



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

DETERMINAÇÃO DAS GEODÉSICAS NO CILINDRO E NO CONE

JEAN PEREIRA SOARES

**PATOS
2019**

JEAN PEREIRA SOARES

DETERMINAÇÃO DAS GEODÉSICAS NO CILINDRO E NO CONE

Trabalho de Conclusão de Curso, na modalidade Monografia, apresentado ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura Plena em Matemática – CCEA – UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira

**PATOS
2019**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S676d Soares, Jean Pereira.
Determinação das geodésicas no cilindro e no cone
[manuscrito] / Jean Pereira Soares. - 2019.
54 p. : il. colorido.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em
Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de
Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2019.
"Orientação : Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira ,
Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."
1. Curvas. 2. Cálculo Variacional. 3. Geodésicas. 4.
Geometria Diferencial. 5. Superfícies. I. Título
21. ed. CDD 516.36

JEAN PEREIRA SOARES

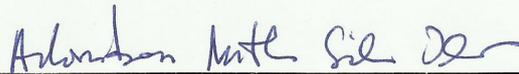
DETERMINAÇÃO DAS GEODÉSICAS NO CILINDRO E NO CONE

Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

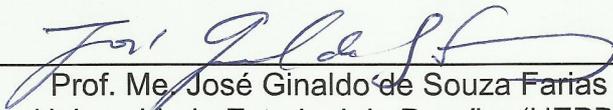
Área de concentração: Matemática

Aprovado em 02/12/2019.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof.^a Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico aos meus pais, Gilvan e Joelsa,
ao irmão Julian e à minha namorada Clarisse,
que com muito carinho e cuidado me apoiaram e
contribuíram para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, Gilvan e Joelsa, que desde sempre me apoiaram na decisão de fazer um curso de graduação e que por incontáveis vezes me ajudaram a seguir em frente, não importando quais dificuldades aparecessem.

Também agradeço ao meu irmão Julian e minha namorada Clarisse, ambos por sua paciência, carinho e compreensão pelos momentos que precisei me dedicar profundamente e me ausentar em virtude desse trabalho e do curso.

Além deles, gostaria de agradecer aos meus amigos: Laisa, Henrique, Italo e todas e quaisquer pessoas que um dia acreditaram em mim e no meu potencial, me incentivando a seguir em frente nos estudos e me proporcionando forças para continuar.

Por fim, gostaria de agradecer à UEPB, como instituição de ensino, e todos os profissionais dela que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho e a conclusão deste curso, desde os vigias e faxineiros, aos técnicos que me atenderam prontamente sempre que precisei, bem como o corpo docente.

Em especial, gostaria de terminar essa redação, agradecendo ao meu orientador Dr. Arlandson, que com muita paciência e dedicação me auxiliou, orientou e ensinou durante todos esse trabalho que surgiu como um dos resultados do projeto de pesquisa de que participamos.

Também, sem mais delongas, agradeço à CAPES e à UEPB pelo fornecimento da bolsa durante o projeto de pesquisa citado anteriormente que foi de grande auxílio nas viagens apresentando trabalhos e nos estudos que realizei antes de concretizar essa referida pesquisa.

A todos que me ajudaram e acreditaram em mim um dia, meus mais sinceros e profundos agradecimentos.

“É capaz quem pensa que é capaz.”
Siddhartha Gautama

RESUMO

Na geometria, um dos primeiros problemas aos quais somos apresentados, e que se caracteriza como um dos mais simples, é o de determinar o menor caminho possível entre dois determinados pontos distintos. Tal problemática nos é introduzida ainda durante o ensino básico, quando é requerido que nós determinemos a distância entre dois pontos ou, a depender do caso, o caminho entre algumas possibilidades disponíveis que possui o menor comprimento. Na matemática do ensino superior, vemos que tal conceito se remete às geodésicas, as quais podemos descrever como as curvas de menor comprimento localizadas sobre superfícies. Em nosso estudo, na presente monografia, nosso objetivo é o de verificar a existência e caracterizar as geodésicas sobre superfícies cônicas e cilíndricas utilizando, respectivamente, os conceitos do Cálculo Variacional e da Geometria Diferencial tendo como base de nossos resultados os escritos de Tenenblat (2008), Barbosa (1975), Kot (2014) e Hrusa e Troutman (1981).

Palavras-chave: Curvas. Cálculo Variacional. Geodésicas. Geometria Diferencial. Superfícies.

ABSTRACT

In geometry, one of the first problems to which we are presented, and which is characterized as one of the simplest, is to determine the shortest possible path between two distinct points. Such a problem is introduced to us even during Middle School, when we are required to determine the distance between two points or, as the case may be, the path between some available possibilities of the shortest length. In Higher Education Mathematics, we see that this concept refers to geodesics, which we can describe as the shortest curves located on surfaces. In our study, in the present monograph, our objective is to verify the existence and characterize the geodesics on conical and cylindrical surfaces using, respectively, the concepts of Variational Calculus and Differential Geometry based on the results in the writings of: Tenenblat (2008), Barbosa (1975), Kot (2014) and Hrusa and Troutman (1981).

Keywords: Curves. Variational Calculus. Geodesics. Differential Geometry. Surfaces.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	PRELIMINARES	10
2.1	O Espaço Euclidiano \mathbb{R}^n	10
2.2	Espaços Vetoriais Normados	13
2.3	Diferenciabilidade e Continuidade	14
3	GEOMETRIA DIFERENCIAL	18
3.1	Curvas Parametrizadas	18
3.2	Superfícies	23
3.3	Plano Tangente e Vetor Normal	26
3.4	Formas Quadráticas e Isometrias	27
3.5	Geodésicas e Símbolos de Christoffel	31
3.6	Geodésicas no Cilindro	34
4	CÁLCULO VARIACIONAL	36
4.1	Funcionais	36
4.2	Principais Problemas do Cálculo das Variações	36
4.2.1	<i>Geodésica: A Curva de Menor Comprimento</i>	36
4.2.2	<i>A Superfície Mínima de Revolução</i>	37
4.2.3	<i>O Problema Isoperimétrico</i>	37
4.2.4	<i>Braquistócrona: A Curva de Menor Tempo</i>	38
4.2.5	<i>O Princípio de Ação Estacionária</i>	38
4.3	A Equação de Euler-Lagrange	39
4.4	Condições Suficientes para Minimalidade	41
4.5	O Problema Variacional Mais Simples	45
4.6	Caracterização Elementar do Mínimo Clássico	46
4.7	Caracterizando as Geodésicas no Cilindro	49
4.8	Caracterizando as Geodésicas no Cone	50
5	CONCLUSÃO	53
	REFERÊNCIAS	54

1 INTRODUÇÃO

No estudo da Geometria, um dos primeiros problemas aos quais somos apresentados, ainda durante a educação básica, é o de encontrarmos ou definirmos a distância entre dois pontos distintos em alguma situação hipotética considerada. Tal problemática, que envolve a busca pelo caminho de menor comprimento dentre todas as alternativas possíveis, remete ao conceito de geodésica estudada mais profundamente apenas na educação superior. O percurso de menor comprimento corresponde, no plano euclidiano, à reta ou, mais especificamente, ao segmento de reta entre dois pontos. Neste trabalho, nossa proposta é a de verificarmos a existência e caracterizarmos a forma das geodésicas sobre outras superfícies não-planares, especificamente, as superfícies cilíndrica e cônica.

No intuito de identificarmos tais curvas, nosso estudo permeará dois campos distintos da Matemática, mas que se debruçam sobre essa mesma problemática. Utilizando dos conceitos, definições e resultados da Geometria Diferencial, campo da matemática iniciado por Carl Friedrich Gauss, nos proporemos a descrever o comportamento das geodésicas em superfícies cilíndricas, bem como, formalmente, descreveremos o que de fato são curvas e superfícies, seguindo Tenenblat (2008).

Para descrevermos o comportamentos das curvas de menor comprimento em superfícies cônicas, utilizaremos os métodos sistematizados pelo Cálculo Variacional, que pode ser descrito como uma generalização de alguns conceitos do Cálculo Diferencial e Integral para um conjunto maior de problemas. Baseando-nos em Barbosa (1975) e Kot (2014), desenvolveremos toda uma teoria voltada para a extremização de funções em busca de caracterizarmos curvas mínimas, isso é, de menor comprimento dentre todas as pertencentes a determinado conjunto de possibilidades. Nosso principal resultado nesta parte consiste em uma caracterização diferente da padrão para as geodésicas do cone e é devido a Hrusa e Troutman (1981).

Nosso trabalho divide-se em três capítulos, os quais organizam-se da seguinte forma. No primeiro, introduzimos os conceitos mais elementares do Cálculo Diferencial e Integral e da Álgebra Linear que servirão de base para o desenvolvimento das teorias e métodos abordadas no segundo, voltado para a Geometria Diferencial, e no terceiro, voltado para o Cálculo Variacional.

2 PRELIMINARES

Apesar da Geometria Diferencial e do Cálculo Variacional constituírem-se como dois campos distintos da Matemática, existem problemáticas comuns a ambas. Uma dessas problemáticas é a de encontrar ou definir o trajeto mais curto entre dois pontos não-coincidentes dados sobre alguma superfície. Encontrar caminhos de menor comprimento é um dos diversos problemas de variação que o Cálculo Variacional se ocupa por estudar, mas também é um dos grandes problemas da Geometria Diferencial.

Neste capítulo inicial, nossa proposta é a de apresentar os conceitos e definições que nos serviram como base para o desenvolver de toda essa pesquisa. O primeiro conceito com cuja descrição nos ocuparemos é o de intervalo, visto que essa ideia é essencial para ambas as áreas que pretendemos visitar aqui.

Se $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, usaremos as seguintes notações abaixo:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\},$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}.$$

A esses conjuntos chamaremos de *intervalos com extremos a e b*. Contudo, cada um deles possui características próprias evidenciadas pela notação respectiva usada para cada um. O intervalo $[a, b]$ é fechado, enquanto que $[a, b)$ é fechado apenas à esquerda e $(a, b]$ é fechado apenas à direita. Por fim, (a, b) é aberto.

Seguindo Lourêdo, Oliveira e Lima (2012), vamos precisar de uma maneira geral o que são conjuntos abertos e fechados ao descrevermos tais relações topológicas no \mathbb{R}^n . É isso que faremos a seguir.

2.1 O espaço euclidiano \mathbb{R}^n

Nosso objeto de estudo nesta seção é o conjunto \mathbb{R}^n das *n-uplas* $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ de números reais, no qual iremos definir os conceitos de bolas abertas e fechadas, assuntos diretamente relacionados às definições de intervalos da reta.

Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Definimos os seguintes conjuntos:

- a) Esfera de centro x_0 e raio r :

$$S_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, x_0) = r\};$$

- b) Bola aberta de centro x_0 e raio r :

$$B(x_0; r) = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, x_0) < r\};$$

c) Bola fechada de centro x_0 e raio r :

$$B[x_0; r] = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, x_0) \leq r\}.$$

Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ um ponto fixado. Então uma e, somente uma, das três possibilidades a seguir deve ocorrer:

- i Existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset A$
- ii Existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset A^c = \mathbb{R}^n - A$
- iii Para qualquer $\delta > 0$, a bola $B(x, \delta)$ contém pontos de A e de A^c .

No primeiro caso, x é chamado *ponto interior* de A . No segundo caso, x é denominado como *ponto exterior* de A . E no terceiro caso, x é um ponto de fronteira de A .

Os pontos interiores de A constituem o *interior* de A , denotado por $\text{int}(A)$. O exterior de A é denotado por $\text{ext}(A)$ e sua fronteira por ∂A . O *fecho* de A é o conjunto $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Na figura abaixo, temos uma região elíptica localizada no \mathbb{R}^2 , na qual os pontos I e J são interiores, enquanto que o ponto F está localizado na fronteira e o ponto E é exterior à região elíptica.

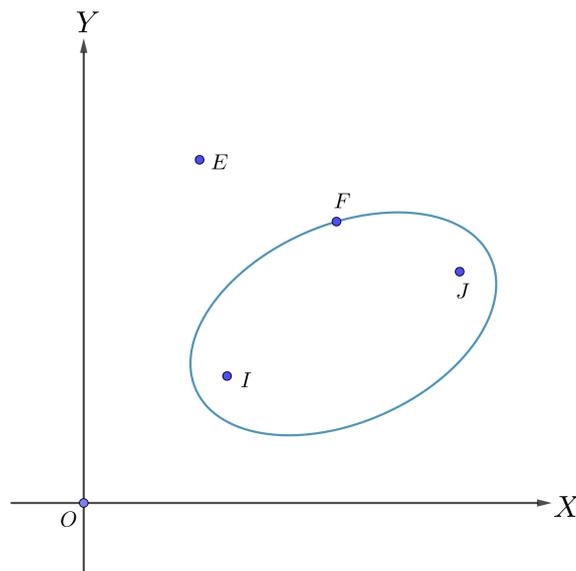


Figura 2.1: Região Elíptica.

Seguindo Lourêdo, Oliveira e Lima (2012), a partir destas definições de pontos interiores, exteriores e de fronteira, podemos definir o que de fato são conjuntos abertos e fechados.

Definição 2.1. O conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto se $\text{int}(A) = A$, ou seja, A é aberto se todos os seus pontos são interiores. Se $\partial A \subset A$, então dizemos que A é fechado, isto é, se os pontos da fronteira de A estão contidos no próprio A , então ele é fechado.

Além dessas noções topológicas, precisaremos de algumas operações algébricas definidas no \mathbb{R}^n como os produtos escalares e vetoriais.

Definição 2.2. Dados $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos o seu produto escalar como:

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + \dots + x_n \cdot y_n.$$

No caso específico do \mathbb{R}^2 , dados $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B) \in \mathbb{R}^2$, seu produto escalar é, por definição,

$$\langle A, B \rangle = x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B.$$

Exemplo 2.1. Sejam $A = (2, 4)$ e $B = (-3, 0) \in \mathbb{R}^2$. O produto escalar de A e B é dado por:

$$\langle A, B \rangle = 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 0 \Rightarrow \langle A, B \rangle = -6.$$

O produto vetorial, o qual descreveremos a seguir, será uma importante ferramenta no estudo das curvas e superfícies no capítulo destinado à Geometria Diferencial.

Considere dois vetores w_1 e $w_2 \in \mathbb{R}^3$ de componentes (isto é, coordenadas na base canônica do \mathbb{R}^3): $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$, chamaremos de produto vetorial de w_1 por w_2 e denotaremos por $w_1 \times w_2$ o vetor:

$$w_1 \times w_2 = (y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1, x_2 \cdot z_1 - x_1 \cdot z_2, x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1).$$

Exemplo 2.2. Sejam $w_1 = (1, 0, 3)$ e $w_2 = (-1, 0, -3)$, o produto vetorial é dado por:

$$w_1 \times w_2 = (0 \cdot (-3) - 0 \cdot 3, (-1) \cdot 3 - 1 \cdot (-3), 1 \cdot 0 - (1) \cdot 0) = (0, -3 + 3, 0) = (0, 0, 0).$$

Considere os vetores w_1, w_2 e $w_3 \in \mathbb{R}^3$ e a constante $\lambda \in \mathbb{R}$. O produto vetorial satisfaz as seguintes propriedades descritas:

- a) $|w_1 \times w_2| = |w_1||w_2| \sin(\theta)$, onde θ é o ângulo entre w_1 e w_2 ;
- b) $\langle w_1 \times w_2, w_1 \rangle = \langle w_1 \times w_2, w_2 \rangle = 0$;
- c) $w_1 \times w_2 = 0$ se, e somente se, w_1 e w_2 são linearmente dependentes;
- d) $w_1 \times w_2 = -(w_2 \times w_1)$;
- e) $w_1 \times (w_2 + w_3) = w_1 \times w_2 + w_1 \times w_3$;
- f) $\lambda w_1 \times w_2 = \lambda(w_1 \times w_2)$;
- g) $w_1 \times (w_2 \times w_3) = \langle w_1, w_3 \rangle w_2 - \langle w_1, w_2 \rangle w_3$.

Observação 2.1. Sobre o item c listado acima, resta esclarecer o que de fato são vetores linearmente dependentes.

Dizemos que os vetores $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n$ são linearmente dependentes quando existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ não todos nulos, tais que:

$$\lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2 + \lambda_3 \cdot w_3 + \dots + \lambda_n \cdot w_n = (0, 0, \dots, 0).$$

Diremos que esses vetores são linearmente independentes se eles não são linearmente dependentes, isto é, se

$$\lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2 + \lambda_3 \cdot w_3 + \dots + \lambda_n \cdot w_n = (0, 0, \dots, 0)$$

implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$.

Estas noções podem ser facilmente generalizadas para um qualquer conjunto finito de vetores em um dado espaço vetorial.

2.2 Espaços vetoriais normados

Recordemos as definições de um espaço vetorial e de norma.

Definição 2.3. Um conjunto V não vazio, munido de uma soma $+$: $V \times V \rightarrow V$ e de um produto \cdot : $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$, é um espaço vetorial real quando, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades são válidas:

- I) $u + v = v + u$;
- II) $u + (v + w) = (u + v) + w$;
- III) existe um elemento neutro aditivo $0 \in V$ tal que $0 + u = u$;
- IV) para cada $u \in V$, existe um elemento inverso aditivo $v \in V$ tal que $u + v = 0$;
- V) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$;
- VI) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$;
- VII) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$;
- VIII) $1 \cdot u = u$.

Definição 2.4. Uma função que associa a cada elemento v de um espaço vetorial real V um número real não negativo $\|v\|$ é chamada uma norma se satisfaz as seguintes propriedades:

- I) $\|v\| = 0$ se, e só se, $v = 0$;
- II) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ para todos $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$; e
- III) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Se $\|\cdot\|$ é uma norma sobre V , dizemos que o par $(V, \|\cdot\|)$ (ou, por simplicidade, que V) é um espaço vetorial normado.

Exemplo 2.3. O espaço euclidiano \mathbb{R}^2 é um espaço vetorial normado com a norma euclidiana de um vetor $v = (x, y)$ definida por

$$\|v\| := (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Generalizando, o espaço euclidiano \mathbb{R}^n é um espaço vetorial normado quando munido da seguinte norma:

$$\|w\| = \|(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\| := (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

No estudo do Cálculo das Variações, trabalharemos com conjuntos de funções e seus subespaços, definidos por condições pré-estabelecidas que deverão estar de acordo com o problema em foco. Um tal conjunto de funções será usualmente denotado por \mathcal{F} .

Quando $\mathcal{F} = \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ é o espaço vetorial real de todas as funções reais definidas sobre o intervalo limitado e fechado $[a, b]$, os subconjuntos que mais comumente utilizamos são os listados a seguir:

- I Denotamos por $C[a, b]$ o conjunto de todas as funções contínuas no intervalo $[a, b]$.

- II $C^1[a, b]$ é o conjunto de todas as funções deriváveis com derivada contínua em $[a, b]$.
- III Definimos $C^2[a, b]$ como o conjunto de todas as funções contínuas definidas num dado intervalo $[a, b]$ e que possuem primeira e segunda derivadas contínuas.
- IV Definimos $D[a, b]$ como o conjunto de todas as funções reais contínuas por partes definidas em $[a, b]$.
- V Definimos $D^1[a, b]$ e $D^2[a, b]$, respectivamente, como o conjunto de todas as funções contínuas que admitem primeira derivada contínua por partes e o conjunto de todas as funções contínuas que admitem primeira e segunda derivadas contínuas por partes.

Exemplo 2.4. O conjunto $C[a, b]$ é um espaço vetorial real quando munido da seguinte norma:

$$\|f\|_0 = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Como claramente $C^1[a, b]$ é um subespaço de $C[a, b]$, pois $C^1[a, b] \subset C[a, b]$ e cumpre as propriedades descritas anteriormente, então também podemos considerar em $C^1[a, b]$ a norma $\|\cdot\|_0$. Por outro lado, podemos definir em $C^1[a, b]$ a seguinte norma:

$$\|f\|_1 = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

A prova de que $\|\cdot\|_1$ é a norma segue de que

$$\|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0.$$

O último conceito que apresentamos nesta seção é o de aplicação linear, ideia basilar para a definição de diferenciabilidade no \mathbb{R}^n , que será abordada na seção seguinte.

Definição 2.5. Dados dois espaços vetoriais reais V e W , diremos que uma aplicação $T : V \rightarrow W$ é linear se:

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Uma aplicação linear $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de funcional linear.

No capítulo destinado ao Cálculo Variacional, desenvolveremos toda uma teoria voltada aos funcionais no estudo das curvas de menor comprimento.

2.3 Diferenciabilidade e continuidade

Nesta última seção, nosso objetivo é fornecer ao leitor as definições provenientes do Cálculo Diferencial e Integral de diferenciabilidade e continuidade. Tais ideias constituem-se como parte importante tanto no estudo do Cálculo Variacional quanto no estudo da Geometria Diferencial, visto que buscamos trabalhar com funções que, em geral, exigimos que sejam diferenciáveis até certo grau e, pelo menos, contínuas no conjunto de nosso interesse.

Inicialmente, definiremos formalmente o significado de continuidade para, na sequência, iniciarmos uma revisão acerca de diferenciabilidade.

Definição 2.6. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função e $x_0 \in A$ um ponto. Diremos que f é contínua em x_0 se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que:

$$x \in A \quad \text{e} \quad \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Exemplo 2.5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Essa função é contínua em $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Com efeito, note

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $\delta = \varepsilon$, resultando em

$$\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y)| < \varepsilon.$$

Definição 2.7. Sejam A um subconjunto de \mathbb{R} , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in A$ um ponto. Definimos a derivada de f em a como:

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t},$$

desde que o limite exista. Neste caso, dizemos que a função f é diferenciável em a .

