hieron de Siracusa, tendo chegado ao poder real, decidiu colocar em um templo, por causa de seus sucessos, uma coroa de ouro que havia prometido aos deuses imortais. Ofereceu assim um prêmio pela execução do trabalho e forneceu ao vencedor a quantidade de ouro necessária, devidamente pesada. Este, depois do tempo previsto, submeteu seu trabalho, finalmente manufaturado, à aprovação do rei e, com uma balança, fez uma prova do peso da coroa. Quando Hieron soube, através de uma denúncia, que certa quantidade de ouro havia sido retirada e substituída pelo equivalente em prata, incorporada ao objeto votivo, furioso por haver sido enganado, mas não encontrando nenhum modo de evidenciar a fraude, pediu a Arquimedes que refletisse sobre isso [...] (VITRUVIUS, 1969 apud MARTINS, 2000, p. 117-118).

De acordo com Vitruvius (1969 apud MARTINS, 2000), Arquimedes ficou com esta preocupação em mente. Por ironia do destino, o acaso fez com que ele percebesse algo no momento em que entrou em sua banheira, como ilustrado na Figura 1. Relatos contam que ele notou que escorria para fora da banheira uma quantidade de água equivalente ao volume do seu corpo. Através, dessa observação, ele teve ideia que poderia ajudar a resolver o problema proposto pelo rei Hieron, algo que deixou Arquimedes em clima de muita alegria:

[...] sem demora, ele saltou cheio de alegria para fora da banheira e completamente nu, tomou o caminho de sua casa, manifestando em voz alta para todos que havia encontrado o que procurava. Pois em

Figura 1 – Arquimedes em seu banho.



Fonte: Dantas (2010).

sua corrida ele não cessava de gritar, em grego: “Encontrei, encontrei!”. (VITRUVIUS, 1969 apud MARTINS, 2000, p. 117-118).

Ainda segundo Vitruvius (1969 apud MARTINS, 2000), Arquimedes decidiu construir dois blocos de pesos iguais ao da coroa fabricada pelo artesão, sendo um bloco de ouro e o outro bloco de prata. Experimentos feitos com os blocos e a coroa fizeram com que Arquimedes descobrisse a verdade, decretando fraude do artesão. Para chegar a este resultado, continua descrevendo Vitruvius (1969 apud MARTINS, 2000, p. 117-118):

[...] Feito isso, encheu de água até a borda um grande vaso, no qual mergulhou o bloco de prata. escoou-se uma quantidade de água igual ao volume imerso no vaso. Assim, depois de retirado o corpo, ele colocou de volta a água que faltava, medindo-a com um sextarius¹, de tal modo que o nível voltou à borda, como inicialmente. Ele encontrou assim o peso de prata correspondente a uma quantidade determinada de água. Feita essa experiência, ele mergulhou, então, da mesma forma o corpo de ouro no vaso cheio, e depois de retirá-lo fez então sua medida seguindo um método semelhante: partindo da quantidade de água necessária, que não era igual e sim menor, encontrou em que proporção o corpo de ouro era menos volumoso do que o de prata, quando tinham pesos iguais. Em seguida, depois de ter enchido o vaso e mergulhado desta vez a coroa na mesma água, descobriu que havia escoado mais água para a coroa do que para o bloco de ouro de mesmo peso, e assim, partindo do fato de que fluía mais água no caso da coroa do que no do bloco, inferiu por seu raciocínio a mistura de prata ao ouro e tornou manifesto o furto do artesão [...] (VITRUVIUS, 1969 apud MARTINS, 2000, p. 117-118).

De acordo com Roque (2012) esta história é considerada uma lenda, pelo fato de ser constituída por informações de terceiros. Mas, o que realmente nos interessa ao conhecê-la, é simplesmente o fato de como se aplica o Princípio de Arquimedes em problemas ou modelos físicos do mundo real.

¹ Antiga unidade de medida dos romanos

2.2 A FÍSICA DOS CORPOS FLUTUANTES

Segundo Nussenzveig (2018), um corpo em seu estado sólido possui volume e forma como características definidas e só se altera, possivelmente, através de forças externas. Já o líquido de acordo com o autor possui volume definido, mas, a sua forma não. Assim, quando o líquido é colocado em um recipiente, ele se amolda à forma do recipiente, mas conserva o seu volume. Já o gás não possui nem forma e nem volume bem definidos, podendo se expandir enquanto há espaço físico para isso. “Líquidos e Gases têm em comum, graças à facilidade de deformação, a propriedade de poderem se *escoar* ou *fluir* facilmente, donde o nome de fluidos” (NUSSENZVEIG, 2018, p. 11). O presente trabalho terá como objeto de estudo apenas fluidos em seu estado líquido.

2.2.1 Peso aparente

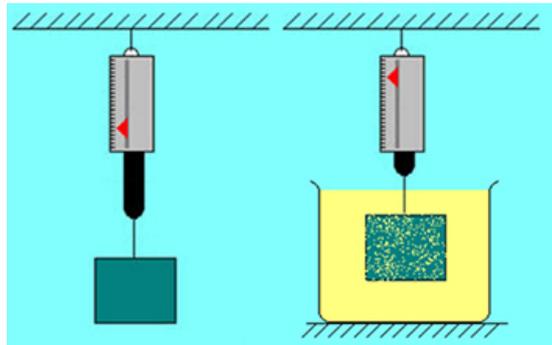
De acordo com Halliday, Resnick e Walker (2009), se pegarmos uma pedra e colocarmos ela sobre uma balança calibrada, a leitura feita pela balança expressará o peso da pedra. Ao repetir a mesma experiência, só que debaixo d’água, a força de empuxo sobre a pedra diminui a leitura da balança. Assim, a nova leitura passa a ser um peso aparente. Segundo os autores, o ***peso aparente*** de um corpo imerso em um fluido, está relacionado ao peso do corpo e à força de empuxo (que será vista com mais detalhes na Seção 2.2.3), de acordo com a seguinte equação:

$$\text{Peso aparente} = \text{Peso real} - \text{Empuxo.} \quad (2.1)$$

Os autores ressaltam que em um dado teste de força, se tivéssemos que levantar uma pedra, seria mais fácil levanta-la dentro da água, Nesta situação, a força que aplicaríamos na pedra teria que ser maior do que o peso aparente e não maior do que o peso real, pois, a força de empuxo faria com que o peso levantado fosse amortecido, como pode ser visto na Figura 2.

Considerando-se um corpo que flutua, Halliday, Resnick e Walker (2009) argumentam que o módulo da força de empuxo é igual ao peso do corpo. Essa afirmações já são bem evidentes, mas, o que nos interessa em saber é que, ao pesarmos este corpo com uma balança, a leitura feita seria nula, simplesmente pelo fato do corpo estar flutuando e a força aparente ser totalmente nula. Um exemplo básico dessa aplicação para Halliday, Resnick e Walker (2009, pg. 70) é “Quando os astronautas se preparam para realizar uma tarefa complexa no espaço, usam uma piscina para praticar, pois na água o seu peso aparente é nulo, como no espaço”.

Figura 2 – Medida de um dinamômetro: peso aparente.



Fonte: Silva (S.d.).

2.2.2 Propriedades dos fluidos

Devemos introduzir algumas propriedades importantes dos fluidos que serão úteis no decorrer deste trabalho.

2.2.2.1 Densidade ou massa específica

Conforme afirmam Halliday, Resnick e Walker (2009, p. 60) “para determinar a massa específica de um fluido em um ponto do espaço, isolamos um pequeno elemento de volume ΔV em torno do ponto e medimos a massa Δm do fluido contido nesse elemento de volume”. Assim, a massa específica é dada por:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (2.2)$$

Para os autores, em uma de suas hipóteses por teoria, a massa específica de um ponto qualquer do fluido, é descrita pelo limite dessa razão quando o elemento de volume ΔV em torno desse ponto tende a zero. Através desta hipótese, definimos densidade de um corpo ou de um fluido, geralmente representada por ρ , como sendo o quociente entre a massa do corpo m e o seu volume V :

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (2.3)$$

No S.I.², a densidade tem como unidade kg/m^3 . Nota-se que a densidade indica a quantidade de massa existente em uma unidade de volume.

² Sistema Internacional de Unidades

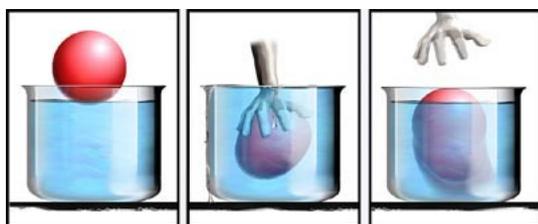
2.2.2.2 Viscosidade

Podemos observar a diferença de viscosidade entre dois fluidos quando emborcamos uma garrafa com água e outra com mel, por exemplo. O comportamento do escoamento de ambos é bastante diferente. Enquanto a água parece fluir com mais facilidade o mel leva mais tempo. Como escreve Newman (2010), “podemos pensar na viscosidade como uma medida da resistência que um líquido pode ter ao escoamento”. Nos fluidos há forças atrativas internas entre as moléculas, de modo que qualquer movimento relativo entre elas resulta em forças de atrito ou arrasto (NEWMAN, 2010). É daí que surge o conceito de viscosidade. Quanto maiores forem estas forças, mais viscoso será o fluido e mais lento será o seu escoamento. A unidade de viscosidade no S.I. é dada em kg/ms .

2.2.3 Uma análise de corpos imersos e o princípio de Arquimedes

Considere uma simples experiência. Ao tentar fazer uma bola de praia afundar ou ficar submersa em um líquido, é possível observar que, quanto mais empurra-se a bola para dentro, maior será a força de resistência contrária à força aplicada, tornando mais difícil fazer com que a bola seja submersa. Pode-se concluir que existe uma força resultante para cima, o que explica por que é tão difícil segurar a bola embaixo da água, (SERWAY; JEWETT, 2014). Uma outra situação diferente da mencionada pelos autores, seria a de conduzirmos a bola para o fundo do fluido e depois soltá-la. Observaríamos que, rapidamente, a bola subiria para a superfície, como pode ser observado na Figura 3. Este fenômeno se dá pelo fato do líquido exercer uma força vertical sobre a bola, que ocorre de baixo para cima, a qual denomina-se *empuxo*, que podemos representar por \vec{E} ou por \vec{F}_e .

Figura 3 – Uma bola tende a flutuar após ser imersa na água.

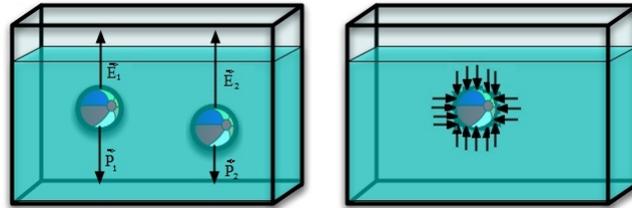


Fonte: E-física (2017).

O empuxo representa a força que o líquido exerce sobre a bola e como é diretamente proporcional à pressão, será maior onde a pressão for maior, um fato que ocorre em maiores profundidades. Logo, as forças que atuam na parte de baixo da bola e empurram a bola pra cima são maiores do que as forças que empurram a bola para baixo, como podemos

ver na Figura 4. Desde que o líquido não esteja em movimento, a soma de todas as forças presentes na bola tem direção vertical e sentido para cima.

