



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO  
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**FÚLVIA NAYANA NOGUEIRA DE SOUZA**

**TEOREMA DA DIVERGÊNCIA E APLICAÇÕES .**

**MONTEIRO  
2019**

FÚLVIA NAYANA NOGUEIRA DE SOUZA

**TEOREMA DA DIVERGÊNCIA E APLICAÇÕES .**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Orientador:** Prof. Ms. Luiz Lima de Oliveira Junior

MONTEIRO

2019

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S729t Souza, Fulvia Nayana Nogueira de.  
Teorema da Divergência e aplicações [manuscrito] / Fulvia  
Nayana Nogueira de Souza. - 2019.  
57 p.  
Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em  
Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de  
Ciências Humanas e Exatas, 2019.  
"Orientação : Prof. Me. Luiz Lima de Oliveira Junior ,  
Coordenação do Curso de Matemática - CCT."  
1. Teorema da Divergência. 2. Teorema de Gauss. 3.  
Geometria Analítica. 4. Geometria Euclidiana. I. Título  
21. ed. CDD 516.3

FÚLVIA NAYANA NOGUEIRA DE SOUZA

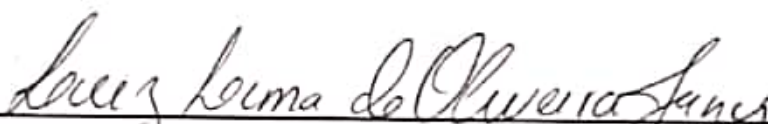
TEOREMA DA DIVERGÊNCIA E APLICAÇÕES .


Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

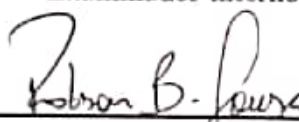
Área de concentração: Matemática Aplicada

Aprovada em: 04/12/2019.

BANCA EXAMINADORA

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Ms. Luiz Lima de Oliveira Júnior  
Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Ms. Luciano dos Santos Ferreira  
Examinador interno (CCHE/UEPB)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Ms. Robson Batista de Sousa  
Examinador interno (CCHE/UEPB)

*Este trabalho é dedicado a Deus todo poderoso que é, o alfa e o ômega, o princípio e o fim de todas as coisas.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois todas as coisas só acontecem com a permissão dele;

ao meu orientador Prof. Me. Luíz Lima de Oliveira Júnior, por acreditar e me fortalecer durante a jornada acadêmica e na realização desse sonho;

ao Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira pelas contribuições na construção desse trabalho;

a minha família pela compreensão e em especial minha mãe Luciene por sempre disponibilizar-se a ajudar;

aos meus filhos Arthur, Antônio e Laura, que mesmo na inocência me ajudaram a vencer os obstáculos;

ao meu marido Pádua pelo apoio e incentivo;

ao meu pai Odilon e a minha irmã Lorena, os quais não mediram esforços para me ajudarem;

a minha querida vó pela luta para me manter na Universidade e pelas palavras de fé;

aos funcionários da biblioteca pela atenção que me prestaram durante as pesquisas e procura por livros para a construção deste trabalho;

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo, mas transformai-vos pela renovação da mente, a fim de distinguir qual é a vontade de Deus: o que é bom, o que lhe é agradável, o que é perfeito.”*  
*(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

## RESUMO

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar o Teorema da Divergência, conhecido como teorema de Gauss. O mesmo estabelece o fluxo de um campo vetorial sobre uma determinada superfície fechada. Faremos um estudo bibliográfico tendo com base o livro de Swokowski (1994), artigos com assuntos relacionados, trabalhos de conclusão de curso e outros livros de cálculo. Para realizarmos nossos estudos a cerca do teorema alguns conteúdos matemáticos foram abordados, dessa forma apresentaremos por capítulo tais conteúdos. O primeiro capítulo enfatiza a parte introdutória do trabalho, aborda alguns pontos importantes para o compreensão do teorema da Divergência, tanto no aspecto matemático como na física. No segundo capítulo, apresentamos um breve histórico sobre a vida de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e as suas importantes contribuições matemáticas para o progresso da humanidade; bem como descobertas fantásticas sobre à astronomia, à geodésia, à eletricidade e na criação de instrumentos que conhecemos até os dias atuais. No terceiro capítulo, enunciaremos a fundamentação teórica, ou seja, os principais tópicos matemáticos abordados como promoção do entendimento do Teorema da Divergência, tais como: Campo Vetorial, Integral Curvilínea, Independência do Caminho e Integral de Superfície. No terceiro capítulo, apresentamos o Teorema da Divergência e suas relações com as equações de Stokes e Green. E no quarto capítulo algumas aplicações do Teorema.

**Palavras-chave:** Gauss. Fluxo. Superfície. Teorema da Divergência e Aplicações.



## ABSTRACT

The present work aims to present the Divergence Theorem, known as like Gauss theorem. It establishes the flow of a vector field over a certain closed surface. We will make a bibliographical stud based on the book of Swokowski. The first chapter emphasizes the introductory part of the paper, discusses some important point for understanding the divergence theorem, both in terms of mathematical as in physics. In the second chapter, we present a brief history of the life of Carl Friedrich Gauss (1777-1855) and his important mathematical contributions for the progress of humanity; as well as fantastic discoveries about astronomy, geodesy, eletricity and the creation of instruments we know to this day. In the third chapter, we will state the theoretical foundation, that is, the main topics mathematics approached as promoting the understanding of the divergence theorem: Vector Field, Curvy Integral, Path Independence and surface. In the third chapter, we present the Divergence Theorem and its relations with the Stokes and Green equations. And in the fourth chapter some applications of the Theorem.

**Key-words:** Gauss. Surface. Divergence theorem and Applications.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Gauss 1777-1855 . . . . .	12
Figura 2 – O fluido que escoo para cima através do Cilindro. . . . .	14
Figura 3 – Ostrogradsky (1801-1862) . . . . .	15
Figura 4 – Campo vetorial no $\mathbb{R}^2$ . . . . .	18
Figura 5 – Campo vetorial no $\mathbb{R}^2$ . . . . .	18
Figura 6 – Campo vetorial no $\mathbb{R}^3$ . . . . .	19
Figura 7 – Campo Vetorial Conservativo . . . . .	20
Figura 8 – Campos vetoriais quadrados inversos . . . . .	21
Figura 9 – Integral Curvilínea . . . . .	25
Figura 10 – Curva . . . . .	27
Figura 11 – Massa de Arame . . . . .	28
Figura 12 – Soma de duas integrais curvilíneas . . . . .	29
Figura 13 – Gráfico de $C$ . . . . .	30
Figura 14 – Parte de uma parábola . . . . .	30
Figura 15 – Integral Curvilínea . . . . .	31
Figura 16 – Caminho arbitrário de $C_1$ . . . . .	34
Figura 17 – Independência de Caminho . . . . .	35
Figura 18 – Curva Suave . . . . .	36
Figura 19 – Projeção de Superfícies . . . . .	40
Figura 20 – Projeção da superfície $S$ e plano tangente $B_k$ sobre o retângulo $R_k$ . . . . .	40
Figura 21 – Cone . . . . .	42
Figura 22 – Comprimento de Arco . . . . .	43
Figura 23 – Superfície $S$ e vetor unitário $\mathbf{n}$ normal . . . . .	44
Figura 24 – Superfície com normal unitária . . . . .	45
Figura 25 – Superfície com normal unitária . . . . .	45
Figura 26 – Superfície com normal unitária . . . . .	47
Figura 27 – Superfície $S$ . . . . .	51
Figura 28 – Fluxo do campo elétrico. . . . .	53
Figura 29 – Distribuição de carga sobre o disco. . . . .	54
Figura 30 – Volume do Cilindro . . . . .	55

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>UM POUCO DE HISTÓRIA</b> . . . . .	<b>12</b>
2.1	GAUUS, O PRÍNCIPE DA MATEMÁTICA . . . . .	12
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> . . . . .	<b>17</b>
3.1	CAMPO VETORIAL . . . . .	17
3.2	INTEGRAIS CURVILÍNEAS . . . . .	24
3.3	INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO . . . . .	33
3.4	INTEGRAIS DE SUPERFÍCIES . . . . .	39
<b>4</b>	<b>O TEOREMA DA DIVERGÊNCIA E APLICAÇÕES</b> . . . . .	<b>46</b>
4.1	TEOREMA DA DIVERGÊNCIA . . . . .	46
4.2	TEOREMA DA DIVERGÊNCIA E SUAS RELAÇÕES . . . . .	48
<b>5</b>	<b>APLICAÇÕES</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>58</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>59</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O teorema da Divergência, também conhecido como teorema de Gauss em homenagem ao renomado matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e mais tarde atribuído também ao matemático russo Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky; relaciona uma integral tripla num sólido  $Q \subset \mathbb{R}^3$  com a integral sobre a superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  que é fronteira deste sólido, estabelecendo assim o fluxo de um campo vetorial sobre uma superfície fechada  $S$ . O teorema possibilita encontrar resultados significativos e de grande aplicabilidade na física, engenharia, mecânica e em outras áreas que envolvam o cálculo de fluídos.

Serão consideradas as superfícies fechadas, lisas e orientáveis para utilizarmos o teorema como instrumento matemático na medição do fluxo que atravessa tais superfícies. O fluxo, neste caso, é uma medida da taxa na qual o fluído está atravessando uma superfície no espaço. É importante frisar que o fluxo de um campo vetorial em um ponto dado pode ser interpretado fisicamente dependendo do resultado obtido. De modo que, o fluxo pode ter resultado positivo; isso significa que a quantidade de fluído que sai da superfície é maior que a quantidade de fluído que entra. No caso em que o fluxo é negativo, a quantidade de fluído que entra na superfície é maior que a quantidade de fluído que sai. Atentamos, para o caso em que o fluxo é igual a zero (0), nesse caso em especial, não há entrada ou saída de fluído, o fluído encontra-se estático. Todavia, o teorema da Divergência se aplica em qualquer campo vetorial que satisfaça a determinadas condições matemáticas.

Nessa perspectiva, os campos vetoriais - são regiões que contêm pontos que estão associados a vetores com fluído em movimento, esses vetores podem ser de força, velocidade, elétrico entre outros. Abordaremos também as integrais curvilíneas, pois possibilitam encontrar o trabalho realizado quando uma partícula se move em um campo de força, já que as mesmas são generalizações das integrais definidas. Para esse estudo também enfatizamos importância de usar as integrais de superfícies, as mesmas são extensões das integrais duplas, e são atribuídas ao cálculo da taxa de fluxo através de uma superfície Swokowski (1994).

O teorema da divergência apresenta relações com as equações dos teoremas de Green e Stokes. De acordo com Thomas (2009) o teorema de Stokes generaliza a forma tangencial do teorema de Green de uma região no  $\mathbb{R}^2$  para uma superfície no  $\mathbb{R}^3$ , da mesma forma que o teorema da Divergência generaliza a forma normal do teorema de Green.

## 2 UM POUCO DE HISTÓRIA

Nesse capítulo, será apresentado um pouco da história e da vida de Gauss. Salientando suas contribuições e descobertas importantes para diversos campos do conhecimento. Realizou trabalhos brilhantes e de extrema importância para o avanço da matemática. Até hoje, esse gênio ainda é lembrado e respeitado pelos seus significativos feitos na área da física, engenharia, astronomia e entre outras.

### 2.1 GAUSS, O PRÍNCIPE DA MATEMÁTICA

Figura 1 – Gauss 1777-1855



Fonte: <https://cursos.ime.unicamp.br/> (2019)

Johann Carl Friedrich Gauss nasceu em 1777, na cidade de Brunswick, Alemanha. Filho de um trabalhador braçal que não demonstrava apreço a educação. Sua mãe, embora pouco letrada, tinha bastante orgulho dos seus brilhantes trabalhos e incentivava-o nos estudos. Gauss possuía um talento fantástico e admirável desde sua infância Somatematica (2019). Diz-se que com três anos de idade, encontrou um erro aritmético no borrador do seu pai. Existe também, relatos que aos dez anos de idade, quando era aluno de escola pública, o professor propôs a turma uma tarefa (como forma de mantê-los ocupados e quietos) de somar os números naturais de 1 a 100. Todos os alunos pegaram suas lousas e começaram a fazer seus cálculos. Pouco tempo depois, o professor pediu para que os alunos mostrassem seus resultados. O único resultado correto foi o de Gauss, 5050. O garoto prodígio havia calculado mentalmente a soma da progressão aritmética  $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$ , notou que  $100 + 1 = 101$ ,  $99 + 2 = 101$ ,  $98 + 3 = 101$ , e assim sucessivamente. Tomou os cinquenta pares possíveis dessa maneira e concluiu que  $50 \times 101 = 5050$ .

Diante do grande talento de Gauss, o duque de Brunswich, um gentil e compreensivo patrono, acompanhou sua entrada no colégio em Brunswich com quinze anos de idade e na Universidade de Gottingen com dezoito anos de idade. Gauss ainda estava indeciso quanto a filosofia e a matemática, quando faltava um mês para completar dezenove anos decidiu aprofundar-se em matemática. Esse fato ocorreu em 30 de março de 1796. Nesse mesmo período, conforme Boyer (1996)

[...] Gauss fez uma descoberta brilhante. Havia mais de 2.000 anos que se sabia construir, com régua e compasso, o triângulo equilátero e o pentágono regular (assim como outros polígonos regulares com número de lados múltiplos de dois, três e cinco), mas nenhum outro polígono com número de lados primo. Gauss mostrou que também o polígono regular de dezessete lados pode ser construído com régua e compasso (BOYER, 1996, p344).

Aos vinte anos de idade, Carl Gauss em sua tese de doutorado, na Universidade de Helmstedt, deu a primeira demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Em 1816, publicou duas novas demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra e em 1850, uma nova demonstração, numa tentativa de encontrar uma demonstração mais completa e convincente.