A definição precedente trata da diferenciabilidade de uma função f definida sobre um subconjunto $D \subset \mathbb{R}$. Contudo, para fins do nosso estudo, é conveniente estendermos essa noção de diferenciabilidade para funções definidas em subconjuntos de \mathbb{R}^n .

Seguindo Lourêdo, Oliveira e Lima (2012), formalizaremos a definição de derivadas parciais, para, na sequência, descrevermos as derivadas em \mathbb{R}^n .

Definição 2.8. Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função, a um ponto interior de D e $u \in \mathbb{R}^n$. Chamaremos de derivada direcional a expressão:

$$D_u f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t},$$

válida desde que o limite exista.

Tal limite depende de a e u e descreve a derivada direcional da função f no ponto a na direção do vetor u .

Outras notações para a derivada direcional são $f'(a; u)$ e $f_u a$.

Podemos reformular o que foi dito acima da seguinte forma: $D_u f(a)$ é a derivada direcional de f no ponto a com relação ao vetor u se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$ satisfazendo a condição $0 < |t| < \delta$, temos:

$$\left\| \frac{1}{t} \{f(a+tu) - f(a)\} - D_u f(a) \right\| < \varepsilon.$$

Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$ um ponto. Definimos

$$\phi(t) := f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Nessas condições, derivada direcional $D_j f(a)$ de f com relação ao j -ésimo vetor canônico do \mathbb{R}^n no ponto a é igual à derivada ordinária de ϕ no ponto $t = a_j$. A derivada $D_j f$ também é chamada j -ésima derivada parcial de f . Dessa forma, a derivada parcial $D_j f$ pode ser calculada tratando $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m$ como constantes e derivando a função resultante com relação a x_j , ou seja, neste caso recaímos na noção de diferenciabilidade descrita na Definição 2.7 para funções reais de uma variável real.

Definição 2.9. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é diferenciável num ponto $a \in A$ se existe uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{\|f(a+u) - f(a) - L(u)\|}{\|u\|} = 0.$$

A aplicação linear L , quando existe, é única. Tal aplicação é chamada de *derivada de f em a* e é denotada por $Df(a)$. Escrevemos $Df(a)(u)$ ao invés de $L(u)$.

Os demais conceitos acerca do Cálculo Diferencial e Integral, como a noção de pontos de acumulação, limites e o significado geométrico de alguns conceitos, podem ser consultados em qualquer livro de Cálculo. Indicamos, por exemplo, Pinto e Morgado (2009) e Lourêdo, Oliveira e Lima (2012).

Por fim, apresentaremos as coordenadas cilíndricas que representam um sistema de localização diferente das coordenadas cartesianas usualmente empregadas. Tais coordenadas serão úteis no estudo das curvas de menor comprimento sobre as superfícies cônica e cilíndrica no capítulo destinado ao Cálculo Variacional.

Seja P um ponto descrito em coordenadas cartesianas, ou retangulares, como $P = (x, y, z)$. No sistemas de coordenadas cilíndricas, esse ponto terá as coordenadas $P = (r, \theta, z)$, onde os valores r e θ são as coordenadas polares associadas a projeção de P no plano xy . Em outras palavras, considere um ponto P localizado no espaço \mathbb{R}^3 e projete esse ponto na superfície plana xy , como na figura.

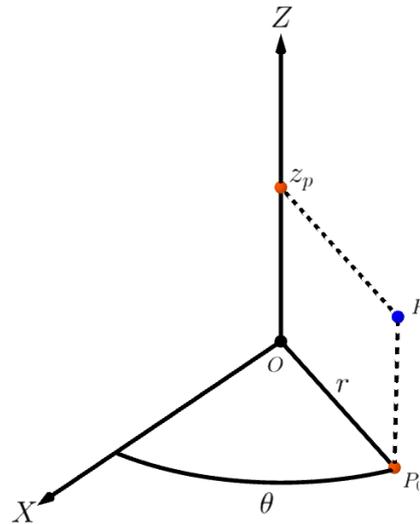


Figura 2.2: Coordenadas cilíndricas de um ponto no \mathbb{R}^3 .

Com relação à projeção P_0 de P no plano base, nós obtemos duas coordenadas. A coordenada r que corresponde à distância de P_0 até a origem e a θ que corresponde ao ângulo de abertura do segmento formado por essa distância e o semi-eixo positivo X .

A terceira coordenada cilíndrica, z , é a mesma do plano cartesiano, correspondendo à altura que o ponto P está com relação ao plano base.

Com essas três informações, somos capazes de localizar qualquer ponto no \mathbb{R}^3 , desde que estabeleçamos um eixo de orientação X para definirmos o restante.

Esse sistema de coordenadas se caracteriza como uma ferramenta de grande utilidade em nosso estudo, visto que facilita a descrição de pontos e curvas sobre o cilindro. Além disso,

com relação ao cone também é um recurso importante, visto que esse sólido e o cilindro são ambas superfícies de revolução.

3 GEOMETRIA DIFERENCIAL

A origem da Geometria Diferencial remonta à publicação em 1827 do artigo *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas* [Investigações Gerais acerca de Superfícies Curvas], de autoria do matemático alemão Carl Friedrich Gauss. Em resumo, a Geometria Diferencial consiste numa teoria que estuda os objetos geométricos através dos conceitos e técnicas estabelecidos pelo Cálculo Diferencial, daí a sua terminologia; veja Lima (2016).

Nesse capítulo, nosso objetivo é determinar as geodésicas do cilindro fazendo uso de resultados da Geometria Diferencial. Antes disso, e com esse propósito, faremos uma breve apresentação dos conceitos essenciais dessa importante área da Matemática. Seguiremos Tenenblat (2008).

3.1 Curvas Parametrizadas

Definição 3.1. *Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação diferenciável α de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 . A variável $t \in I$ é dita um parâmetro da curva e o subconjunto de \mathbb{R}^2 dos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é chamado traço da curva.*

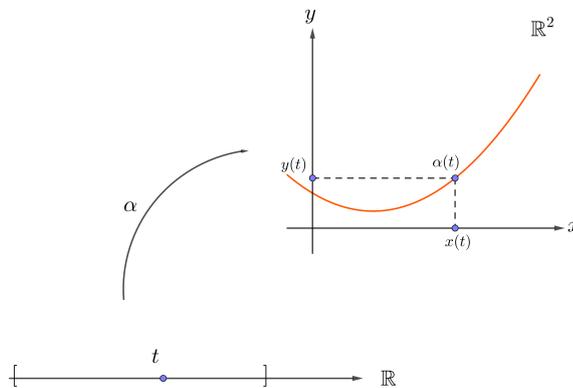


Figura 3.1: Curva parametrizada a partir de um intervalo na reta.

Exemplo 3.1. *Considere um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$. A aplicação $\alpha(t) = (x_0 + a \cdot t, y_0 + b \cdot t)$, em que $t \in \mathbb{R}$, é uma curva parametrizada diferenciável, cujo traço é a reta passando por P_0 e que é paralela ao vetor de coordenadas (a, b) .*

Exemplo 3.2. *A aplicação dada por $\alpha = (\cos(t), \sin(t))$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$, é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é a circunferência de raio 1 centrada na origem de \mathbb{R}^2 .*

Exemplo 3.3. *A aplicação $\alpha = (t, |t|)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$ não é uma curva parametrizada diferenciável, pois $|t|$ não é diferenciável em $t = 0$.*

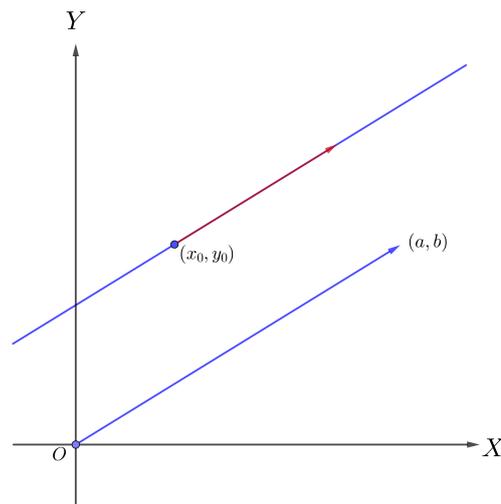


Figura 3.2: Reta paralela ao vetor (a, b) .

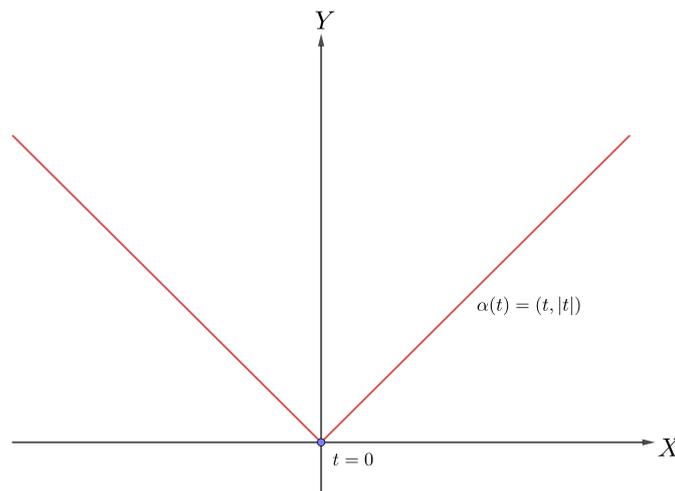


Figura 3.3: Curva modular.

Além das curvas parametrizadas em \mathbb{R}^2 , consideraremos também curvas parametrizadas diferenciáveis no espaço \mathbb{R}^3 :

Definição 3.2. *Uma curva parametrizada diferenciável de \mathbb{R}^3 é uma aplicação diferenciável α de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^3 . A variável $t \in I$ é dita um parâmetro da curva e o subconjunto de \mathbb{R}^3 dos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é chamado traço da curva.*

Em outras palavras, uma *curva parametrizada diferenciável no plano* é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada número $t \in I$ associa um vetor $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, onde as funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são diferenciáveis de classe C^∞ . Analogamente, se o contradomínio da nossa curva é \mathbb{R}^3 , então para todo $t \in I$, nossa aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ associará um vetor $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde as funções do segundo membro da igualdade serão diferenciáveis de classe C^∞ .

Outro conceito de extrema importância ao abordamos geodésicas é o de curvas parametrizadas diferenciáveis regulares.