Figura 4 – Corpo imerso no líquido.



Fonte: Adaptado de Sites (S.d.).

Serway e Jewett (2014) argumentam que, a partir do momento em que um corpo está submerso, o volume do líquido deslocado é igual ao volume real do corpo, ou seja:

$$V_{\text{líquido deslocado}} = V_{\text{real do corpo}}. \quad (2.4)$$

Nesta análise, caso o corpo esteja flutuando na superfície do líquido, somente a parte submersa terá influência no volume do líquido deslocado (SERWAY; JEWETT, 2014).

Para um corpo mergulhado em um fluido, há duas forças agindo: o peso, dado por \vec{P} , e o empuxo, expresso por \vec{E} . Contudo, a forma como essas forças se equilibram se distingue em três casos:

Caso 1: corpo em equilíbrio

No primeiro caso, imaginemos um corpo que fica em equilíbrio em qualquer posição onde seja colocado no fluido. O módulo do empuxo é igual ao peso do corpo, como mostra a Figura 5, logo:

$$P = E, \quad (2.5)$$

$$m_o g = m_f g. \quad (2.6)$$

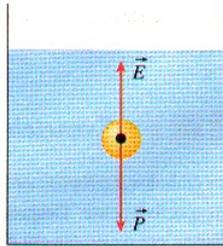
Em termos da massa específica descrita na Equação (2.3), podemos reescrever a Equação (2.6) como sendo:

$$\rho_o g V = \rho_f g V, \quad (2.7)$$

$$\rho_o = \rho_f, \quad (2.8)$$

onde, g representa a gravidade, ρ é a densidade e V é o volume do corpo e os subíndices o e f representam, respectivamente o objeto (corpo) e o fluido.

Figura 5 – Caso 1: $P = E$.



Fonte: FisicaNet (S.d.).

Caso 2: corpo submerge

No segundo caso, supomos que uma pedra é solta e afunda na água. Neste caso, o módulo P do peso que age sobre a pedra é maior que o módulo E do empuxo, o que faz com que a pedra acelere para baixo, como pode ser visto na Figura 6. Para este caso, tiramos a seguinte expressão:

$$P > E, \quad (2.9)$$

$$m_o g > m_f g. \quad (2.10)$$

De modo similar ao caso anterior, podem ser escritas:

$$\rho_o g V > \rho_f g V, \quad (2.11)$$

$$\rho_o > \rho_f. \quad (2.12)$$

Caso 3: corpo flutua

Para o terceiro caso, vamos imaginar que um pedaço de madeira é solto na água e, como o módulo P do peso que age sobre o mesmo é menor que o módulo E do empuxo, ele acelera para cima e acaba flutuando sobre a superfície, como mostra a Figura 7. A expressão que define esse caso é:

$$P < E, \quad (2.13)$$

$$m_o g < m_f g, \quad (2.14)$$

Figura 6 – Caso 2: $P > E$.

Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2009, p.69).

ou,

$$\rho_o g V < \rho_f g V, \quad (2.15)$$

$$\rho_o < \rho_f. \quad (2.16)$$

Figura 7 – Caso 3: $P < E$.

Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2009, p.69).

Foi a partir de Arquimedes de Siracusa que se descobriu o meio ou a forma de como se calcular o empuxo. O **princípio de Arquimedes**, conforme define Halliday, Resnick e Walker (2009, p.68), afirma que “Quando um corpo está total ou parcialmente submerso em um fluido, uma força de empuxo \vec{F}_E exercida pelo fluido age sobre o corpo. A força é dirigida para cima e tem um módulo igual ao peso $m_f \cdot g$ do fluido deslocado pelo corpo”.

De acordo com o princípio de Arquimedes, o módulo da força de empuxo é expresso por:

$$E = m_f g. \quad (2.17)$$

Esta equação será usada posteriormente, quando realizaremos o balanço de forças para a criação do modelo matemático a ser utilizado no presente trabalho. Também será necessário compreender e aplicar algumas das Leis de Newton do Movimento.

2.2.4 Movimento unidimensional

Toda esta seção é baseada na teoria disponível em Serway, Beichner e Jewett (2000). Ao considerar o movimento vertical y de uma partícula, a partir de uma posição inicial y_i até uma posição final y_f , estabelece-se o seguinte deslocamento:

$$\Delta y \equiv y_f - y_i. \quad (2.18)$$

A velocidade média de uma partícula durante um determinado intervalo de tempo é a razão entre o deslocamento Δy e a variação de tempo Δt , durante o qual esse deslocamento ocorreu, ou seja:

$$\bar{v}_y \equiv \frac{\Delta y}{\Delta t}. \quad (2.19)$$

A velocidade de uma partícula é tida como instantânea, quando é definida pelo limite da razão $\Delta y/\Delta t$ à medida que Δt se aproxima de zero. Matematicamente, este limite é igual a derivada de x em relação a t , ou à taxa de variação temporal da posição:

$$v_y \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}. \quad (2.20)$$

A aceleração média de uma partícula é descrita como sendo o quociente entre a mudança de sua velocidade Δv_y e o intervalo de tempo Δt durante o qual essa alteração ocorreu:

$$\bar{a}_y \equiv \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{v_{yf} - v_{yi}}{t_f - t_i}, \quad (2.21)$$

onde os índices f e i desta equação, indicam o momento final e inicial de uma partícula em movimento vertical.

De modo similar, a aceleração instantânea é igual ao limite da razão $\Delta v_y/\Delta t$ à medida que Δt tende a zero. Por definição, este limite é igual à derivada de v_y em relação a t , ou à taxa de variação temporal da velocidade:

$$a_y \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{dv_y}{dt}. \quad (2.22)$$

2.2.5 As leis de Newton do Movimento

2.2.5.1 Primeira Lei de Newton

Segundo Halliday, Resnick e Walker (1996), antes das leis da mecânica de Newton, pensava-se que, para um corpo estar em movimento, alguma influência ou força deveria

atuar sobre ele, para que seu movimento permanecesse em velocidade constante, senão o mesmo pararia.

Para definirmos a primeira lei de Newton, podemos pensar em um objeto deslizando sobre o gelo com velocidade constante, de modo que sua velocidade não aumente e nem diminua.

Observando uma situação como esta é que surge a **Primeira Lei de Newton** ou **Lei da Inércia**, a qual diz: considere um corpo sobre o qual não atue força resultante alguma. Se o corpo está em repouso, ele permanece em repouso. Se o corpo está em movimento com velocidade constante, ele permanecerá assim indefinidamente.

2.2.5.2 Segunda Lei de Newton

A **Segunda Lei de Newton** ou **princípio da dinâmica**, de acordo com Halliday, Resnick e Walker (1996, pg. 99), diz que “a força resultante que age sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela sua aceleração”. Escrevendo matematicamente, temos:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (2.23)$$

Vemos que as grandezas massa e força se relacionam por meio desta equação. Neste sentido, serão analisadas com mais detalhes cada uma delas logo a seguir:

2.2.5.2.1 Força

Para Halliday, Resnick e Walker (1996), a força pode ser definida em termos da aceleração fornecida a um corpo-padrão de referência. Utilizando o quilograma-padrão como corpo-padrão, podemos considerar um exemplo de um corpo com massa de 1 *kg* colocado sobre uma mesa na horizontal e sem atrito, o qual ao ser puxado para direita adquira eventualmente uma aceleração de 1m/s^2 . Por definição exercemos sobre este corpo uma **força** de 1*N* (ou 1 Newton).

Pode-se observar que estando um corpo submetido a uma aceleração *a*, existe uma força atuante *F* (em Newtons) sobre ele, a qual possui módulo igual ao da aceleração em m/s^2 . Além da aceleração as forças são vetores que possuem módulo, direção e sentido.

2.2.5.2.2 Massa

De acordo com Halliday, Resnick e Walker (1996), considere o lançamento de duas bolas, uma de boliche e a outra de beisebol onde, sobre cada uma delas, é aplicada uma mesma força que produz acelerações diferenciadas. Esta aceleração diferenciada é causada pela **massa** que cada uma possui. Por isso, a aceleração da bola de beisebol será maior que

a de boliche. Mas o que é massa? Podemos dizer que a massa de um corpo é a característica que relaciona a força a ele aplicada com a aceleração resultante. A única ocasião em que percebemos fisicamente a massa é quando tentamos acelerar um corpo.

Para utilizarmos a equação (2.23), devemos estar cientes de todas as forças que atuam sobre o corpo e quais as forças que atuam sobre o mesmo. Assim, a Equação (2.23) deve ser escrita como a soma vetorial ou força resultante de todas as forças que atuam sobre o corpo.

A equação vetorial Equação (2.23) é equivalente a três equações escalares, dadas por:

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y \quad e \quad \sum F_z = ma_z. \quad (2.24)$$

Essas três equações relacionam as três componentes da força resultante sobre um corpo com as três componentes da aceleração desse corpo.

Halliday, Resnick e Walker (1996) discorrem que a Primeira Lei de Newton é um caso especial da Segunda Lei, mas, isto não torna a primeira lei irrelevante, pois, se não existe força atuando sobre determinado corpo, diz-se que a aceleração é nula, ou seja, $\vec{a} = 0$.

A Segunda Lei de Newton em unidades do S.I. pode ser expressa, como exemplo, da seguinte forma: $1N = (1kg) \cdot (1 \frac{m}{s^2}) = 1 kg \cdot \frac{m}{s^2}$.

Argumentam Halliday, Resnick e Walker (1996) que, para resolvermos os problemas que englobam a segunda lei de Newton, se possível, é necessário desenhar o **diagrama de corpo livre**. Nesse diagrama, desenha-se as forças presentes no corpo e calcula-se a soma das forças, ou força resultante. Após isto, aplica-se a força resultante de acordo com a Equação (2.23).

2.2.5.3 Terceira Lei de Newton

Se um corpo A exerce uma força \mathbf{F}_{BA} sobre o corpo B; a experiência revela que o corpo B, exerce uma força \mathbf{F}_{AB} sobre o corpo A. Estas duas forças tem o mesmo módulo e sentidos contrários, tal que:

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}. \quad (2.25)$$

Contudo a equação permanece válida e não importa se os corpos estão parados ou em movimento. Isto define a **Terceira Lei de Newton** para o movimento que, segundo Halliday, Resnick e Walker (2016, p. 258), afirmam que “Quando dois corpos interagem, as forças que cada corpo exerce sobre o outro são sempre iguais em módulo e têm sentidos

opostos”, uma dessas forças é chamada **força de ação**, e a outra é chamada de **força de reação**.

2.3 EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA

De acordo com Bassanezi (2012), uma equação diferencial é composta por funções incógnitas e suas derivadas. Conclui-se que uma **equação diferencial** é classificada como **ordinária (EDO)** se a sua função incógnita depende de apenas uma variável. Portanto, uma EDO é uma equação da forma:

$$F \left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n} \right] = 0. \quad (2.26)$$

A Equação (2.26) envolve uma função incógnita $y = \frac{dy}{dx} = y(x)$ e suas derivadas denotadas por $y^{(k)}$, na qual k indica a ordem da derivada dessa função. Além disso, x é a variável independente e y é a variável dependente.