A publicação mais importante de Gauss é sua *Disquisitiones arithmeticae*. As descobertas de Gauss sobre construções de polígonos regulares aparecem nesse trabalho. Carl Gauss deu importantes contribuições à astronomia, à geodésia e à eletricidade. Foi a partir do grande interesse e afinidade pela geodésia que Gauss fez grandes descobertas.

Geodésia é o termo que possui três aplicações, o que varia seu estudo. A geodésia pode ser estudada na geografia, no intuito de se analisar a representação do planeta de forma total ou parcial, para a produção de mapas, projeções e outros tipos de estudos, o que inclui além da superfície do planeta, o campo magnético e o campo gravitacional (VILAR, 2014)

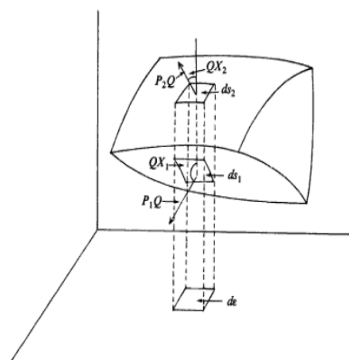
Com a notável afinidade pela geodésia, Gauss começou a se interessar pela Física, concentrando seus estudos em eletromagnetismo, óptica, eletricidade e mecânica. Porém, seus estudos e descobertas vinheram ao conhecimento público depois de sua morte. No entanto, sua contribuição na Física permanece até os dias atuais. Vários teoremas e instrumentos servem como ponte para resultados relevantes. De acordo com Amaral (2014?) em 1801 Gauss calculou a órbita do planetóide de Ceres - planeta anão mais próximo da Terra - , e em 1802 a órbita do Palas - é um asteroide situado entre a órbita de Marte e Júpiter. Segundo Boyer (1996, p.348) o cálculo de órbitas de Gauss atraiu a atenção dos astrônomos internacionalmente, levando-o ao conhecimento dos cientistas matemáticos alemães. Em 1807, tornou-se professor matemático e diretor do Observatório Astronômico de Gottingen, posto que ocupou até sua morte.

Em 1831 começou a colaborar com seu colega Wilhelm Weber (1804-1891) em pesquisas básicas em eletricidade e magnetismo. Em 1833 os dois descobriram o telégrafo eletromagnético. Em 1812, Gauss realizou a primeira investigação sistemática sobre convergência de séries. De acordo com Eves (2004, p.522) "Gauss acreditava que a matemática,

por inspiração, deveria atingir o mundo real." Assim como Gauss e o teorema da divergência, importantes gênios da matemática como, George Green (1793-1841) e George Gabriel Stokes (1819-1903) ambos desenvolveram teoremas de grande relevância não apenas para a matemática, como também para outras áreas. Os três teoremas em questão relacionam cada um uma integral  $k$ -dimensional a uma integral  $k-1$ -dimensional; uma vez que a prova de cada um depende do teorema fundamental do cálculo, é claro que suas origens remontam ao final do século XVII Katz (1979). No final do século XVIII, Lagrange<sup>1</sup> e Laplace<sup>2</sup> realmente usaram o teorema e as iterações fundamentais para reduzir as integrais da dimensão  $k$  às de uma dimensão a menos. De acordo com Katz (1979) o primeiro teorema a ser declarado e provado essencialmente em sua forma atual foi teorema de Gauss ou teorema da divergência. Em três casos especiais, o fato ocorre em um artigo de Gauss de 1819. Segundo Katz (1979) no mesmo consta

Considere uma superfície (superfícies) no espaço delimitando um corpo sólido (corpus). Ele denota por  $PQ$  o vetor normal exterior à superfície em um ponto  $P$  em um elemento infinitesimal da superfície  $ds$  e por  $QX$ ,  $QY$ ,  $QZ$  os ângulos que esse vetor faz com o eixo positivo  $x$ , respectivamente o eixo  $y$ . Gauss então denota pelo  $D\Sigma$  um elemento infinitesimal do plano  $yz$  e erige um cilindro acima (ver figura 2), sendo este cilindro que intercepta a superfície em um número par de elementos infinitesimais da superfície  $ds_1, ds_2, \dots, ds_{2n}$ . Para cada  $j$ ,  $d_2 = +ds \cdot \cos QX$  onde o sinal positivo é usado quando o ângulo é agudo, o negativo quando o ângulo é obtuso.

Figura 2 – O fluido que escoar para cima através do Cilindro.



Fonte: Thomas (2009, p.541)

Entre 1833 e 1839 Gauss publica outros casos especiais desse teorema, mas nessa época o teorema geral já havia sido afirmado e provado por Mikhail Vasilyevich Ostro-

<sup>1</sup> Josep Louis Lagrange (1736-1813) era um francês, matemático e físico. Um dos maiores cientistas da época, fez descobertas incríveis no ramo da mecânica e em cálculos avançados, como: cálculo de variações. Possui importante participação na teoria dos números, teoria das equações diferenciáveis e tem contribuição na área da álgebra.

<sup>2</sup> Pierre Simon Laplace (1749-1827) matemático e físico, foi o primeiro a demonstrar o teorema de d'Alembert (raízes das equações algébricas), desenvolveu estudos de grande relevância na teoria das Probabilidade e na parte da física deixou vários estudos a cerca de velocidade do som, pêndulo, refração, dilatação dos corpos sólidos, entre outros.

gradsky (1801-1862). Matemático e físico que nasceu em Poltava, cidade pertencente a Ucrânia. Entrou na Universidade Nacional da Carcóvia em 1816 como estudante de matemática e física. Por um período de 4 anos. E em 1820 foi afastado dos estudos por motivos religiosos e impedido de obter o doutoramento. Estudou na Sorbonne e no Collège de France, de 1822 a 1826. Foi aluno de Pierre Simon Laplace, Jean-Baptiste Joseph Fourier, Adrien-Marie Legendre, Siméon Denis Poisson, Jacques Philippe Marie Binet e Augustin-Louis Cauchy. Em 1828 regressou a São Petersburgo, sendo eleito membro da Academia de Ciências da Rússia. Demonstrou em 1831 o teorema de Gauss-Ostrogradsky.

Figura 3 – Ostrogradsky (1801-1862)



Fonte: Robertson (2014)

De acordo com Katz (1979) Ostrogradsky estava em Paris no final da década de 1820, apresentou um artigo à Academia de Ciências de Paris, mais precisamente em 13 de fevereiro de 1826, intitulada "Prova de um Teorema do Cálculo Integral". Neste artigo, Ostrogadsky introduz uma superfície com elemento da área de superfície e reunindo um sólido com elemento de volume  $\omega$ . Ele denota por  $\alpha, \beta, \gamma$ . Os mesmos ângulos que Gauss chamou  $QX, QY, QZ$ , e por  $p, q, r$  três funções diferenciáveis de  $x, y, z$  Ele afirma o teorema da divergência na forma

$$\int \left( a \frac{\partial p}{\partial x} + b \frac{\partial q}{\partial y} + c \frac{\partial r}{\partial z} \right) \omega = \int (ap \cos \alpha + bq \cos \beta + cr \cos \lambda) \epsilon$$

onde  $a, b, c$  são constantes e onde a integral esquerda é assumida sobre um sólido, a integral direita sobre a superfície do limite. Observamos que os resultados de Gauss são todos casos especiais do teorema de Ostrogradsky.

Contudo, sabemos da grande colaboração que esses matemáticos tiveram ao longo da história. Cada um com sua forte personalidade colaborou de n formas para o progresso e desenvolvimento da humanidade nas mais variadas áreas do conhecimento, seja na



física, na engenharia, na geodésia, entre outras. Gaus, assim com os demais sempre serão lembrados. Gauss morreu em sua casa no Observatório de Gottingen em 23 de fevereiro de 1855. Logo depois o rei de Hanover ordenou que fizessem uma medalha comemorativa em sua homenagem. Nela figura a inscrição

Georgius V. rex Hannoverge  
Mathematicorum principi  
(Jorge V rei de Hanover  
ao Príncipe dos Matemáticos)

Desde então Gauss é conhecido como "Príncipe dos Matemáticos".

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo abordaremos os campos vetoriais (que são funções que associam vetores a pontos do espaço) e as suas principais aplicações, enfatizamos os campos vetoriais conservativos, pois incluem os campos gravitacionais e eletromagnéticos existentes no universo. Por meio das integrais curvilíneas podemos encontrar o trabalho realizado quando uma partícula se move em um campo de força. As integrais de superfície se aplicam a problemas de fluxo, tais como, taxa de fluxo de energia, fluídos e gases através de uma superfície. As integrais anteriormente citadas são usadas na interpretação da divergência e do rotacional de um campo vetorial.

#### 3.1 CAMPO VETORIAL

Se a cada ponto  $K$  de uma região está associado exatamente a um vetor que tem  $K$  como ponto inicial, então a coleção de todos esses vetores constitui um *campo vetorial*.

Dado um campo vetorial, introduzamos um sistema coordenado  $x, y, z$  e denotaremos por  $\mathbf{F}(x, y, z)$  o vetor associado ao ponto  $K(x, y, z)$ . Como as componentes  $F(x, y, z)$  dependem das coordenadas  $x, y$  e  $z$  de  $K$ , podemos escrever:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}, \quad (3.1)$$

onde  $M, N$  e  $P$  são funções escalares.

**Definição 3.1.** Stewart (2009) Seja  $D$  um conjunto em  $\mathbb{R}^2$  (uma região plana). Um **campo vetorial** em  $\mathbb{R}^2$  é uma função  $F$  que associa a cada ponto  $(x, y)$  em  $D$  um vetor bidimensional  $F(x, y)$ .

A melhor forma de enxergar um campo vetorial é desenhar setas representando os vetores  $F(x, y)$ , começando no ponto  $(x, y)$ , veja a figura 4.

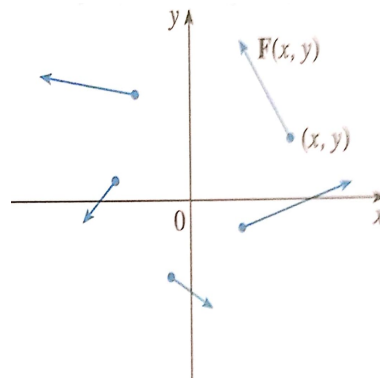
Como  $F(x, y)$  é um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas funções componentes  $P$  e  $Q$ , da seguinte forma:

$$F(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$

ou de forma mais compacta  $F(x, y) = P\vec{i} + Q\vec{j}$ .

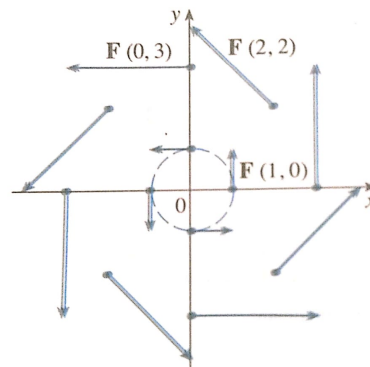
**Exemplo 3.1.** Considere um campo vetorial em  $\mathbb{R}^2$  definido por

a)  $F(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ .

Figura 4 – Campo vetorial no  $\mathbb{R}^2$ .

Fonte: Stewart (2009, p. 976)

O esboço do seu campo vetorial é dado na figura 5.

Figura 5 – Campo vetorial no  $\mathbb{R}^2$ .

Fonte: Stewart (2009, p. 976)

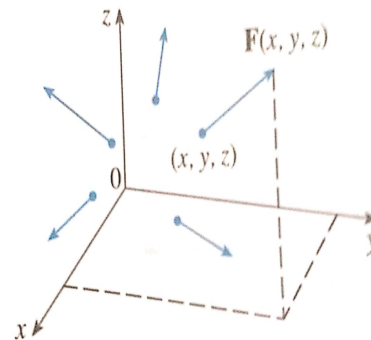
**Definição 3.2.** Stewart (2009) Seja  $D$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^3$ . Um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  é uma função  $F$  que associa a cada ponto  $(x, y, z)$  em  $D$  um vetor tridimensional  $F(x, y, z)$ , isto é,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$$

onde  $M$ ,  $N$  e  $P$  são funções escalares.

Um campo vetorial  $F$  em  $\mathbb{R}^3$  está ilustrado na figura 6.

**Exemplo 3.2.** Imagine um líquido escoando uniformemente em um cano e seja  $V(x, y, z)$  o vetor velocidade em um ponto  $(x, y, z)$ . Então  $V$  associa a cada ponto  $(x, y, z)$  um vetor de um certo domínio  $D$  (interior do cano). Então  $V$  é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  chamado de Campo de Velocidade.

Figura 6 – Campo vetorial no  $\mathbb{R}^3$ .

Fonte: Stewart (2009, p. 976)

A próxima definição introduz um dos mais importantes campos vetoriais que ocorrem nas ciências físicas.

**Definição 3.3.** (Quadrado inverso) Seja  $\mathbf{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  o vetor posição de  $(x, y, z)$  e denotemos por  $\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}\mathbf{r}$  o vetor unitário que tem a mesma direção de  $\mathbf{r}$ . Um campo vetorial  $\mathbf{F}$  é um campo quadrado inverso se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u} = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r},$$

onde  $c$  é um escalar.