Definição 3.3. *Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita regular se $\alpha'(t) \neq 0$ $\forall t \in I$.*

Exemplo 3.4. *Recorde o Exemplo 3.1 descrito anteriormente. Se pedimos que $(a, b) \neq (0, 0)$, então a curva parametrizada $\alpha(t) = (x_0 + a \cdot t, y_0 + b \cdot t)$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$, é uma curva regular. Com efeito, note que $\alpha'(t) = (a, b)$; logo $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 3.5. *A aplicação $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ do Exemplo 3.2, definida para todo $t \in \mathbb{R}$, é uma curva regular, pois $\alpha(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ e, portanto, $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 3.6. *A aplicação α definida para todo $t \in \mathbb{R}$ por $\alpha(t) = (\frac{t^3}{3} + 2, e^t - 1)$ é uma curva parametrizada diferenciável regular. Com efeito, note que $\alpha'(t) = (t^2, e^t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ nunca se anula.*

Definição 3.4. *Sejam I e J intervalos abertos de \mathbb{R} , $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável de classe C^∞ , cuja derivada de primeira ordem não se anula em nenhum ponto de J e tal que $h(J) = I$. Então, a função composta*

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é uma curva parametrizada regular, que tem o mesmo traço de α , chamada de reparametrização de α por h . A função h é denominada mudança de parâmetro.

Exemplo 3.7. *Seja $\alpha(t) = (a \cdot \cos(t), a \cdot \sin(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, uma curva parametrizada regular. Considere $h(s) = \frac{s}{a}$, definida para todo $s \in \mathbb{R}$. A reparametrização de α por h é dada por:*

$$\beta = \alpha \circ h = \left(a \cdot \cos\left(\frac{s}{a}\right), a \cdot \sin\left(\frac{s}{a}\right) \right).$$

Exemplo 3.8. *A curva regular $\beta(r) = (-2r + 1, -4r + 2)$, definida para todo $r \in \mathbb{R}$, é uma reparametrização da curva $\alpha(t) = (t, 2t)$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Basta que consideremos a mudança de parâmetro $h(r) = -2r + 1$, $r \in \mathbb{R}$.*

Seja a função h uma mudança de parâmetro, então h é extritamente crescente ou decrescente e, portanto, é uma função bijetora. Além disso, seja α uma curva parametrizada regular e β uma reparametrização de α por h , então α é uma reparametrização de β adquirida através da função inversa h^{-1} .

Chamaremos de orientação de uma curva parametrizada regular α o sentido do percurso de seu traço. Considere, então, uma curva β obtida pela reparametrização de α através da mudança de parâmetro h . Se h é uma função extritamente crescente, então as curvas α e β possuem o mesmo sentido e, logo, a mesma orientação. Caso h seja uma função extritamente decrescente, então α e β possuem sentidos diferentes e, assim, orientações opostas.

O último tópico que abordaremos nesta seção remete ao comprimento das curvas, um conceito que surge no Cálculo Diferencial e Integral como uma das aplicações dos métodos estudados e que tem relação direta com a definição de geodésica.

Consideremos $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e fixemos dois pontos, digamos t_0 e t_1 do intervalo I . Ao subdividirmos o intervalo $[t_0, t_1]$ em pequenas partes limitadas pelos pontos $t_0 = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n = t_1$ e ligarmos retilinearmente cada par de pontos $\alpha(t_{j-1})$ e $\alpha(t_j)$, obteremos uma linha poligonal como indicado na figura abaixo. Como α é uma curva regular, isto é, $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, podemos verificar através do Cálculo Diferencial e Integral que existe o limite superior do conjunto de comprimentos dessas linhas poligonais existentes, o qual é dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(\tau)| d\tau.$$

O valor resultante dessa integral é chamado de *comprimento de arco* da curva α localizada entre os pontos t_0 e t_1 . A aplicação $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau$ é denominada *função comprimento de arco* da curva α a partir do ponto t_0 . Tal função é diferenciável de classe C^∞ , uma vez que α é uma curva regular.

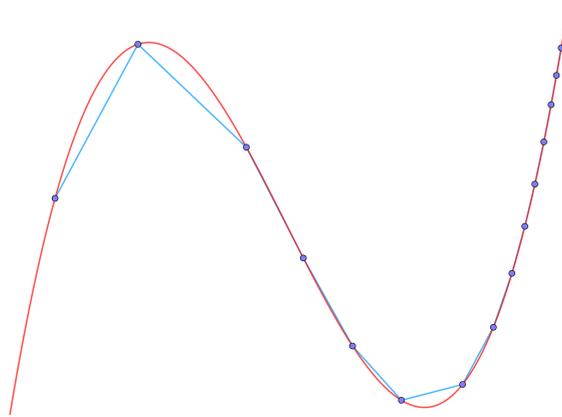


Figura 3.4: Linha Poligonal.

Na figura acima, o traço azul representa a linha poligonal ao conectarmos os pontos $\alpha(t_{j-1})$ e $\alpha(t_j)$ considerados sobre a curva em vermelho. Note que, conforme diminuimos a distância entre os pontos $t_0 = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n = t_1$, as linhas poligonais tendem a se “ajustar” à curva.

Definição 3.5. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *parametrizada pelo comprimento de arco*, se para cada t_0 e $t_1 \in I$, onde $t_0 \leq t_1$ o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$, isto é, se

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(\tau)| d\tau = t_1 - t_0.$$

Proposição 3.1. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, para todo $t \in I$, temos $|\alpha'(t)| = 1$.

Demonstração. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e α uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Fixemos um $t_0 \in I$. Consideremos, então, a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ que para cada $t \in I$ associa

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau.$$

Se $t_0 \leq t$, então, por hipótese, $s(t) = t - t_0$; por outro lado, se $t \leq t_0$, então

$$-s(t) = \int_t^{t_0} |\alpha'(\tau)| d\tau = -(t_0 - t) = t - t_0.$$

Portanto, para todo $t \in I$, temos que $s(t) = t - t_0$, donde $s'(t) = 1$. Como $s'(t) = |\alpha'(t)|$, logo, concluímos que para todo $t \in I$, $|\alpha'(t)| = 1$. A recíproca é imediata. \square

Exemplo 3.9. A aplicação

$$\alpha(t) = \left(a \cdot \cos\left(\frac{t}{a}\right), a \cdot \sin\left(\frac{t}{a}\right) \right)$$

definida para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$, é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, pois cumpre a condição $|\alpha'(t)| = 1$.

Proposição 3.2. *Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$, e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , a qual β está parametrizada pelo comprimento de arco.*

Demonstração. Seja α uma curva regular definida para todo $t \in I \subset \mathbb{R}$. Então, pela Proposição 3.1, sabemos que $s'(t) = |\alpha'(t)| = 1 > 0$, ou seja, s é uma função estritamente crescente. Logo, existe a função inversa de s , digamos h definida como $h : J \rightarrow I$. Assim, para todo $t \in I$, temos $h(s(t)) = t$. Com isso, $\frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1$. Daí,

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|} > 0.$$

Com isso, concluímos que $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$, onde $s \in J$, é uma reparametrização de α e

$$\left| \frac{d\beta}{ds} \right| = \left| \frac{d\alpha}{dt} \frac{dh}{ds} \right| = \left| \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \right| = 1.$$

Portanto, pela Proposição 3.1, β está parametrizada pelo comprimento de arco. \square

Contudo, devemos observar que a aplicação β não é única, pois depende da função comprimento de arco e do parâmetro t estabelecido. Tal aplicação β será denominada uma *reparametrização de α pelo comprimento de arco*.

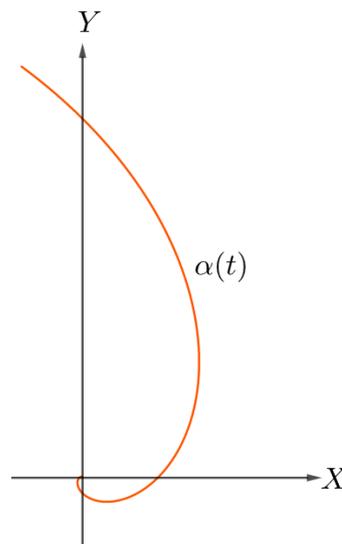


Figura 3.5: Espiral logarítmica.

Exemplo 3.10. *A espiral logarítmica vista acima é o traço da curva*

$$\alpha(t) = (e^t \cdot \cos(t), e^t \cdot \sin(t)),$$

definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Verificamos que $|\alpha'(t)| = \sqrt{2} \cdot e^t$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e, assim, a função comprimento de arco de α a partir do ponto $t_0 = 0$ é:

$$s(t) = \sqrt{2} \cdot e^t - \sqrt{2}.$$

A função inversa é dada por:

$$h(s) = \log \left(\frac{s}{\sqrt{2}} \right) + 1,$$

onde $s \in \mathbb{R}$.

Portanto,

$$\beta(s) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \cdot \cos \left(\log \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right), \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \cdot \sin \left(\log \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right) \right),$$

definida para todo $s \in \mathbb{R}$, é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

3.2 Superfícies

Tendo em vista que nosso objetivo neste capítulo é estudar geodésicas sobre superfícies, em especial a cilíndrica, então nada mais natural que definirmos de maneira precisa o que é uma superfície. Tal definição é dada logo abaixo.

Definição 3.6. Uma superfície parametrizada regular ou simplesmente uma superfície é uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, a qual U é um aberto de \mathbb{R}^2 , tal que:

- X é diferenciável de classe C^∞ .
- Para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial de X em q , denotada por $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetora.

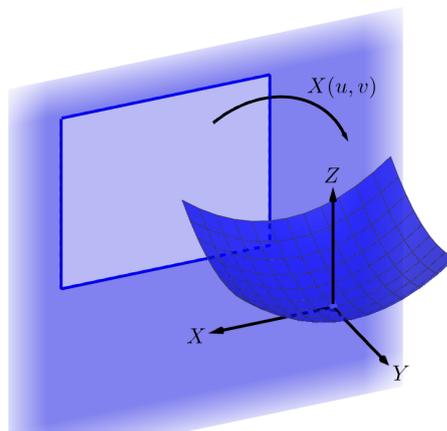


Figura 3.6: Superfície gerada através de região do plano.

Observação 3.1. As seguintes notações são equivalentes quando falamos sobre superfícies: X e $X(u, v)$, neste caso, u e v representam as funções coordenadas da curva parametrizada que gerou a superfície.

A condição (a) da definição precedente requer que, a fim de que $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ seja uma superfície, a aplicação $X(u, v)$ seja diferenciável de classe C^∞ . Isso acontece se, e só se, as funções coordenadas x , y e z possuem derivadas parciais de todas as ordens contínuas.

Por outro lado, sobre a condição (b) descrita na mesma definição, as seguintes afirmações são equivalentes:

b.1) dX_q é injetora;

b.2) os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são linearmente independentes;

b.3) $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) \neq 0$.

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Fixando um ponto $q = (u_0, v_0) \in U$, chamamos as curvas $u \mapsto X(u, v_0)$ e $v \mapsto X(u_0, v)$ de curvas coordenadas de X em q . Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ serão os vetores tangentes às curvas coordenadas da superfície X .

