



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO  
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**JEFERSON FERREIRA BELARMINO**

**MODELAGEM COMPUTACIONAL DE UM SIMULADOR  
NUMÉRICO EM 3D PARA O MOVIMENTO DE PROJÉTEIS  
USANDO VPYTHON**

**MONTEIRO  
2019**

JEFERSON FERREIRA BELARMINO

**MODELAGEM COMPUTACIONAL DE UM SIMULADOR  
NUMÉRICO EM 3D PARA O MOVIMENTO DE PROJÉTEIS  
USANDO VPYTHON**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

**Área de concentração:** Matemática aplicada

**Orientador:** Prof. Dr. Brauner Gonçalves Coutinho

MONTEIRO

2019

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

B425m Belarmino, Jeferson Ferreira.  
Modelagem computacional de um simulador numérico em 3D para o movimento de projéteis usando Vpython [manuscrito] / Jeferson Ferreira Belarmino. - 2019.  
47 p. : il. colorido.  
Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas , 2019.  
"Orientação : Prof. Dr. Brauner Gonçalves Coutinho , Coordenação do Curso de Matemática - CCHE."  
1. Movimento de projéteis. 2. Modelagem 3D. 3. Simulador computacional. 4. Método de Euler. I. Título  
21. ed. CDD 515.25

JEFERSON FERREIRA BELARMINO

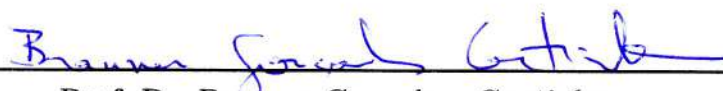
MODELAGEM COMPUTACIONAL DE UM SIMULADOR NUMÉRICO  
EM 3D PARA O MOVIMENTO DE PROJÉTEIS USANDO VPYTHON

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada

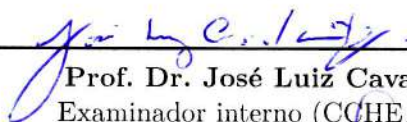
Aprovada em: 27/11/2019.

BANCA EXAMINADORA



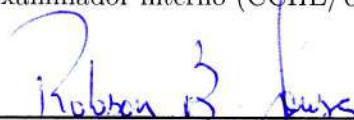
---

**Prof. Dr. Brauner Gonçalves Coutinho**  
Orientador



---

**Prof. Dr. José Luiz Cavalcante**  
Examinador interno (CCE/UEPB)



---

**Prof. Ms. Robson Batista de Sousa**  
Examinador interno (CCE/UEPB)

*Dedico este trabalho primeiramente à Deus, por ter iluminado todas as minhas escolhas durante essa trajetória. Aos meus pais (João e Maria), por todo o incentivo e motivação nas horas de dificuldades. E, aos familiares e amigos que torceram pelo meu sucesso.*

## AGRADECIMENTOS

À Deus que permitiu mais esta conquista em minha vida, que iluminou todas as minhas escolhas diante dos inúmeros desafios.

Aos meus pais (João Belarmino Bezerra e Maria José Ferreira) pelo amor, incentivo e apoio em todos os momentos.

Ao meu orientador professor Brauner Gonçalves Coutinho, por todos os conselhos e indicações que foram de suma importância em minha vida acadêmica e pessoal. Além da paciência durante o desenvolvimento do trabalho de conclusão de curso.

Ao professor Robson Batista de Sousa, pelo suporte aos projetos de pesquisa que tive a honra de participar durante a graduação sob orientação do professor Brauner.

E, aos meus amigos (Jonas Félix de Sousa e João Marcos Almeida Ferreira) por todo o incentivo e positividade diante dos desafios enfrentados.

*“A educação tem raízes amargas, mas os seus frutos são doces.”*  
*(Aristóteles)*

## RESUMO

O presente trabalho visa apresentar o desenvolvimento de um simulador numérico para o lançamento de projéteis por meio de uma animação em 3D. A modelagem 3D é uma tecnologia que permite a criação interativa de objetos em espaço tridimensional virtual por meio de *software*. Por ser totalmente gratuita, simples e multiplataforma, optamos pelo uso da biblioteca VPython. A modelagem matemática partiu da análise de forças sobre o projétil e da aplicação da Segunda Lei de Newton. A solução numérica foi obtida iterativamente por meio do método de Euler. Comparações entre os resultados numéricos obtidos via método de Euler e soluções analíticas da literatura apresentaram boa proximidade. O uso da modelagem 3D acabou por oferecer uma visualização do fenômeno físico muito mais intuitiva e próxima do mundo real, tornando possível o uso da mesma para fins educacionais. Graças a plataforma *Glowscript*, o simulador foi disponibilizado na web e pode ser acessado livremente por meio de qualquer dispositivo com acesso a internet.

**Palavras-chave:** Movimento de projéteis. Modelagem 3D. Simulador computacional.



## ABSTRACT

This work presents the development of a numerical simulator for the projectile motion that shows the results as a 3D animation. 3D modeling is a technology that enables the creation of objects in virtual three-dimensional space through software. The VPython library was chosen because it is completely free, simple and multiplatform. Mathematical modeling was performed by analyzing forces on the projectile and applying Newton's Second Law of motion. The numerical solution was obtained by the Euler method. Comparisons between the numerical results obtained and analytical solutions from the literature showed good proximity. The use of 3D modeling offered a much more intuitive view of the physical phenomenon, making it possible to use it for educational purposes. Using the Glowscript platform, it was possible to make the simulator available on the web and it can be freely accessed through any device with internet access.

**Key-words:** Projectile motion. 3D modeling. Computer simulator.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – ENIAC (Electronic Numeric Integrator and Computer). . . . .	18
Figura 2 – Código-fonte que cria dois objetos com VPython e a respectiva cena criada. . . . .	19
Figura 3 – Representação fictícia do disparo de uma bala de canhão . . . . .	20
Figura 4 – O vetor posição $\vec{r}$ dada pela soma vetorial das componentes vetoriais. . . . .	22
Figura 5 – Deslocamento $\Delta\vec{r}$ de uma partícula durante um intervalo de tempo $\Delta t$ . . . . .	22
Figura 6 – Esquema de lançamento do projétil adotado na simulação. . . . .	30
Figura 7 – Análise de forças num meio sem resistência do ar. . . . .	31
Figura 8 – Análise de forças num meio com resistência do ar . . . . .	32
Figura 9 – Análise de forças num meio com influência do vento. . . . .	33
Figura 10 – Modelagem da cena e dos principais objetos. . . . .	36
Figura 11 – Criação de algumas das principais grandezas vetoriais: velocidade, força gravitacional e resistência do ar. . . . .	36
Figura 12 – Código-fonte da lógica desenvolvida para a execução do simulador. . . . .	36
Figura 13 – Trajetória do projétil para o caso 1: a) comparação entre a solução numérica e analítica. b) Simulação em 3D. . . . .	38
Figura 14 – Trajetória do projétil para o caso 2: a) comparação entre a solução numérica e analítica. b) Simulação em 3D. . . . .	40
Figura 15 – Variação do alcance horizontal máximo em função do ângulo de lançamento. . . . .	41
Figura 16 – Trajetória do projétil para o caso 3: a) comparação entre a solução numérica e analítica. b) Simulação em 3D. . . . .	42

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação de resultados numéricos e analíticos para o caso 1. . . . .	39
---	----

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MRU	Movimento Retilíneo Uniforme
MRUV	Movimento Retilíneo Uniformemente Variado
ENIAC	Eletronic Numerical Integrator and Computer
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
OA	Objetos de Aprendizagem
TIC's	Tecnologias da Informação e Comunicação
EDO	Equações Diferenciais Ordinais

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	13
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> . . . . .	16
2.1	MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO . . . . .	17
2.2	O MOVIMENTO DE PROJÉTEIS . . . . .	20
<b>2.2.1</b>	<b>Movimento Bidimensional</b> . . . . .	21
2.2.1.1	Posição e Deslocamento . . . . .	21
2.2.1.2	Velocidade Média e Instantânea . . . . .	23
2.2.1.3	Aceleração Média e Instantânea . . . . .	23
2.3	SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS . . . . .	24
<b>2.3.1</b>	<b>O Método de Euler</b> . . . . .	25
<b>2.3.2</b>	<b>Erros em soluções numéricas</b> . . . . .	27
2.3.2.1	Erros de arredondamento . . . . .	27
2.3.2.2	Erros de truncamento . . . . .	27
2.3.2.3	Erro total . . . . .	27
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b> . . . . .	29
3.1	MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL . . . . .	29
<b>3.1.1</b>	<b>Condições do ambiente</b> . . . . .	30
3.1.1.1	Caso 1: sem resistência do ar . . . . .	31
3.1.1.2	Caso 2: com resistência do ar . . . . .	32
3.1.1.3	Caso 3: com a influência do vento . . . . .	32
<b>3.1.2</b>	<b>Solução numérica via Método de Euler</b> . . . . .	33
3.2	MODELAGEM 3D . . . . .	35
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> . . . . .	37
4.1	CASO 1: SEM RESISTÊNCIA DO AR . . . . .	37
4.2	CASO 2: COM RESISTÊNCIA DO AR . . . . .	39
4.3	CASO 3: COM INFLUÊNCIA DO VENTO . . . . .	39
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	43
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	45

# 1 INTRODUÇÃO

Os índices de aprendizado de Matemática no Brasil, quando comparados com outros países, ficam aquém do que poderíamos considerar como satisfatório. Resultados do PISA 2018 apontam que estudantes do Brasil conseguiram pontuação bem inferior à média mundial em matemática, leitura e ciência, sendo que 43% pontuaram abaixo do menor nível de proficiência (Nível 2) enquanto que a média da OCDE é de apenas 13% (OCDE, 2019). Neste sentido, qualquer iniciativa que desperte motivação aos alunos a se interessarem pela matemática merece ser analisada com atenção. Uma reivindicação recorrente dos alunos é que existe uma certa distância entre o que é estudado em sala e o que o estudante experimenta no seu dia a dia, como sua realidade. Ao apresentar uma alternativa ao que é visto de modo tradicional em sala de aula, abrimos novas possibilidades ao desenvolvimento do conhecimento.