**Exemplo 3.3.** Descreva o campo quadrado inverso de  $\mathbf{F}(x, y, z)$  pela definição em (3.3).

**Solução:** Como  $r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r} = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \quad (3.2)$$

Podemos escrever a última expressão como na equação (3.1); entretanto, é mais simples analisar os vetores no campo utilizando  $r$ . Se  $c < 0$ , então  $F(x, y, z)$  é um múltiplo escalar negativo de  $r$  e, então,  $F(x, y, z)$  está dirigido para a origem. Além disso, como

$$\|\mathbf{F}(x, y, z)\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^3}\|\mathbf{r}\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^2} \quad (3.3)$$

o módulo de  $\mathbf{F}(x, y, z)$  é inversamente proporcional ao quadrado da distância da origem  $0$  ao ponto  $(x, y, z)$ . Isto significa que, a medida que o ponto  $K(x, y, z)$  se move afastando-se da origem, o módulo do vetor  $\mathbf{F}(x, y, z)$  diminui.

Se  $f$  é uma função de três variáveis, então, o gradiente de  $f(x, y, z)$  é o campo vetorial definido como a seguir:

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k}. \quad (3.4)$$

Os campos vetoriais que são gradientes de funções escalares recebem um nome especial, chamado de Campo Vetorial Conservativo.

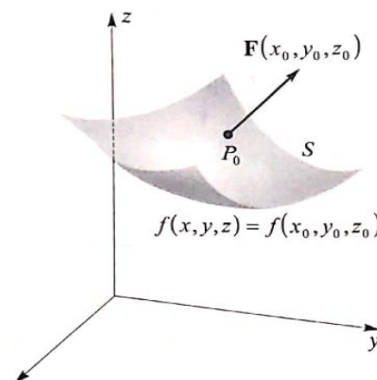
**Definição 3.4.** Um campo vetorial  $F$  é conservativo se

$$F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$$

para alguma função escalar  $f$ .

Se  $\mathbf{F}$  é conservativo, então a função  $f$  dada acima é chamada **função potencial** para  $\mathbf{F}$  e  $f(x, y, z)$  é o potencial no ponto  $(x, y, z)$ . Todavia, se  $(x_0, y_0, z_0)$  está no domínio de  $\mathbf{F} = \nabla f$ , então o vetor gradiente  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)$  é normal a superfície de nível  $S$  de  $f$  que contém  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ . A superfície de  $S$  é o gráfico da equação  $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$ . Assim, todo vetor  $\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)$  em um campo vetorial conservativo é normal a superfície de nível de uma função potencial  $f$  para  $\mathbf{F}$  que contém  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ . Para maiores detalhes ver Swokowski (1994, pag.426). A figura 8 ilustra um caso típico.

Figura 7 – Campo Vetorial Conservativo



Fonte: Swokowski (1994, p. 564)

**Teorema 3.1.** *Todo campo vetorial quadrado inverso é conservativo.*

**Demonstração.** Se  $\mathbf{F}$  é um campo quadrado inverso, então, como na solução do Exemplo 3.3,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{cx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{i} + \frac{cy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{j} + \frac{cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}$$

onde  $c$  é uma constante. Pela definição (3.4), se  $\mathbf{F}$  é conservativo, então  $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$  para alguma função escalar  $f$  e as componentes de  $\mathbf{F}$  são  $f_x(x, y, z)$ ,  $f_y(x, y, z)$  e  $f_z(x, y, z)$ , respectivamente. A integração parcial dessas componentes em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, sugerem que:

$$f(x, y, z) = \frac{-c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

O cálculo das derivadas parciais de  $f$  prova que a suposição é correta. Temos o seguinte:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \nabla \left( -\frac{c}{r} \right)$$

onde  $r = \|\mathbf{r}\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ . As superfícies de nível para a função potencial  $f$  do campo vetorial quadrado inverso  $\mathbf{F}$  na demonstração do teorema (3.1) são os gráficos de equações da forma

$$\frac{-c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = k$$

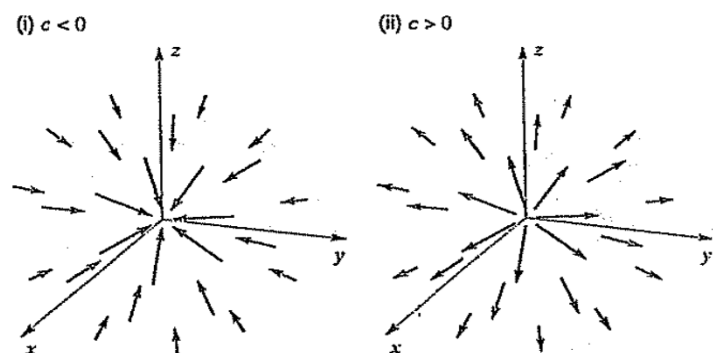
onde  $k < 0$ . Elevando ambos os membros ao quadrado e tomando os inversos, obtemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{c^2}{k^2}.$$

Assim, as superfícies de nível são esferas com centro na origem. Os vetores  $\mathbf{F}(x, y, z)$  são ortogonais a essas esferas, sendo pois, orientados para a origem 0, conforme figura 8.

■

Figura 8 – Campos vetoriais quadrados inversos



Fonte: Swokowski (1994, p. 563)

**Exemplo 3.4.** (SILVA; MATOS, 2018) Verificar que o campo gravitacional é um campo vetorial quadrado inverso.

**Resolução.** De acordo com a Lei de Gravitação Universal de Newton, o campo gravitacional na superfície da terra é dada por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

onde  $M$  representa a massa da terra,  $G$  é a constante gravitacional,  $m$  é a massa de uma partícula situada no ponto  $P(x, y, z)$  e  $\mathbf{r}=\mathbf{OP}$  representa o valor posição do ponto  $P$ . A intensidade do campo vetorial  $\mathbf{F}$  é igual a

$$|\mathbf{F}(P)| = \frac{GMm}{|\mathbf{r}|^2},$$

inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto  $P$  à origem. □

**Definição 3.5.** Seja  $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$  onde  $M$ ,  $N$  e  $P$  têm derivas parciais em alguma região. O rotacional de  $\mathbf{F}$  é dado por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Usaremos também o símbolo  $\text{rot } \mathbf{F}$  ou  $\nabla \times \mathbf{F}$  para denotar o vetor  $\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z)$  ou  $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)$  associado a  $(x, y, z)$ . A expressão de  $\text{rot } \mathbf{F}$  pode escrever-se na forma de um determinante, como a seguir.

Notação para  $\text{rot } \mathbf{F}$  como determinante

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

A expressão à direita em (3.5) não é propriamente um determinante, pois a primeira linha é composta de vetores, a segunda linha de símbolos de derivação parcial e a terceira linha de funções escalares.

**Exemplo 3.5.** Se  $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2z^4)\vec{i} + (2x^2y + z)\vec{j} + y^3z^2\vec{k}$ , ache  $\nabla \times \mathbf{F}$ .

**Resolução.** Aplicando a definição (3.5),temos:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^4 & (2x^2y + z) & (y^3z^2) \end{vmatrix} \\ &= (3y^2z^2 - 1)\vec{i} + 4xy^2z^3\vec{j} + (4xy - 2xyz^4)\vec{k} \end{aligned}$$

□

Como o gradiente de uma função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um campo vetorial, podemos calcular o seu rotacional. Além disso,

**Teorema 3.2.** (STEWART, 2009) *Se  $f$  é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então*

$$\text{rot}(\nabla f) = 0.$$

**Demonstração.** Usando as definições de divergente e rotacional temos

$$\begin{aligned} \text{div rot } \mathbf{F} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois os termos se cancelam aos pares, pelo teorema de Clairaut<sup>1</sup>, (ver Stewart (2009, pag 843) para maiores detalhes). ■

Pela definição de campo conservativo, podemos reescrever o teorema (3.2) da seguinte forma:

**Teorema 3.3.** *Se  $\mathbf{F}$  é conservativo, então  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ .*

**Exemplo 3.6.** (STEWART, 2009) Mostre que o campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + xyz\vec{j} - y^2\vec{k}$  não é conservativo.

Em geral não vale a recíproca do teorema 3.3 não é verdadeira, mas se  $F$  for definida em todo espaço, a recíproca é verdadeira.

**Teorema 3.4.** *Se  $\mathbf{F}$  for um campo vetorial definido sobre todo  $\mathbb{R}^3$  cujas funções componentes tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ , então  $\mathbf{F}$  será um campo vetorial conservativo.*

**Exemplo 3.7.** (STEWART, 2009) Mostre que  $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\vec{i} + 2xyz^3\vec{j} + 3xy^2z^2\vec{k}$  é um campo vetorial conservativo.

**Resolução.** Calculemos o rotacional de  $\mathbf{F}$  :

<sup>1</sup> Teorema de Clairaut; Suponha que  $f$  seja definida em uma bola aberta  $D$  que contenha o ponto  $(a, b)$ . Se as funções  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  foram ambas contínuas em  $D$ , então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Demonstrado em (STEWART, 2009, pag A45)



$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y^2 z^3) & (2xyz^3) & (3xy^2 z^2) \end{vmatrix} \\
&= (6xyz^2 - 6xyz^2)\vec{i} - (3y^2 z^2 - 3y^2 z^2)\vec{j} + (2yz^3 - 2yz^3)\vec{k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Se  $\mathbf{F}$  é o campo de velocidade de um fluido ou gás, então o  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  nos informa sobre o fluxo de massa. Se  $K$  é um ponto e  $[\operatorname{div} \mathbf{F}]_k < 0$ , há maior quantidade de massa fluindo para o ponto do que saindo dele; dizemos que existe um poço em  $K$ . Se  $[\operatorname{div} \mathbf{F}]_k > 0$ , flui maior quantidade de massa de  $K$  do que para  $K$ , há então uma fonte em  $K$ . Se  $[\operatorname{div} \mathbf{F}]_k = 0$ , o que é verdadeiro para fluidos incompressíveis, não há poço nem fonte em  $K$ . Pode-se também utilizar o operador  $\nabla$  para obter uma função escalar a partir de um campo vetorial  $\mathbf{F}$ , como a seguir:

**Definição 3.6.** Seja  $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$ , com  $M$ ,  $N$  e  $P$  dotado de derivadas parciais em alguma região. A divergência de  $F$ , denotada por  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  ou  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  é dada por

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Usaremos o símbolo  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  para a divergência porque a fórmula pode ser obtida por meio do que parece ser o produto escalar de  $\nabla$  e  $\mathbf{F}$ , como segue

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}) = \frac{\partial}{\partial x}(M) + \frac{\partial}{\partial y}(N) + \frac{\partial}{\partial z}(P)$$

**Exemplo 3.8.** Se  $F(x, y, z) = xy^2 z^4 \vec{i} + (2x^2 y + z) \vec{j} + y^3 z^2 \vec{k}$ , ache  $\nabla \cdot \mathbf{F}$ .

**Resolução.** Pela definição (3.6),

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2 z^4) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 y + z) + \frac{\partial}{\partial z}(y^3 z^2) = y^2 z^4 + 2x^2 + 2y^3 z.$$

□

## 3.2 INTEGRAIS CURVILÍNEAS

Para definir

$$\int_a^b f(x) dx \tag{3.6}$$

começaremos dividindo o intervalo  $[a, b]$  em subintervalos de amplitudes  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ . Escolhemos então um número  $w_k$  arbitrário em cada subintervalo e consideramos o limite de somas de Riemann

$$\sum_k f(w_k)\Delta x_k \tag{3.7}$$

quando  $\Delta x_k \rightarrow 0$ . Pode-se usar o processo análogo para definir integrais curvilíneas de funções de diversas variáveis ao longo de curvas em duas ou três dimensões.

Recordemos que uma curva plana é suave e se admite uma parametrização

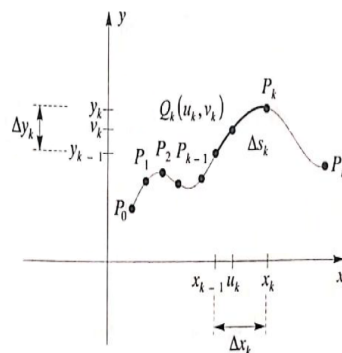
$$x = g(t), y = h(t); a \leq t \leq b \tag{3.8}$$

tal que  $g'$  e  $h'$  sejam contínuas e não simultaneamente nulas em  $[a, b]$ . Para curvas no espaço, consideremos uma terceira função  $k$  do mesmo tipo com  $z = k(t)$ . A direção positiva, ou orientação de  $C$  é a direção definida pelos valores crescentes de  $t$ . A curva  $C$  é parcialmente suave se  $[a, b]$  pode ser particionado em subintervalos fechados tais que  $C$  seja suave em cada subintervalo. Suponhamos  $f$  uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$ , contínuas em uma região  $D$  contendo uma curva  $C$  com parametrização  $x = g(t), y = h(t), a \leq t \leq b$ . Definiremos três integrais diferentes de  $f$  ao longo de  $C$ . Começemos particionando o intervalo  $[a, b]$  do parâmetro, escolhendo

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b.$$

Denotaremos por  $\|p\|$  a norma desta partição (ou seja, o comprimento do maior subintervalo  $[t_{k-1}, t_k]$ ). Se  $P_k(x_k, y_k)$  é o ponto em  $C$  correspondente a  $t_k$ , então os pontos  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  dividem  $C$  em  $n$  partes  $P_{k-1}P_k$ . Conforme figura 9

Figura 9 – Integral Curvilínea



Fonte: ??, p. 571)

Seja  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta S_k =$  comprimento de  $P_{k-1}P_k$ . Para cada  $K$ , seja  $Q_k(u_k, v_k)$  um ponto em  $P_{k-1}P_k$  obtido escolhendo-se um número em  $[t_{k-1}, t_k]$ .

Consideremos agora as três somatórias

$$\sum_k f(u_k, v_k) \Delta s_k, \sum_k f(u_k, v_k) \Delta x_k, \sum_k f(u_k, v_k) \Delta y_k.$$

Se os limites de tais somatórias existem quando  $\|p\| \rightarrow 0$ , eles são as integrais curvilíneas de  $f$  ao longo de  $C$  em relação a  $x, y, z$ , respectivamente, e se denotam como a seguir.