Exemplo 3.11. Considere um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pertencente ao \mathbb{R}^3 e dois vetores $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$ linearmente independentes do \mathbb{R}^3 . A aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida para todo $q = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ e descrita como $X(u, v) = P_0 + u \cdot a + v \cdot b$ ou ainda

$$X(u, v) = (x_0 + u \cdot a_1 + v \cdot b_1, y_0 + u \cdot a_2 + v \cdot b_2, z_0 + u \cdot a_3 + v \cdot b_3)$$

é uma superfície parametrizada regular. De fato, é evidente que as funções coordenadas de X possuem derivadas parciais de todas as ordens contínuas, pois são funções polinomiais de primeiro grau com duas variáveis. Ademais, note que $X_u = a$ e $X_v = b$, de maneira que estes vetores são linearmente independentes. Essa aplicação X descreve o plano contido no \mathbb{R}^3 no qual P_0 está localizado e que é ortogonal ao vetor $a \times b$. Nesse caso, as curvas coordenadas de X são descritas como retas no plano e são paralelas aos vetores a e b , respectivamente.

Exemplo 3.12. Considere a aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida da seguinte forma:

$$X(u, v) = (a \cdot \sin(v) \cdot \cos(u), a \cdot \sin(v) \cdot \sin(u), a \cdot \cos(v)),$$

onde $a > 0$ e $U = \mathbb{R} \times (0, \pi) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$.

Essa aplicação satisfaz a primeira condição, pois as funções $x(u, v) = a \cdot \sin(v) \cdot \cos(u)$, $y(u, v) = a \cdot \sin(v) \cdot \sin(u)$ e $z(u, v) = a \cdot \cos(v)$ são diferenciáveis de classe C^∞ . Além disso, os vetores:

$$X_u = (-a \cdot \sin(v) \cdot \sin(u), a \cdot \sin(v) \cdot \cos(u), 0)$$

e

$$X_v = (a \cdot \cos(v) \cdot \cos(u), a \cdot \cos(v) \cdot \sin(u), -a \cdot \sin(v))$$

são linearmente independentes. Com efeito, $|X_u \times X_v| = a^2 \cdot \sin(v) \neq 0$, desde que $v \in (0, \pi)$. Portanto, X é uma superfície. Essa superfície descreve a esfera centrada na origem que possui raio a com exceção aos dois pólos. Suas curvas coordenadas são os meridianos e paralelos.

Exemplo 3.13. O cone de uma folha menos o vértice descrito como a aplicação

$$X(u, v) = (u \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(v), u \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(v), u \cdot \cos(\alpha)),$$

onde $u > 0$, $v \in \mathbb{R}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ é uma constante, é uma superfície, pois as funções $x(u, v) = u \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(v)$, $y(u, v) = u \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(v)$ e $z(u, v) = u \cdot \cos(\alpha)$ são contínuas de classe C^∞ , o que satisfaz a primeira condição. E, além disso, temos

$$X_u(u, v) = (u' \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(v), u' \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(v), u' \cdot \cos(\alpha))$$

e

$$X_v(u, v) = (-u \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(v) \cdot v', u \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(v) \cdot v', 0)$$

são vetores linearmente independentes, pois o seu produto vetorial $X_u \times X_v \neq 0$, o que satisfaz a segunda condição.

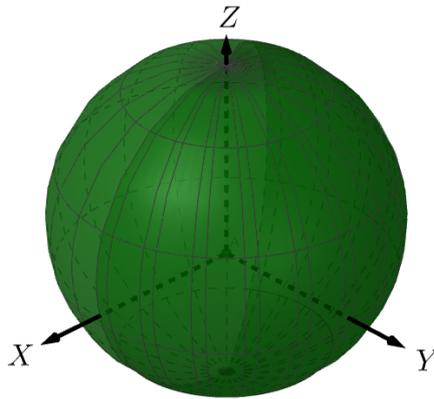


Figura 3.7: Esfera centrada na origem.

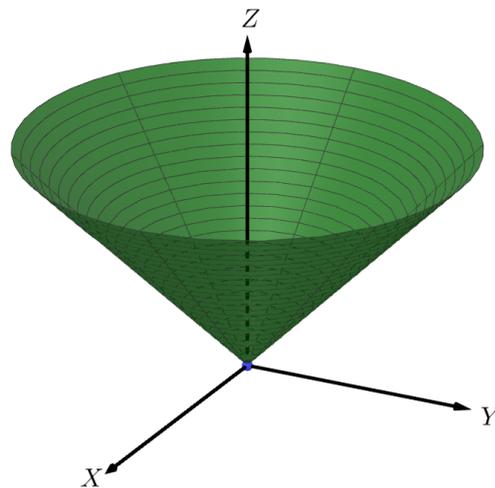


Figura 3.8: Cone.

Proposição 3.3. *Seja $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva regular tal que f não se anula. Então, a aplicação*

$$X(u, v) = (f(u) \cdot \cos(v), f(u) \cdot \sin(v), g(u)),$$

onde $u \in I$ e $v \in \mathbb{R}$, é uma superfície parametrizada regular.

Demonstração. Seja α uma curva regular descrita como $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, a qual f não se anula. Desejamos provar que a aplicação: $X(u, v) = (f(u) \cdot \cos(v), f(u) \cdot \sin(v), g(u))$ é uma superfície parametrizada regular na qual $u \in I \subset \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}$.

Como α é uma aplicação diferenciável, então as coordenadas de $X(u, v)$ são diferenciáveis. Logo, a primeira condição é satisfeita.

No que segue, desejamos mostrar que dX_q é injetiva ou, equivalentemente, que os vetores X_u e X_v são linearmente independentes.

Veja que $X_u = (f'(u) \cdot \cos(v), f'(u) \cdot \sin(v), g'(u))$ e $X_v = (-f(u) \cdot \sin(v), f(u) \cdot \cos(v), 0)$, donde

$$|X_u \times X_v|^2 = f^2(u)[(g')^2 + (f')^2] \neq 0$$

Como o produto vetorial entre X_u e X_v é diferente de zero, esses vetores são linearmente independentes. Portanto, $X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular. \square

Exemplo 3.14. O cilindro regular descrito como a superfície $X(u, v) = (a \cdot \cos(v), a \cdot \sin(v), u)$, onde $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, é uma superfície parametrizada regular obtida pela rotação da reta $\alpha(u) = (a, 0, u)$, definida para todo $u \in \mathbb{R}$, em torno do eixo O_z .

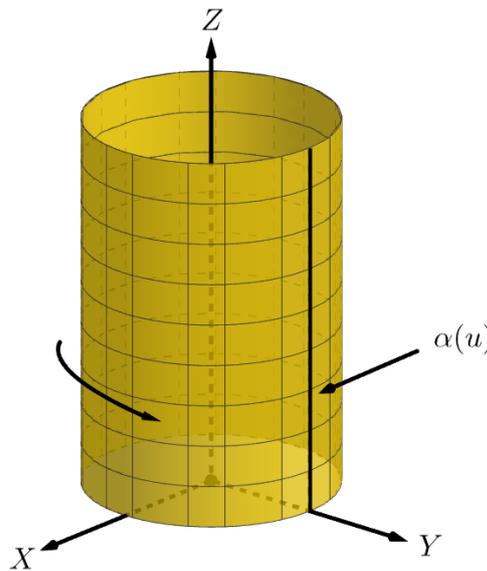


Figura 3.9: Cilindro gerado pela rotação da curva $\alpha(u) = (a, 0, u)$.

3.3 Plano Tangente e Vetor Normal

Além das definições acerca de curvas e superfícies parametrizadas, outras ideias fundamentais para que possamos definir com clareza o que de fato são geodésicas são os vetores e planos tangentes, aos quais voltaremos nossa atenção nesta seção.

Definição 3.7. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável, que a cada $t \in I$ associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. O vetor:

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$$

é chamado vetor tangente a α em t .

Exemplo 3.15. Seja $\alpha(t) = (\frac{t^3}{3} + 2, e^t - 1)$ uma curva parametrizada regular, onde $x(t) = \frac{t^3}{3} + 2$ e $y(t) = e^t - 1$ são definidas em todo $t \in \mathbb{R}$. O vetor $\alpha'(t) = (t^2, e^t)$ é tangente a $\alpha(t)$ em t .

Definição 3.8. Dizemos que um vetor $w \in \mathbb{R}^3$ é tangente a X em $q = (u_0, v_0)$ se existe uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ da superfície tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ e $\alpha'(t_0) = w$. O plano tangente a X em q é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em q .

Proposição 3.4. *Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q(u_0, v_0)$. Então, $T_q X$ é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$.*

Demonstração. Se $w \in T_q X$, então $w = \alpha'(t_0)$, para alguma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0) = q_0$. Logo,

$$w = \alpha'(t_0) = \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t)))|_{t=t_0} = X_u(u_0, v_0) \cdot u'(t_0) + X_v(u_0, v_0) \cdot v'(t_0).$$

Ou seja, w é uma combinação linear dos vetores X_u e X_v em q_0 .

Reciprocamente, suponhamos que $w = a \cdot X_u(u_0, v_0) + b \cdot X_v(u_0, v_0)$. Precisamos encontrar uma curva parametrizada regular $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ tal que $(u'(0), v'(0)) = (u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = w$. Basta que consideremos a curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, em que $u(t) = u_0 + a \cdot t$ e $v(t) = v_0 + b \cdot t$, definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, $T_q X$ é o conjunto de vetores tangentes obtidos a partir da combinação linear de X_u e X_v com relação ao ponto $q = (u_0, v_0)$. \square

Definição 3.9. *Se $X(u, v)$ é uma superfície e $q = (u_0, v_0)$, dizemos que um vetor de \mathbb{R}^3 é normal a X em q se é ortogonal a $T_q X$, isto é, é ortogonal a todos os vetores tangentes a X em q .*

Sejam X uma superfície parametrizada regular e $T_q X$ o plano tangente a essa superfície num ponto q . Existe apenas uma única direção normal a este plano e, com isso, existem apenas dois vetores unitários normais a superfície X com relação ao ponto q . Fixaremos o vetor unitário normal a superfície X no ponto q como:

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q).$$

Exemplo 3.16. *Seja $X(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$, onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < 1\}$. Consideremos o ponto $q \in U$ tal que $q = (u_0, v_0) = (0, 0)$. Através da Proposição 3.4, sabemos que os vetores $X_u(0, 0) = (1, 0, 0)$ e $X_v(0, 0) = (0, 1, 0)$ formam uma base para o plano tangente $T_q X$. Logo, todo vetor tangente à superfície X com relação ao ponto $q = (0, 0)$ é da forma $(a, b, 0)$, onde a e $b \in \mathbb{R}$, e o vetor normal é $N(0, 0) = (0, 0, 1)$.*

Exemplo 3.17. *Considere a superfície parametrizada regular $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Nessa superfície, o plano tangente $T_q X$ é gerado pelos vetores $X_u = (1, 0, 2u)$ e $X_v = (0, 1, 2v)$ e, assim, o vetor normal é definido como:*

$$N(u, v) = \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}.$$

3.4 Formas Quadráticas e Isometrias

No desenvolver de nosso estudo acerca das curvas que possuem o menor comprimento sobre superfícies, foram de grande utilidade os conceitos relacionados às chamadas formas quadráticas e, especialmente, aos seus coeficientes.