Observa-se nos dias atuais que, com a popularização dos recursos tecnológicos, uma parcela muito significativa da sociedade passou a utilizar de forma bastante habitual a rede mundial de computadores (internet) como fonte de entretenimento, comunicação e informação, acessando tais recursos principalmente a partir de *smartphones* e *laptops*. Essa nova conjuntura nos faz pensar em meios de como adequar a integração de tais ferramentas no âmbito escolar, visando potencializar o ensino / aprendizagem. A utilização de tecnologias da informação e comunicação (TIC's), vem ganhando espaço no âmbito educacional, pois facilita a abordagem de conceitos que tradicionalmente eram apresentados somente através da lousa. Para Rocha (2008), o computador é um meio e não um fim, devendo ser usado visando o desenvolvimento dos componentes curriculares. Nesse sentido, o computador transforma-se em um poderoso recurso de suporte à aprendizagem, com inúmeras possibilidades pedagógicas.

Inicialmente o uso do computador na educação era mais voltado à substituição do instrutor pela máquina. O computador controlava o ensino em uma abordagem chamada instrucionismo. Com o tempo, um novo paradigma surgiu, no qual o aluno se tornou mais ativo no processo de aprendizagem. A linguagem de programação para fins educativos *LOGO*, desenvolvida pelo Laboratório de Inteligência Artificial do *MIT* (Universidade de Cambridge), contribuiu para que houvesse essa mudança de paradigma, uma vez que permitiu ao aluno controlar a máquina e, conseqüentemente, a sua aprendizagem (FILHO, 2007b). A partir do uso de uma linguagem de programação, o aluno se torna ativo no processo cognitivo, tendo a possibilidade de visualizar de forma imediata as suas estratégias para solucionar um determinado problema. Neste sentido, pode-se dizer que o uso de uma linguagem de programação é uma abordagem que apresenta traços da perspectiva construtivista piagetiana.

A modelagem 3D é uma ferramenta das TICs com bastante potencial para se trabalhar conteúdos educativos, de modo a despertar o interesse do aluno a partir da criação, visualização, manipulação e interação em tempo real com ambientes tridimensionais virtuais simulados por computador. Entretanto, é necessário identificar como esta tecnologia pode ser utilizada para a construção de objetos de aprendizagem. Por se tratarem de materiais digitais, os OAs podem ser reutilizados diversas vezes, simultaneamente, por meio da internet, o que os torna uma alternativa bastante atraente como material de suporte para a atividade em sala de aula.

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um simulador em 3D, utilizando software livre e modelagem 3D que possa ser utilizado pela comunidade discente como recurso adicional útil na exploração do movimento de projéteis. Apesar de ser um fenômeno físico bastante comum de ser observado no dia a dia, como por exemplo no chute de uma bola em uma partida de futebol, este constitui um tema bastante importante da Mecânica Clássica. Pretende-se disponibilizar o simulador como um OA por meio de uma plataforma online, para acesso totalmente gratuito.

A modelagem 3D permite ao usuário visualizar uma animação do disparo de um corpo a uma velocidade definida como parâmetro de entrada. Além da velocidade inicial, o usuário pode inserir outros parâmetros físicos tais como: resistência do ar, velocidade do vento (opcional) e ângulo de disparo em relação ao solo. Durante a animação, é possível rotacionar a cena alterando o ponto de observação, para se ter outra perspectiva do movimento. Ao final da animação, algumas informações são disponibilizadas como: tempo de voo, alcance e altura máxima.

Para o desenvolvimento do simulador foi necessário realizar a modelagem matemática do problema físico a partir da realização do balanço de forças agindo sobre a partícula durante o voo e da aplicação da Segunda Lei de Newton. Em seguida usou-se o método de Euler para resolver numericamente a EDO resultante. Para visualização dos resultados numéricos, foi usada a biblioteca *matplotlib* enquanto que a modelagem e animação em 3D foram criadas a partir da extensão VPython. Assim, pode-se dizer que a presente pesquisa tem uma conotação interdisciplinar, envolvendo conceitos físicos, matemáticos e de programação de computadores, empregados de maneira completamente integrada. Este tipo de abordagem é particularmente necessária quando se deseja resolver problemas que estão além do escopo de uma única disciplina, facilitando o estudo de assuntos correlacionados e que podem ser adequadamente compreendidos sob uma única perspectiva disciplinar.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. No Capítulo 2, é apresentada fundamentação teórica incluindo um breve contexto histórico sobre o uso do computador para simulação, sua potencialidade aliada à Modelagem Matemática para fins pedagógicos. O capítulo também trata do problema físico do movimento de projéteis, além de exibir o

processo de solução numérica de equações diferenciais via método numérico de Euler e dos erros envolvidos em soluções numéricas. No Capítulo 3 encontra-se todo o processo de modelagem matemática e computacional, como as EDOs que modelam o movimento são obtidas aplicando a 2ª Lei de Newton a partir do balanço de forças. O Capítulo encerra apresentando alguns detalhes importantes de como foi feita a modelagem 3D. O Capítulo 4 mostra os resultados obtidos a partir do uso do simulador para cada um dos 3 casos analisados, que variam de acordo com a complexidade do problema físico. O mesmo capítulo inclui a validação dos resultados numéricos obtidos com soluções analíticas disponíveis na literatura. Por fim, no Capítulo 5, estão descritas algumas considerações que são importantes, além de sugestões para futuras pesquisas.



## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Um dos maiores desafios para os educadores é criar formas de motivar os alunos para a aprendizagem, desde os anos iniciais até o âmbito universitário. Quando falamos em Matemática, a falta de entusiasmo dos alunos é, possivelmente, um dos aspectos que pode desencadear diversas dificuldades. Para Machado (2011), um dos possíveis motivos que provoca nos alunos problemas de afinidade com a matemática pode ser decorrente de problemas de natureza didática e pode estar ligada a metodologias obsoletas, hoje inapropriadas. A Base Nacional Comum Curricular - BNCC, BRASIL (2017), nos traz:

Para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece (BRASIL, 2017, p. 538).

Hoje em dia, é fácil perceber o domínio e o interesse que as crianças e os jovens têm no uso dos recursos tecnológicos. Para SANTOS, SCARABOTTO e MATOS (2011), essa nova geração de “nativos digitais”<sup>1</sup> possui uma identidade virtual, pois passam a maior parte do tempo conectados através das redes sociais, blogs, jogos online, em meio às inovações tecnológicas. Diante dessa afinidade, tende-se a experimentar com mais frequência essas ferramentas no ambiente escolar. Com a disseminação dos recursos tecnológicos, graças a popularização da internet e a modernização e barateamento dos equipamentos, o computador se faz presente nas mais diversas áreas se tornando ferramenta indispensável em muitas delas.

Silva et al. (1997) afirmam que, o computador pode ser considerado uma ferramenta educacional, quando o aluno realiza uma tarefa por seu intermédio. É importante frisar que, conforme diz Valente (1993), a forma correta de associar o computador com educação não é no sentido de aprender sobre computadores, mas sim através de computadores. Valente (1993) reforça essa ideia dizendo:

O computador pode enriquecer ambientes de aprendizagem onde o aluno, interagindo com os objetos desse ambiente, tem chance de construir o seu conhecimento. Nesse caso, o conhecimento não é passado para o aluno. O aluno não é mais instruído, ensinado, mas é o construtor do seu próprio conhecimento. Esse é o paradigma construcionista onde a

<sup>1</sup> Aqueles nascidos depois de 1980, quando iniciava o domínio das tecnologias digitais, conforme Prensky (2001).

ênfase está na aprendizagem ao invés de estar no ensino; na construção do conhecimento e não na instrução (VALENTE, 1993, p. 2).

Nessa perspectiva, o uso correto e de forma adequada dos recursos tecnológicos, pode gerar melhorias no desenvolvimento do aprendizado do discente, proporcionando diretrizes a ele para solidificar a cognição de maneira autônoma. Atualmente, com a evolução e barateamento dos computadores, capacidade de processamento, visualização e a expansão da internet, a utilização de simuladores na educação pode ser uma alternativa atraente para auxílio ao ensino/aprendizagem. De acordo com Valente (1993), a simulação envolve a criação de modelos dinâmicos e simplificados do mundo real oferecendo a possibilidade do aluno desenvolver hipóteses, testá-las, analisar resultados e refinar os conceitos. Neste mesmo sentido, Mendes, Santana e Júnior (2017) apontam que a simulação cria uma ambientação realística onde é apresentado ao aluno um problema para que ele tome decisões e execute ações.

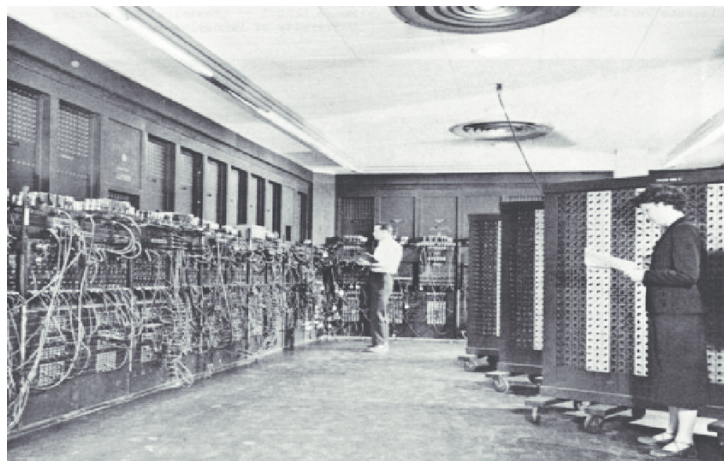
Além da educação, os simuladores podem ser usados em diversas áreas das ciências e engenharias. Historicamente, a simulação computacional sempre teve um papel de destaque e sua evolução esteve atrelada à evolução do *hardware*. O primeiro computador eletrônico desenvolvido pelo homem, o ENIAC cuja fotografia pode ser vista na Figura 1. Ele foi criado para a realização de cálculos balísticos durante a Segunda Grande Guerra Mundial. Nessa época os computadores eram grandes, lentos e pouco confiáveis quanto ao tempo que permaneciam trabalhando sem que uma válvula queimasse. Em meados da década 70, apenas grandes corporações e universidades possuíam máquinas aptas para se desenvolver simuladores computacionais. Construir um programa assim era extremamente caro e, devido as limitações tecnológicas da época, bem como a falta de desenvolvedores e operadores de tais sistemas, não alcançavam a flexibilidade e ampla possibilidade de uso como nos dias de hoje. Foi a partir dos anos 90, que o uso de simuladores se popularizou graças ao barateamento de equipamentos, do aumento da velocidade de processamento e pela simplificação das ferramentas de desenvolvimento. A simulação difundiu-se como um meio eficiente para a elaboração de projetos, animações, pesquisas, e com muitas outras aplicações (BALADEZ, 2016).

## 2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO

A compreensão da noção de modelo matemático requer, inicialmente, entender o que é modelagem matemática e perceber a utilidade da simulação nesta perspectiva.