**Definição 3.7.** Integrais curvilíneas em duas dimensões

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k) \Delta s_k \quad (3.9a)$$

$$\int_C f(x, y) dx = \lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k) \Delta x_k \quad (3.9b)$$

$$\int_C f(x, y) dy = \lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k) \Delta y_k \quad (3.9c)$$

Se  $f$  é contínua em  $D$ , então os limites na definição (3.7) existem e são os mesmos para toda parametrização de  $C$  (desde que se adotem as mesmas orientações). Além disso, as integrais podem ser calculadas fazendo-se  $x = g(t), y = h(t)$  da parametrização de  $C$  e substituindo as diferenciais por

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

onde,  $dx = g'(t)dt, dy = h'(t)dt$ .

**Teorema 3.5.** Se uma curva suave  $C$  é dada por  $x = g(t), y = h(t), a \leq t \leq b$ , e se  $f(x, y)$  é contínua em uma região  $D$  contendo  $C$ , então

$$(i) \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(g(t), h(t)) \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

$$(ii) \int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(g(t), h(t)) g'(t) dt$$

$$(iii) \int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(g(t), h(t)) h'(t) dt.$$

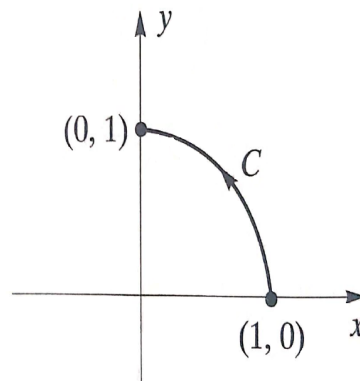
O que precede pode ser estendido a curvas mais complicadas. Em particular, suponhamos  $C$  uma curva parcialmente suave que possa expressar-se como a união de um número finito de curvas suaves  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , onde o ponto terminal de  $C_k$  é o ponto inicial de  $C_{k+1}$  para  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Neste caso, a integral curvilínea de  $f$  ao longo de  $C$  define-se como a soma das integrais curvilíneas ao longo das curvas individuais.

**Exemplo 3.9.** Calcule  $\int_C xy^2 ds$  se  $C$  admite a parametrização

$$x = \cos t, y = \sin t; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

**Resolução.** A curva  $C$  é a porção, no primeiro quadrante, do círculo unitário de centro na origem, conforme se vê na figura 10.

Figura 10 – Curva



Fonte: Swokowski (1994, p. 572)

Aplicando o Teorema (3.5), obtemos:

$$\int_C xy^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t dt = \left[ \frac{1}{3} \sin^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}. \quad (3.10)$$

□

Uma aplicação física da integral curvilínea  $\int_C f(x, y)$  consiste em considerar a curva como um fio delgado de arame de densidade variável. Se o arame é representado pela curva  $C$  e se a densidade de massa linear (massa por unidade de comprimento) no ponto  $(x, y)$  é dada por  $\delta(x, y)$ , então  $\delta(u_k, v_k) \Delta s_k$  é uma aproximação da massa  $\Delta m_k$  da parte do arame entre  $P_{k-1}$  e  $P_k$ . A soma

$$\sum_k \Delta m_k = \sum_k \delta(u_k, v_k) s_k$$

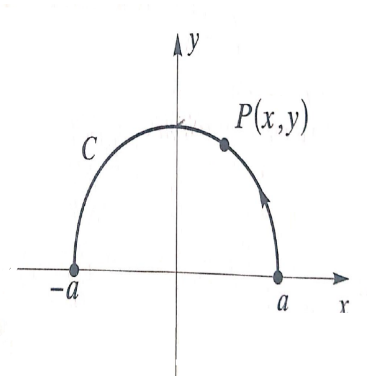
é uma aproximação da massa total  $m$  do arame. Para definir  $m$  tomamos o limite destas somas, obtendo o seguinte:

$$m = \int_C \delta(x, y) ds,$$

Massa de um arame.

**Exemplo 3.10.** Um arame delgado é vergado na forma de um semicírculo de raio  $a$ . Se a densidade de massa linear em ponto  $P$  é diretamente proporcional à sua distância da reta pelas extremidades, ache a massa do arame.

Figura 11 – Massa de Arame



Fonte: Swokowski (1994, p. 574)

**Resolução.** Introduzamos um sistema de coordenadas tal que a forma do arame coincida com a metade superior de um círculo de raio  $a$  e centro na origem. As equações paramétricas de  $C$  são:

$$m = \int_C (ky) ds = \int_0^\pi (ka \sin t) \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt \quad (3.11)$$

$$= \int_0^\pi (ka \sin t) a dt \quad (3.12)$$

$$= ka^2 \int_0^\pi \sin t dt = ka^2 [\cos t]_0^\pi = 2ka^2. \quad (3.13)$$

□

Em aplicações que envolvem trabalho, as integrais curvilíneas costumam aparecer em forma da combinação

$$\int_C M(x, y) dx + \int_C N(x, y) dy$$

onde as funções  $M$  e  $N$  são contínuas em um domínio  $D$  que contém  $C$ . Costuma-se abreviar esta soma como

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

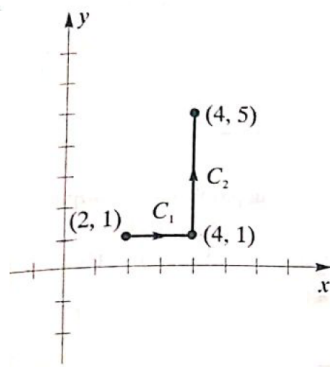
**Exemplo 3.11.** Calcule  $\int xy \, dx + x^2 \, dy$  se

- (a)  $C$  consiste em segmentos de reta de  $(2, 1)$  a  $(4, 1)$  e de  $(4, 1)$  a  $(4, 5)$ ;
- (b)  $C$  é o segmento de reta de  $(2, 1)$  a  $(4, 5)$ ;
- (c) as equações paramétricas de  $C$  são

$$x = 3t - 1, y = 3t^2 - 2t; 1 \leq t \leq \frac{5}{3}.$$

**Resolução.** (a) Subdividindo  $C$  em duas partes  $C_1$  e  $C_2$ , conforme figura 12.

Figura 12 – Soma de duas integrais curvilíneas



Fonte: Swokowski (1994, p.575)

As equações paramétricas dessas curvas são:

$$C_1 : x = t, y = 1; 2 \leq t \leq 4$$

$$C_2 : x = 4, y = t; 1 \leq t \leq 5$$

A integral curvilínea ao longo de  $C$  pode expressar-se como a soma de duas integrais curvilíneas, a primeira ao longo de  $C_1$  e a segunda ao longo de  $C_2$ . Sobre  $C_1$ , temos  $dy = 0$ ,  $dx = dt$  e, então

$$\int_{c_1} xy \, dx + x^2 \, dy = \int_2^4 t(1) \, dt + t^2(0) = \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_2^4 = 6.$$

Sobre  $C_2$  temos  $dx = 0$ ,  $dy = dt$  e, portanto,

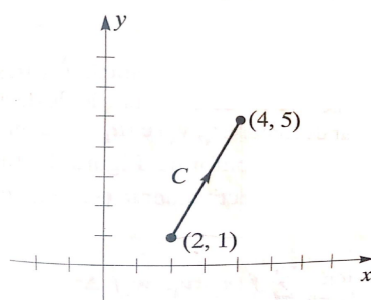
$$\int_{c_2} xy \, dx + x^2 \, dy = \int_1^5 4t(0) \, dt + 16 \, dt = 16 [t]_1^5 = 64.$$

Consequentemente, o valor da integral curvilínea ao longo de  $C$  é  $6 + 64$  ou  $70$ .

(b) A figura 13 ilustra o gráfico de  $C$ . A equação de  $C$  é  $y = 2x - 3$ , com  $2 \leq x \leq 4$ . Neste caso,  $dy = 2dx$  e

$$\begin{aligned} \int_c xy dx + x^2 dy &= \int_2^4 x(2x - 3) dx + x^2(2) dx \\ &= \int_2^4 (4x^2 - 3x) dx = \frac{170}{3}. \end{aligned}$$

Figura 13 – Gráfico de  $C$

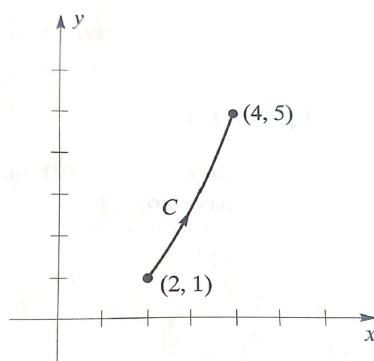


Fonte: Swokowski (1994, p.575)

(c) O gráfico de  $C$  é parte de uma parábola (ver figura 14). Neste caso, com as equações paramétricas  $x = 3t - 1$ ,  $y = 3t^2 - 2t$ ;  $1 \leq t \leq \frac{5}{3}$ , obtemos  $dx = 3dt$ ,  $dy = (6t - 2)dt$  e a integral curvilínea é igual a

$$\int_1^{\frac{5}{3}} (3t - 1)(3t^2 - 2t)3dt + (3t - 1)^2(6t - 2)dt = 58.$$

Figura 14 – Parte de uma parábola



Fonte: Swokowski (1994, p.576)

Outro método de resolução consiste em utilizar a equação  $y = \frac{1}{3}(x^3 - 1)$  para a parábola, com  $2 \leq x \leq 4$ . Obtemos então a integral

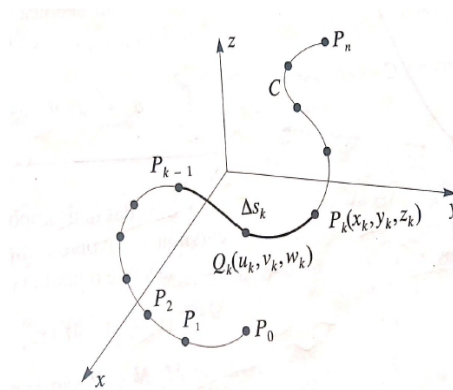
$$\begin{aligned} \int_c xy \, dx + \int x^2 \, dy &= \int_2^4 x \cdot \frac{1}{3}(x^2 - 1) \, dx + x^2 \left(\frac{2}{3}x\right) \, dx \\ &= \int_2^4 \left(x^3 - \frac{1}{3}x\right) \, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^2\right]_2^4 = 58. \end{aligned}$$

Se uma curva suave  $C$  em três dimensões tem a parametrização

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad z = k(t); \quad a \leq t \leq b$$

então definem-se as integrais curvilíneas de uma função  $f$  de três variáveis da mesma maneira que no caso de uma função de duas variáveis. Neste caso, em lugar de tomar  $(x_k, y_k)$  e  $(u_k, v_k)$  como as coordenadas de  $P_k$  e  $Q_k$  em  $C$ , conforme figura 9 tomamos  $(x_k, y_k, z_k)$  e  $(u_k, v_k, w_k)$  respectivamente (ver figura 15).

Figura 15 – Integral Curvilínea



Fonte: Swokowski (1994, p.577)

Temos agora, 
$$\int_c f(x, y, z) \, ds = \lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k, w_k) \Delta s_k.$$

Essa integral pode ser calculada utilizando-se a fórmula

$$\int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2 + [k'(t)]^2} \, dt.$$



Além das integrais curvilíneas  $\int_C f(x, y, z) dx$  e  $\int_C f(x, y, z) dy$ , uma função de três variáveis também tem uma integral curvilínea em relação a  $z$ , dada por

$$\int_C f(x, y, z) dz = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k, w_k) \Delta z_k,$$

onde  $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ . Tal como em duas dimensões, estas integrais curvilíneas costumam aparecer em forma de somas, que abreviamos para

$$\int_C M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + P(x, y, z) dz,$$

onde as funções  $M$ ,  $N$  e  $P$  são contínuas em toda uma região contendo  $C$ . Se  $C$  é dada parametricamente, então esta integral curvilínea pode ser calculada substituindo-se  $x$ ,  $y$  e  $z$  da mesma forma que no caso de duas variáveis.

**Exemplo 3.12.** Calcule  $\int_C yz dx + xz dy + xy dz$  se  $C$  é dada por

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3; \quad 0 \leq t \leq 2.$$

**Resolução.** A curva  $C$  (uma cúbica reversa). Substituímos  $x$ ,  $y$  e  $z$  e fazemos  $dx = dt$ ,  $dy = 2t dt$ ,  $dz = 3t^2 dt$ :

$$\int_0^2 t^5 dt + 2t^5 dt + 3t^3 dt = \int_0^2 6t^5 dt = [t^6]_0^2 = 64. \quad \square$$

**Definição 3.8.** Seja  $C$  uma curva suave no espaço,  $\mathbf{T}$  um vetor tangente unitário a  $C$  em  $(x, y, z)$  e  $\mathbf{F}$  a força que atua em  $(x, y, z)$ . O trabalho  $W$  realizado por  $\mathbf{F}$  ao longo de  $C$  é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} dS = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

onde  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ .

**Exemplo 3.13.** Se um campo de forças inverso  $\mathbf{F}$  é dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$$

onde  $k$  é uma constante, ache o trabalho realizado por  $\mathbf{F}$  quando o ponto de aplicação se move ao longo do eixo  $-x$  de  $A(1, 0, 0)$  a  $B(2, 0, 0)$ .

**Resolução.** Seja  $C$  o segmento de  $A$  e  $B$ . As equações paramétricas de  $C$  são  $x = t$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ;  $1 \leq t \leq 2$ . Tal como no exemplo (3.3).