Definição 3.10. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Para cada $q \in U$, a aplicação*

$$\begin{aligned} I_q : T_q X &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2 \end{aligned}$$

é denominada a primeira forma quadrática de X em q .

Com o intuito de descrever de maneira explícita, a partir da definição, a primeira forma quadrática, consideremos uma superfície $X(u, v)$ dada e um ponto $q = (u_0, v_0)$. Nesse caso, um vetor $T_q X$ é da forma

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Calculando a primeira forma quadrática, encontramos:

$$I_q(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0), \quad (3.1)$$

Fazendo

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0),$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

a equação (3.1) se transforma em

$$I_q(w) = a^2 \cdot E(u_0, v_0) + 2 \cdot a \cdot b \cdot F(u_0, v_0) + b^2 \cdot G(u_0, v_0).$$

As funções diferenciáveis $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ são chamadas de *coeficientes da primeira forma quadrática* conforme variamos q em X .

Exemplo 3.18. Considere a superfície $X(u, v) = P_0 + u \cdot w_1 + v \cdot w_2$, definida para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, em que $P_0 \in \mathbb{R}^3$ e w_1, w_2 são vetores ortogonais de \mathbb{R}^3 . Em outras palavras, $X(u, v)$ descreve o plano ortogonal ao produto vetorial $w_1 \times w_2$ e que passa pelo ponto P_0 . Temos $X_u = w_1$ e $X_v = w_2$. Como os vetores w_1 e w_2 são ortogonais, nós obtemos os coeficientes da primeira forma quadrática como as seguintes funções: $E(u, v) = 1$, $F(u, v) = 0$ e $G(u, v) = 1$.

Exemplo 3.19. No cilindro regular $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ descrito como a superfície $X(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, os coeficientes da primeira forma quadrática são: $E(u, v) = 1$, $F(u, v) = 0$ e $G(u, v) = 1$. Note que os coeficientes da primeira forma quadrática do plano descritos no exemplo anterior e os do cilindro descritos aqui são iguais.

Exemplo 3.20. A esfera centrada na origem e que possui raio a , $X(u, v) = (a \cdot \sin(v) \cdot \cos(u), a \cdot \sin(v) \cdot \sin(u), a \cdot \cos(v))$, onde $a > 0$ é uma constante definida, $u \in \mathbb{R}$ e $0 < v < \pi$, possui os seguintes coeficientes: $E(u, v) = a^2 \cdot \sin^2(v)$, $F(u, v) = 0$ e $G(u, v) = a^2$.

Como visto nos Exemplos 3.18 e 3.19, e destacado neste segundo especialmente, existem situações em que superfícies distintas possuem os mesmos coeficientes. Tais situações fundamentam a definição de isometria, descrita logo abaixo:

Definição 3.11. Sejam $X(u, v)$ e $\bar{X}(u, v)$, $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, superfícies simples. Dizemos que X e \bar{X} são superfícies isométricas se, para todo $(u, v) \in U$, os coeficientes da primeira forma quadrática de X e \bar{X} coincidem, isto é, $E(u, v) = \bar{E}(u, v)$, $F(u, v) = \bar{F}(u, v)$ e $G(u, v) = \bar{G}(u, v)$.

Exemplo 3.21. Considere a região do plano S como a superfície $X(u, v) = (u, v, 0)$, na qual $0 < u < 2\pi$ e $v \in \mathbb{R}$, e \bar{S} como o cilindro menos um meridiano descrito como $\bar{X}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, onde $0 < u < 2\pi$ e $v \in \mathbb{R}$.

As superfícies X e \bar{X} são isométricas. A isometria $\phi : S \rightarrow \bar{S}$ consiste em enrolarmos a região do plano S ao redor do cilindro \bar{S} de forma que os segmentos horizontais de S são levados nos paralelos do cilindro menos um ponto, enquanto que as retas verticais do plano S são levadas nos meridianos do cilindro \bar{S} .

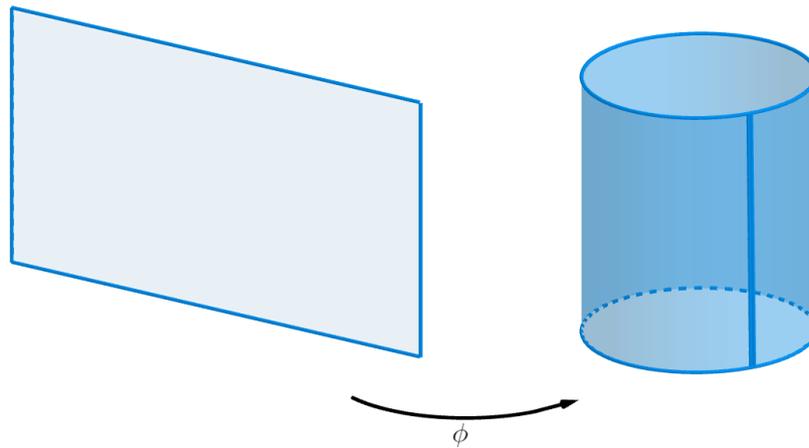


Figura 3.10: Isometria entre plano e cilindro.

Proposição 3.5. *Sejam $X, \bar{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfícies simples, $S = X(U)$ e $\bar{S} = \bar{X}(U)$. X e \bar{X} são isométricas se, e só se, a aplicação $\phi : S \rightarrow \bar{S}$ definida por $\phi : \bar{X} \circ X^{-1}$, preserva comprimentos de curvas, isto é, para toda curva α de X , o comprimento de α é igual ao comprimento da curva $\phi \circ \alpha$.*

Demonstração. Considere uma superfície parametrizada regular $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$, uma curva regular dessa superfície e $\bar{\alpha}(t) = \phi(\alpha(t))$. Como $\phi = \bar{X} \circ X^{-1}$, temos que $\bar{\alpha}(t) = \bar{X}(u(t), v(t))$. Assim,

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= X_u \cdot u'(t) + X_v \cdot v'(t), \\ \bar{\alpha}'(t) &= \bar{X}_u \cdot u'(t) + \bar{X}_v \cdot v'(t),\end{aligned}$$

e os comprimentos das curvas α e $\bar{\alpha}$ de t_0 até t_1 são dados por:

$$\begin{aligned}l(\alpha) &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(u')^2 \cdot E + 2 \cdot u' \cdot v' \cdot F + (v')^2 \cdot G} dt, \\ l(\bar{\alpha}) &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(u')^2 \cdot \bar{E} + 2 \cdot u' \cdot v' \cdot \bar{F} + (v')^2 \cdot \bar{G}} dt.\end{aligned}$$

Se X e \bar{X} são isométricas, então, pela igualdade dos coeficientes da primeira forma quadrática, temos que $l(\alpha) = l(\bar{\alpha})$.

Reciprocamente, desejamos provar que, se X e \bar{X} superfícies parametrizadas regulares tais que o comprimento de toda curva α definida em X é igual ao comprimento de $\bar{\alpha} = \phi(\alpha)$, então X e \bar{X} são isométricas. Considere a curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, em que $u(t) = u_0 + a \cdot t$ e $v(t) = v_0 + b \cdot t$, sendo a e b constantes que não se anulam simultaneamente e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ suficientemente pequeno de tal maneira que $(u(t), v(t)) \in U$. Sejam $s(t)$ e $\bar{s}(t)$ as funções comprimento de arco correspondentes, respectivamente, a α e $\bar{\alpha}$ entre t_0 e t .

Como para todo t , temos $s(t) = \bar{s}(t)$, por derivação obtemos:

$$\begin{aligned}a^2 \cdot E(u(t), v(t)) + 2ab \cdot F(u(t), v(t)) + b^2 \cdot G(u(t), v(t)) &= \\ = a^2 \cdot \bar{E}(u(t), v(t)) + 2ab \cdot \bar{F}(u(t), v(t)) + b^2 \cdot \bar{G}(u(t), v(t))\end{aligned}$$

Em particular, em $t = 0$, obtemos:

$$a^2 \cdot (E(q) - \bar{E}(q)) + 2ab(F(q) - \bar{F}(q)) + b^2 \cdot (G(q) - \bar{G}(q)) = 0.$$

Essa equação se verifica para quaisquer constantes a e b . Portanto: $E(q) = \bar{E}(q)$, $F(q) = \bar{F}(q)$ e $G(q) = \bar{G}(q)$. Como q é um ponto arbitrariamente selecionado de U , concluímos que as superfícies X e \bar{X} são isométricas. \square

Definição 3.12. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Fixado $q = (u_0, v_0) \in U$, a segunda forma quadrática de X em q é uma aplicação $II_q : T_q X \rightarrow \mathbb{R}$, que para cada vetor $w \in T_q X$ associa II_w da seguinte forma: se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva diferenciável da superfície, tal que $q = (u(t_0), v(t_0))$ e $\alpha'(t_0) = w$, então definimos $II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle$, onde N é o campo de vetores normais à superfície X .*

Nesse momento, verificaremos que a segunda forma quadrática não depende da curva escolhida e definiremos os seus coeficientes. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $T_q X$ o plano tangente a X com relação ao ponto $q = (u_0, v_0)$. Conforme a Proposição 3.4, escolhamos um vetor $w \in T_q X$ como uma combinação linear de X_u e X_v da seguinte forma: $w = a \cdot X_u(u_0, v_0) + b \cdot X_v(u_0, v_0)$. Além disso, consideremos uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$, tal que $q = (u(t_0), v(t_0))$ e $\alpha'(t_0) = w$, ou seja:

$$(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0), \quad (u'(t_0), v'(t_0)) = (a, b).$$

Como

$$\alpha'(t) = u'(t) \cdot X_u(u(t), v(t)) + v'(t) \cdot X_v(u(t), v(t))$$

e

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= u''(t) \cdot X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2 \cdot X_{uu}(u(t), v(t)) + \\ &2 \cdot u' \cdot v' \cdot X_{uv}(u(t), v(t)) + (v'(t))^2 \cdot X_{vv}(u(t), v(t)) + v''(t) \cdot X_v(u(t), v(t)). \end{aligned}$$

Temos que a segunda forma quadrática é dada por:

$$II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle = a^2 \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0).$$

É claro que a última expressão não depende da curva α . Fazendo

$$\begin{aligned} e(u_0, v_0) &= \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0), \\ f(u_0, v_0) &= \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0), \\ g(u_0, v_0) &= \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0), \end{aligned}$$

obtemos

$$II_q(w) = a^2 \cdot e(u_0, v_0) + 2ab \cdot f(u_0, v_0) + b^2 \cdot g(u_0, v_0).$$

As funções diferenciáveis $e(u_0, v_0)$, $f(u_0, v_0)$ e $g(u_0, v_0)$ são chamadas os coeficientes da segunda forma quadrática.