Uma EDO é dita de **primeira ordem**, quando a ordem da variável dependente y , é primeira em relação a variável independente x , ou seja, podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (2.27)$$

Solucionar uma EDO é achar a função incógnita que satisfaça a equação, como mostra o exemplo a seguir:

Exemplo: Determine a solução analítica da seguinte EDO:

$$\frac{dy}{dx}(x + 1) = y. \quad (2.28)$$

Isolando a derivada na forma $y'(x)$, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + 1}. \quad (2.29)$$

Para solucionar a EDO da Equação (2.29), iremos utilizar o método das equações separáveis, para isso devemos reescrevê-la como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \quad (2.30)$$

O motivo pelo qual estamos utilizando este método é, segundo Sodré (2003), que é possível separar as funções de forma com que cada membro da igualdade tenha apenas uma função com uma única variável. Logo, separando a Equação (2.29), temos;

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}. \quad (2.31)$$

Para obtermos a solução analítica da Equação (2.31), devemos integrá-la em ambos os lados:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}. \quad (2.32)$$

Antes de prosseguirmos com a solução da equação citada, precisamos da seguinte regra de integração:

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c. \quad (2.33)$$

Aplicando a regra de integração acima na Equação (2.32), obtemos;

$$\ln |y| + c_1 = \ln |x+1| + c_2. \quad (2.34)$$

Agora, aplicar-se-a o inverso da função logaritmo natural (\ln) que é a exponencial, da seguinte forma:

$$e^{\ln|y|+c_1} = e^{\ln|x+1|+c_2}, \quad (2.35)$$

daí, temos;

$$ye^{c_1} = (x+1)e^{c_2}, \quad (2.36)$$

ou ainda:

$$y(x) = (x+1) \frac{e^{c_2}}{e^{c_1}}. \quad (2.37)$$

Portanto a solução geral dessa EDO é expressa da forma:

$$y(x) = (x+1)e^c. \quad (2.38)$$

A constante c é conhecida como **constante de integração** e indica que existem diversas funções que satisfazem a EDO através da **solução geral**.

Para casos onde devemos determinar somente um único elemento das diversas famílias de soluções que existem em uma equação diferencial, precisamos estabelecer as condições iniciais. Especifica-se um valor para variável independente e obtêm-se o valor particular da solução geral da EDO. Pode-se representar uma EDO com sua condição inicial da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ com a condição inicial: } y(x_1) = y_1. \quad (2.39)$$

2.3.1 Solução via métodos numéricos

Segundo definem Gilat e Subramaniam (2009), entende-se por **Métodos Numéricos** um conjunto de procedimentos usados para solucionar problemas matemáticos que não podem ser resolvidos facilmente via solução analítica. Uma solução analítica é uma resposta exata de uma equação diferencial na forma de uma expressão matemática escrita em termos das variáveis do problema que está sendo resolvido. Uma solução numérica fornece um valor aproximado como solução. Um fato importante acerca das soluções numéricas é que elas, mesmo se aproximando da solução analítica, podem ser muito precisas.

De acordo com Gilat e Subramaniam (2009), a solução numérica de uma EDO do tipo mostrado na Equação (2.39) é uma técnica pela qual obtém-se uma aproximação da solução real ou analítica da equação, associando-a a um conjunto de pontos discretos que representam a função $y(x)$. Por ser um método descrito por passos, sua solução é definida através de um processo incremental. Supondo que o ponto inicial já é dado, obtém-se em sequência a solução do segundo ponto aproximado, utilizando a solução do primeiro ponto. Depois, utilizamos a solução do segundo ponto para obtermos a solução do terceiro ponto e assim por diante. Este processo será melhor compreendido através de uma abordagem de passo simples, que é o método explícito de Euler, o qual será apresentado na Seção 2.3.1.1.1.

2.3.1.1 Métodos explícitos de passo simples

Quando um método é tratado como método explícito de passo simples, como mostra a Figura 8, pode-se observar que a solução numérica (x_{i+1}, y_{i+1}) é desenvolvida por meio da solução conhecida no ponto (x_i, y_i) , fazendo uso das seguintes expressões:

$$x_{i+1} = x_i + h \quad (2.40)$$

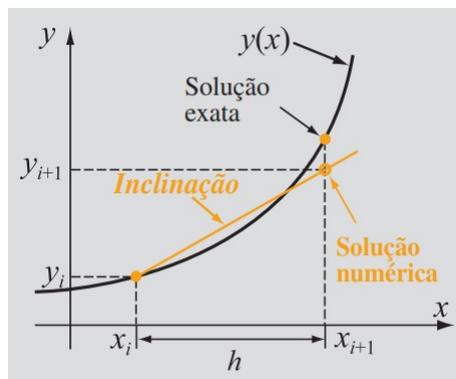
e

$$y_{i+1} = y_i + \text{inclinação } h, \quad (2.41)$$

onde o índice i indica o valor antecessor que já é conhecido no ponto, o índice $i + 1$ representa o valor posterior, h é a largura do passo de integração e a inclinação, é uma

constante que estipula a aproximação do valor de $\frac{dy}{dx}$ no intervalo de x_i a x_{i+1} (GILAT; SUBRAMANIAM, 2009).

Figura 8 – Método explícito de passo simples.



Fonte: Gilat e Subramaniam (2009, p.331).

Para solucionar uma EDO via método explícito de passo simples, iniciamos pelo ponto onde o primeiro valor já é de conhecimento e que por sua vez, é equivalente a primeira iteração $i = 1$ no ponto (x_1, y_1) . Em sequência, o índice i que é posterior ao antigo alterna-se para $i = 2$, e a solução no ponto seguinte, (x_2, y_2) , é calculada através das Equações (2.40) e (2.41). Esse processo continua de forma análoga ao índice anterior, com $i = 3$, $i = 4$, e, assim sucessivamente, até que os pontos satisfaçam todo o domínio da solução.

Os autores afirmam que muitos são os métodos explícitos de passo simples que fazem uso das Equações (2.40) e (2.41). A única diferença entre os métodos está no valor utilizado para constante de Inclinação que se faz presente na Equação (2.41).

2.3.1.1.1 O Método Explícito de Euler

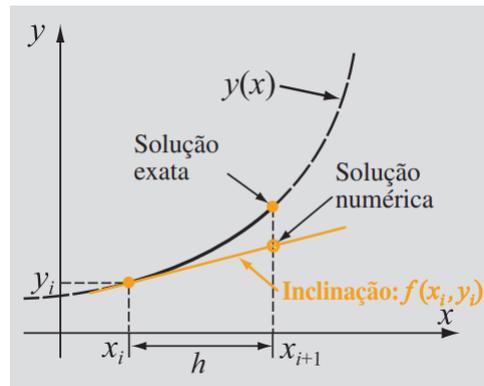
De acordo com Gilat e Subramaniam (2009) o Método de Euler é o meio ou forma procedimental mais simples de resolver uma EDO de primeira ordem na forma da Equação (2.39). O método de Euler pode ser usado de forma explícita ou implícita. Neste trabalho, vamos abordar somente o método de Euler na sua forma explícita.

Segundo (GILAT; SUBRAMANIAM, 2009) o método explícito de Euler, conhecido também como método de Euler progressivo, é um procedimento numérico de passo simples utilizado para solucionar EDOs de primeira ordem no formato da Equação (2.27). Esse método faz uso das Equações (2.40) e (2.41), onde a constante de inclinação da Equação (2.41) é a inclinação de $y(x)$ no ponto (x_i, y_i) , como podemos observar na Figura

9. Calcula-se essa inclinação através da seguinte equação diferencial:

$$\text{Inclinação} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} = f(x_i, y_i). \quad (2.42)$$

Figura 9 – Método explícito de Euler.



Fonte: Gilat e Subramaniam (2009, p.332).

Os autores ressaltam que o método de Euler apropria-se que, a partir de uma pequena distância h que se refere ao tamanho de passo na vizinhança de (x_i, y_i) , a função $y(x)$ possui inclinação constante e igual a inclinação do ponto (x_i, y_i) . De acordo com esta hipótese, o ponto posterior da solução numérica (x_{i+1}, y_{i+1}) é calculado pelas expressões:

$$x_{i+1} = x_i + h \quad (2.43)$$

e

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h. \quad (2.44)$$

Para melhor compreendermos o método explícito de Euler, iremos aplicá-lo para resolver a EDO $\frac{dy}{dx} = -1, 2y + 7e^{-0,3x}$ de $x = 0$ a $x = 2,5$ com a condição inicial $y = 3$ em $x = 0$ e tamanho de passo $h = 0,5$.

Solução manual: O primeiro ponto da solução é $(0, 3)$, que corresponde à condição inicial. No primeiro ponto, $i = 1$. Os valores de x e y são $x_1 = 0$ e $y_1 = 3$. O restante da solução é determinado usando as Equações (2.43) e (2.44). Neste problema, essas equações têm a forma:

$$x_{i+1} = x_i + h = x_i + 0,5, \quad (2.45)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h = y_i + (-1, 2y_i + 7e^{-0,3x_i}) 0,5. \quad (2.46)$$

As Equações (2.45) e (2.46) são aplicadas cinco vezes, com $i = 1, 2, 3, 4$, e 5 .

Primeiro passo: No primeiro passo, $i = 1$. As Equações (2.45) e (2.46) fornecem:

$$x_2 = x_1 + 0,5 = 0 + 0,5 = 0,5,$$

$$y_2 = y_1 + (-1, 2y_1 + 7e^{-0,3x_1}) 0,5 = 3 + (-1, 2 \cdot 3 + 7e^{-0,3 \cdot 0}) 0,5 = 4,7.$$

O segundo ponto é $(0,5; 4,7)$.

Segundo passo: No segundo passo, $i = 2$. As Equações (2.45) e (2.46) fornecem:

$$x_3 = x_2 + 0,5 = 0,5 + 0,5 = 1,0,$$

$$y_3 = y_2 + (-1, 2y_2 + 7e^{-0,3x_2}) 0,5 = 4,7 + (-1, 2 \cdot 4,7 + 7e^{-0,3 \cdot 0,5}) 0,5 = 4,893.$$

O terceiro ponto é $(1,0; 4,893)$.

Terceiro passo: No terceiro passo, $i = 3$. As Equações (2.45) e (2.46) fornecem:

$$x_4 = x_3 + 0,5 = 1,0 + 0,5 = 1,5,$$

$$y_4 = y_3 + (-1, 2y_3 + 7e^{-0,3x_3}) 0,5 = 4,893 + (-1, 2 \cdot 4,893 + 7e^{-0,3 \cdot 1,0}) 0,5 = 4,550.$$

O quarto ponto é $(1,5; 4,550)$.

Quarto passo: No quarto passo, $i = 4$. As Equações (2.45) e (2.46) fornecem:

$$x_5 = x_4 + 0,5 = 1,5 + 0,5 = 2,0,$$

$$y_5 = y_4 + (-1, 2y_4 + 7e^{-0,3x_4}) 0,5 = 4,550 + (-1, 2 \cdot 4,550 + 7e^{-0,3 \cdot 1,5}) 0,5 = 4,052.$$

O quinto ponto é $(2,0; 4,052)$.