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

Aplicando a definição (3.8), temos

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x dx + y dy + z dz)$$

e substituindo  $x$ ,  $y$ , e  $z$  das as equações paramétricas de  $C$ , temos

$$W = \int_1^2 \frac{k}{(t^2)^{\frac{3}{2}}} t dt = \int_1^2 \frac{k}{t^2} dt = \left[ -\frac{k}{t} \right]_1^2 = \frac{k}{2}.$$

A unidade de  $W$  depende das unidades da distância e de  $\|\mathbf{F}(x, y, z)\|$ .  $\square$

### 3.3 INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO

Costuma-se chamar caminho de  $A$  e  $B$  uma curva (parcialmente) suave de  $A$  e  $B$ . Vamos agora estabelecer condições para que uma integral curvilínea seja independente do caminho em uma região, no sentido de que, se  $A$  e  $B$  são pontos arbitrários, então obtemos o mesmo valor para qualquer caminho de  $A$  a  $B$  naquela região. Estabeleceremos os resultados para integrais curvilíneas em duas dimensões. Para o caso de três dimensões, as demonstrações são análogas, sendo assim, omitidas.

Se a integral curvilínea  $\int_C f(x, y) ds$  é independente do caminho, podemos denotá-la por  $\int_A^B f(x, y) ds$ , pois o valor da integral depende apenas dos extremos  $A$  e  $B$  da curva  $C$ . Utiliza-se notação análoga para  $\int_C f(x, y) dx$ ,  $\int_C f(x, y) dy$ , e integrais curvilíneas em três dimensões.

Em toda esta seção admitiremos que as regiões sejam conexas, isto é, dois pontos quaisquer da região podem ser ligados por uma curva (parcialmente) suave, inteiramente contida na região. O próximo teorema constitui um resultado fundamental sobre a independência do caminho.

**Teorema 3.6.** *Se  $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$  é contínua em uma região conexa<sup>2</sup> aberta<sup>3</sup>  $D$ , então a integral curvilínea  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho se e somente se  $\mathbf{F}$  é conservativo, ou seja,  $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$  para alguma função escalar  $f$ .*

**Demonstração.** Suponhamos a integral independente do trajeto em  $D$ . Se  $(x_0, y_0)$  é um ponto fixo em  $D$ , definamos  $f$  como

$$f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

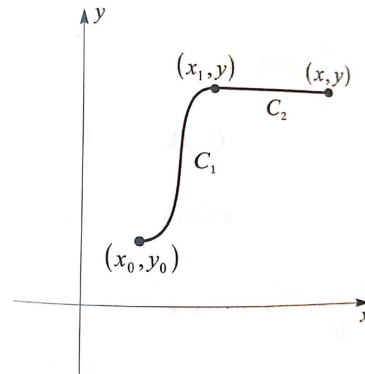
<sup>2</sup> Uma região é dita conexa quando dois pontos quaisquer da região podem ser ligados por uma curva (parcialmente) suave, inteiramente contida na região.

<sup>3</sup> Uma região é aberta se não contém nenhum de seus pontos - fronteira, isto é, todo ponto da região é ponto interior

para todo ponto  $(x, y)$  em  $D$ . Mostraremos que  $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ .

Como a integral é independente do caminho,  $f$  depende somente de  $x$  e  $y$ , e não do caminho  $C$  de  $(x_0, y_0)$  a  $(x, y)$ . Escolhamos um círculo  $D$  com centro  $(x, y)$  e seja  $(x_1, y)$  um ponto interior ao círculo tal que  $x_1 \neq x$ , de acordo com a figura 16.

Figura 16 – Caminho arbitrário de  $C_1$



Fonte: Swokowski (1994, p. 585)

Se  $C_1$  é um caminho arbitrário de  $(x_0, y_0)$  a  $(x_1, y)$  e  $C_2$  é o segmento horizontal de  $(x_1, y)$  a  $(x, y)$ , então

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Como a primeira integral não depende de  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Escrevendo  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = M(x, y)dx + N(x, y)dy$  e notando que  $dy = 0$  em  $C_2$  (ver figura 16), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} M(x, y)dx.$$

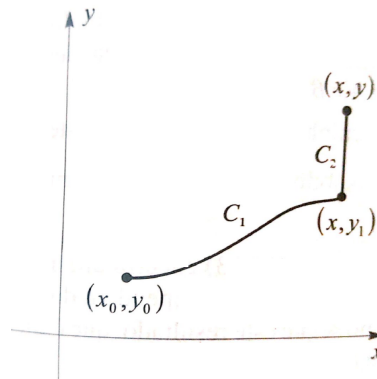
Como o  $y$  é fixo nesta diferenciação parcial, podemos encarar o integrando como uma função de uma variável  $x$ . Aplicando (Teorema 5.35, ver Swokowski vol. I para melhores detalhes)<sup>4</sup>, obtemos

<sup>4</sup> Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$ . Se  $a \leq c \leq b$ , então, para todo  $x$  em  $[a, b]$ ,  $D_x \int_c^x f(t) dt = f(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = M(x, y).$$

Analogamente, escolhendo o caminho da figura 17 e diferenciando em relação a  $y$ , obtemos

Figura 17 – Independência de Caminho



Fonte: Swokowski (1994, p. 585)

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = N(x, y).$$

Isto prova que  $\nabla f(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j = \mathbf{F}(x, y)$ . ■

Reciprocamente, se existe uma função  $f$  tal que  $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ , então:

$$M(x, y)i + N(x, y)j = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j$$

Logo,

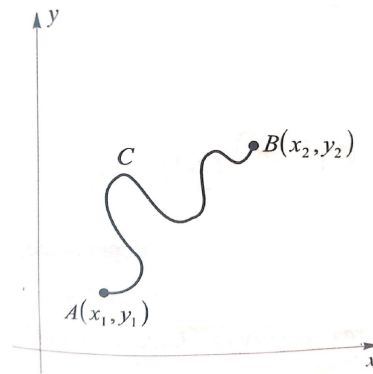
$$M(x, y) = f_x(x, y) \text{ e } N(x, y) = f_y(x, y).$$

Se  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$  são pontos da região  $D$  e se  $C$  é uma curva arbitrária parcialmente suave com extremidades  $A$  e  $B$ , conforme figura 18 então:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot dr = \int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \int_C f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy.$$

Se  $C$  admite a parametrização suave  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$ ;  $t_1 \leq t \leq t_2$ , então, pelo Teorema (3.5),

Figura 18 – Curva Suave



Fonte: Swokowski (1994, p. 585)

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} [f_x(g(t); h(t))g'(t) + f_y(g(t); h(t))h'(t)]dt.$$

Aplicando a regra da cadeia e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [f(g(t), h(t))]dt \\ &= f(g(t_2), h(t_2)) - f(g(t_1), h(t_1)) \\ &= f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \\ &= [f(x, y)]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \end{aligned}$$

Onde o último par de colchetes é usado de maneira análoga ao caso de uma variável. Assim, a variável curvilínea depende somente das coordenadas de  $A$  e  $B$ , e não do caminho  $C$ , isto é,  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho. A prova pode ser estendida a curvas parcialmente suaves subdividindo-se  $C$  em um número finito de arcos suaves.

A demonstração do Teorema (3.6) encerra um método para calcular integrais curvilíneas que não dependem do caminho. Podemos enunciar como segue este resultado, que é análogo ao Teorema Fundamental do Cálculo.

**Teorema 3.7.** *Seja  $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$  contínua em uma região conexa aberta  $D$ , e seja  $C$  uma curva parcial suave em  $D$  com extremidades  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$ . Se  $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ , então*

$$\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = [f(x, y)]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}$$

Se uma integral curvilínea  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho, então, pelo Teorema (3.7) com  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  vemos que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para toda curva fechada simples  $C$ .

**Exemplo 3.14.** Seja  $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y^3)\mathbf{i} + (3xy^2 + 4)\mathbf{j}$ .

(a) Mostre que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho.

(b) Calcule  $\int_{(0,1)}^{(2,3)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .

**Resolução.** (a) Pelo Teorema (3.6), a integral curvilínea é independente do caminho se e somente se existe uma função diferenciável  $f$  de  $x$  e  $y$  tal que  $\nabla f(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$ , isto é,  $f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = (2x + y^3)\mathbf{i} + (3xy^2 + 4)\mathbf{j}$  ou, equivalentemente,  $f_x(x, y) = 2x + y^3$  e  $f_y(x, y) = 3xy^2 + 4$ . Integrado (parcialmente)  $f_x(x, y) = 2x + y^3$  em relação a  $x$ , obtemos

$$f_x(x, y) = x^2 + xy^3 + g(y)$$

onde  $g$  é uma função de  $y$  somente. (Devemos tomar  $g(y)$  em lugar de uma constante de integração, a fim de obter a expressão mais geral para  $f(x, y)$  tal que  $f_x(x, y) = 2x + y^3$ ).

Diferenciamos em seguida  $f(x, y) = x^2 + xy^3 + g(y)$  em relação a  $y$  e comparamos o resultado com a expressão  $f_y(x, y) = 3xy^2 + 4$  como anteriormente calculada. Assim,

$$f_y(x, y) = 0 + 3xy^2 + g'(y) = 3xy^2 + 4$$

e, então,

$$g'(y) = 4$$

Integrando em relação a  $y$ , obtemos

$$g(y) = 4y + c$$

onde  $c$  é uma constante de integração. Assim,

$$f(x, y) = x^2 + xy^3 + 4y + c$$

é uma função  $f$  tal que  $\nabla f(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$ .

(b) Como qualquer função potencial serve para calcular a integral, aplicamos o Teorema (3.7) com  $f(x, y) = x^2 + xy^3 + 4y$ , obtendo

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)}^{(2,3)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= [f(x, y)]_{(0,1)}^{(2,3)} \\ &= [x^2 + xy^3 + 4y]_{(0,1)}^{(2,3)} \\ &= (4 + 54 + 12) - 4 = 66. \end{aligned}$$

□

Se a integral  $\int_c M(x, y)dx + N(x, y)dy$  é independente do caminho, então pelo Teorema (3.6), existe uma função  $f$  tal que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x}$$

e

$$N = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Consequentemente

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

e

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Se  $M$  e  $N$  têm derivadas parciais primeiras contínuas, então  $f$  tem derivadas parciais segundas contínuas e assim, a ordem de diferenciação é irrelevante, isto é,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

A recíproca deste resultado é falsa, a menos que imponhamos restrições adicionais ao domínio  $D$  de  $\mathbf{F}(x, y)$ . Em particular, se  $D$  é uma região simplesmente conexa, no sentido de que toda curva fechada simples  $C$  em  $D$  inclui somente pontos de  $D$  (isto é, não há buracos na região), então a condição  $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$  implica que a integral curvilínea

$$\int_c M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

é independente do caminho.

**Teorema 3.8.** *Se  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  têm derivadas parciais primeiras contínuas em uma região simplesmente conexa  $D$ , então a integral curvilínea*

$$\int_c M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

*é independente do caminho em  $D$  se e somente se*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

**Exemplo 3.15.** Mostre que a integral curvilínea

$$\int_c (e^{3y} - y^2 \sin x)dx + (3xe^{3y} + 2y \cos x)dy$$

é independente do caminho em uma região simplesmente conexa.

**Resolução.** Fazendo

$$M = e^{3y} - y^2 \sin x \text{ e } N = 3xe^{3y} + 2y \cos x$$

vemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3e^{3y} - 2y \sin x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

□

### 3.4 INTEGRAIS DE SUPERFÍCIES

A relação entre integral de superfície e área de superfície é semelhante àquela entre a integral de linha e o comprimento de arco. Suponha que  $f$  seja uma função de três variáveis cujo domínio inclui uma superfície  $S$ .

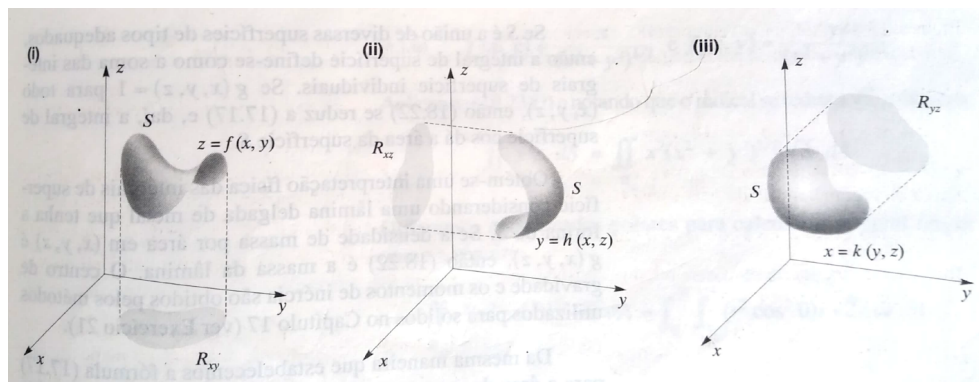
As integrais curvilíneas são calculadas ao longo de curvas. As integrais duplas e triplas são definidas em regiões de duas e três dimensões, respectivamente. Podemos também considerar uma integral de uma função sobre uma superfície. Por uma questão de simplicidade, restringimos nosso estudo a superfícies de equações assaz simples, e nossas demonstrações ficarão em um nível intuitivo. Em textos de cálculo avançado pode-se encontrar um tratamento rigoroso.

Se a projeção de uma superfície  $S$  sobre um plano coordenado é uma região de um dos tipos considerados para integrais duplas, dizemos que  $S$  tem uma projeção regular no plano  $-xy$ , no plano  $-xz$  ou no plano  $-yz$ , costumamos denotar a região por  $R_{xy}$ ,  $R_{xz}$  ou  $R_{yz}$ , respectivamente. Para tais projeções admitimos que  $S$  seja o gráfico de uma equação da forma  $z = f(x, y)$ ,  $y = h(x, z)$  ou  $x = k(y, z)$ , respectivamente conforme a figura 19.



Admitimos, além disso, que a função  $f$ ,  $g$  ou  $k$  tenha derivadas parciais primeiras contínuas em sua respectiva região.