Souza (2010) define a Modelagem Matemática como um processo que visa elaborar representações matemáticas que expliquem ou descrevam uma situação do mundo real. Segundo Biembengut e Hein (2011), este processo envolve a obtenção de um modelo, que

Figura 1 – ENIAC (Electronic Numeric Integrator and Computer).



Fonte: Filho (2007a).

pode resultar em expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações computacionais.

Segundo Steed (1992 apud SAMPAIO, 1999), há ainda uma diferença entre modelo e simulação, uma vez que o modelo é uma representação de estruturas, enquanto que a simulação infere um processo de iteração entre as estruturas que compõem o modelo buscando criar um comportamento. Ou seja, pode-se dizer que as simulações focam os resultados (saídas) gerados pela execução do modelo (ao qual o usuário não tem acesso) que elas contêm (SAMPAlO, 1999).

Quando são usadas técnicas de computação para retratar determinada representação do mundo real, denominamos o processo de modelagem computacional. Para Veit e Araujo (2005), todas as linguagens de programação além de *softwares* computacionais podem ser considerados como ferramentas para modelagem computacional. Uma linguagem de programação é um procedimento que informa ao computador por meio de um conjunto de regras sintáticas e semânticas que são usadas para definir um programa de computador.

O computador quando usado para programar, possibilita ao aluno condições para construir o conhecimento e conseqüentemente, aprender (VALENTE, 1995). Além disso, aprender a programar é de suma importância e não está restrito apenas à área da Ciência da Computação. A afinidade com pelo menos uma linguagem de programação, permite o desenvolvimento de diversas capacidades que ajudam a melhorar o raciocínio lógico e tomada de decisões. Entretanto, a aprendizagem de conceitos e métodos para elaboração de programas de computador não é trivial, pois requer o uso de habilidades de alto nível e boas doses de raciocínio abstrato (CASTRO et al., 2003).

No decorrer dos anos foram surgindo diversas linguagens de programação, cada uma com características distintas que as tornam mais apropriadas para os certos tipos de finalidades. Python é particularmente interessante como primeira linguagem de progra-

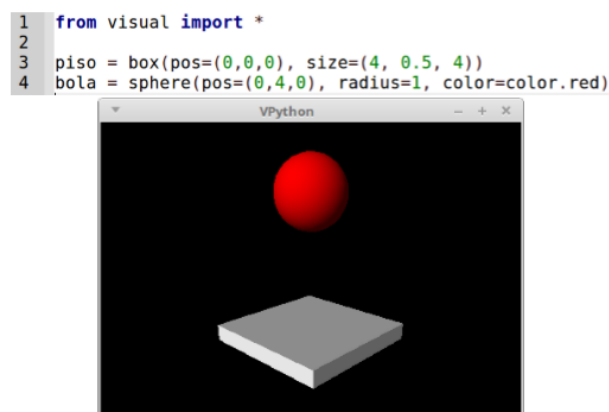
mação devido à sua simplicidade e clareza (MENEZES, 2010). Segundo Coelho (2007), o uso do Python é frequentemente associado com grandes ganhos de produtividade, pois possibilita a construção de programas de qualidade e de fácil manutenção. Downey, Elkner e Meyers (2002) ressaltam que uma das mais notáveis características do Python é o grande apelo que tem junto a cientistas, pesquisadores e educadores.

Uma outra característica importante do Python é o fato de poder ser utilizada sem custos ou restrições, além de ser independente de plataforma, o que significa que todos os programas desenvolvidos podem rodar em qualquer sistema operacional, sem necessitar de alterações do código-fonte.

Entre a vasta gama de extensões da linguagem Python que a torna atrativa para fins científicos, o VPython permite a modelagem interativa e animação de objetos em 3D via linha de comando. Conforme descrevem Utiel e Kirner (2009), a criação da simulação em 3D com VPython é feita de maneira muito mais simples do que com as ferramentas de programação usuais (OpenGL<sup>®</sup> ou DirecX<sup>®</sup>, por exemplo).

A simplicidade da sintaxe do VPython pode ser visualizada na Figura 2, quando demonstra-se como é feita a modelagem de dois objetos. A linha 1 faz com que a extensão “visual”, relativa ao módulo do VPython, seja carregada na memória. A linha 3 cria uma variável do tipo *box* (caixa em português) que é usada para modelar sólidos geométricos do tipo paralelepípedo. Já a linha 4 cria um objeto na cena do tipo *sphere* (esfera em português). As propriedades de cada objeto são chamados de atributos e são especificados dentro dos parênteses, a funcionalidade dos atributos serão detalhados com mais precisão na Seção 3.2.

Figura 2 – Código-fonte que cria dois objetos com VPython e a respectiva cena criada.



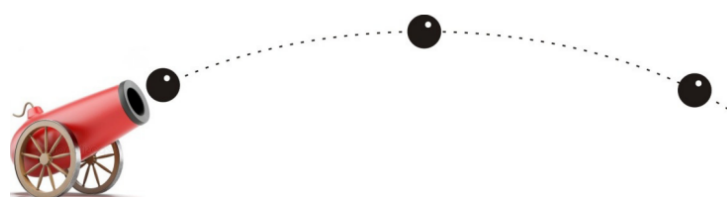
Fonte: o autor.

Estas características serviram de motivação para que a linguagem Python e, particularmente a biblioteca VPython, fossem escolhidas para serem usadas no decorrer desta pesquisa.

## 2.2 O MOVIMENTO DE PROJÉTEIS

O fenômeno físico que propomos investigar é o de movimento de projéteis lançados da superfície terrestre sob influência de fatores externos como: resistência do ar e presença do vento. Movimento de projéteis é um tema clássico da mecânica e é geralmente trabalhado em cursos de Física Geral. A trajetória de projéteis se faz presente em diversos contextos do nosso cotidiano, como no ato de um jogador de futebol chutar a bola em uma partida de futebol, por exemplo. A Figura 3 representa um disparo de canhão, cena comum em ambientes de guerra.

Figura 3 – Representação fictícia do disparo de uma bala de canhão .



Fonte: Martins et al. (2019).

O estudo da trajetória de projéteis vem sendo desenvolvido desde a antiguidade. Vários estudiosos deram suas contribuições ao longo da história e vale destacar nomes importantes como: Aristóteles, Galileu Galilei e Isaac Newton. Aristóteles apresentou a teoria mais bem elaborada sobre o movimento, denominada de Física Aristotélica. Ele defendia a ideia de que os corpos se movem a fim de ocuparem o seu lugar natural (centro do universo). Harres (2002) afirma que para Aristóteles, os movimentos ocorriam por meio a uma ação violenta, pois o natural era que os corpos estivessem em repouso. Segundo Drake e MacLachlan (1975 apud FAZURI; MATOS, 1998):

O estudo do movimento de projéteis lançados da superfície da terra é um problema antigo que tem a sua origem na parte final do famoso livro, *Discursos sobre duas novas Ciências* (1638), de Galileu Galilei. Neste livro Galileu demonstra que a trajetória de uma partícula viajando nas proximidades da superfície da terra e através de um meio não resistente é uma parábola (DRAKE; MACLACHLAN, 1975 apud FAZURI; MATOS, 1998, p. 1).

Soares, Tort e Gonçalves (2013) complementam afirmando que o movimento de projéteis desempenha um papel importante no desenvolvimento da cinemática e da dinâmica moderna e a sua primeira descrição correta deve-se a Galileu Galilei que percebeu o papel secundário exercido pela resistência do ar. Diante disso, uma nova visão acerca do movimento de projéteis é consolidada e, como consequência disso, Soares, Tort e Gonçalves (2013) afirmam que:

É a primeira vez que o movimento de um projétil é decomposto e não visto como um todo como era praxe na física aristotélica e medieval. O princípio

da independência dos movimentos foi posteriormente corroborado com a emergência da dinâmica newtoniana (SOARES; TORT; GONÇALVES, 2013, p.1).

Baseando-se em cientistas que o antecederam e que também tinham a curiosidade de entender e descrever como os corpos se movem, Isaac Newton investigou as associações que existem entre as grandezas de força, massa e movimento no mundo natural. Tal prática é denominada de *mecânica Newtoniana*.

Quando não se leva em conta a influência do ar - o que constitui o modo mais simples de se estudar o movimento de projéteis - a partícula se move em um plano vertical com velocidade inicial  $v_o$  e com uma aceleração constante, igual à aceleração de queda livre  $g$  dirigida para baixo. Para estudar o movimento de projéteis, devemos compreender bem estes conceitos, o que será visto a seguir quando estudaremos o movimento bidimensional. Na Seção 3.1.1, serão apresentados os balanços de forças para obtenção dos modelos matemáticos mais complexos utilizados no presente trabalho, onde consideraremos outros fatores externos agindo sobre a partícula: a influência do ar e a presença do vento.

## 2.2.1 Movimento Bidimensional

É um movimento de um objeto que pode ser decomposto em dois, cada um com características distintas: um movimento horizontal e outro vertical. Abaixo seguem algumas definições importantes para o movimento bidimensional, que podem ser vistas com mais detalhes em Halliday, Resnick e Walker (2016).

### 2.2.1.1 Posição e Deslocamento

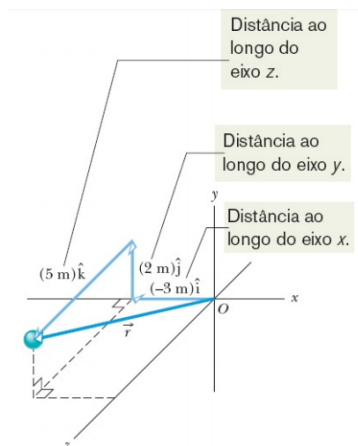
A localização de uma partícula pode ser definida no espaço através do vetor posição  $\vec{r}$ , conforme a Figura 4, um vetor que liga um ponto de referência (em geral a origem de um sistema de referência) à partícula. Sendo:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (2.1)$$

onde  $x\hat{i}$ ,  $y\hat{j}$ ,  $z\hat{k}$  são as componentes vetoriais de  $\vec{r}$  e  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as componentes escalares, as quais fornecem a localização da partícula ao longo dos eixos de coordenadas em relação à origem.

Quando uma partícula se move, seu vetor posição varia de tal forma que sempre liga o ponto de referência (origem) à partícula. Se o vetor posição varia (de  $\vec{r}_1$  para  $\vec{r}_2$  digamos durante um certo intervalo de tempo), como mostra a Figura 5, o deslocamento

Figura 4 – O vetor posição  $\vec{r}$  dada pela soma vetorial das componentes vetoriais.



Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2016)

da partícula,  $\Delta\vec{r}$ , durante esse intervalo de tempo é dado por:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (2.2)$$

Utilizando a notação de vetores unitários, escreve-se o deslocamento como:

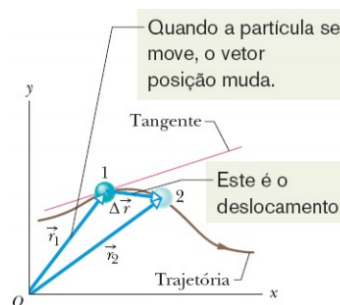
$$\Delta\vec{r} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}) \quad (2.3)$$

ou

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}, \quad (2.4)$$

onde as coordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$  correspondem ao vetor posição  $\vec{r}_1$  e as coordenadas  $(x_2, y_2, z_2)$  correspondem ao vetor posição  $\vec{r}_2$ .

Figura 5 – Deslocamento  $\Delta\vec{r}$  de uma partícula durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ .



Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2016).

É possível escrever o vetor deslocamento substituindo  $(x_2 - x_1)$  por  $\Delta x$ ,  $(y_2 - y_1)$  por  $\Delta y$  e  $(z_2 - z_1)$  por  $\Delta z$ :

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}. \quad (2.5)$$

### 2.2.1.2 Velocidade Média e Instantânea

Se uma partícula se move de um ponto para outro, podemos estar interessados em saber com que rapidez ela se move, definindo assim as velocidades média e instantânea. No caso de um movimento 2D ou 3D considera-se essas grandezas como vetores e utiliza-se a notação vetorial. Se uma partícula sofre um deslocamento  $\Delta \vec{r}$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , sua velocidade média  $\vec{v}_{\text{med}}$  é dada por

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.6)$$

Quando falamos da velocidade de uma partícula, nos referimos à velocidade instantânea, que é o limite da velocidade média, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ .

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.7)$$

Para escrever a Equação (2.7) na forma de vetores unitários, usa-se a expressão para  $\vec{r}$  dada por:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}, \quad (2.8)$$

que pode ser simplificada se escrevermos:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}, \quad (2.9)$$

onde as componentes escalares  $\vec{v}$  são:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad \text{e} \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2.10)$$

### 2.2.1.3 Aceleração Média e Instantânea

A aceleração média é definida como sendo:

$$\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (2.11)$$



Quando  $\Delta t \rightarrow 0$  no entorno de um certo instante,  $\vec{a}_{\text{med}}$  tende para a aceleração instantânea  $\vec{a}$  é dada por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.12)$$

Se o módulo ou a orientação da velocidade varia (ou ambos variam), a partícula possui aceleração. Em notação de vetores unitários, temos:

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad (2.13)$$

onde as componentes escalares de  $\vec{a}$  são:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \text{e} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (2.14)$$

Estas definições serão usadas posteriormente na Seção 3.1, quando, a partir da realização do balanço forças atuantes no projétil durante o voo e da aplicação da Segunda Lei de Newton, será apresentado como obter as equações diferenciais que modelam o problema físico.

## 2.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Segundo Santos (2011), equação diferencial é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas destas funções, diferentemente das equações algébricas, onde suas incógnitas são numéricas. As equações diferenciais podem ser classificadas conforme seu **tipo**, **ordem** e **linearidade**. Com relação ao tipo, quando a equação tem apenas uma variável independente denominamos de Equação Diferencial Ordinária (EDO), caso contrário, definimos como Equação Diferencial Parcial (EDP). Quanto à sua **ordem**, a equação diferencial pode ser de 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, ..., de *n-ésima*, conforme a maior derivada presente na equação. De acordo com Santos (2011), uma equação diferencial é dita como **linear**, quando as incógnitas e suas derivadas aparecem na forma em uma soma, onde cada parcela é um produto de alguma derivada das incógnitas com uma função que não depende das incógnitas.

Seja  $y$  a variável dependente e  $t$  a variável independente. Então uma EDO de primeira ordem pode ser escrita como:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \quad (2.15)$$

Conforme será apresentado na Seção 3.1.1, o modelo matemático do movimento de projéteis é baseado nesse tipo de equação diferencial.

Dependendo da complexidade, há diversas técnicas analíticas para a solução deste tipo de equação, entre as quais o método dos fatores integrantes, por exemplo, que pode ser visto em Boyce e DiPrima (1985). Para modelos matemáticos mais complexos, entretanto, obter uma solução analítica nem sempre é possível ou apresenta um elevado grau de complexidade. Com relação ao problema físico dos projéteis, por exemplo, quanto mais fiel ao mundo real está o modelo matemático que descreve a trajetória, mais difícil é a obtenção da solução exata do problema. Nestes casos os métodos numéricos se tornam uma alternativa viável, principalmente nos dias de hoje, com a disponibilidade dos computadores a custos acessíveis.

Conforme escreve Fernandes (1998), os métodos numéricos envolvem procedimentos que levam à aproximação de um problema matemático por um problema numérico ou à resolução de um problema numérico. O campo que investiga o comportamento dos métodos numéricos é chamado de análise numérica, que engloba o estudo acerca da existência e unicidade das soluções, a convergência, estabilidade, a eficiência, erros, entre outros. A utilização de computadores na solução de problemas numéricos implica no surgimento de erros de arredondamento, mais detalhes sobre os tipos de erros podem ser vistos adiante na seção 2.3.2. Comparações entre soluções por métodos numéricos aplicadas ao movimento de projéteis podem ser vistas com detalhes em Fazuri e Matos (1998).

### 2.3.1 O Método de Euler

O método explícito de Euler é uma das técnicas numéricas usadas na solução de EDO's de primeira ordem, (GILAT; SUBRAMANIAM, 2009). Este método pode produzir resultados satisfatórios quando a aplicados em problemas de lançamento de projéteis, como pode ser observado em Fazuri e Matos (1998) e Santos (2016).

Conforme descrevem Boyce e DiPrima (1985), para um problema de valor inicial de primeira ordem do tipo:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.16)$$

Assumindo que uma solução  $y = y(t)$  exista no domínio  $[a, b]$ . Dado um ponto  $t$  em  $[a, b]$  e para um valor suficientemente pequeno de  $h$ , a derivada em qualquer ponto de  $y(t)$  no domínio  $[a, b]$  é dada por  $y'(t)$ , e pode ser aproximada por:

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{(t+h) - t}. \quad (2.17)$$

O que fornece a seguinte aproximação pelo método de Euler para  $y(t+h)$ :

$$y(t+h) \approx y(t) + hy'(t). \quad (2.18)$$

Assim sendo, tem-se:

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)), \quad (2.19)$$

que pode ser finalmente escrita como:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n). \quad (2.20)$$

Aqui,  $y_{n+1}$  fornece um valor aproximado de  $y(t_{n+1})$  onde  $t_n = t_0 + nh$ , dentro do domínio  $[a, b]$ .

O método de Euler consiste em resolver a Equação (2.20) repetidamente, usando o resultado de cada passo anterior para executar o próximo passo. Assim, é possível obter uma sequência de valores  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  que aproximam o valor da solução analítica nos pontos  $t_1, t_2, \dots$ . Nota-se que a solução da equação diferencial é dada por um conjunto de valores aproximados no intervalo com um passo de tamanho  $h$ . Em geral, a aproximação da solução pode ser melhorada reduzindo o valor de  $h$ .

De acordo com Boyce e DiPrima (1985), um algoritmo para o método de Euler pode ser estruturado da seguinte forma:

**Passo 1.** defina  $f(t, y)$ .

**Passo 2.** alimente os valores iniciais  $t_o$  e  $y_o$ .

**Passo 3.** alimente o tamanho do passo  $h$  e o número de passos  $n$ .

**Passo 4.** escreva  $t_o$  e  $y_o$ .

**Passo 5.** para  $j$  de 1 até  $n$ , calcule

$$k1 = f(t, y),$$

$$y = y + h * k1,$$

$$t = t + h,$$

**Passo 6.** escreva  $t$  e  $y$ .

**Passo 7.** fim.

Vale salientar que as instruções específicas podem ser escritas em qualquer linguagem de programação, inclusive na linguagem Python que foi escolhida para o desenvolvimento do simulador em 3D.

## 2.3.2 Erros em soluções numéricas

Para Gilat e Subramaniam (2009), as soluções numéricas podem ser bem precisas, mas não são exatas. Quando se utiliza um método numérico para obter a solução de um problema são incluídos dois tipos de erros: o erro de arredondamento e o erro de truncamento. Os métodos numéricos usam aproximações para resolver problemas, estas aproximações resultam em erros chamados de truncamento. Obtemos o erro total da solução numérica quando somamos ambos os erros.

### 2.3.2.1 Erros de arredondamento

Os números são representados no computador por um número finito de *bits*. Consequentemente, números reais que têm uma mantissa<sup>2</sup> mais longa do que o número de bits disponíveis para representá-los precisam ser encurtados. Esse requisito se aplica aos números irracionais, que devem ser encurtados em qualquer sistema, aos números finitos que são muito longos e aos números finitos na forma decimal que não podem ser representados de forma exata na forma binária. Um número pode ser encurtado seja cortando ou descartando os algarismos a mais, ou fazendo-se um arredondamento. No corte, os algarismos na mantissa além do comprimento que pode ser armazenado são simplesmente deixados de fora. No arredondamento, o último algarismo armazenado é arredondado (GILAT; SUBRAMANIAM, 2009).

### 2.3.2.2 Erros de truncamento

Para Gilat e Subramaniam (2009) os erros de truncamento ocorrem quando os métodos numéricos usados na solução de um problema matemático adotam um procedimento matemático aproximado. Este erro é dependente do método numérico específico ou do algoritmo usado na solução do problema. O erro de truncamento é independente do erro de arredondamento, existindo mesmo quando as operações matemáticas são exatas.

### 2.3.2.3 Erro total

Sabendo que a solução numérica é uma aproximação, de acordo com Gilat e Subramaniam (2009), a solução numérica sempre inclui erros de arredondamento e também pode incluir erros de truncamento, dependendo do método numérico utilizado. Estes dois erros juntos resultam no erro numérico total. Esse erro total, que também é chamado de erro real, é a diferença entre a solução verdadeira e a solução numérica:

$$\textit{Erro Real} = \textit{Solução Exata} - \textit{Solução Numérica}. \quad (2.21)$$

<sup>2</sup> Porção de dígitos de um sistema de vírgula flutuante que contém os dígitos significativos

O valor absoluto da razão entre o erro real e a solução exata é chamado de erro relativo real:

$$\text{Erro Relativo Real} = \left| \frac{\text{Solução Exata} - \text{Solução Numérica}}{\text{Solução Exata}} \right|. \quad (2.22)$$

Os erros das Equações (2.21) e (2.22) não podem ser determinados em problemas cuja solução requer o uso de métodos numéricos, já que a solução verdadeira não é conhecida. Contudo, essas grandezas podem ser úteis na verificação da precisão de diferentes métodos numéricos. Isso é feito com o emprego do método numérico na solução de problemas que têm solução analítica, avaliando-se com isso os erros reais (GILAT; SUBRAMANIAM, 2009).