Quinto passo: No quinto passo, $i = 5$. As Equações (2.45) e (2.46) fornecem:

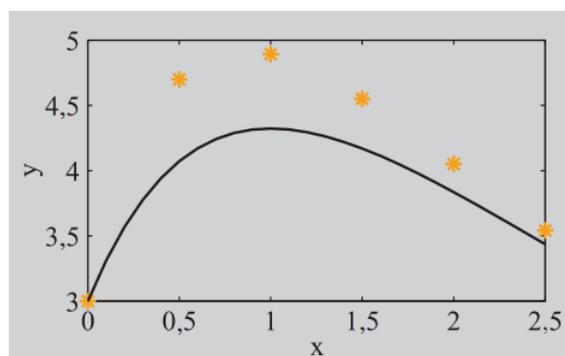
$$x_6 = x_5 + 0,5 = 2,0 + 0,5 = 2,5,$$

$$y_6 = y_5 + (-1, 2y_5 + 7e^{-0,3x_5}) 0,5 = 4,052 + (-1, 2 \cdot 4,052 + 7e^{-0,3 \cdot 2,0}) 0,5 = 3,542.$$

O sexto ponto é $(2,5; 3,542)$.

A Figura 10 mostra a solução numérica da EDO marcada em pontos e a solução analítica em uma linha contínua.

Figura 10 – Solução numérica da EDO.



Fonte: Gilat e Subramaniam (2009, p.335).

Ainda, é possível observar na Figura 11, os valores das soluções numérica e analítica, e o erro que é a diferença entre as duas.

Figura 11 – Valores solução numérica e analítica da EDO.

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
y_i (numérica)	3,0	4,70	4,893	4,55	4,052	3,542
y_i (exata)	3,0	4,072	4,323	4,170	3,835	3,436
Erro	0,0	-0,6277	-0,5696	0,3803	-0,2165	-0,1054

Fonte: Gilat e Subramaniam (2009, p.335).

2.3.1.2 Erros em soluções via métodos numéricos

De acordo com Chapra e Canale (2011), erros são produzidos quando são usadas aproximações para representar operações e quantidades matemáticas exatas. Neles incluem-se os erros de truncamento e os erros de arredondamento.

Ainda conforme escrevem Chapra e Canale (2011), os erros de arredondamento ocorrem devido ao fato dos computadores armazenarem apenas um número fixo de algarismos significativos durante os cálculos. Alguns valores numéricos, como π e $\sqrt{7}$, por exemplo, não podem ser representados por um número fixo de algarismos significativos. Logo, estes valores não podem ser representados de forma exata por um computador. Além do mais, computadores usam uma representação na base 2 e não podem expressar precisamente certos números exatos na base 10. Portanto, os autores definem a discrepância introduzida por essa omissão de algarismos significativos como sendo um erro de arredondamento.

Já os erros de truncamento são intrínsecos aos métodos numéricos, uma vez que os mesmos, representam formulações matemáticas exatas por meio de aproximações. De acordo com Gilat e Subramaniam (2009, p. 33) “o erro de truncamento é dependente do método numérico específico ou do algoritmo usado na solução do problema”. Ainda pode-se ressaltar que o erro de truncamento não depende do erro de arredondamento, pois sua existência ocorre mesmo quando as operações matemáticas são exatas. Juntos, os erros de truncamento e arredondamento resultam no erro numérico total da solução numérica (GILAT; SUBRAMANIAM, 2009).

O erro total ou erro real, é expresso pela diferença entre a solução verdadeira (exata) e a solução numérica, como pode ser vista na Figura 12. Com isto, tem-se que:

$$\text{Erro Real} = \text{Solução Exata} - \text{Solução Numérica}. \quad (2.47)$$

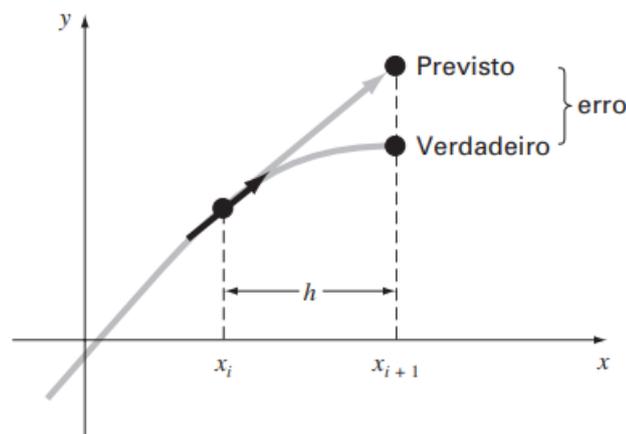
O erro relativo real, é calculado pelo valor absoluto da razão entre o erro real e a solução exata:

$$\text{Erro Relativo Real} = \left| \frac{\text{Solução Exata} - \text{Solução Numérica}}{\text{Solução Exata}} \right|. \quad (2.48)$$

Gilat e Subramaniam (2009) descrevem que além de ser uma grandeza adimensional e independente de escalas, nela indica-se o tamanho do erro em relação a solução exata.

O único impedimento que existe ao utilizarmos o erro real e o erro relativo total visto nas Equações (2.47) e (2.48), é quando eles não podem ser de fato determinados em problemas que requerem o uso de soluções via métodos numéricos, pelo fato da solução exata não ser conhecida.

Figura 12 – Erro no método de Euler.



Fonte: Chapra e Canale (2011, p.588).

2.4 MODELAGEM 3D

A modelagem 3D é uma forma eficiente de fazer com que o aluno compreenda aspectos tridimensionais de determinados modelos, seja na Física, na Química, na Matemática e em outras áreas do conhecimento. Para Fiolhais e Trindade (2003 apud HARRISON; JAQUES, 1996, pg. 267) a realidade virtual é vista como “o conjunto de tecnologias que permitem fornecer ao homem a mais convincente ilusão possível de que este está noutra realidade; essa realidade (ambiente virtual) apenas existe no formato digital na memória de um computador”. Um exemplo de realidade virtual pode ser vista pela Figura 13.

Este tipo de ambiente é bastante interativo e auxiliador, pois, a medida que o aluno interage com o computador, constrói-se com maior possibilidade, o desenvolvimento de

aprendizagem do mesmo, o que também pode fazê-lo compreender melhor, determinados conteúdos. Além disso, este tipo de ambiente possui um conjunto de características que tornam-a imprescindível, e são estas:

A realidade virtual é uma poderosa ferramenta de visualização para estudar situações tridimensionais complexas.

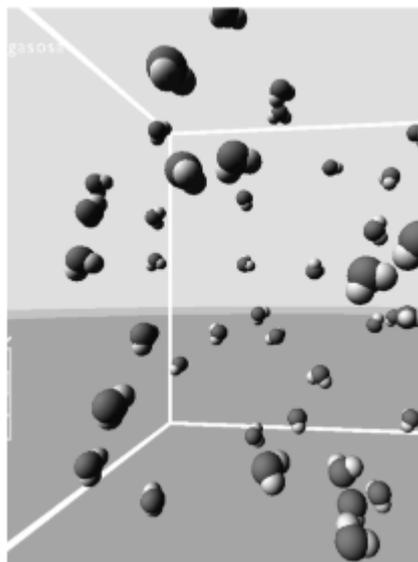
- O aluno é livre para interagir diretamente com os objetos virtuais, realizando experiências na primeira pessoa.
- Os ambientes virtuais permitem situações de aprendizagem por tentativa e erro que podem encorajar os alunos a explorar uma larga escolha de possibilidades.
- O ambiente virtual pode oferecer *feedbacks* adequados, permitindo aos alunos centrar a sua atenção em problemas específicos.
- Um sistema de realidade virtual pode adquirir e mostrar graficamente dados em tempo real. (FIOLHAIS; TRINDADE, 2003 apud HARRISON; JAQUES, 1996, pg. 268)

2.5 VPYTHON

Uma ferramenta gratuita e multiplataforma que pode ser usada com bastante facilidade para o desenvolvimento de simulações envolvendo animações em 3D é a biblioteca *VPython* ou *Visual Python*.

O *VPython* torna incomumente fácil escrever programas que geram animações 3D em tempo real navegáveis. Baseia-se na linguagem de programação Python, que é amplamente utilizada em cursos introdutórios

Figura 13 – Exemplo de realidade virtual.



Fonte: Fiolhais e Trindade (2003, p.268).

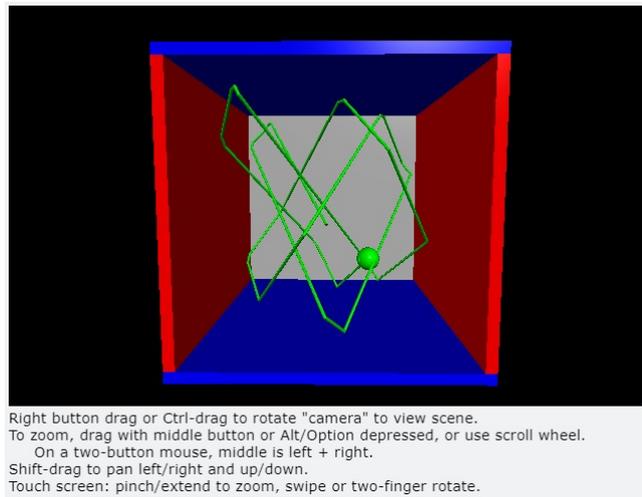
de programação, graças ao seu design limpo, e também é amplamente usada em ciência e negócios (CHABAY; SCHERER; SHERWOOD, S.d.).

Para utilizar os recursos do *Visual Python* é necessário saber programar? A resposta é não, pois, um exemplo que podemos dar é a própria plataforma *GlowScript* que disponibiliza diversos exemplos de programas desenvolvidos em *VPython*. É possível utilizar os códigos já implementados e interagir com o ambiente, como podemos ver na Figura 14. Mas, se o usuário pretende realizar mudanças no código e fazer algo diferente dentro ou fora da plataforma, é de fundamental importância possuir conhecimentos prévios de programação. Na Figura 15 podemos observar um exemplo de um código *VPython* e a cena com a modelagem 3D obtida a partir dele.

Saber programar nos torna aptos a conhecer melhor as novas tecnologias, ficar mais íntimos. Além disso, aprendendo uma linguagem de programação, nos tornarmos independentes dos softwares e programas que estão no mercado, além de fortalecermos a nossa competitividade internacional.