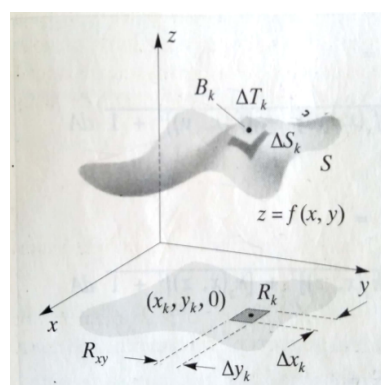
Figura 19 – Projeção de Superfícies



Fonte: Swokowski (1994, p. 605)

Consideremos primeiro o caso do gráfico  $S$  de  $z = f(x, y)$ , ver figura 19(i). Considere também a área <sup>5</sup>  $A$  de  $S$ . Técnica análoga pode ser usada para definir uma integral de  $g(x, y, z)$  sobre a superfície  $S$ , se a função  $g$  é contínua em toda uma região contendo  $S$ . Assim, conforme ilustrado na figura 20

Figura 20 – Projeção da superfície  $S$  e plano tangente  $B_k$  sobre o retângulo  $R_k$



Fonte: Swokowski (1994, p. 605)

$\Delta S_k$  e  $\Delta T_k$  denotarão áreas de porções da superfície  $S$  e do plano tangente em  $B_k(x_k, y_k, z_k)$ , respectivamente, que se projetam sobre o retângulo  $R_k$  de uma partição interior de  $R_{xy}$ . Calculamos  $g$  em  $B_k$  para cada  $k$  e formamos a soma

$$^5 A = \lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_k \Delta T_k$$

$$\sum_k g(x_k, y_k, z_k) \Delta T_k.$$

De acordo com a definição seguinte, a integral de superfície

$$\iint_S g(x, y, z) dS$$

de  $g$  sobre  $S$  é o limite de tais somas quando as normas das partições tendem para 0.

**Definição 3.9.** Integral de Superfície

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_k g(x_k, y_k, z_k) \Delta T_k \quad (3.14)$$

Se  $S$  é a união de diversas superfícies de tipos adequados, então a integral de superfície define-se como a soma das integrais de superfícies individuais. Se  $g(x, y, z) = 1$  para todo  $(x, y, z)$  então 3.14 se reduz a

$$A = \iint_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} dA \quad (3.15)$$

e, daí, a integral de superfície nos dá a área da superfície  $S$ .

Da mesma maneira que estabelecemos a fórmula (3.15) para área de uma superfície, a integral de superfície (3.14) por ser calculada por meio da fórmula (3.16) do Teorema (3.9). As fórmulas (3.17) e (3.18) do teorema (3.9), são utilizadas para superfícies do tipo ilustrado na figura (19) (ii) e (iii).

**Teorema 3.9.** Teorema de Cálculo para Integrais de Superfície

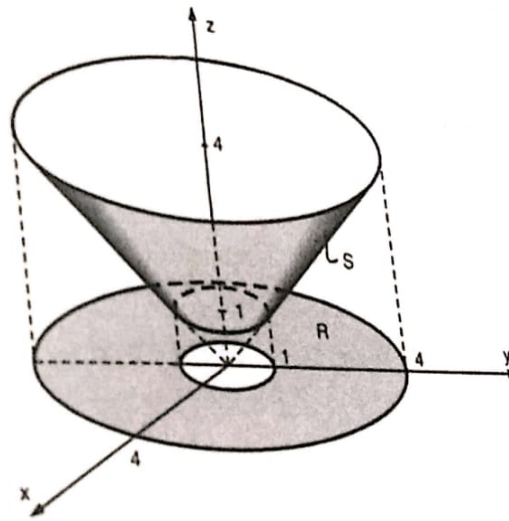
$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_{R_{xy}} g(x, y, f(x, y)) \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} dA \quad (3.16)$$

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_{R_{xz}} g(x, h(x, z), z) \sqrt{[h_x(x, z)]^2 + [h_z(x, z)]^2 + 1} dA \quad (3.17)$$

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_{R_{yz}} g(k(y, z), y, z) \sqrt{[k_y(y, z)]^2 + [k_z(y, z)]^2 + 1} dA \quad (3.18)$$

**Exemplo 3.16.** Calcule  $\iint_S x^2 z dS$  se  $S$  é a porção do cone  $z^2 = x^2 + y^2$  compreendida entre os planos  $z = 1$  e  $z = 4$ .

Figura 21 – Cone



Fonte: Swokowski (1994, pag.606)

**Resolução.** Conforme a figura 21, a projeção  $R = R_{xy}$  de  $S$  sobre o plano  $-xy$  é a região anular delimitada pelos círculos de raios 1 e 4 com centros na origem. Escrevendo a equação de  $S$  na forma

$$z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = f(x, y)$$

$$\text{então } f_x(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ e } f_y(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Aplicando o item (i) do teorema (3.9) e notando que o radical se reduz a  $\sqrt{2}$ , obtemos

$$\iint_S x^2 z \, dS = \iint_{R_{xy}} x^2 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \, dA.$$

Utilizamos coordenadas polares para calcular a integral dupla como a seguir:

$$\begin{aligned} \iint_{R_{xy}} x^2 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \, dA &= \int_0^{2\pi} \int_1^4 (r^2 \cos^2 \theta) r \sqrt{2} r \, dr \, d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[ \frac{r^5}{5} \right]_1^4 \, d\theta \\ &= \frac{1023\sqrt{2}}{5} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta \\ &= \frac{1023\sqrt{2}}{10} \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1023\sqrt{2}\pi}{9} \approx 909. \end{aligned}$$

□

Seja  $\mathbf{F}$  um campo vetorial tal que

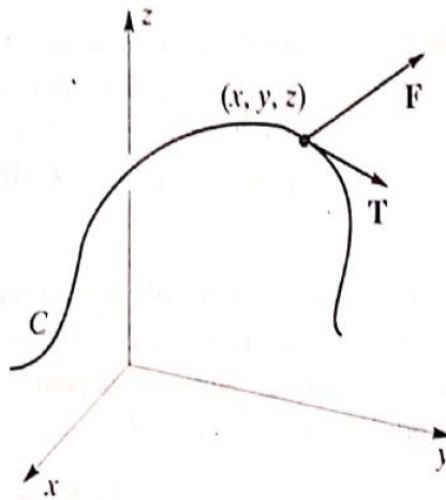
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{M}(x, y, z)\vec{i} + \mathbf{N}(x, y, z)\vec{j} + \mathbf{P}(x, y, z)\vec{k}$$

onde  $M, N$  e  $P$  são funções (escalares) contínuas. Na seção (3.2) consideramos a seguinte integral curvilínea para uma curva parcialmente suave<sup>6</sup>  $C$  :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot T \, ds \quad (3.19)$$

onde  $s$  é o parâmetro comprimento de arco para  $C$ . Conforme figura 22,  $T = dr/ds$  é um vetor unitário tangente a  $C$  no ponto  $(x, y, z)$ , onde  $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  é o vetor posição de  $(x, y, z)$ . Se  $\mathbf{F}$  é um campo de força, então, conforme (3.8) o valor desta integral curvilínea é o trabalho realizado por  $\mathbf{F}$  ao longo de  $C$ .

Figura 22 – Comprimento de Arco



Fonte: Swokowski (1994, pag.610)

Consideremos em seguida uma superfície  $S$  e um vetor unitário  $\mathbf{n}$  normal a  $S$  no ponto  $(x, y, z)$ , conforme figura 23.

Se os componentes de  $\mathbf{n}$  são funções contínuas de  $x, y$  e  $z$ , então,  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  é uma função (escalar) contínua e podemos, assim, considerar a seguinte integral de superfície sobre  $S$  a qual é chamada **Integral do fluxo de  $\mathbf{F}$  sobre  $S$** .

<sup>6</sup> Uma curva é dita parcialmente suave se o intervalo  $I$  pode ser subdividido em intervalos fechados,  $C$  sendo suave em cada subintervalo. Swokowski (1994, p.166).

Integral do fluxo de  $F$  sobre  $S$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (3.20)$$

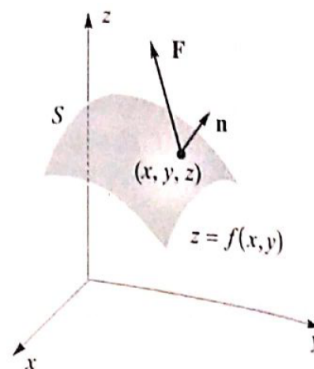
Para calcular a equação acima devemos ser mais precisos sobre as propriedades do vetor unitário  $\mathbf{n}$ . Se a superfície  $S$  é o gráfico de uma equação  $z = f(x, y)$  e se fazemos  $g(x, y, z) = z - f(x, y)$ , então  $S$  é também o gráfico da equação  $g(x, y, z) = 0$ . Como o gradiente  $\nabla g(x, y, z) = 0$  no ponto  $(x, y, z)$ , podemos obter como a seguir um vetor unitário normal  $\mathbf{n}$ .

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|} = \frac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}} \quad (3.21)$$

Fórmulas análogas valem se  $S$  é dada por  $y = h(x, z)$  ou por  $x = k(y, z)$ . Note que, para o caso  $z = f(x, y)$ , o vetor unitário  $\mathbf{n}$  é uma normal superior de  $S$ , pois o componente  $K$  é positivo. Obtém-se uma normal inferior tomando-se  $-\mathbf{n}$ .

Admitiremos que toda superfície  $S$  é orientada (ou orientável), no sentido de que existe um vetor unitário normal  $\mathbf{n}$  em cada ponto não-fronteira  $(x, y, z)$  e que as componentes de  $\mathbf{n}$  são funções contínuas de  $x, y$  e  $z$ . Dizemos que  $\mathbf{n}$  varia *continuamente* sobre a superfície  $S$ . Admitiremos também que  $S$  tenha dois lados - o *lado de cima* e o *lado de baixo* do gráfico de  $z = f(x, y)$  da figura 23.

Figura 23 – Superfície  $S$  e vetor unitário  $\mathbf{n}$  normal

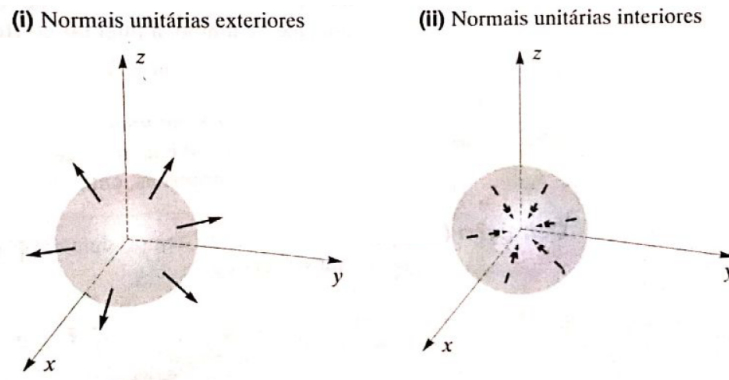


Fonte: Swokowski (1994, pag.610)

Para uma superfície fechada  $S$  como uma esfera, podemos considerar o *exterior* e o *interior* de  $S$ . Referimo-nos então a  $\mathbf{n}$  como a normal unitária exterior ou a normal unitária interior (veja figura 25).

Suponhamos que  $dS$  represente um pequeno elemento de área de  $S$ . Se  $\mathbf{F}$  é contínua, então é quase constante em  $dS$ , e a quantidade de fluido que atravessa  $dS$  por unidade de

Figura 24 – Superfície com normal unitária



Fonte: Swokowski (1994, pag.563)

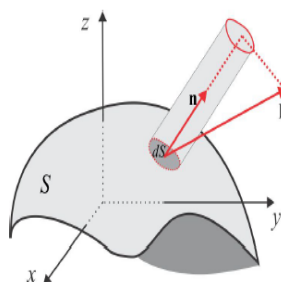
tempo pode ser aproximada pelo volume de um prisma de área de base  $dS$  e altura  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ , conforme ilustrado na figura 25. Denotando por  $dV$  o volume do prisma na figura, então  $dV = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ . Como  $dV$  representa a quantidade de fluido que atravessa  $dS$  por unidade de tempo, a integral do fluxo é um limite de somas de elementos de volume e, daí  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$  é o volume total de fluido que atravessa  $S$  em uma unidade de tempo. Esta quantidade é chamada fluxo de  $\mathbf{F}$  através de (ou sobre)  $S$ . Se  $\mathbf{F}$  e  $S$  satisfazem as condições impostas, então temos o seguinte:

**Definição 3.10.** O fluxo de um campo vetorial  $\mathbf{F}$  através de (ou sobre) uma superfície  $S$  é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Se o fluido de nosso estudo prévio tem densidade  $\delta = \delta(x, y, z)$ , então o valor da integral do fluxo  $\iint_S \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$  é a massa de fluido que atravessa  $S$ .

Figura 25 – Superfície com normal unitária



Fonte: Silva e Matos (2018, p.258)

## 4 O TEOREMA DA DIVERGÊNCIA E APLICAÇÕES

Neste capítulo apresentamos um teorema de fundamental importância para a Matemática e outras áreas do conhecimento humano que é o Teorema da Divergência ou Teorema de Gauss. A história da Matemática nos revela que esse é um dos mais importantes teoremas do cálculo vetorial, com abrangência de largo alcance na ciência e na engenharia.