3.5 Geodésicas e Símbolos de Christoffel

Definição 3.13. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Uma curva regular $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, onde $t \in \mathbb{R}$, é uma geodésica da superfície X se, para todo $t \in I$, $\alpha''(t)$ é um vetor normal a X em $u(t), v(t)$.*

Exemplo 3.22. *Todo segmento de reta contido em um plano é uma geodésica desse plano.*

Exemplo 3.23. *Seja $X(u(t), v(t))$ uma superfície cujo traço corresponde à esfera com raio $r > 0$. Todo círculo máximo parametrizado pelo comprimento de arco é uma geodésica da esfera.*

As geodésicas, além de serem as curvas de menor comprimento ligando dois pontos de uma superfície, possuem outra característica importante em nosso estudo: são únicas desse problema de minimização. Consideremos dois pontos distintos e não-coincidentes P_1 e P_2 sobre uma superfície parametrizada regular X . Dentre todas as curvas α que conectam P_1 e P_2 , existe apenas uma curva que possui o menor comprimento possível e essa curva é a geodésica. A seguir, desenvolveremos as equações diferenciais por meio das quais poderemos identificar as geodésicas de uma superfície e veremos o resultado que nos garante a afirmada unicidade destas curvas.

Seja $X(u, v)$, onde $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície parametrizada regular. Recorde que a segunda condição que $X(u, v)$ satisfaz para ser uma superfície é que para cada ponto $q = (u, v) \in U$, temos que X_u e X_v são linearmente independentes. Além disso, os vetores X_u , X_v e N também são linearmente independentes, pois N é ortogonal a $T_q X = \text{span}\{X_u, X_v\}$. Podemos obter vetores X_{uu} , X_{uv} , X_{vv} , N_u e N_v como combinações lineares de X_u , X_v e N :

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \cdot X_u + \Gamma_{11}^2 \cdot X_v + a_{11} \cdot N \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \cdot X_u + \Gamma_{12}^2 \cdot X_v + a_{12} \cdot N \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \cdot X_u + \Gamma_{22}^2 \cdot X_v + a_{22} \cdot N \\ N_u &= b_{11} \cdot X_u + b_{12} \cdot X_v \\ N_v &= b_{21} \cdot X_u + b_{22} \cdot X_v \end{aligned} \tag{3.2}$$

Os coeficientes Γ_{ij}^k , a_{ij} e b_{ij} serão determinados conforme a superfície. Sobre as duas últimas equações definidas acima, nós usamos o fato de que N_u e N_v são vetores tangentes à superfície $X(u, v)$. (De fato, $\langle N, N \rangle = 1 \Rightarrow \langle N, N' \rangle = 0$.)

Ao considerarmos o produto interno das expressões para os três vetores em (3.2) com relação ao vetor normal N , obtemos:

$$a_{11} = e, \quad a_{12} = f \quad \text{e} \quad a_{22} = g.$$

Para obtermos os outros coeficientes, devemos considerar o produto interno das expressões para os vetores em (3.2) com os vetores X_u e X_v :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 \cdot E + \Gamma_{11}^2 \cdot F &= \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} \cdot E_u, \\
\Gamma_{11}^1 \cdot F + \Gamma_{11}^2 \cdot G &= \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} \cdot E_v, \\
\Gamma_{12}^1 \cdot E + \Gamma_{12}^2 \cdot F &= \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} \cdot E_v, \\
\Gamma_{12}^1 \cdot F + \Gamma_{12}^2 \cdot G &= \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} \cdot G_u, \\
\Gamma_{22}^1 \cdot E + \Gamma_{22}^2 \cdot F &= \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} \cdot G_v, \\
\Gamma_{22}^1 \cdot F + \Gamma_{22}^2 \cdot G &= \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} \cdot G_v,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
b_{11} \cdot E + b_{12} \cdot F &= \langle N_u, X_u \rangle = -e, \\
b_{11} \cdot F + b_{12} \cdot G &= \langle N_u, X_v \rangle = -f, \\
b_{21} \cdot E + b_{22} \cdot F &= \langle N_v, X_u \rangle = -f, \\
b_{21} \cdot F + b_{22} \cdot G &= \langle N_v, X_v \rangle = -g.
\end{aligned}$$

Ao resolvermos as duas primeiras equações para Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 , as duas seguintes para Γ_{12}^1 e Γ_{12}^2 e assim por diante, sucessivamente, obtemos as seguintes novas igualdades:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EF - F^2)}, \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EF - F^2)}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EF - F^2)}, \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EF - F^2)}, \\
b_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\
b_{12} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\
b_{21} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\
b_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}.
\end{aligned}$$

Proposição 3.6. *Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva regular de uma superfície $X(u, v)$. Então, α é uma geodésica de X se, e só se, as funções u e v satisfazem o sistema de equações:*

$$\begin{aligned}
u'' + (u')^2 \cdot \Gamma_{11}^1 + 2 \cdot u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \cdot \Gamma_{22}^1 &= 0 \\
v'' + (u')^2 \cdot \Gamma_{11}^2 + 2 \cdot u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \cdot \Gamma_{22}^2 &= 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da superfície X .

Demonstração. Por definição, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma geodésica de $X(u, v)$ se, e somente se, para todo $t \in I$, $\alpha''(t)$ não possui componente tangencial à superfície. Sendo assim, nosso objetivo é exibir $\alpha''(t)$ como uma combinação linear dos vetores X_u , X_v e N e, em seguida, ao exigir que X_u e X_v sejam nulos, obteremos o sistema de equações (3.4). Veja que:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= u' \cdot X_u + v' \cdot X_v, \\ \alpha''(t) &= u'' \cdot X_u + (u')^2 \cdot X_{uu} + 2u'v' \cdot X_{uv} + (v')^2 \cdot X_{vv} + v'' \cdot X_v.\end{aligned}$$

Ao substituímos X_{uu} , X_{uv} e X_{vv} pelas relações estabelecidas em (3.2), obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}\alpha''(t) &= [u'' + (u')^2 \cdot \Gamma_{11}^1 + 2 \cdot u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \cdot \Gamma_{22}^1] \cdot X_u \\ &\quad + [v'' + (u')^2 \cdot \Gamma_{11}^2 + 2 \cdot u'v' \cdot \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \cdot \Gamma_{22}^2] \cdot X_v \\ &\quad + [(u')^2 \cdot e + 2u'v' \cdot f + (v')^2 \cdot g] \cdot N.\end{aligned}$$

Dessa forma, $\alpha''(t)$ é múltiplo de N se, e só se, o sistema de equações (3.4) é satisfeito. \square

Das relações (3.3), inferimos que os símbolos de Christoffel dependem apenas dos coeficientes da primeira forma quadrática e suas derivadas. Recorde também que a Definição 3.11 prescreve que, se os coeficientes da primeira forma quadrática de duas superfícies S e \bar{S} são iguais, então elas são isométricas. Portanto, como as geodésicas são caracterizadas pelo sistema (3.4), se S e \bar{S} são isométricas, então as geodésicas de uma são levadas nas geodésicas da outra através da isometria.

Proposição 3.7. *Seja $X(u, v)$, $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície parametrizada regular. Para todo $q \in U$ e para todo vetor não-nulo $w \in T_q X$, existe $\epsilon > 0$ e uma única geodésica $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, onde $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, da superfície X , tal que $(u(0), v(0)) = q$ e $\alpha'(t) = w$.*

Demonstração. Considere X uma superfície parametrizada regular definida para todo $q = (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ e $T_q X$ o plano tangente a S com relação a q . Pela Proposição 3.4, todo $w \in T_q X$ é uma combinação linear dos vetores X_u e X_v :

$$w = a \cdot X_u(u, v) + b \cdot X_v(u, v).$$

Pelo teorema de existência e unicidade das soluções de equações diferenciais, existe um $\epsilon > 0$ e funções $u(t)$ e $v(t)$ definidas no intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ que satisfazem o sistema de equações (3.4) com as condições iniciais $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$, $u'(0) = a$ e $v'(0) = b$ dadas. Além disso, essas funções $u(t)$ e $v(t)$ são únicas. Logo, a curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é a única geodésica da superfície X tal que $q_0 = (u(0), v(0))$ e $\alpha'(0) = w$. \square

Exemplo 3.24. *Recorde o Exemplo 3.11: Considere $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de \mathbb{R}^3 e $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$ dois vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^3 . Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o plano passando pelo ponto P_0 e que é ortogonal ao vetor $a \times b$. Fixe um ponto $q \in \mathbb{R}^2$ arbitrário e um vetor $\mathbb{R}^3 \ni w \neq 0$ tangente a X em q . Existe apenas uma reta do plano que passa pelo ponto q e é tangente a w , que é uma geodésica. Pela Proposição 3.7, concluímos que as retas são as únicas geodésicas do plano.*

Outra maneira de verificar que as retas são geodésicas do plano é utilizando a Proposição 3.6. De fato, como os Símbolos de Christoffel são identicamente nulos para o plano, o sistema de equações diferenciais (3.4) se reduz a $u'' = 0$ e $v'' = 0$.

3.6 Geodésicas no Cilindro

Como visto no Exemplo 3.14, a superfície de rotação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ descrita como $X(u, v) = (f(u) \cdot \cos(v), f(u) \cdot \sin(v), g(u))$ é, de fato, uma superfície.

Utilizando os resultados obtidos ao longo deste capítulo, descreveremos nesta última seção as geodésicas do cilindro $X(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Inicialmente, observamos que os meridianos e os paralelos de $X(u, v)$, parametrizados pelo comprimento de arco, são geodésicas. Podemos afirmar isso, pois os meridianos são retas e os paralelos são circunferências α com α'' normal à superfície.

Além dos meridianos e paralelos, as hélices são as únicas outras geodésicas do cilindro. Para verificar isso, fixemos um ponto $q = (u_0, v_0)$ sobre X . As curvas $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ que satisfazem as condições $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ são da forma:

$$\alpha(t) = (\cos(at + u_0), \sin(at + u_0), ct + v_0),$$

onde a e c são constantes não-nulas e $t \in \mathbb{R}$. Com efeito, uma tal α deve necessariamente ter a forma

$$\alpha(t) = (\cos u(t), \sin u(t), v(t)).$$

Daí,

$$\alpha' = u'X_u + v'X_v = u'(-\sin u, \cos u, 0) + v'(0, 0, 1)$$

e

$$\begin{aligned} \alpha'' &= u''X_u + u'(u'X_{uu} + v'X_{uv}) + v'(u'X_{vu} + v'X_{vv}) + v''X_v \\ &= u''(-\sin u, \cos u, 0) + u'^2(-\cos u, -\sin u, 0) \\ &\quad + 2u'v'(0, 0, 0) + v'^2(0, 0, 0) + v''(0, 0, 1) \\ &= u''N + \underbrace{(-u'' \sin u, u'' \cos u, v'')}_{\text{componente tangencial}}, \end{aligned}$$

onde $N(u, v) = (\cos u, \sin u, 0)$ é o campo normal a X . Logo, se α é geodésica, devemos ter $u'' = 0 = v''$, o que implica $u(t) = at + u_0$ e $v(t) = ct + v_0$. Curvas desse tipo satisfazem o sistema de equações (3.4) contido na Proposição 3.6; portanto, são geodésicas do cilindro.