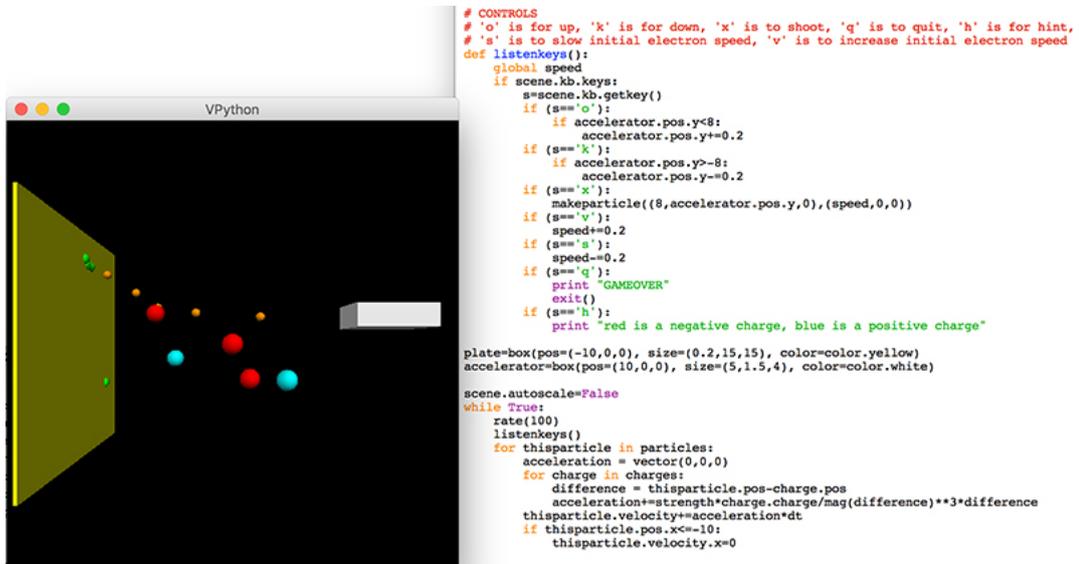
Em 1999, a Academia Nacional de Ciências, em seu relatório “Ser fluente com a tecnologia da informação”, defendia que todos os estudantes universitários deveriam aprender a programar. O conhecimento rudimentar de codificação para todos os alunos foi apontado como prioridade nacional no recente discurso sobre o Estado da União, pois fortalece a competitividade internacional do país em uma era da informação (KORTEMAYER, S.d.).

Figura 14 – Vpython em glowscript.



Fonte: Chabay, Scherer e Sherwood (S.d.).

Figura 15 – Código vpython.



Fonte: Kortemeyer (S.d.).

3 METODOLOGIA

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

O primeiro passo para obter o modelo matemático relacionado ao problema físico em questão é analisar as forças que atuam sobre o corpo. Em seguida devemos fazer uso da Segunda Lei de Newton. Antes disso, serão feitas algumas considerações a respeito das simplificações do modelo matemático com o qual visamos trabalhar:

1. O corpo só se move na direção vertical, logo não há nenhuma componente horizontal envolvida;
2. O corpo não sofre rotação;
3. Perturbações na superfície do fluido não são consideradas;
4. O fluido é estático e incompressível.

3.1.1 Balanço de forças para corpos submersos

A Figura 16 mostra o balanço de forças atuando em um corpo submerso que será considerado no presente trabalho para duas situações: o corpo subindo e descendo. Para cada situação o balanço de forças é mostrado a seguir.

Corpo descendo:

$$\sum F_y = E - P + F_a. \quad (3.1)$$

Corpo subindo:

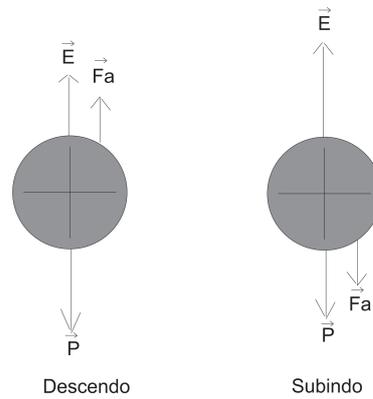
$$\sum F_y = E - P - F_a, \quad (3.2)$$

onde (E) é o módulo do empuxo, (P) é o módulo da força peso e (F_a) é o módulo da força de Arrasto. Estas forças são definidas sucintamente na Seção 3.1.1.1.

3.1.1.1 Força peso (\vec{P})

A força peso é a força com a qual os astros atraem os corpos. Se analisarmos, no momento em que soltamos um corpo nas proximidades do solo, a velocidade sofre uma variação e o corpo é atraído em direção ao centro da terra. Esta variação da velocidade é o que chamamos de aceleração da gravidade. No nosso problema, a aceleração da gravidade

Figura 16 – Forças atuantes em uma esfera.



Fonte: construção nossa.

será considerada constante pois estamos tratando de variações de altitudes muito pequenas, quase desprezíveis. O módulo do peso do objeto é proporcional à massa do corpo e a ao módulo da gravidade, isto é:

$$P = mg, \quad (3.3)$$

onde (m) é a massa e (g) é o módulo da aceleração da gravidade que pode ser estabelecido como sendo aproximadamente $9,81 \text{ m/s}^2$.

3.1.1.2 Força de empuxo (\vec{E})

Fazendo menção ao que já foi descrito no capítulo anterior, quando tratamos do princípio de Arquimedes, podemos representar matematicamente a força de empuxo como sendo:

$$E = P_f, \quad (3.4)$$

onde E é o módulo do empuxo e P_f é o peso do fluido deslocado. Combinando esta equação com a Equação (3.3), podemos obter:

$$E = m_f g. \quad (3.5)$$

Pode-se encontrar, a partir da Equação (2.3), uma expressão para massa do fluido deslocado em termos da sua densidade e do volume submerso (V_s) do corpo:

$$m_f = \rho_f V_s. \quad (3.6)$$

Substituindo a Equação (3.6) na Equação (3.5), obtém-se finalmente:

$$E = \rho_f V_s g. \quad (3.7)$$

3.1.1.3 Força de arrasto (\vec{F}_a)

Quando um corpo se desloca em um fluido, existe uma força chamada de arrasto (\vec{F}_a) ou força retardadora que se opõe ao movimento. A mesma é responsável por reduzir a velocidade dos objetos, uma vez que é exercida no sentido contrário ao sentido do movimento.

A equação que descreve a força de arrasto depende de inúmeros fatores, como a viscosidade do fluido, a velocidade de deslocamento, as dimensões do objeto, e outras propriedades dos fluidos. Segundo Kroetz (2013), quando a velocidade é pequena e/ou viscosidade é muito alta, podemos calcular a força de arrasto da seguinte forma:

$$F_a(v) = b'v, \quad (3.8)$$

onde b' é o coeficiente de arrasto linear e v é a velocidade da partícula.

Para o caso de uma esfera, o coeficiente de arrasto linear é dado por:

$$b' = 6\eta_f \pi r. \quad (3.9)$$

Combinando as Equações (3.8) e (3.9), tem-se:

$$F_a(v) = 6\eta_f \pi r v, \quad (3.10)$$

onde η_f é a viscosidade dinâmica do fluido e r é o raio da esfera.

A Equação (3.10) é conhecida como a Lei de Stokes e dá resultados mais precisos para escoamentos com números de Reynolds baixos, da ordem de $Re < 1$ (FULFORD et al., 1997). O número de Reynolds é uma grandeza adimensional que relaciona algumas propriedades do fluido e do objeto. Para o caso da esfera, é calculado como:

$$Re = \frac{2\rho r v}{\eta}, \quad (3.11)$$

onde r é o raio da esfera, v é a velocidade e ρ_f e η são, respectivamente, a densidade e a viscosidade do fluido.

3.1.2 Aplicação da Segunda Lei de Newton

Aqui vamos considerar a situação em que o corpo se desloca para cima. Ao aplicarmos a segunda lei de Newton, temos por primícia que a soma das forças presentes na esfera imersa, será proporcional ao produto da massa da esfera pela sua aceleração na direção vertical (y), assim, tem-se:

$$\sum F_y = m_o a_y. \quad (3.12)$$

Fazendo a comutação da Equação (3.2) na Equação (3.12), ficamos com a seguinte expressão:

$$E - P - F_a = m_o a_y. \quad (3.13)$$

Substituindo as Equações (3.3), (3.7), (3.10) e (2.22) na Equação (3.13), obtém-se:

$$\rho_f g V_s - m_o g - 6\pi r \eta_f v = m_o \frac{dv_y}{dt}. \quad (3.14)$$

A partir de uma análise dimensional, pode-se averiguar a coerência nas unidades de todas as grandezas presentes na Equação (3.14). Reescrevendo cada termo na forma de sua unidade correspondente apresentada pelo Sistema Internacional de Unidades (SI), tem-se:

$$\frac{kg}{m^3} \frac{m}{s^2} m^3 - kg \frac{m}{s^2} - m \frac{kg}{ms} \frac{m}{s} = kg \frac{m}{s^2}, \quad (3.15)$$

reorganizando, pode-se escrever:

$$kg \frac{m}{s^2} - kg \frac{m}{s^2} - kg \frac{m}{s^2} = kg \frac{m}{s^2}, \quad (3.16)$$

ou ainda:

$$N - N - N = N. \quad (3.17)$$

Portanto, podemos observar que todos os termos da Equação (3.14), representando as forças de arrasto, empuxo e peso, possuem unidades compatíveis que podem ser reduzidas à unidade de força (Newton).

Por meio da Equação (3.14), iremos isolar a derivada da velocidade, obtendo:

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\rho_f g V_s - m_o g - 6\pi r \eta_f v}{m_o}. \quad (3.18)$$

Se analisarmos a Equação (3.18), podemos ver uma EDO de primeira ordem, onde v é a variável que depende do tempo e t é a variável independente, como descrito na Seção 2.3. Uma outra informação pertinente a equação diferencial, é que as componentes massa, densidade e as demais, não dependem do tempo, pois, são constantes, diferentemente da velocidade e do volume submerso que estão em função do tempo.

3.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA VIA MÉTODO DE EULER

Conforme argumentam Serway, Beichner e Jewett (2000), para resolver equações diferenciais utilizando o método de Euler, as aproximações das derivadas são realizadas como razões de diferenças finitas. Assim, considera-se um pequeno incremento de tempo Δt , no qual podemos aproximar a relação entre a variação de velocidade de uma partícula e a magnitude de sua aceleração como:

$$a(t) \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \quad (3.19)$$

Assim, a velocidade $v(t + \Delta t)$ da partícula no final do intervalo de tempo Δt pode ser calculada de modo aproximado por meio da seguinte expressão:

$$v(t + \Delta t) \approx v(t) + a(t)\Delta t. \quad (3.20)$$

Como a aceleração é uma função do tempo, a estimativa de $v(t + \Delta t)$ só é precisa se o intervalo de tempo Δt for suficientemente curto, de tal modo que a variação da aceleração seja relativamente pequena. A Equação (3.20) é exata se a aceleração for constante.

Ainda de acordo com Serway, Beichner e Jewett (2000), a posição $y(t + \Delta t)$ da partícula no final do intervalo Δt pode ser calculada de modo similar:

$$v(t) \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \quad (3.21)$$

e

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + v(t)\Delta t. \quad (3.22)$$

Se a aceleração em qualquer instante t é conhecida, a velocidade e a posição da partícula no instante $t + \Delta t$ pode ser calculada a partir das Equações (3.20) e (3.22). O cálculo é desenvolvido sucessivamente em uma quantidade finita de passos, permitindo determinar a velocidade e a posição qualquer tempo posterior (SERWAY; BEICHNER; JEWETT, 2000).