### 3 METODOLOGIA

Este estudo se enquadra como pesquisa aplicada, uma vez que visa desenvolver um simulador numérico em 3D para investigar a trajetória de projéteis. Além disso, conforme diz Garces (2010), se a pesquisa gerar novas tecnologias e conhecimentos resultantes do processo de pesquisa, classifica-se como pesquisa aplicada. Esta pesquisa ainda pode ser classificada como bibliográfica e experimental. Para Fonseca (2002), qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre um determinado assunto. Ainda conforme Fontelles et al. (2009), toda pesquisa que envolve algum tipo de experimento é classificado como experimental, por se tratar do desenvolvimento de um simulador numérico em 3D, a experimentação se faz presente no processo de construção e validação da ferramenta computacional, bem como no seu uso como um laboratório virtual.

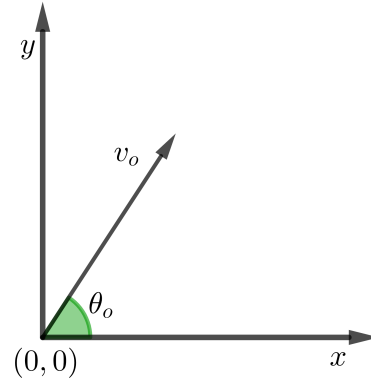
Grande parte da pesquisa, aqui apresentada, foi desenvolvida no decorrer de projetos aprovados e contemplados com bolsa em duas cotas do PIBIC / UEPB: 2016-2017 e 2017-2018. No primeiro projeto o objetivo foi o desenvolvimento de um simulador numérico para o movimento de projéteis considerando a resistência do ar e o efeito do vento na trajetória do objeto. A saída dos resultados consistia na representação da trajetória do corpo por meio de um gráfico no plano cartesiano. Os resultados obtidos foram comparados e validados com soluções disponíveis na literatura. Já o segundo projeto visou o desenvolvimento de objetos de aprendizagem utilizando software gratuito e modelagem 3D. A primeira aplicação da modelagem foi justamente no simulador desenvolvido na cota anterior (2017-2018). A proposta seria tornar o simulador mais realista e atraente para o usuário, alterando a forma como os resultados numéricos são expostos. Com a modelagem 3D o programa passou a exibir os resultados através de animações tridimensionais, facilitando assim a compreensão do fenômeno físico e a interpretação dos resultados. Com isso, o simulador agora em 3D, passou a ser um objeto de aprendizagem que possibilita o usuário experimentar e interagir de forma autônoma com o fenômeno investigado, ou seja, entender como os fatores externos agem na partícula e visualizar o efeito delas por meio de uma animação 3D. Mais detalhes de como foi feita a implementação da modelagem 3D no simulador, será mostrado na Seção 3.2.

#### 3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

Na Figura 6, observa-se um esquema com algumas informações acerca do lançamento de um objeto sendo projetado no ar: a localização inicial do corpo coincide com a origem do sistema de coordenadas de referência, a velocidade inicial é  $v_0$  e o ângulo de lançamento

em relação ao horizonte é dado por  $\theta_o$ . Como é habitual, denotamos o eixo horizontal de eixo x e o eixo vertical de eixo y.

Figura 6 – Esquema de lançamento do projétil adotado na simulação.



Fonte: Autoria própria.

A chave para analisar o movimento bidimensional de um projétil é dividi-lo em dois movimentos: um ao longo do eixo horizontal e outro ao longo da vertical. Analisando o esquema de lançamento de um projétil da Figura 6 e utilizando um pouco de trigonometria, é possível calcular as componentes iniciais da velocidade do projétil na direção vertical ( $v_{oy}$ ) e na direção horizontal ( $v_{ox}$ ), elas são dadas por:

$$v_{ox} = v_o \cos \theta_o \quad \text{e} \quad v_{oy} = v_o \sin \theta_o, \quad (3.1)$$

onde  $v_o$  é a velocidade inicial e  $\theta_o$  o ângulo de lançamento com o solo.

Para a construção do modelo matemático toma-se como ponto de partida a segunda Lei de Newton, que relaciona a força resultante que age sobre um corpo com o produto da sua massa pela magnitude da aceleração à qual ele é submetido, podendo ser escrita como:

$$F_R = ma, \quad (3.2)$$

onde  $F_R$  é a somatória de todas as forças que agem no corpo (ou a força resultante),  $m$  é a massa do mesmo e  $a$  é a sua aceleração.

### 3.1.1 Condições do ambiente

Nesta seção são descritos os três casos com condições de ambiente distintas que foram estudados. A mais simples e trivial ocorre no vácuo e é aquela que é comumente vista nos livros didáticos do ensino médio e também no ensino superior. As outras duas consideram a resistência do ar e a influência do vento na trajetória da partícula.

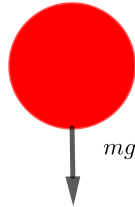
## 3.1.1.1 Caso 1: sem resistência do ar

Fazendo a análise de forças atuando no objeto durante o voo, conforme pode ser observado na Figura 7, nota-se que não existe uma força atuante na direção horizontal. Já na vertical, a única força atuante é a própria força peso do corpo,  $P$ , dada por:

$$P = -mg, \quad (3.3)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade e o sinal negativo faz-se necessário devido ao referencial adotado, de acordo com o esquema mostrado na Figura 6.

Figura 7 – Análise de forças num meio sem resistência do ar.



Fonte: Autoria própria.

Assim, a aplicação da Segunda Lei de Newton ao corpo de massa  $m$ , resulta em:

$$F_{Rx} = ma_x \quad \Rightarrow \quad 0 = ma_x \quad \Rightarrow \quad a_x = 0 \quad (3.4)$$

e

$$F_{Ry} = ma_y \quad \Rightarrow \quad -mg = ma_y \quad \Rightarrow \quad a_y = -g. \quad (3.5)$$

Utilizando as componentes  $x$  e  $y$  da Equação (2.14), podemos finalmente escrever:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad (3.6)$$

e

$$\frac{dv_y}{dt} = -g. \quad (3.7)$$

Como a componente  $x$  da aceleração é nula, o movimento nesta direção é definido como retilíneo uniforme (MRU). Logo, o valor da componente horizontal da velocidade,  $v_x$ , será constante em todos instantes de tempo,  $v_x = v_{ox}$ .

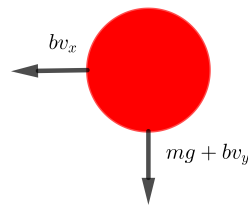


## 3.1.1.2 Caso 2: com resistência do ar

Neste caso, além da força gravitacional, um fator a ser considerado para tornar o modelo matemático mais realista é levar em consideração a resistência do ar que é sempre oposta à direção do movimento. Para isso adotamos um modelo cuja resistência do ar é linearmente proporcional à velocidade do corpo, que pode ser visto em Pereira e Bonfim (2008).

A análise de forças para um corpo de massa  $m$  lançado em um ambiente com resistência do ar pode ser vista na Figura 8.

Figura 8 – Análise de forças num meio com resistência do ar



Fonte: Autoria própria.

Aplicando-se a Segunda Lei de Newton, obtém-se:

$$F_{Rx} = -bv_x \quad \Rightarrow \quad ma_x = -bv_x \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{bv_x}{m} \quad (3.8)$$

e

$$F_{Ry} = -mg - bv_y \quad \Rightarrow \quad ma_y = -mg - bv_y \quad \Rightarrow \quad a_y = -g - \frac{bv_y}{m}, \quad (3.9)$$

onde  $b$  é o coeficiente de resistência do ar ( $kg/s$ ),  $v_x$  e  $v_y$  são, respectivamente, a componente horizontal e vertical da velocidade.

Substituindo as componentes  $x$  e  $y$  da Equação (2.14), obtemos as equações do movimento, as quais são dadas por:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{bv_x}{m} \quad (3.10)$$

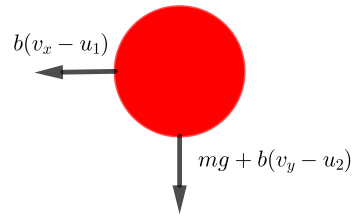
e

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{bv_y}{m}. \quad (3.11)$$

## 3.1.1.3 Caso 3: com a influência do vento

Outro parâmetro importante a considerar quando um projétil é lançado ao ar livre é a influência do vento. Considerando que, em todo o voo, o vento atua com uma velocidade constante de  $\vec{u} = (u_1\hat{i}, u_2\hat{j})$ , a análise de forças sobre o projétil pode ser vista na Figura 16. Neste caso, também foi utilizado o modelo linear descrito por Pereira e Bonfim (2008).

Figura 9 – Análise de forças num meio com influência do vento.



Fonte: Autoria própria.

A análise das forças permite obter a força resultante sobre o corpo, que é dada por:

$$\vec{F}_r = -m\vec{g} - b(\vec{v} - \vec{u}), \quad (3.12)$$

onde  $\vec{v}$  é o vetor velocidade do projétil.