### 4.1 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Este teorema estabelece o fluxo de um campo vetorial sobre uma região fechada<sup>1</sup>  $S$  que é fronteira de uma região  $Q$  em três dimensões. Por exemplo,  $S$  pode ser uma esfera, um elipsóide, um cubo ou um tetraedro. Pode-se demonstrar o teorema da divergência para regiões assaz complicadas; todavia, tal demonstração nos levaria aos domínios do cálculo avançado. Assim, admitiremos que  $Q$  seja uma região sobre a qual as integrais triplas podem ser calculadas; admitiremos também que as integrais de superfícies possam ser calculadas sobre  $S$ . Neste capítulo,  $\mathbf{n}$  denotará uma normal unitária exterior a  $S$ . Sobre as restrições a  $Q$  e a  $S$ , o teorema da divergência pode ser enunciado como a seguir:

**Teorema 4.1** (Teorema da Divergência). *Seja  $Q$  uma região em três dimensões delimitada por uma superfície fechada  $S$ , e denotemos por  $\mathbf{n}$  o vetor normal unitário exterior a  $S$  em  $(x, y, z)$ . Se  $\mathbf{F}$  é uma função vetorial dotada de derivadas parciais contínuas em  $Q$ , então*

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iiint_Q \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV \quad (4.1)$$

isto é, o fluxo de  $\mathbf{F}$  sobre  $S$  é igual a integral tripla da divergência de  $\mathbf{F}$  sobre  $Q$ .

**Demonstração.** Se  $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$ , simplifiquemos a notação escrevendo  $\mathbf{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ . Aplicando propriedade do produto escalar e a definição de  $\mathbf{F}$ , podemos escrever a conclusão do teorema como

$$\iint_S (M\vec{i} \cdot \mathbf{n} + N\vec{j} \cdot \mathbf{n} + P\vec{k} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \iiint_Q \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dV$$

Para provar esta igualdade basta mostrar que

$$\iint_S M\vec{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x} \, dV$$

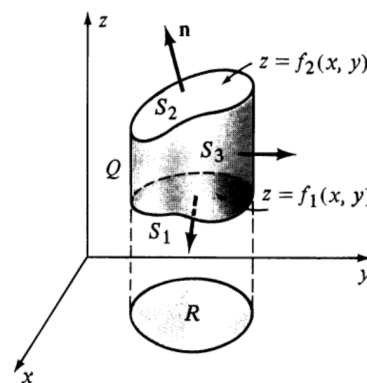
<sup>1</sup> Uma região fechada é uma região que contém todos os seus pontos - fronteiras

$$\iint_S N\vec{j} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y} \, dV$$

$$\iint_S P\vec{k} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} \, dV.$$

Como as provas de todas as três fórmulas são semelhantes, consideraremos apenas a terceira. Além disso, a prova ficará restrita ao caso, ilustrado na figura 26

Figura 26 – Superfície com normal unitária



Fonte: Swokowski (1994, p.616)

em que  $S$  é a superfície de uma região  $Q$  entre os gráficos de  $z = v(x, y)$  e  $z = u(x, y)$  e acima de uma região conveniente  $R$  do plano  $-xy$ . Denotaremos por  $S_1$  a superfície superior, por  $S_2$  a superfície inferior e por  $S_3$  a superfície lateral. A figura exhibe algumas normais unitárias exteriores típicas. Sobre  $S_3$  o componente  $K$  de  $n$  é 0 e, então,  $K \cdot \mathbf{n} = 0$ . Assim, a integral do fluxo sobre  $S_3$  é 0, e podemos escrever

$$\iint_S Pk \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_1} Pk \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_{S_2} Pk \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Tal como na seção 3.4 página 39, para achar uma normal unitária (superior) a  $S_1$  fazemos

$$g_1(x, y, z) = z - u(x, y)$$

e calculamos

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g_1(x, y, z)}{\|\nabla g_1(x, y, z)\|} = \frac{-u_x(x, y)\vec{i} - u_y(x, y)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{[u_x(x, y)]^2 + [u_y(x, y)]^2 + 1}}.$$



Logo,  $K \cdot \mathbf{n} = 1/\sqrt{[u_x(x, y)]^2 + [u_y(x, y)]^2 + 1}$ . Aplicando a equação 3.16 do Teorema 3.9 com  $R = R_{xy}$  e  $u(x, y) = f(x, y)$ , os radicais cancelam-se, obtendo-se

$$\iint_{S_1} P K \cdot \mathbf{n} dS = \iint_R P(x, y, u(x, y)) dA$$

Em  $S_2$  fazemos

$$g_2(x, y, z) = z - v(x, y)$$

e utilizamos a unitária normal inferior  $\mathbf{n}$  dada por

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla g_2(x, y, z)}{\|\nabla g_2(x, y, z)\|} = \frac{v_x(x, y)\vec{i} + v_y(x, y)\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{[v_x(x, y)]^2 + [v_y(x, y)]^2 + 1}}$$

Novamente aplicando (3.9) (3.16) obtemos a integral do fluxo sobre  $S_2$

$$\iint_{S_2} P K \cdot \mathbf{n} dS = -\iint_R P(x, y, v(x, y)) dA.$$

Somando as integrais do fluxo sobre  $S_1$  e  $S_2$ , obtemos

$$\begin{aligned} \iint_S P K \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_R [P(x, y, u(x, y)) - P(x, y, v(x, y))] dA \\ &= \iint_R \left[ \int_{v(x, y)}^{u(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z} dz \right] dA = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} dV \end{aligned}$$

como queríamos provar. ■

## 4.2 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA E SUAS RELAÇÕES

Podemos observar que as equações do teorema da Divergência apresentam relações com o teorema de Stokes e o teorema de Green. De acordo com Bandeira (2016) podemos no referir ao teorema de Green como uma integral de linha ao longo de uma curva  $C$ , fechada, simples e seccionalmente suave que forma a fronteira de uma região  $R$  no plano e o sentido ao longo de  $C$  é anti-horário. Em Swokowski (1994, pag.624) podemos citar o teorema de Stokes como: A integral curvilínea do componente tangencial de  $F$  tomada uma vez ao longo de  $C$  na direção positiva é igual à integral de superfície do componente normal de  $rot F$  sobre  $S$ . Note que o teorema de Stokes vem de forma a generalizar o teorema de Green, isto é, de uma região bidimensional para um superfície tridimensional. Do mesmo modo, o teorema da Divergência generaliza o teorema de Green. De acordo com Thomas (2009) se pensarmos em um campo no  $R^2$  com  $F = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$  como um campo no  $R^3$  com a componente  $k = 0$ , teremos  $\nabla \cdot \mathbf{F} = (\partial M/\partial x) + (\partial N/\partial y)$ . Dessa forma o teorema de Green pode ser escrito como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_R \left[ \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) \right] dx dy = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} dA$$

De maneira similar,  $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{K} = (\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$ , a forma tangencial pode ser escrita como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{K} dA.$$

Segundo Thomas (2009, pag. 543), "com as equações do teorema de Green com a notação nabla, podemos ver sua relação com as equações de Stokes e do teorema da divergência." Assim, observaremos o teorema de Green e sua generalização para três dimensões:

**Forma normal do teorema de Green:**  $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} dA$

**Teorema da divergência:**  $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\theta = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV$

**Forma tangencial do teorema de Green:**  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{K} dA$

**Teorema de Stokes:**  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\theta$

## 5 APLICAÇÕES

O teorema da Divergência é amplamente usado na física e na engenharia, mais precisamente na eletrostática e na dinâmica de fluídos. Veremos a seguir alguns exemplos de aplicações do teorema em algumas regiões sobre as quais as integrais triplas podem ser calculadas.

**Exemplo 5.1.** (SWOKOWSKI, 1994) Seja  $Q$  a região delimitada pelo cilindro circular  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e pelos planos  $z = 0$  e  $z = 3$ . Denotaremos por  $S$  a superfície de  $Q$ . Se  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ , use o teorema da divergência para calcular

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

**Resolução.** A figura 27 ilustra a superfície  $S$  e algumas posições típicas de  $\mathbf{n}$ . Como  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$  temos, pelo teorema da divergência

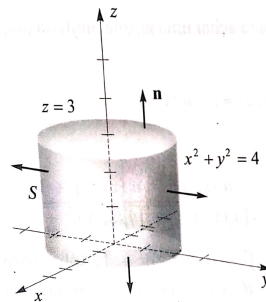
$$\iint_S F \cdot n dS = 3 \iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

Calculando a integral tripla por coordenadas cilíndricas, temos:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 (r^2 + z^2) r dz dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[ r^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right]_0^3 ddr d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3r^2 + 9) r dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{4} r^4 + \frac{9}{2} r^2 \right]_0^2 d\theta = 3 \int_0^{2\pi} 30 d\theta \\ &= 90 [\theta]_0^{2\pi} = 180\pi \end{aligned}$$

□

Figura 27 – Superfície  $S$ .



Swokowski (1994, p.618)

**Exemplo 5.2.** (SILVA; MATOS, 2018) Calcular o fluxo do campo  $\mathbf{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xz\vec{k}$ , através da fronteira do tetraedro determinados pelos planos coordenados e pelo plano  $x + y + z = 1$ .

**Resolução.** Temos que  $\text{div}(\mathbf{F}) = x$  e se  $\Omega$  representa a região delimitada pelo tetraedro, usamos o Teorema de Gauss e obtemos

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) &= \iiint_{\Omega} \text{div}(\mathbf{F}) dV = \iiint_{\Omega} x dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-y) dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 5.3.** (SILVA; MATOS, 2018) Seja  $S$  a fronteira do sólido  $\Omega$ , delimitada pelo cilindro  $z = 4 - x^2$  e pelos planos  $y = 5$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ . Calcular o fluxo do campo  $\mathbf{F} = (x^3 + \text{sen}z)\vec{i} + (x^2y + \text{cos}z)\vec{j} + \text{exp}(x^2 + y^2)\vec{k}$ , através de  $S$ .

**Resolução.** Primeiro faça um esboço da superfície e de sua orientação. O cálculo direto da integral de superfície é bastante trabalhoso, e ele torna-se mais simples quando usamos o Teorema de Gauss. Como

$L = x^3 + \text{sen}z$ ,  $M = x^2y + \text{cos}z$  e  $N = \text{exp}(x^2 + y^2)$ ,  
temos que  $\text{div}\mathbf{F} = L_x + M_y + N_z = 3x^2 + x^2 + 0 = 4x^2$   
e do Teorema de Gauss, resulta

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = 4 \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = 4 \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^5 x^2 dy dz dx = \frac{512}{3}.$$

□

**Exemplo 5.4.** (SILVA; MATOS, 2018) (Equação Fundamental da Eletrostática) Consideremos uma superfície fechada  $S$  (uma esfera, por exemplo) contendo uma carga pontual  $q$  no seu interior, situada no ponto  $P_0$ ; e representemos por  $\mathbf{E}(P)$  o campo elétrico no ponto  $P$  de  $S$ ; produzido pela carga  $q$ , como ilustra a Figura 28

**Resolução.** Se  $\mathbf{r} = P_0P$  e  $r = |\mathbf{r}|$ , como consequência da Lei de Coulomb, temos que

$$\mathbf{E}(P) = kq \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla\phi,$$

onde  $\phi = kq/r$  e o potencial eletrostático, e o fluxo do campo  $\mathbf{E}$  através de  $S$  é, portanto,

$$\iint_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = kq \iint_S \frac{1}{r^2} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{n} \right) dS = kq \iint_S \frac{\cos \alpha dS}{r^2}. \quad (5.1)$$

Se representarmos por  $d\omega$  a área elementar sobre a esfera unitária, teremos  $d\omega = \frac{\cos \alpha dS}{r^2}$  e a partir de (5.1) obtemos a seguinte relação:

$$\iint_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = kq \iint_S \frac{\cos \alpha dS}{r^2} = kq \iint_S d\omega = 4k\pi q.$$

No caso de uma distribuição de carga  $Q$ , com densidade  $\rho(x, y, z)$ , a carga total na região  $\Omega$ , delimitada por  $S$ , é

$$Q = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV$$

e o fluxo do campo elétrico será

$$\iint_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = 4k\pi Q = 4k\pi \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV. \quad (5.2)$$

Comparando (5.2) com a Fórmula de Gauss, obtemos

$$\iiint_{\Omega} [4k\pi - \operatorname{div}(\mathbf{E})] dV = 0,$$

de onde resulta a Equação Fundamental da Eletrostática

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = 4k\pi\rho. \quad (5.3)$$

Se  $\phi$  representa o potencial eletrostático no ponto  $P_0$ , isto é,

$$\phi(P_0) = k \iint_S \frac{\rho}{r} dS \quad (5.4)$$

então  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  e obtemos de (5.3)

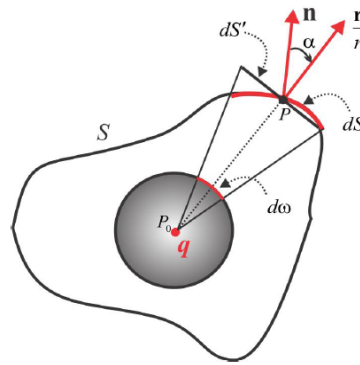
$$\Delta\phi = \operatorname{div}(\Delta\phi) = -\operatorname{div}(\mathbf{E}) = -4k\pi\rho,$$

de onde resulta a equação de Poisson para o potencial:

$$\Delta\phi = -4k\pi\rho.$$

□

Figura 28 – Fluxo do campo elétrico.