Como o primeiro membro da Equação (3.18) é por definição a aceleração, então utilizando a Equação (3.19), é possível obter a equação aproximada via método de Euler:

$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{\rho_f g V_s - m_o g - 6\pi r \eta_f v}{m_o}, \quad (3.23)$$

por sua vez, reorganizando os termos, podemos obter:

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \left[\frac{\rho_f g V_s}{m_o} - g - \frac{6\pi r \eta_f v}{m_o} \right] \Delta t. \quad (3.24)$$

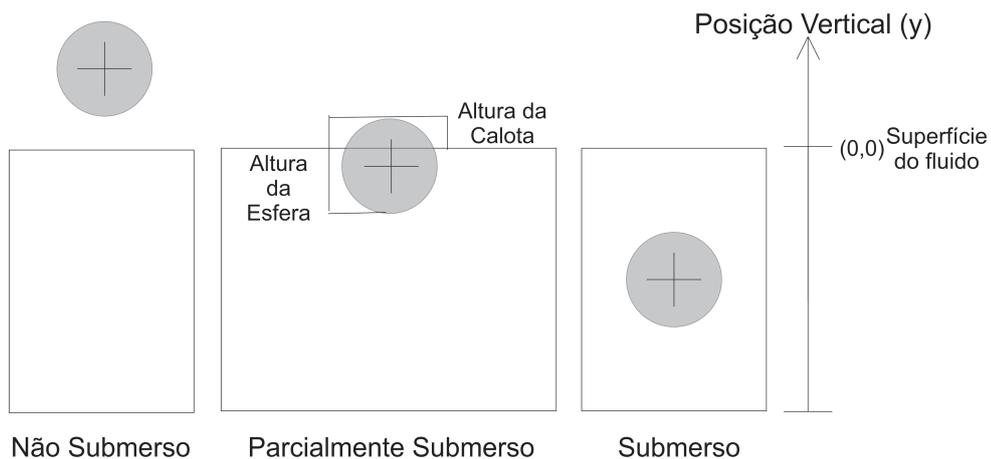
A solução da Equação (3.24) fornece a velocidade no instante mais atual e, a partir dela, e da Equação (3.22), pode-se calcular a posição do objeto no mesmo instante de tempo.

3.2.1 Cálculo do volume submerso de uma esfera

Como pode-se observar na Equação (3.7), além da aceleração gravitacional e da densidade do fluido a força do empuxo depende do volume submerso da esfera. Vale salientar, que o volume submerso é o volume da esfera que se encontra efetivamente de dentro do fluido, que também é igual ao volume do fluido deslocado.

Para entender como foi feita a modelagem matemática para o cálculo do volume submerso, considere as três situações distintas que estão ilustradas na Figura 17: esfera não submersa, parcialmente submersa e completamente submersa.

Figura 17 – Fases para uma submersão.



Fonte: construção nossa.

Na primeira situação, quando uma esfera está completamente fora do fluido, é fácil notar que o volume submerso é nulo. Neste caso, a esfera não desloca nenhum volume de fluido pois não está em contato com ela.

Na terceira situação, quando a esfera está completamente imersa no fluido, o volume deslocado é o próprio volume da esfera, que é dado por:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3. \quad (3.25)$$

Na situação em que a esfera se encontra parcialmente submersa, o volume submerso da esfera é calculado tomando-se como base o volume da calota da esfera que fica de fora da água. Em termos matemáticos, a calota é expressa pela fórmula:

$$V_{calota-esférica} = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h), \quad (3.26)$$

onde h é a altura da calota e r é o seu raio.

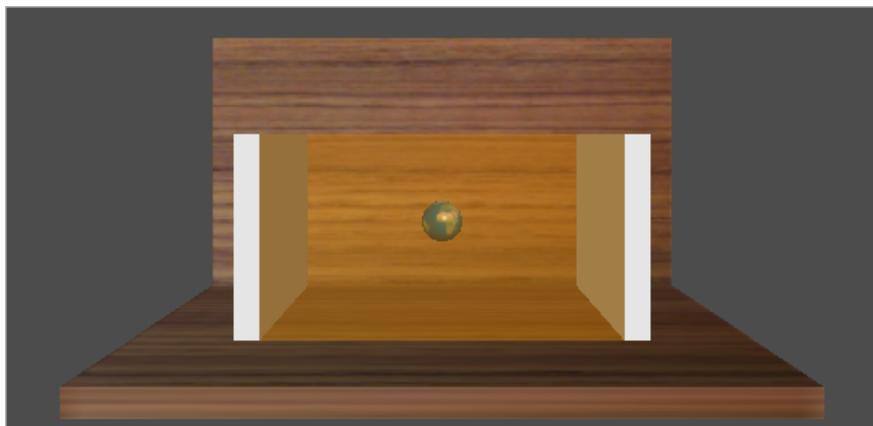
Assim, conforme se observa na Figura 17, sempre que a esfera estiver parcialmente dentro do fluido, o volume submerso pode ser calculado subtraindo-se o volume da calota externa ao fluido do volume total da esfera:

$$V_{submerso} = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h). \quad (3.27)$$

3.3 MODELAGEM 3D

Para a modelagem em 3D do problema estudado no *VPython*, foi criada a cena mostrada na Figura 18. A cena procura representar um reservatório com um fluido e um corpo imerso nele que deverá ser movimentar de acordo com o balanço de forças e a Segunda Lei de Newton.

Figura 18 – Cena com a modelagem 3D do reservatório com fluido e do corpo imerso.



Fonte: construção nossa.

Na Figura 19 podemos observar uma parte do código que cria efetivamente a cena descrita logo acima. Entre os recursos utilizados estão: textura, objetos do tipo caixa e esfera com atributos de cor, opacidade, posição, dimensão, entre outros. As linhas aparecem numeradas de 1 a 13. A linha 1 define a cor cinza para o plano de fundo. Na linha 2, para dar a ideia de um fluido na cor laranja, criamos um *box* especificando algumas variáveis, tais como: comprimento, largura, altura, posição, etc. O atributo opacidade é usado para deixar o objeto transparente, fazendo assim com que a esfera - criada na linha 4 - seja visível dentro e assim, também dar a impressão de que o fluido no recipiente se trata do mel. Respectivamente, as linhas 6 e 8 são usadas para criar as paredes laterais brancas e dar a ideia de que o fluido está dentro de um recipiente. Já as linhas 10 e 12, criam caixas com textura de madeira para dar ideia da base e do fundo do recipiente. A textura é especificada com o atributo *texture*. Para criar a esfera na linha 4 usa-se um objeto do tipo *sphere* que tem um atributo chamado *radius* que especifica o raio da mesma.

Figura 19 – Código do simulador.

```
1 scene.background = color.gray(0.3)
2 caixa_fluido = box(size = vector(.7, .4, .4), color = color.orange, opacity = 0.4,
3   pos=vector(.0,-0.2,.0) )
4 esfera = sphere(pos = vector(.0, -.2, .0), radius=raio_calculado,texture = textures.stucco)
5
6 lado_direito = box(size = vector(0.05, caixa_fluido.size.y, caixa_fluido.size.z),
7   cor = color.white, pos = vector(0.375, -0.2, 0) )
8 lado_esquerdo = box(size = vector(0.05, caixa_fluido.size.y, caixa_fluido.size.z),
9   cor = color.white, pos = vector(-0.375, -0.2, 0) )
10 fundo_caixa = box(size = vector(1.2, 0.05, .6), texture = textures.wood,
11   pos=vector(0,-0.425,.1))
12 caixa_traseira = box(size = vector(1.2, .7, 0.05), texture = textures.wood,
13   pos=vector(0,-0.1,-0.225))
```

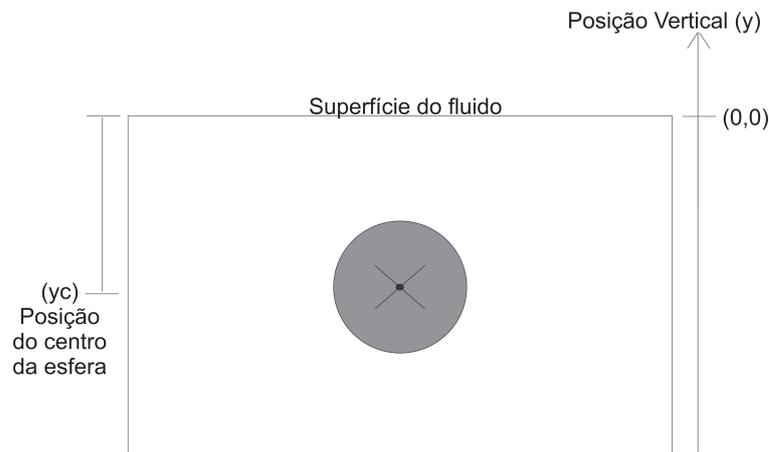
Fonte: construção nossa.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para verificar a coerência dos resultados do simulador, buscamos reproduzir os três tipos de casos que estão descritos na Seção 2.2.3. Espera-se que, no primeiro caso, o simulador deve prever que a esfera permanece em equilíbrio, ou seja, estática no fluido, pois o módulo da força de empuxo é igual ao módulo da força peso. Para o segundo caso, a esfera deve submergir uma vez que o módulo da força peso é maior que o módulo da força empuxo. Já no terceiro e último caso, a esfera deve emergir uma vez que o módulo da força peso é menor do que o módulo da força empuxo.

Na Tabela 1 verifica-se os parâmetros físicos das três simulações. Em todos os casos, a posição vertical do centro da esfera no início da simulação é de $-0,2\text{ m}$ em relação à superfície do fluido, ou seja, a bola é solta, a partir do repouso ($V_y = 0\text{ m/s}$), de uma profundidade de $0,2\text{ m}$, conforme ilustra o esquema da Figura 20. Também para todos os casos o fluido utilizado tem as mesmas propriedades do mel, cuja densidade é 1390 kg/m^3 e a viscosidade é igual a $1,760\text{ kg/ms}$, de acordo com Baglio (2017) e Innocall (S.d). O passo de tempo utilizado foi de $\Delta t = 0,001\text{ s}$, que gerou resultados satisfatórios sem levar muito tempo de processamento.

Figura 20 – Esquema mostrando a posição inicial da esfera.



Fonte: construção nossa.

O cálculo do raio da esfera para o caso 1, exigiu um cuidado especial para que a condição de equilíbrio fosse obedecida. Partindo da Equação (2.8) e realizando algumas manipulações algébricas, chegamos a:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3m_o}{4\rho_f\pi}}, \quad (4.1)$$

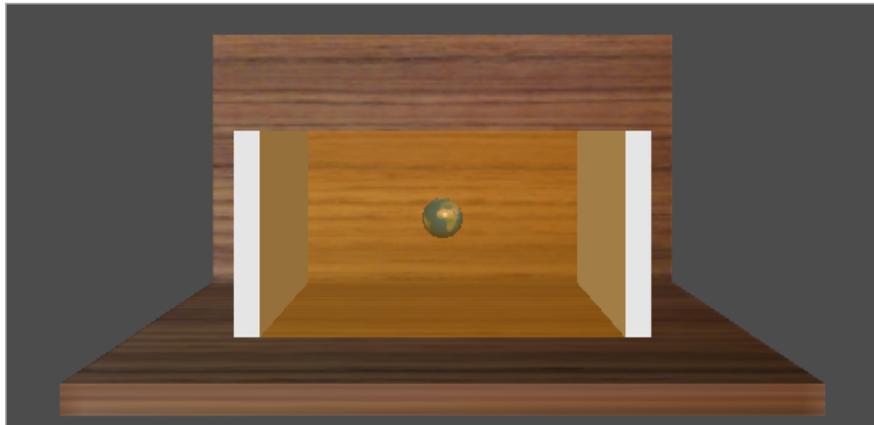
onde m_o é a massa do objeto e ρ_f é a densidade do fluido. Como a densidade do fluido é de aproximadamente 1390 kg/m^3 , foi usado um valor para a massa da esfera igual a $0,4 \text{ kg}$ e o valor $\pi = 3,141592653589793$ dado pela biblioteca *math* do *Python*, o que resultou em um raio de $0,0409561250731 \text{ m}$. O número de casas decimais aqui é importante pois qualquer arredondamento que testamos no sentido de remover somente duas casas decimais, por exemplo, já resultou na imersão da esfera até o fundo do reservatório. Para os casos 2 e 3, o raio da esfera foi mantido o mesmo do caso 1 e a massa alterada para $m = (0,4 \pm 0,0015) \text{ kg}$. Essa variação pequena na massa visou fazer com que não houvesse uma discrepância tão grande no equilíbrio de forças, mantendo baixas as velocidades e, por consequência, o número de $Re < 1$.