A partir desta expressão e da aplicação da Segunda Lei de Newton, é possível deduzir as equações resultantes do movimento:

$$ma_x = -b(v_x - u_1) \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{b}{m}(v_x - u_1) \quad (3.13)$$

e

$$ma_y = -mg - b(v_y - u_2) \quad \Rightarrow \quad a_y = -g - \frac{b}{m}(v_y - u_2). \quad (3.14)$$

Usando novamente as definições das componentes  $x$  e  $y$  da Equação (2.14), pode-se obter:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{b}{m}(v_x - u_1) \quad (3.15)$$

e

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{b}{m}(v_y - u_2). \quad (3.16)$$

### 3.1.2 Solução numérica via Método de Euler

Segundo Halliday, Resnick e Walker (2002) a velocidade e a aceleração instantâneas de um corpo podem ser dadas, respectivamente, por:

$$v_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{di}{dt} \quad i = x, y \quad (3.17)$$

e

$$a_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_i}{\Delta t} = \frac{dv_i}{dt} \quad i = x, y. \quad (3.18)$$

O método de Euler permite calcular uma boa aproximação para estas equações a partir das seguintes expressões:

$$v_i = \frac{di}{dt} \approx \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{[i(t + \Delta t) - i(t)]}{\Delta t} \quad i = x, y \quad (3.19)$$

e

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} \approx \frac{\Delta v_i}{\Delta t} = \frac{[v_i(t + \Delta t) - v_i(t)]}{\Delta t} \quad i = x, y. \quad (3.20)$$

As aproximações dadas pelas equações anteriores são satisfatórias se for considerado um passo de tempo pequeno. Levando em consideração que o valor de  $\Delta t$  é constante, pode-se escrever as seguintes equações para as coordenadas do objeto:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v_x \Delta t \quad (3.21)$$

e

$$y(t + \Delta t) = y(t) + v_y \Delta t. \quad (3.22)$$

Considerando que um esquema iterativo de solução será utilizado, estas equações podem ser escritas como:

$$x^{n+1} = x^n + v_x^n \Delta t \quad (3.23)$$

e

$$y^{n+1} = y^n + v_y^n \Delta t, \quad (3.24)$$

onde  $n$  é o número de intervalos de tempo  $\Delta t$  desde o lançamento e  $v^n$ ,  $x^n$  e  $y^n$  representam a velocidade e as coordenadas da posição, respectivamente, ao fim de  $n$  intervalos de tempo.

As equações para as três situações analisadas no presente trabalho são descritas a seguir:

#### Sem resistência do ar:

$$v_x^{n+1} = v_{ox} \quad \forall n \quad (3.25)$$

e

$$v_y^{n+1} = v_y^n - g \Delta t. \quad (3.26)$$

Com resistência do ar:

$$v_x^{n+1} = v_x^n - \frac{bv_x^n \Delta t}{m} \quad (3.27)$$

e

$$v_y^{n+1} = v_y^n - g\Delta t - \frac{bv_y^n \Delta t}{m}. \quad (3.28)$$

Com a influência do vento:

$$v_x^{n+1} = v_x^n - \frac{b\Delta t}{m} (v_x^n - u_1) \quad (3.29)$$

e

$$v_y^{n+1} = v_y^n - g\Delta t - \frac{b\Delta t}{m} (v_y^n - u_2). \quad (3.30)$$

## 3.2 MODELAGEM 3D

Conforme mencionado anteriormente, a modelagem 3D foi implementada usando a biblioteca VPython. A presente seção visa descrever alguns detalhes importantes de como foi feita esta etapa. Para ilustrar como se dá o processo de modelagem 3D usando o VPython, vamos comentar alguns trechos importantes do código-fonte, explicando o papel de cada comando na cena. Acreditamos que isso é importante uma vez que, infelizmente, ainda há uma certa escassez de fontes bibliográficas escritas em língua portuguesa que abordem a utilização do VPython. Apesar da plataforma *Glowscript* disponibilizar exemplos que podem ajudar a compreender o processo de modelagem, a maioria das referências e tutoriais está disponível apenas em língua inglesa, o que pode dificultar a utilização por um usuário leigo.

Na Figura 10, observa-se o trecho de código responsável pela criação da cena e pela modelagem dos objetos principais. A linha 20 define a cena, onde podemos definir a cor do plano de fundo modificando o atributo *background*, o posicionamento do centro da câmera em relação a cena é definido pelo atributo *center* e as dimensões da tela podem ser ajustadas pelos atributos *width* e *height*. Nas linhas 21 e 22 são criados dois objetos do tipo *box*, um para representar o local de lançamento e o outro que representa o piso. O projétil é criado na linha 23 como sendo um objeto do tipo *sphere*. Neste três objetos, o atributo *pos* é definido. Ele deve ser obrigatoriamente especificado como um vetor cujas componentes especificam a posição inicial do objeto na cena. O atributo *color*, também comum aos objetos, especifica a sua cor. Enquanto no objeto *sphere* o tamanho é dado pelo atributo *radius*, nos objetos *box* isso é feito a partir do *size* que deve também ser definido na forma de um vetor, graças as três dimensões que devem ser especificadas. É importante notar que o objeto *sphere* foi o único definido com um valor de *True* para o

atributo `make_trail`. Isto se faz necessário quando se deseja traçar o percurso de um objeto em movimento, facilitando, neste caso, a análise da trajetória após o lançamento.

Figura 10 – Modelagem da cena e dos principais objetos.

```
20 cena=display(x=0, y=0, width=800, height=400, center=vector(0,1,0), background=vector(1,1,1))
21 canhao=box(pos=vector(0,0,0), size=vector(4,1,3),color=color.yellow)
22 piso= box(pos=vector(0,-1,0), size=vector(25+v0,0.3,10), color=color.green)
23 bola=sphere(pos=vector(0.,.1,0), radius=1.0, make_trail=True, color=color.red)
```

Fonte: Autoria própria.

Na Figura 11, pode-se observar como são criadas algumas grandezas vetoriais importantes para o problema físico. A linha 26 cria o vetor representando a velocidade inicial do projétil com as componentes da velocidade de lançamento calculadas a partir do ângulo com a horizontal. A linha 27 especifica o vetor que representa a força gravitacional, note que esta força age apenas na coordenada  $y$ . Na linha 28 é criado o vetor que representa a resistência do ar, onde  $k = \frac{b}{m}$ . Embora estejamos lidando com uma animação em 3D, vale salientar que estamos tratando de um movimento bidimensional, o que justifica a coordenada  $z$  ser nula em todos estes vetores.

Figura 11 – Criação de algumas das principais grandezas vetoriais: velocidade, força gravitacional e resistência do ar.

```
26 bolav=vector(v0x,v0y,0)
27 fg=vector(0,g*dt,0)
28 resis=vector(-k*dt,-k*dt,0)
```

Fonte: Autoria própria.

A Figura 12, apresenta algumas linhas de código que são executadas dentro do laço de repetição principal do simulador. A linha 37 cria o vetor que representa a influência do vento, cuja magnitude varia à medida que a velocidade do projétil é recalculada na linha 38. Já na linha 39 é onde acontece a atualização da posição do projétil. As linhas 38 e 39 implementam as equações (3.29), (3.30), (3.23) e (3.24).

Figura 12 – Código-fonte da lógica desenvolvida para a execução do simulador.

```
37 pv=vector((bolav.x - U1)*k*dt,(bolav.y - U2)*k*dt,0)
38 bolav=bolav - fg - pv
39 bola.pos= bola.pos + bolav*dt
```

Fonte: Autoria própria.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo descreve os casos usados para demonstrar a eficácia do simulador por meio da realização de experiências abrangendo as três condições de ambiente citadas na Seção 3.1.1. Em todos os casos descritos a seguir o projétil é lançado a partir de ponto localizado na origem do sistema de coordenadas e a aceleração da gravidade é dada por  $9,81m/s^2$ .

### 4.1 CASO 1: SEM RESISTÊNCIA DO AR

Neste primeiro caso, considera-se que o projétil é lançado no vácuo, com velocidade inicial de  $160km/h$  e um ângulo de  $\theta_0 = 60^\circ$  com relação ao horizonte. Para validar o simulador, comparamos os resultados obtidos numericamente e a solução analítica descrita por Halliday, Resnick e Walker (2002), dada pelas equações:

$$x(t) = x_o + v_{ox}t \quad (4.1)$$

e

$$y(t) = y_o + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (4.2)$$

Na Tabela 1 está exposto uma comparação quantitativa dos resultados. Os resultados numéricos foram obtidos a partir da solução das equações (3.25) e (3.26) com um passo de tempo de  $\Delta t = 0,001s$ . Os parâmetros físicos exibidos na Tabela 1, podem ser calculados analiticamente, conforme Halliday, Resnick e Walker (2002), pelas equações (4.3), (4.4) e (4.5). Para validar as soluções obtidas numericamente, a Figura 13(a) compara a solução numérica com a solução analítica vista em Halliday, Resnick e Walker (2002). O final da simulação em 3D para este caso é visto na cena mostrada na Figura 13(b).

Conforme Halliday, Resnick e Walker (2002), as soluções analíticas para a obtenção dos parâmetros físicos vistos na Tabela 1, consiste na resolução das seguintes equações:

**Alcance Horizontal ( $R$ ):**

$$R = \frac{v_0^2}{g} \text{sen } 2\theta_0. \quad (4.3)$$

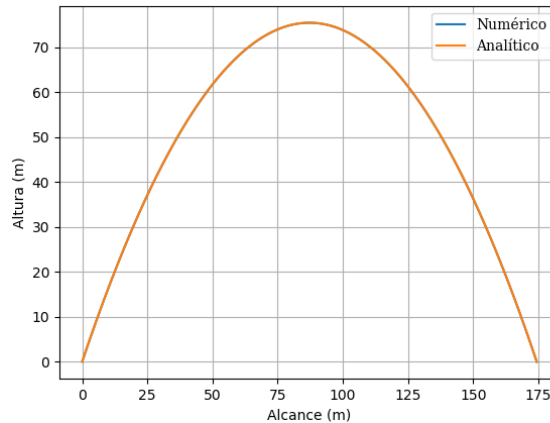
**Altura máxima ( $Y_m$ ):**

$$Y_m = \frac{v_o^2 \text{sen}^2 \theta}{2g}. \quad (4.4)$$

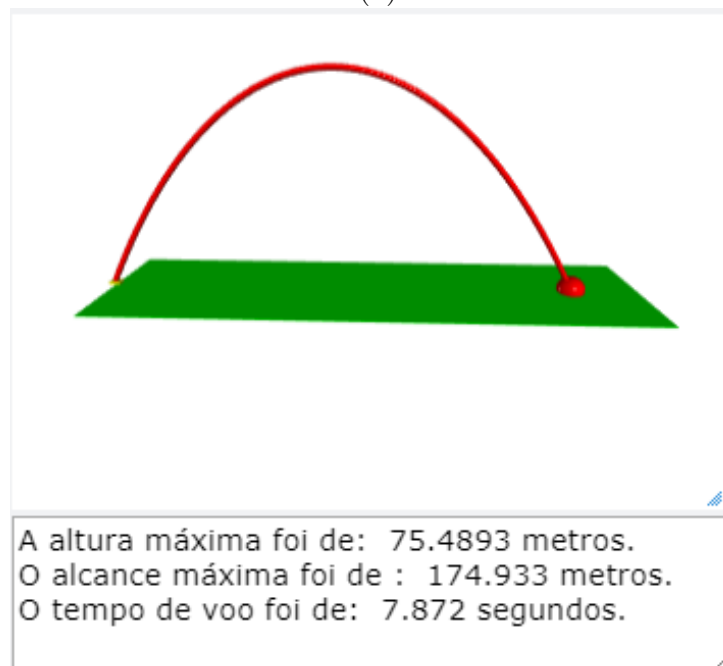
Tempo de voo ( $t_v$ ):

$$t_v = \frac{2v_0 \text{sen } \theta_0}{g}. \quad (4.5)$$

Figura 13 – Trajetória do projétil para o caso 1: a) comparação entre a solução numérica e analítica. b) Simulação em 3D.