Silva e Matos (2018, p.266)

**Exemplo 5.5.** (SILVA; MATOS, 2018) Calcular o potencial eletrostático e o campo elétrico, em um ponto  $P(0; 0; \xi)$  do eixo  $z$ , devido a uma distribuição uniforme de carga elétrica no disco  $S : x^2 + y^2 \leq a^2; z = 0$  :

**Resolução.** Segue de (5.4) que o potencial eletrostático no ponto  $P(\theta, \eta, \xi)$  devido a distribuição de carga de densidade  $\rho(x, y, z)$  sobre o disco  $S$  é

$$\phi(\delta, \eta, \xi) = \iint_S \frac{\rho(x, y, z)}{r} dS,$$

$$r = \sqrt{(\delta - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\xi - z)^2},$$

e admitindo que a densidade  $\rho$  seja constante, o potencial no ponto  $(0, 0, \xi)$  do eixo  $z$  será:

$$\begin{aligned} \phi(0, 0, \xi) &= \iint_S \frac{\rho dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + \xi^2}} = \rho \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + \xi^2}} \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{r dr d\theta}{\sqrt{r^2 + \xi^2}} \\ &= 2\pi\rho \int_{\xi^2}^{a^2 + \xi^2} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 2\pi\rho \left[ \sqrt{a^2 + \xi^2} - |\xi| \right]. \end{aligned}$$

□

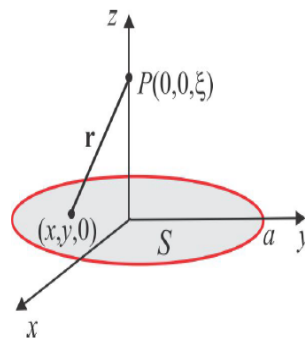
O campo elétrico no ponto  $P$  pode ser calculado diretamente, usando a Lei de Coulomb:

$$\mathbf{E} = \iint_S k\rho \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS$$

ou usando o potencial, como faremos neste caso:

$$\mathbf{E}(0, 0, \xi) = -\nabla\phi(0, 0, \xi) = -2\pi\rho \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \sqrt{a^2 + \xi^2} - |\xi| \right] \mathbf{k} = -2\pi\rho \left[ \frac{1}{\sqrt{a^2 + \xi^2}} - \frac{1}{|\xi|} \right] \mathbf{k}.$$

Figura 29 – Distribuição de carga sobre o disco.



Silva e Matos (2018, p.267)

**Exemplo 5.6.** (THOMAS, 2009) Seja  $D$  uma região no espaço limitada por uma superfície fechada e orientada  $S$ . Se  $v(x, y, z)$  é o campo de velocidade de um fluido que escoia através de  $D$ ,  $\delta = \delta(t, x, y, z)$  é a densidade do fluido em  $(x, y, z)$  no tempo  $t$ , e  $\mathbf{F} = \delta \mathbf{v}$ , então a **equação da continuidade** da hidrodinâmica afirma que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} + \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0$$

Se as funções envolvidas têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas, a equação evolui naturalmente a partir do teorema da divergência, como veremos a seguir.

**Resolução.** Primeiro, a integral

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\theta$$

é a taxa na qual a massa deixa  $D$  através de  $S$  (deixa porque  $\mathbf{n}$  é a normal exterior). Para saber por que, considere um pedaço de área sobre a superfície conforme figura 30.

Em um curto intervalo de tempo  $\Delta t$ , o volume  $\Delta V$  do fluido que escoia através do pedaço é aproximadamente igual ao volume de um cilindro com área de base  $\Delta v$  e altura  $(v\Delta) \cdot \mathbf{n}$ , onde  $v$  é um vetor velocidade com origem em um ponto do pedaço:

$$\Delta t$$

A massa desse volume de fluido é de cerca de

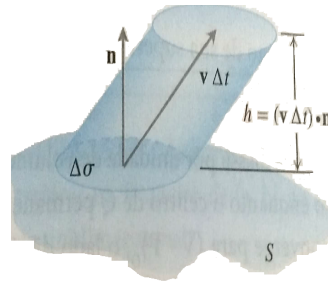
$$\Delta V \approx \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta \theta$$

$$\Delta m \approx \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta \theta \Delta t$$

assim a taxa à qual a massa escoia para fora de  $D$  através do pedaço é de cerca de

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \approx \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta \theta$$

Figura 30 – Volume do Cilindro



Fonte: Thomas (2009, p. 541)

Isso leva a aproximação

$$\frac{\sum \Delta m}{\Delta t} \approx \sum \Delta V \cdot \mathbf{n} \Delta \theta$$

como uma estimativa da taxa média à qual a massa escoou através de  $S$ . Por fim, fazendo  $\Delta \theta \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ , temos a taxa instantânea à qual a massa deixa  $D$  através de  $S$  como

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \delta v \cdot \mathbf{n} \, d\theta$$

a qual para o nosso escoamento específico é

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\theta$$

Agora, seja  $B$  uma esfera sólida centrada em um ponto  $Q$  no escoamento. O valor médio de  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  sobre  $B$  é

$$\frac{1}{\text{volume de } B} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

É uma consequência da continuidade do divergente que  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  realmente assumo esse valor em algum ponto  $P$  em  $B$ . Assim,

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})_P = \frac{1}{\text{volume de } B} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \frac{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\theta}{\text{volume de } B}$$

$$= \frac{\text{taxa à qual a massa deixa } B \text{ ao longo de superfície } S}{\text{volume de } B}$$

A fração à direita descreve diminuição de massa por unidade de volume. Agora, faça o raio de  $B$  tender a zero enquanto o centro de  $Q$  permanece fixo. O lado esquerdo da equação acima converge para  $(\nabla \cdot \mathbf{F})_Q$ , o lado direito para  $(-\partial \delta / \partial t)_Q$ . A igualdade desses dois limites é a equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\frac{\partial \theta}{\partial t}$$



A equação da continuidade "explica"  $\nabla \cdot \mathbf{F}$ : o divergente de  $F$  em um ponto é a taxa à qual a densidade do fluido está diminuindo lá. O teorema da divergência

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\theta = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

agora diz que a diminuição líquida na densidade do fluido na região  $D$  se deve à massa transportada através da superfície  $S$ . Assim, o teorema é uma afirmação sobre a conservação da massa.

□

**Exemplo 5.7.** Encontre o fluxo exterior líquido do campo

$$\mathbf{F} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\rho^3},$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

através da fronteira da região  $D : 0 < a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$ .

**Resolução.** O fluxo pode ser calculado integrando-se  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  sobre  $D$ . Temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\rho}$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\rho^{-3}) = \rho^{-3} - 3x\rho^{-4}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3x^2}{\rho^5}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3y^2}{\rho^5}$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3z^2}{\rho^5}$$

Portanto,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^5}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3r^2}{\rho^5} = 0$$

e

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = 0$$

Dessa forma, a integral de  $\nabla \cdot F$  sobre  $D$  é zero e o fluxo exterior líquido através da fronteira de  $D$  é zero. Há mais a aprender com esse exemplo. O fluxo que deixa  $D$  através da esfera interior  $S_a$  é o oposto do fluxo que deixa  $D$  através da esfera exterior  $S_b$  (porque a soma desses fluxos é zero.) Assim, o fluxo de  $\mathbf{F}$  através de  $S_a$  no sentido que se afasta da origem é igual ao fluxo de  $\mathbf{F}$  através de  $S_b$  no sentido que se afasta da origem. Assim, o fluxo de  $\mathbf{F}$  através de uma esfera centrada na origem é independente do raio da esfera.

Qual é esse fluxo? Para encontrá-lo, calculamos diretamente a integral de fluxo. A normal unitária exterior sobre a esfera de raio  $a$  é

$$\mathbf{n} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{a}$$

Portanto, sobre a esfera,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{a^3} \cdot \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{a} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^4} = \frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}$$

e

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\theta = \frac{1}{a^2} \iint_{S_a} d\theta = \frac{1}{a^2} (4\pi a^2) = 4\pi$$

O fluxo exterior de  $\mathbf{F}$  através de qualquer esfera centrada na origem é  $4\pi$  □

**Exemplo 5.8.** Há ainda mais a aprender com o exemplo 5.7. Em eletromagnetismo, o campo elétrico criado por uma carga pontual  $q$  localizada na origem é

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}|^2} \left( \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\rho^3}$$

onde  $\epsilon_0$  é uma constante física,  $\mathbf{r}$  é o vetor posição do ponto  $(x, y, z)$  e  $\rho = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Na notação do exemplo 5.7,

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{F}$$

Os cálculos no Exemplo 5.7 mostram que o fluxo exterior de  $\mathbf{E}$  através de qualquer esfera centrada na origem é  $q/\epsilon_0$ , mas esse resultado não está restrito a esferas. O fluxo exterior de  $\mathbf{E}$  através de qualquer superfície fechada  $S$  que engloba a origem (e à qual o teorema da divergência se aplica) é também  $q/\epsilon_0$ . Para sabermos por que, temos apenas que imaginar uma esfera grande  $S_a$  centrada na origem e englobando a superfície  $S$ . Como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

quando  $\rho > 0$ , a integral de  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  sobre a região  $D$  entre  $S$  e  $S_a$  é zero. Assim, pelo teorema da divergência,

$$\iint_{\partial D} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, d\theta = 0$$

e o fluxo de  $E$  através de  $S$  no sentido que se afasta da origem deve ser o mesmo que o fluxo de  $E$  através de  $S_a$  no sentido que se afasta da origem, o qual é  $q/\epsilon_0$ . Essa afirmação, chamada Lei de Gauss, também se aplica a distribuição de cargas mais gerais que aquelas consideradas aqui, como pode ver em quase todos os textos de físicas.

Lei de Gauss:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, d\theta = \frac{q}{\epsilon_0}$$

## 6 CONCLUSÃO

O teorema da Divergência, conhecido como teorema de Gauss, posteriormente ficou denominado como também teorema de Ostrogradskiy em algumas literaturas. O teorema da divergência é uma ferramenta de muita importância na matemática e na física, utilizado principalmente na área da engenharia. É amplamente aplicado na obtenção de cálculos de fluídos em superfícies fechadas e em regiões onde podemos encontrar campos vetoriais que atendam as condições matemáticas. O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma ampliação e extensão dos estudos acerca de campos vetoriais, integrais curvilíneas, independência de caminho, integrais de superfície e a exploração de outros teoremas em paralelo para englobar outros conceitos que se relacionam entre si. As equações do teorema de Stokes e as equações do teorema de Green são maneiras de exemplificar a relação que o teorema da divergência constitui de modo a generalizá-los. Logicamente, observando as suas condições matemáticas que cada um estabelece. Dessa forma, fazendo uma analogia do teorema de Green no plano, vemos que é possível calcular o fluxo ao longo de uma curva fechada, enquanto que o teorema da divergência calcula o fluxo através de uma superfície fechada no espaço. Fato semelhante também ocorre com o teorema de Stokes que generaliza a forma circulação-rotacional do teorema de Green, entretanto, em outra dimensão, no espaço por meio de uma superfície orientada do sentido anti-horário. Durante a jornada de estudos para realização desse trabalho vimos a grande importância dos teoremas acima citados, e em especial, o teorema da divergência. Pois, o mesmo simplifica o cálculo dos fluxos. Em suma, o teorema da divergência afirma que: o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície fechada e orientável no  $\mathbb{R}^3$  é igual a integral tripla do divergente do campo vetorial dado sobre a região limitada pela superfície.

## REFERÊNCIAS

- AMARAL, D. A. **GAUSS, CARL FRIEDRICH**. Dissertação (Mestrado), S.I., 2014? Disponível em: <<http://www.fem.unicamp/~em313/paginas/person/gauss.htm>>. Acesso em: 16 novembro. 2019. Citado na página 13.
- BANDEIRA, R. de S. **Teorema de Green e Aplicações**. Dissertação (graduação em Matemática) — Universidade Estadual da Paraíba, Monteiro, 2016. Disponível em: <<https://dspace.bc.uepb.edu.br/T1/guilsinglrightjspui/T1/guilsinglrightbitstream>>. Acesso em: 11 outubro. 2019. Citado na página 48.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed. [S.l.]: Edgar Blucher Ltda, 1996. Citado na página 13.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 1. ed. [S.l.]: Editora da Unicamp, 2004. Citado na página 13.
- [HTTPS://CURSOS.IME.UNICAMP.BR/](https://CURSOS.IME.UNICAMP.BR/). **CARL FRIEDRICH GAUSS**. Dissertação (Mestrado), S.I., 2019. Disponível em: <<https://cursos.ime.unicamp.br/>>. Acesso em: 03 novembro. 2019. Citado na página 12.
- KATZ, V. J. The history of stokes' theorem. **Mathematics Magazine**, Taylor Francis, v. 52, n. 3, p. 146–156, 1979. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/0025570X.1979.11976770>>. Citado nas páginas 14 e 15.
- ROBERTSON, J. O. E. **Mikhail Vasilevich Ostrogradski**. Dissertação (Mestrado), 2014. Disponível em: <<http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ostrogradski.html>>. Acesso em: 06 dezembro 2019. Citado na página 15.
- SILVA, A. de Andrade e; MATOS, M. P. **Cálculo de Várias Variáveis**. 1. ed. [S.l.]: UFPB-CCEN, 2018. v. 1. Citado nas páginas 21, 45, 51, 52, 53 e 54.
- SOMATEMATICA. **Só Matemática. Virtuoso Tecnologia da Informação**. Dissertação (Mestrado), S.I., 2019. Disponível em: <<http://www.somatematica.com.br/biograf/gauss.php>>. Acesso em: 20 novembro. 2019. Citado na página 12.
- STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2009. v. 2. Citado nas páginas 17, 18, 19 e 23.
- SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. 4. ed. São Paulo: Makron Books, 1994. v. 2. Citado nas páginas 11, 20, 21, 27, 28, 29, 30, 31, 34, 35, 36, 40, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 50 e 51.
- THOMAS, G. B. **Cálculo**. 1. ed. [S.l.]: São Paulo:Adilson Wesley, 2009. v. 2. Citado nas páginas 11, 14, 48, 49, 54 e 55.
- VILAR, L. **Seguindo os passos da história**. Dissertação (Mestrado), S.I., 2014. Disponível em: <<http://www.seguindoospassosdahistoria>>. Acesso em: 14 setembro. 2019. Citado na página 13.