Tabela 1 – Parâmetros dos casos simulados.

Caso	Condição	Massa (kg)	ρ_o/ρ_f
1	P = E	0,4	1
2	P < E	0,3985	0,99625
3	P > E	0,4015	1,00375

Fonte: construção nossa.

A cena inicial da simulação mostrando a posição de liberação da esfera, a partir do repouso, para o caso 1 pode ser vista na Figura 21.

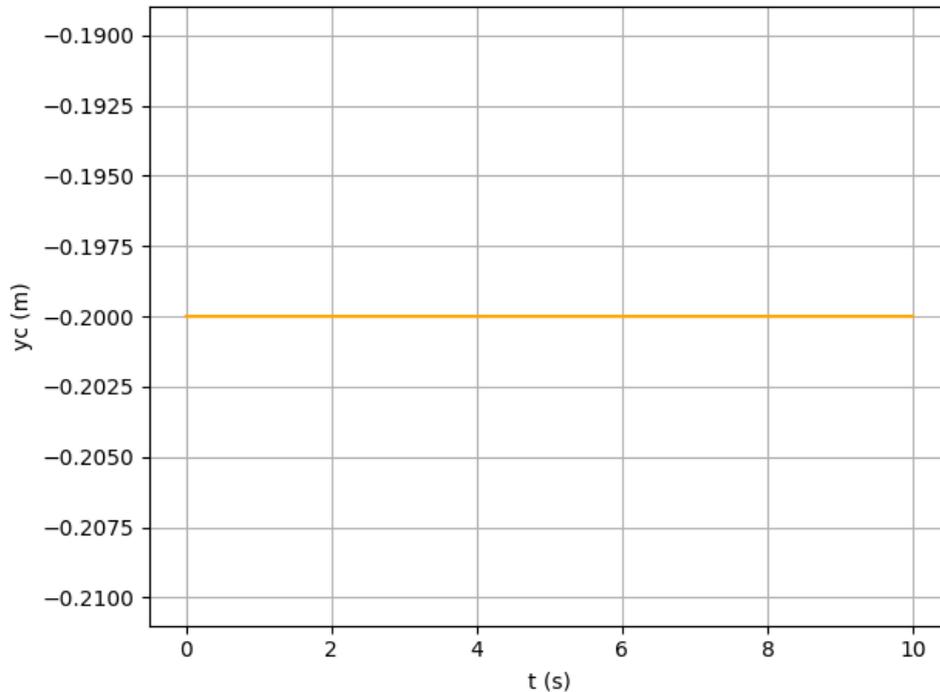
Figura 21 – Posição da bola a $0,2 \text{ m}$ de profundidade.

Fonte: construção nossa.

Como era esperado, a simulação mostra que a esfera não se move, permanecendo na mesma posição como pode ser observado na Figura 21, ou seja, na sua posição inicial. Logo conclui-se que a mesma está em uma condição de equilíbrio estático e a velocidade permanece igual a zero em todo o tempo de simulação que foi de 10 s . Para melhor observar a condição de equilíbrio do caso 1, foi gerado o gráfico da Figura 22 que mostra a variação da posição do centro da esfera no decorrer do tempo. A análise gráfica permite observar

que a posição da esfera não sofre alteração, permanecendo em $0,2\text{ m}$ de profundidade por todo o tempo da simulação.

Figura 22 – Gráfico da posição do centro da esfera com o tempo para o caso 1.



Fonte: construção nossa.

No caso 2, a esfera é solta da mesma posição inicial ($y_c = -0,2\text{ m}$), ou seja, estando na profundidade que é mostrada na cena da Figura 21. Três momentos distintos da simulação são mostrados na Figura 23. Como a densidade da bola é menor que a densidade do fluido, a bola tende a flutuar, parando com o seu centro próximo à superfície do fluido, um pouco abaixo, a uma profundidade próxima a $0,05\text{ m}$ conforme pode-se observar na Figura 24 (a), que mostra a variação da posição do centro da bola no decorrer do tempo. Já a Figura 24 (b) descreve como o número de Reynolds dado pela Equação (3.11), varia com o tempo. É fácil notar uma relação importante entre os gráficos mostrados na Figura 24, que vão nos permitir realizar algumas análises acerca do movimento.

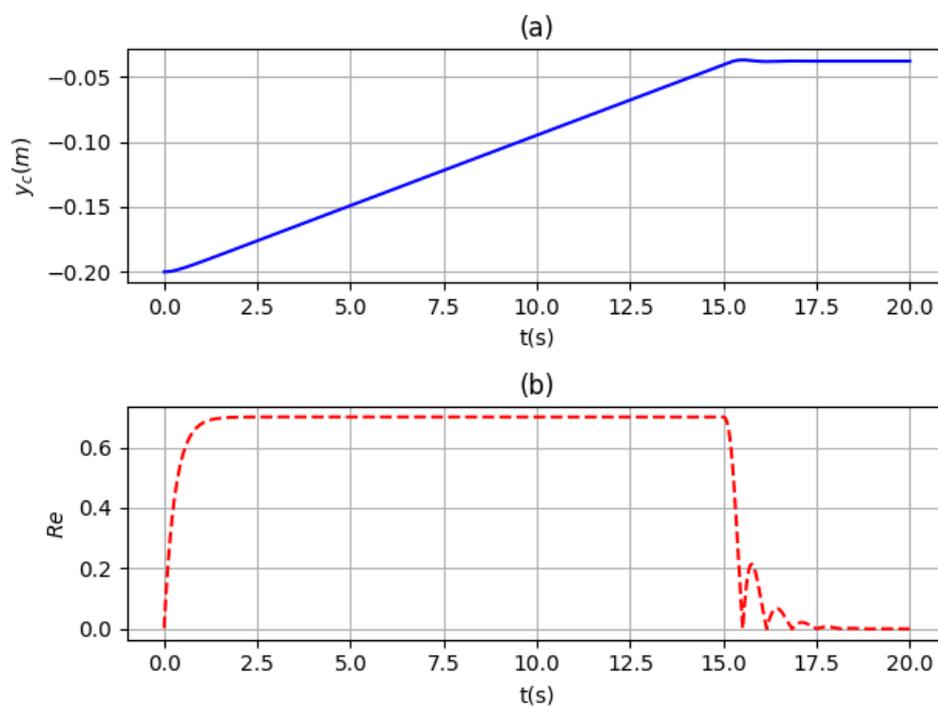
No tempo $t = 0\text{ s}$, como o corpo parte do repouso, o número de Reynolds é nulo. De modo semelhante, percebe-se que a derivada da posição em relação ao tempo em $t = 0\text{ s}$, também é nula. A partir daí, até $t = 2,5\text{ s}$, o corpo sai de repouso e começa a acelerar, aumentando gradativamente o número de Reynolds até se estabilizar no seu valor máximo de aproximadamente $0,7$, permanecendo neste patamar até um tempo aproximado de $t = 15\text{ s}$ de simulação. Como este valor é inferior a um, garantimos a validade da Lei de Stokes. Neste intervalo de tempo de $t = 2,5\text{ s}$ à $t = 15\text{ s}$, a velocidade da esfera permanece constante, após atingir uma magnitude conhecida como velocidade terminal.

Figura 23 – Simulação do caso 2.



Fonte: construção nossa.

Figura 24 – Análise gráfica do caso 2: a) posição do centro da esfera versus o tempo e b) número de Reynolds versus o tempo.



Fonte: construção nossa.

Quando um corpo se desloca à velocidade terminal, a soma de forças que atuam no

mesmo é nula e o corpo não tem aceleração. Podemos calcular analiticamente a velocidade terminal por meio da seguinte expressão Gallant (2012, p. 330):

$$v_t = \frac{2r^2g}{9\eta_f} (\rho_o - \rho_f). \quad (4.2)$$

Para o caso 2, o módulo da velocidade terminal calculada por meio da Equação (4.2) resulta em $0,010829979 \text{ m/s}$. Já o valor numérico calculado pelo programa para $t = 4 \text{ s}$ resultou em $0,010982792 \text{ m/s}$. Observando a Figura 24 (a), percebe-se que no tempo de 4 segundos a velocidade da bola é constante, ou seja, a mesma se desloca em velocidade terminal. Este valor foi escolhido aleatoriamente. Poderia ter sido qualquer tempo entre 2,5 s Tomando-se a Equação (2.48), é possível calcular um Erro Relativo Total na ordem de 1,4 %, o que comprova a precisão da solução obtida.

Entre $t = 5 \text{ s}$ e $t = 17,5 \text{ s}$, a esfera sai da velocidade terminal e desacelera quando chega na superfície do fluido, até ficar com velocidade nula. A partir daí, percebe-se que ela passa a sofrer uma pequena oscilação na superfície do fluido que vai se reduzindo até que a mesma se estabilize na sua posição final. As oscilações que a esfera sofre podem ser vistas com mais clareza no gráfico da Figura 24 (b). Também vale salientar que o número de Reynolds mostrado na figura não assume valores negativos pois é calculado com o módulo da velocidade.

Assim como no caso anterior, a Figura 21 também ilustra a posição da esfera no início da simulação do caso 3. Pode-se observar através da Figura 25 três momentos distintos da posição da esfera durante a simulação: no início, em um momento intermediário e no fim. Como era de se esperar, a esfera submerge até atingir o fundo do reservatório pois sua densidade é maior do que a do fluido.

A Figura 26 mostra no plano cartesiano a posição da esfera e o número de Reynolds variando no tempo para o caso 3. Vale salientar que estes gráficos não consideraram o tempo necessário para a esfera atingir o repouso, no fundo do reservatório. Foi considerado um tempo menor, de 2,5 s, visando obter uma curva que permita uma melhor análise da variação da posição e do número de Reynolds desde o repouso até a velocidade terminal.