(a)



(b)

Fonte: Autoria própria.

Nota-se que as soluções numéricas obtidas via método de Euler se aproximam precisamente das soluções exatas. Por meio da Equação (2.22) podemos calcular o erro relativo real para cada parâmetro, uma vez que a solução analítica é conhecida. Neste caso, os erros relativos reais foram de 0,3% para alcance, 0,001% para a altura máxima e de 0,5% para o tempo de voo.

Tabela 1 – Comparação de resultados numéricos e analíticos para o caso 1.

Parâmetro	Analítico	Numérico
Alcance (m)	174,37	174,93
Altura máxima (m)	75,50	75,49
Tempo de voo (s)	7,84	7,88

Fonte: adaptada de Halliday, Resnick e Walker (2002).

## 4.2 CASO 2: COM RESISTÊNCIA DO AR

O segundo caso testado baseou-se no modelo matemático descrito por Rocca e Riggi (2009), que leva em consideração a resistência do ar. A solução analítica para este caso é dada pelas seguintes equações que podem ser vistas em Rocca e Riggi (2009):

$$x(t) = mv_0 \cos \theta_0 [1 - \exp(-bt/m)] / b \quad (4.6)$$

e

$$y(t) = m(mg/b + v_0 \sin \theta_0) [1 - \exp(-bt/m)] / b - mgt/b. \quad (4.7)$$

Os parâmetros usados na simulação são  $v_0 = 35m/s$ ,  $\theta_0 = 30^\circ$ ,  $m = 0,25kg$  e  $b = 0,56kg/s$ . A solução numérica consiste na resolução das equações (3.23), (3.24), (3.27) e (3.28) com um valor de  $\Delta t$  de  $0,001s$ .

No trabalho de Rocca e Riggi (2009), os resultados são expostos por meio de gráficos no plano cartesiano e os parâmetros importantes como altura máxima e alcance, são deduzidos através da análise do gráfico de cada caso particular de lançamento. Visando validar as soluções obtidas numericamente, o gráfico exibido na Figura 14 (a) compara a solução numérica obtida no presente trabalho com a solução analítica apresentada por Rocca e Riggi (2009). Observando a Figura 14 (b), podemos notar que tanto o alcance quanto a altura máxima são coerentes com os valores apresentados na Figura 14 (a).

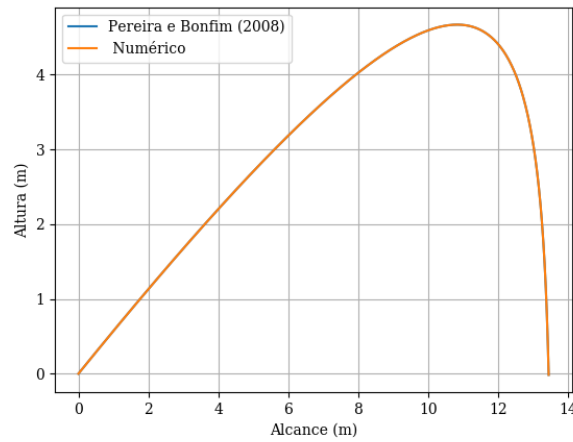
No lançamento em ambiente sem resistência do ar - que apresenta trajetória parabólica - o ângulo que se obtêm o maior alcance é o de  $45^\circ$ , como já havia observado Galileu Galilei (NUSSENZWEIG, 2002). Entretanto, pudemos observar que, no lançamento com resistência do ar, o movimento deixa de ser parabólico e, conseqüentemente, o ângulo para atingir o maior alcance não será o mesmo. Na Figura 15, observa-se que, para as condições aqui estudadas do caso com resistência do ar, o ângulo de lançamento que produz o maior alcance está entre  $\theta_0 = 14^\circ$  e  $\theta_0 = 17^\circ$ .

## 4.3 CASO 3: COM INFLUÊNCIA DO VENTO

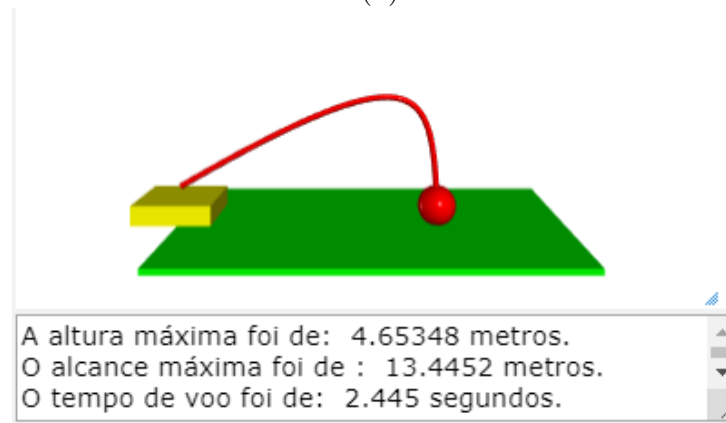
Outro parâmetro a ser considerado no sentido de tornar as simulações mais próximas do mundo real é considerar a influência do vento na trajetória do objeto. Isto pode ser



Figura 14 – Trajetória do projétil para o caso 2: a) comparação entre a solução numérica e analítica. b) Simulação em 3D.



(a)



(b)

Fonte: Autoria própria.

observado por exemplo em uma partida de futebol jogada em um dia de fortes ventos. Utilizamos o modelo matemático descrito por Pereira e Bonfim (2008), que apresenta, além dos fatores aqui já trabalhados, a influência do vento. O trabalho traz também a solução analítica para a trajetória do projétil, que é dada pelas seguintes equações apresentadas em Pereira e Bonfim (2008):

$$x(t) = tu_1 + \left[ \frac{v_o \cos \theta_o - u_1}{k} \right] (1 - \exp^{-kt}) \quad (4.8)$$

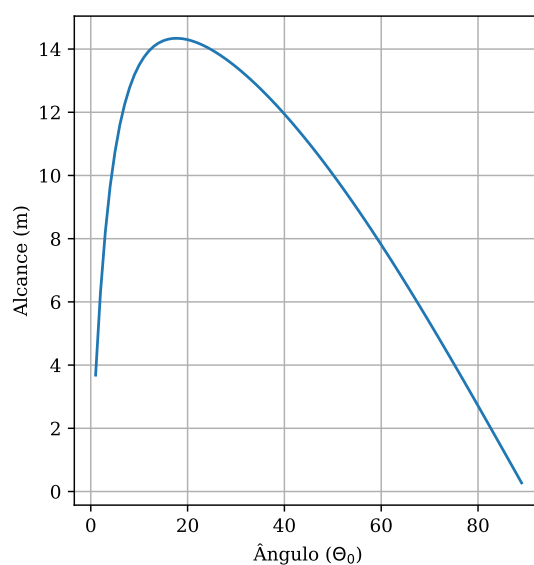
e

$$y(t) = \frac{(-g + ku_2)}{k} t + \left[ \frac{v_o \sin \theta_o}{k} - \frac{ku_2 - g}{k^2} \right] (1 - \exp^{-kt}), \quad (4.9)$$

onde  $k = b/m$ .

A solução para este caso, é dada pelas equações (3.23), (3.24), (3.29) e (3.30). A Figura 16 ilustra a trajetória de um corpo cujos parâmetros do modelo matemático são

Figura 15 – Variação do alcance horizontal máximo em função do ângulo de lançamento.

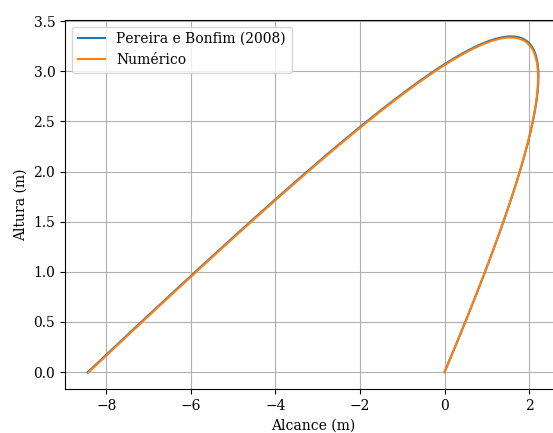


Fonte: Autoria própria.

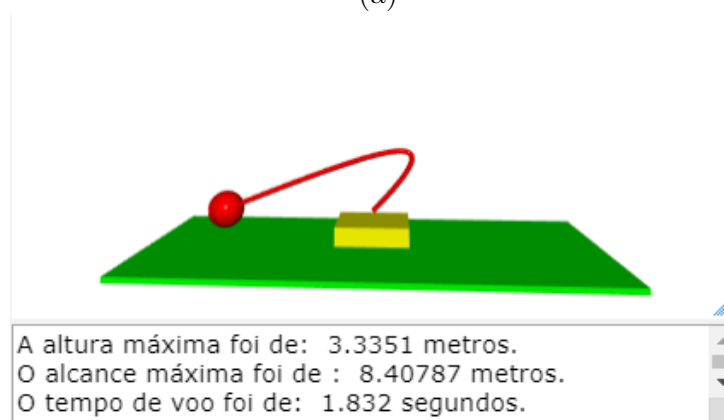
dados por:  $v_0 = 20\text{m/s}$ ,  $\theta_0 = 45^\circ$ ,  $m = 0,25\text{kg}$ ,  $b = 0,6\text{kg/s}$ ,  $u_1 = -10\text{m/s}$  e  $u_2 = 0$ . Podemos notar que, se o vento na direção oeste for muito intenso, o corpo atinge o solo num ponto de abscissa negativa, pois o mesmo foi lançado a partir da origem, ou seja, da coordenada  $(0,0)$ .

Fazendo a análise qualitativa deste caso, notamos que a animação em 3D observada na Figura 16(b), está de acordo com o modelo apresentado por Pereira e Bonfim (2008).

Figura 16 – Trajetória do projétil para o caso 3: a) comparação entre a solução numérica e analítica. b) Simulação em 3D.