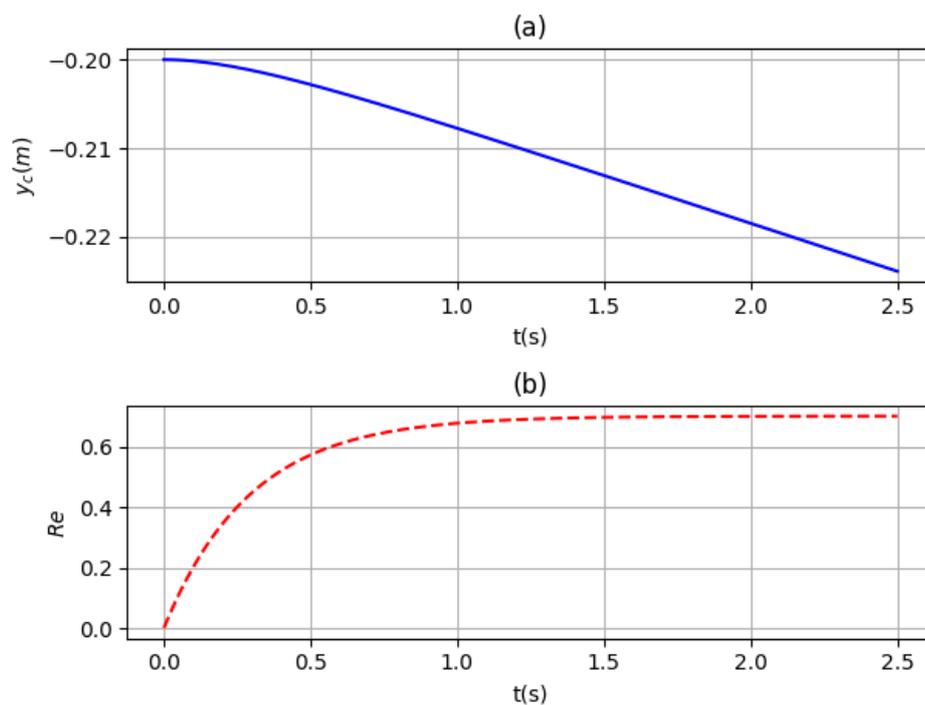
No instante $t = 0 \text{ s}$, a derivada da posição da esfera em relação ao tempo é nula. Do mesmo modo, o número de Reynolds é igual a zero. Desde quando começa a se movimentar até um tempo aproximado de $t = 1,5 \text{ s}$, a esfera passa a acelerar até que atinge a velocidade terminal, ou seja, se desloca com velocidade constante. De modo semelhante ao caso anterior, o número de Reynolds permanece sempre abaixo de um, o que também garante a condição de validade para aplicação da Lei de Stokes ($R_e < 1$). A partir de $t = 1,5 \text{ s}$ em diante, a esfera continua em velocidade terminal até o momento em que toca no chão.

Figura 25 – Simulação do caso 3.



Fonte: construção nossa.

Figura 26 – Análise gráfica do caso 3: a) posição do centro da esfera versus o tempo e b) número de Reynolds versus o tempo.



Fonte: construção nossa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos a construção de um simulador computacional com modelagem 3D para o problema dos corpos flutuantes. O modelo matemático foi obtido a partir da aplicação das leis de Newton do movimento e de um balanço das forças atuantes em uma esfera imersa num fluido estático.

Inicialmente partimos de um balanço de forças exageradamente simplificado, onde consideramos somente a força de empuxo e a força peso atuando no corpo. Os resultados não foram satisfatórios, uma vez que a esfera flutuante oscilava indefinidamente. Percebemos que o problema físico era mais complexo do que se imaginava para um modelo matemático tão simplificado, e neste sentido, adicionamos a força de arrasto, o que gerou resultados mais próximos ao mundo real.

A solução numérica via método de Euler mostrou-se eficiente como uma importante ferramenta de solução para Equações Diferenciais Ordinárias. O erro relativo total no cálculo da velocidade terminal entre a solução analítica e a numérica foi da ordem de 1,4 %.

A nossa proposta de trabalho visou demonstrar também a importância do uso do computador para o estudo de problemas físicos e matemáticos, destacando o papel dos simuladores para análise e compreensão de alguns conteúdos físicos e matemáticos que poderiam permanecer ocultos ao entendimento do aluno.

A visualização dos resultados foi toda feita usando bibliotecas da linguagem *Python*. A biblioteca *matplotlib* permitiu a criação de gráficos no plano cartesiano. A modelagem 3D feita com a biblioteca *VPython* não exigiu muito tempo de treinamento mas permitiu uma forma de visualização muito mais intuitiva para o problema físico estudado.

Indica-se para trabalhos futuros implementar novas funcionalidades ao simulador, deixando-o mais próximo a simuladores como o *Phet*¹. Pode-se criar uma biblioteca de modo que facilite a escolha de outros fluidos e materiais para o corpo flutuante. Sugere-se ainda a utilização de outros modelos de forças de arrasto que possam ser usados faixas de números de Reynolds distintas. Pode-se tentar usar outros modelos de força de arrasto além de outros métodos numéricos para solução de EDOs, além de pesquisar a viabilidade de uso do simulador como ferramenta de suporte para aprendizagem de conteúdos de física, EDO, programação, entre outros.

¹ Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/buoyancy

REFERÊNCIAS

- BAGLIO, E. **Chemistry and technology of honey production**. [S.l.]: Springer, 2017. Citado na página 48.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. [S.l.]: Editora Contexto, 2002. Citado na página 15.
- BASSANEZI, R. C. Equações diferenciais ordinárias: Um curso introdutório. **Coleção BC&T. São Paulo: UFABC**, 2012. Citado na página 29.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino: modelagem como estratégia de ensino e aprendizagem da matemática**. [S.l.]: Editora Contexto, 2002. 9–29 p. Citado na página 15.
- BORBA, M. de C. **A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão**. [S.l.]: Olho d! Água, 2000. Citado na página 13.
- BRASIL, M. d. E. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base**. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: maio de 2019. Citado na página 16.
- CARON, A. **O que é STEM?** 2017. Disponível em: <<https://www.positivoteceduc.com.br/blog-robotica-e-stem/o-que-e-stem/>>. Acesso em: maio de 2019. Citado na página 16.
- CHABAY, R.; SCHERER, D.; SHERWOOD, B. **VPython**. S.d. Disponível em: <<https://www.glowscript.org/docs/VPythonDocs/index.html>>. Acesso em: maio de 2019. Citado nas páginas 38 e 39.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos numéricos para engenharia**. Porto Alegre: AMGH, 2011. Citado nas páginas 35 e 36.
- DANTAS, A. **AS ANTIGAS (E SURPREENDENTES) SEMENTES GREGAS**. 2010. Disponível em: <<http://www.autoentusiastaclassic.com.br/2010/06/as-antigas-e-surpreendentes-sementes.html>>. Acesso em: maio de 2019. Citado na página 19.
- E-FÍSICA. **Empuxo no Cotidiano**. 2017. Disponível em: <<http://efisica.if.usp.br/mecanica/ensinomedio/empuxo/cotidiano/>>. Acesso em: maio de 2019. Citado na página 22.
- FIOLHAIS, C.; TRINDADE, J. Física no computador: o computador como uma ferramenta no ensino e na aprendizagem das ciências físicas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 25, n. 3, p. 259–272, 2003. Citado nas páginas 14, 15, 36 e 37.
- FISICANET. **Hidrostatica**: Princípio de arquimedes (empuxo). S.d. Disponível em: <https://www.fisica.net/hidrostatica/principio_de_arquimedes_empuxo.php>. Acesso em: maio de 2019. Citado na página 24.

FULFORD, G. et al. **Modelling with Differential and Difference Equations**. Cambridge University Press, 1997. (Australian Mathematical Society Lecture Series). ISBN 9780521446181. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=aooS1OCqyOoC>>. Citado na página 42.

GALLANT, J. **Doing Physics with Scientific Notebook: A Problem Solving Approach**. Wiley, 2012. ISBN 9781119941941. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=AtDfrk6zersC>>. Citado na página 52.

GARLET, D.; BIGOLIN, N.; SILVEIRA, S. Uma proposta para o ensino de programação de computadores na educação básica. **Departamento de Tecnologia da Informação, Universidade Federal de Santa Maria, RS**, 2016. Citado na página 14.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. [S.l.]: Bookman Editora, 2009. Citado nas páginas 31, 32, 33, 34, 35 e 36.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física 1: mecânica**. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 1996. Citado nas páginas 26, 27 e 28.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física, vol. 2: gravitação, ondas e termodinâmica**. Rio de Janeiro: LTC, 2009. v. 8. Citado nas páginas 20, 21 e 25.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física-Vol. 1-Mecânica, 10ª edição**. [S.l.]: LTC, 2016. Citado na página 28.

HARRISON, D.; JAQUES, M. **Experiments in virtual reality**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1996. Citado nas páginas 36 e 37.

INNOCAL. **Viscosity Values Chart**. S.d. Disponível em: <<http://www.innocalsolutions.com/tiarticles/tiairandfluidquantities/56-viscosity-values>>. Acesso em: Nov de 2019. Citado na página 48.

KORTEMAYER, G. **Codificação Através do Currículo**. S.d. Disponível em: <<https://msu.edu/user/kortemey/coding.html>>. Acesso em: maio de 2019. Citado nas páginas 38 e 39.

KROETZ, T. The effect of "drag crisis" on plunge dive. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 35, n. 3, p. 1–8, 2013. Citado na página 42.

MARTINS, R. de A. Arquimedes e a coroa do rei: problemas históricos. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 17, n. 2, p. 115–121, 2000. Citado nas páginas 18 e 19.

NEWMAN, J. **Physics of the Life Sciences**. Springer New York, 2010. ISBN 9780387772592. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Gi8dCes2cAkC>>. Citado na página 22.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor**. [S.l.]: Editora Blucher, 2018. v. 2. Citado na página 20.

OLIVEIRA, H. da S.; FREIRA, M. L. de F. O computador e o ensino de física: Simulação e modelagem computacional. **Revista Compartilhando Saberes**, n. 1, p. 83–99, 2014. Citado na página 14.

ONUCHIC, L. d. l. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, p. 199–220, 1999. Citado na página 13.

ROQUE, T. **História da matemática**. [S.l.]: Zahar, 2012. Citado na página 19.

SERWAY, R.; BEICHNER, R.; JEWETT, J. **Physics for Scientists and Engineers**. Saunders College Publishing, 2000. (Saunders golden sunburst series). ISBN 9780030226540. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=NNdFAQAAIAAJ>>. Citado nas páginas 26 e 44.

SERWAY, R.; JEWETT, J. **Princípios de Física Volume 2-Oscilações, ondas e termodinâmica**. [S.l.: s.n.], 2014. Citado nas páginas 22 e 23.

SILVA, D. C. M. da. **Peso aparente de um corpo**. S.d. Disponível em: <<https://alunosonline.uol.com.br/fisica/peso-aparente-um-corpo.html>>. Acesso em: maio de 2019. Citado na página 21.

SITES, G. **Force Buoyancy**. S.d. Disponível em: <<https://sites.google.com/site/delseaphysics1/Home/forces/buoyancy/buoyancy-notes>>. Acesso em: maio de 2019. Citado na página 23.

SODRÉ, U. Equações diferenciais ordinárias. **Aulas para Computação, Engenharia Elétrica e Engenharia Civil**, v. 25, n. 11, 2003. Citado na página 30.

VALENTE, J. A. Informática na educação: confrontar ou transformar a escola. **Perspectiva**, v. 13, n. 24, p. 41–49, 1995. Citado na página 13.

VALENTE, J. A. Diferentes usos do computador na educação. **Em aberto**, v. 12, n. 57, 2008. Citado na página 14.

VITRUVIUS, M. **D l'architectura, translated by Jean Soubiran**. [S.l.]: Paris: Belles Lettres, 1969. Citado nas páginas 18 e 19.