(a)



(b)

Fonte: Autoria própria.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, mostramos o desenvolvimento de um simulador para o movimento de projéteis sob a ação de forças externas além da gravitacional e com a possibilidade de exibir os resultados na forma de uma animação em 3D. A modelagem matemática envolveu uma análise de forças e a aplicação da Segunda Lei de Newton. Para solução numérica da EDO resultante, utilizou-se o método de Euler. A modelagem da cena, dos objetos e da animação foi toda criada a partir da biblioteca VPython.

Inicialmente o objetivo foi construir o *solver* numérico usando linguagem Python. Após a sua conclusão, foram realizadas comparações entre os resultados obtidos com soluções analíticas da literatura. Os resultados relativos a todos os casos analisados foram bastante próximos da solução real. Pudemos então comprovar que, de fato, a técnica numérica, é uma alternativa para a obtenção de soluções para as equações diferenciais que modelam o problema físico em questão. Como o uso do método de Euler - assim como em diversos métodos numéricos - recai na repetição de muitos cálculos, principalmente para passos de tempo pequenos, ficou evidente o papel do computador como ferramenta indispensável para este tipo de aplicação científica.

Com relação à modelagem 3D, buscamos apresentar a biblioteca VPython como um recurso gratuito, mas ao mesmo tempo simples e poderoso para o desenvolvimento de animações em 3D. O uso da modelagem deu uma usabilidade ao simulador numérico totalmente nova, se aproximando mais do que se observa no mundo real. O ambiente de desenvolvimento *Glowscript* permitiu disponibilizar o simulador na internet sem custo, na forma de um Objeto de Aprendizagem, requerendo do usuário apenas o uso do navegador e dispensando a necessidade de instalação de qualquer outro *software* adicional, independentemente de plataforma de acesso.

Conforme já mencionado, este projeto de pesquisa foi apoiado com bolsas de iniciação científica do programa PIBIC/UEPB em duas cotas: 2016-2017 e 2017-2018. Durante o XXV Encontro de Iniciação Científica, evento realizado pela UEPB onde todos os alunos do programa devem apresentar os seus trabalhos, o nosso projeto, referente ao uso da modelagem 3D, recebeu um prêmio de menção honrosa, nos fazendo acreditar ainda mais no potencial desta pesquisa.

Vale salientar que o simulador já foi testado como um OA em sala durante uma aula de Física Geral I do curso de Licenciatura em Matemática do CCHE. A demonstração ocorreu de maneira expositiva com o intuito de investigar as potencialidades da visualização do problema físico em três dimensões. O professor explorou as ferramentas quando trabalhava o estudo do movimento de projéteis, oferecendo aos alunos uma possibilidade

a mais na abordagem do conteúdo. Um outro potencial uso do simulador em 3D estaria relacionado à investigação do conteúdo de “*função ou equações quadráticas*” uma vez que o modelo matemático mais simples do problema físico (lançamento no vácuo) resulta em uma equação do 2º grau.

Com relação a futuras pesquisas, pode-se sugerir a investigação de modelos matemáticos ainda mais complexos, envolvendo o efeito Magnus ou a variação de alguns parâmetros no decorrer do voo, como a massa, a gravidade, a densidade do ar, entre outros. Além disso, também podem ser investigadas as parábolas de segurança que, diferentemente do lançamento bidimensional, abrangem a trajetória de projeteis lançados com velocidades iniciais com componentes em três dimensões. Adicionalmente podemos citar a aplicação de outros métodos numéricos de solução. A outros conteúdos da Matemática e da Física podem ser explorados com o auxílio da modelagem 3D como: análise combinatória, geometria espacial, operações com vetores, entre outros. A curto prazo, almeja-se investigar a eficácia do simulador em sala de aula no processo de ensino/aprendizagem do conteúdo, por meio de intervenções e aplicação de questionários.

## REFERÊNCIAS

- BALADEZ, F. O passado, o presente e o futuro dos simuladores. **FaSci-Tech**, v. 1, n. 1, 2016. Citado na página 17.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. [S.l.]: Editora Contexto, 2011. ISBN 9788572441360. Citado na página 17.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. [S.l.]: Guanabara Dois, 1985. Citado nas páginas 25 e 26.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. [S.l.]: MEC Brasília, 2017. Citado na página 16.
- CASTRO, T. H. C. de et al. Utilizando programação funcional em disciplinas introdutórias de computação. **Anais do WEI**, 2003. Citado na página 18.
- COELHO, F. C. **Computação Científica com Python**. [S.l.]: Lulu. com, 2007. Citado na página 19.
- DOWNEY, A.; ELKNER, J.; MEYERS, C. **Como pensar como um cientista da Computação usando Python**. [S.l.]: Cyaneus.net, 2002. Citado na página 19.
- DRAKE, S.; MACLACHLAN, J. Scientific american. 1975. Citado na página 20.
- FAZURI, J.; MATOS, J. M. O. Estudo numérico do movimento de projéteis. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 20, n. 4, p. 327, 1998. Citado nas páginas 20 e 25.
- FERNANDES, E. M. d. G. **Computação numérica**. [S.l.]: Universidade do Minho, 1998. Citado na página 25.
- FILHO, C. **História da computação: O Caminho do Pensamento e da Tecnologia**. Edipucrs, 2007. 205 p. ISBN 9788574306919. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=\\\_YRy1lKnniEC](https://books.google.com.br/books?id=\_YRy1lKnniEC)>. Citado na página 18.
- FILHO, J. A. de C. Objetos de aprendizagem e sua utilização no ensino de matemática. 2007. Citado na página 13.
- FONSECA, J. J. S. Metodologia da pesquisa científica. 2002. Citado na página 29.
- FONTELLAS, M. J. et al. Metodologia da pesquisa científica: diretrizes para a elaboração de um protocolo de pesquisa. **Revista Paraense de Medicina**, v. 23, n. 3, p. 1–8, 2009. Citado na página 29.
- GARCES, S. B. B. Classificação e tipos de pesquisas. **Universidade de Cruz Alta–Unicruz**, 2010. Citado na página 29.
- GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. [S.l.]: Bookman Editora, 2009. Citado nas páginas 25, 27 e 28.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **FUNDAMENTOS DE FÍSICA: MECÂNICA**. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 2002. v. 1. Citado nas páginas 33, 37 e 39.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física: Mecânica, 10ª edição**. [S.l.]: LTC, 2016. Citado nas páginas 21 e 22.

HARRES, J. B. S. Desenvolvimento histórico da dinâmica: referente para a evolução das concepções dos estudantes sobre força e movimento. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 2, n. 2, 2002. Citado na página 20.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua**. [S.l.]: Cortez Editora, 2011. ISBN 9738524917455. Citado na página 16.

MARTINS, M. et al. **Uma proposta de ensino do movimento oblíquo no ensino médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2019. Citado na página 20.

MENDES, A.; SANTANA, G.; JÚNIOR, E. P. O uso do software phet como ferramenta para o ensino de balanceamento de reação química. **Revista Areté| Revista Amazônica de Ensino de Ciências**, v. 8, n. 16, p. 52–60, 2017. Citado na página 17.

MENEZES, N. N. C. Introdução à programação com python. **São Paulo: Novatec**, 2010. Citado na página 19.

NUSSENZWEIG, H. M. Curso de física básica: Mecânica. **São Paulo: Edgard Blucher**, v. 1, 2002. Citado na página 39.

OCDE. **Programme for International Student Assessment (PISA) results from PISA 2018**. 2019. Disponível em: <[https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018\\_CN\\_BRA.pdf](https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_BRA.pdf)>. Citado na página 13.

PEREIRA, L. R.; BONFIM, V. Regiões de segurança em lançamento de projéteis. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30, n. 3, p. 3313, 2008. Citado nas páginas 32, 40 e 41.

PRENSKY, M. Nativos digitais, imigrantes digitais. **On the horizon**, NCB University Press, v. 9, n. 5, p. 1–6, 2001. Citado na página 16.

ROCCA, P. L.; RIGGI, F. Projectile motion with a drag force: were the medievals right after all? **Physics Education**, IOP Publishing, v. 44, n. 4, p. 398, 2009. Citado na página 39.

ROCHA, S. S. D. O uso do computador na educação: a informática educativa. **Revista espaço acadêmico**, v. 85, 2008. Citado na página 13.

SAMPAIO, F. F. Modelagem dinâmica computacional e o processo de ensino-aprendizagem: algumas questões para reflexão. **Relatório Técnico NCE**, Brasil, n. 3699, 1999. Citado na página 18.

SANTOS, M. d.; SCARABOTTO, S. d. C. d. A.; MATOS, E. L. M. Imigrantes e nativos digitais: um dilema ou desafio na educação. In: **X Congresso Nacional de Educação—EDUCERE. I Seminário Internacional de Representações sociais, subjetividade e Educação**. Curitiba. [S.l.: s.n.], 2011. v. 7. Citado na página 16.

- SANTOS, M. R. **Modelagem matemática e solução numérica de lançamento de projéteis**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática). Universidade Estadual da Paraíba. Monteiro, PB, 2016. Citado na página 25.
- SANTOS, R. J. Introdução às equações diferenciais ordinárias. 2011. Citado na página 24.
- SILVA, M. G. P. d. et al. O computador na perspectiva do desenvolvimento profissional do professor. [sn], 1997. Citado na página 16.
- SOARES, V.; TORT, A.; GONÇALVES, A. Uma nota sobre o movimento parabólico: uma elipse e um círculo inesperados. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 35, n. 2, p. 1–2, 2013. Citado nas páginas 20 e 21.
- SOUZA, E. **Ensino De Física Com Modelagem Matemática**. [s.n.], 2010. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=eSZMBQAAQBAJ>>. Citado na página 17.
- STEED, M. **STELLA, A Simulation Construction Kit: Cognitive Process and Education Implications**. [S.l.: s.n.], 1992. Citado na página 18.
- UTIEL, W.; KIRNER, C. Realismo visual em ambientes interativos como ferramentas de auxílio á educação. **RENOTE**, v. 7, n. 1, 2009. Citado na página 19.
- VALENTE, J. **Computadores e conhecimento: repensando a educação**. Universidade Estadual de Campinas, Núcleo de Informática Aplicada à Educação, 1993. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=VHyAHAAACAAJ>>. Citado nas páginas 16 e 17.
- VALENTE, J. A. Informática na educação: confrontar ou transformar a escola. **Perspectiva**, v. 13, n. 24, p. 41–49, 1995. Citado na página 18.
- VEIT, E. A.; ARAUJO, I. S. Modelagem computacional no ensino de física. **Revista do Centro de Educação da Universidade Federal de Alagoas. CEDU–n**, 2005. Citado na página 18.