Pela Proposição 3.7 e com uma argumentação semelhante à do Exemplo 3.24, podemos concluir que os meridianos, paralelos e hélices são as únicas geodésicas do cilindro.

Outra maneira de descrevermos as geodésicas do cilindro é com a utilização de isometrias. Como vimos nos Exemplos 3.18 e 3.19, o plano e cilindro possuem os mesmos coeficientes com relação à primeira forma quadrática e, no Exemplo 3.21, vimos que isso resulta numa isometria entre essas superfícies. Faremos uso desses fatos na demonstração a seguir.

Consideremos, então, as superfícies $S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, 0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R}\}$, e \bar{S} parametrizada por $X(u, v) = \{\cos(u), \sin(u), v\}$, $0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R}$. Essas superfícies são isométricas, uma isometria sendo dada por $\phi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$.

Fixemos, então, um ponto $p = (u_0, v_0) \in S$. Como S é um plano, sabemos que todas as geodésicas que passam por p em S são segmentos de reta. Note que a isometria ϕ leva as curvas (u_0, v) , (u, v_0) e $(at + u_0, bt + v_0)$, com a e $b \neq 0$ reais, exatamente nos meridianos, paralelos e hélices do cilindro passando por $\bar{X}(p)$. Inversamente, essas curvas de \bar{S} passando por $\bar{X}(p)$ também são levadas, através da isometria ϕ^{-1} , nos segmentos de retas de S que passam por p . Como as isometrias preservam geodésicas. Logo, concluímos que os meridianos, paralelos e hélices do cilindro são suas únicas geodésicas.

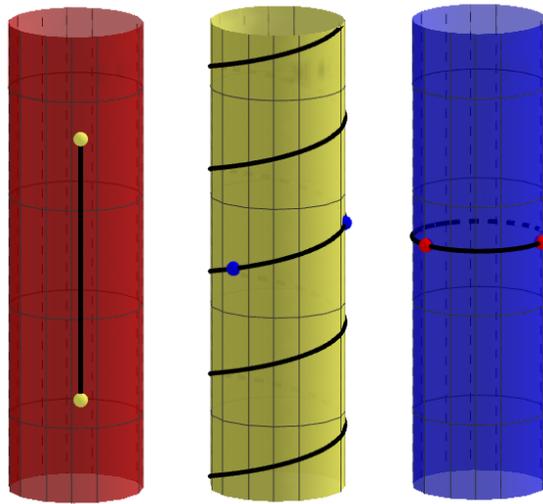


Figura 3.11: Geodésicas sobre superfícies cilíndricas: segmentos de reta nos paralelos (esquerda), arcos circulares nos meridianos (direita) e hélices para os demais casos (centro).

4 CÁLCULO VARIACIONAL

4.1 Funcionais

O Cálculo das Variações é uma área que se ocupa por tentar formular uma generalização dos conceitos de pontos críticos e extremos apresentados no estudo do Cálculo Diferencial que conhecemos, estendendo-os para funções cujo domínio é um espaço de funções. A nomenclatura, no entanto, não é relacionada aos problemas estudados nessa área, mas à técnica utilizada para encontrarmos condições necessárias e suficientes que irão determinar a existência de um ponto mínimo (ou máximo) de um dado problema, chamada técnica das variações; veja Barbosa (1975).

Nosso objetivo, ao longo deste capítulo, é caracterizar as geodésicas sobre o cone sob a ótica do Cálculo Variacional. Aqui, nosso objeto de estudo central são os funcionais, que são as funções reais cujo domínio é um espaço de funções a que nos referíamos no parágrafo anterior.

Exemplo 4.1. *Considere um subconjunto $U \subset \mathcal{F}$, onde \mathcal{F} é o espaço vetorial de todas as funções $[x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$. A aplicação $I[y]$ descrita a seguir é um funcional:*

$$\begin{aligned} I[y] : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto I[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx. \end{aligned}$$

Esse funcional dá o comprimento da curva $y = y(x)$ definida no intervalo $[x_0, x_1]$.

Frequentemente usaremos a notação $I[y]$ em vez de $I(y)$ para enfatizar que estamos a trabalhar com funcionais e não com funções de variáveis reais.

No estudo do Cálculo Variacional, nossa proposta é a de maximizar ou minimizar o valor dos funcionais. Isso é, dentre todas as funções $y(x) \in U \subset \mathcal{F}$, desejamos encontrar aquela que torna o valor de $I[y]$ o menor ou maior possível, sob as condições de fronteira dadas e a depender do problema que estamos abordando. O exemplo acima, por exemplo, está intimamente relacionado à busca pela curva de menor comprimento ligando dois pontos do plano.

4.2 Principais Problemas do Cálculo das Variações

Nesta segunda seção, abordaremos alguns dos principais problemas cujas soluções o Cálculo das Variações está comprometido em buscar. Como mencionado anteriormente, nosso objetivo, em geral, é procurar funções, dentro de um subconjunto de um espaço normado de funções, nas quais um funcional atingirá um valor máximo ou mínimo sob algumas condições pré-estabelecidas.

4.2.1 Geodésica: A Curva de Menor Comprimento

Esta é uma situação que podemos considerar como a mais familiar dentre as problemáticas que apresentaremos. Podemos enunciá-la da seguinte forma: Considere dois pontos distintos

no espaço \mathbb{R}^2 , digamos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) . Vamos nos restringir às curvas cuja a equação é da forma $y = y(x)$, onde y é uma função continuamente diferenciável no intervalo $[x_0, x_1]$. Dentre todas essas funções, desejamos encontrar aquela a qual determina o caminho de menor comprimento entre (x_0, y_0) e (x_1, y_1) .

Do Cálculo Diferencial, sabemos que o comprimento de uma tal curva é dado pela seguinte expressão:

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx,$$

definida para toda $y \in C^1[x_0, x_1]$, em que $C^1[x_0, x_1]$ é o espaço das funções continuamente diferenciáveis em $[x_0, x_1]$, e que toma valores em \mathbb{R} , ou seja, I é um funcional da forma:

$$I : C^1[x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nosso problema, então, é o de determinar uma função $\bar{y}(x) \in C^1[x_0, x_1]$ tal que $\bar{y}(x_0) = y_0$, $\bar{y}(x_1) = y_1$ e $I[y] \geq I[\bar{y}]$ para toda $y \in C^1[x_0, x_1]$, satisfazendo as condições de contorno $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$. Ou seja, nosso objetivo é encontrar uma função $\bar{y}(x)$ entre todas as funções $y \in C^1[x_0, x_1]$ que minimize o funcional I e que obedeça as condições de contorno estabelecidas pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) .

Contudo, o problema relacionado à curva de menor comprimento não se limita ao \mathbb{R}^2 . Podemos estendê-lo ao \mathbb{R}^3 assim: considere dois pontos distintos $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $Q = (x_1, y_1, z_1)$ que pertencem a uma superfície S do \mathbb{R}^3 . O objetivo, neste caso, será o de determinar, dentre todas as curvas de S e que conectam P e Q , aquela que minimiza a distância entre os pontos P e Q . As curvas com esta propriedade de minimizar distâncias são chamadas geodésicas.

4.2.2 A Superfície Mínima de Revolução

Imagine duas circunferências feitas de aço, de diâmetros distintos. Mergulhamos a maior circunferência em uma solução de água e sabão e, ao retirá-la, obtemos uma película em forma de disco. Em seguida, passamos a segunda circunferência por dentro da primeira de modo que elas fiquem paralelas. Com isso, quando as distanciamos, criamos uma superfície que as conecta pelas bordas. Essa superfície, pelas propriedades elásticas da película de água e sabão, possui área mínima. Olhando matematicamente para essa situação, considere que as duas circunferências, além de estarem em planos paralelos, também possuem seus centros sobre um eixo perpendicular a ambos os planos. Dadas essas condições, a área mínima recém-mencionada é uma superfície de revolução gerada através de uma curva no espaço.

Com maior precisão, digamos que o eixo dos centros de ambos as circunferências esteja sobre o eixo das abscissas, e sejam (x_0, y_0) e (x_1, y_1) pontos onde nossos círculos interceptam o plano xy . O que nos é proposto é determinar a função $y = \bar{y}(x)$, onde $x_0 \leq x_1$, que minimize a seguinte integral:

$$I[y] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Esse problema que acabamos de abordar é um caso particular do conhecido *Problema de Plateau* que busca determinar entre todas as superfícies limitadas por uma determinada borda aquela que possui menor área.

4.2.3 O Problema Isoperimétrico

Esse é um problema clássico da Geometria Diferencial. De maneira simplificada, o que se propõe é determinar uma curva fechada plana de um determinado comprimento e que limita uma região de maior área possível.

Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, uma curva plana fechada e sem autointerseções. O comprimento desta curva será determinado pela expressão:

$$I(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} [(x')^2 + (y')^2]^{\frac{1}{2}} dt.$$

Por outro lado, a área que a curva α limita será dada por:

$$J[\alpha] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \cdot (xy' + x'y) dt.$$

Nosso problema, neste caso, é determinar a curva α , dentre todas aquelas que possuem comprimento $I[\alpha] = \text{constante}$, que maximize a integral $J[\alpha]$.

4.2.4 Braquistócrona: A Curva de Menor Tempo

Sejam $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$ dois pontos no plano \mathbb{R}^2 , com $y_0 \neq y_1$. Existem diversos caminhos no plano cartesiano que conectam A e B , um deles sendo o caminho de menor comprimento de que falávamos há pouco. Contudo, existem outras situações que são de grande interesse matemático e, principalmente, físico, como é o caso da curva que de “menor tempo”.

Considere, então, um “ponto deslizante” ou ponto móvel com massa m e afetado pela aceleração da gravidade g . Esse ponto, digamos M , inicialmente está localizado sobre o ponto A .

Pela Segunda Lei de Newton, a força atuante sobre esse ponto é dada por:

$$F = m \cdot g.$$

Com isso, M deslizará por uma curva y , saindo do ponto inicial A e se locomovendo para o ponto final B sob ação da força F . Nosso objetivo, nesta situação, é de encontrar o caminho $\bar{y}(x)$, dentre todos os que conectam A e B e que obedecem às restrições de contorno $\bar{y}(x_0) = y_0$ e $\bar{y}(x_1) = y_1$, que minimiza o tempo do percurso, ou seja, identificar $I[\bar{y}] \leq I[y]$ para toda $y \in C^1[x_0, x_1]$, em que I é o funcional

$$I[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y_0 - y}} dx.$$

4.2.5 O Princípio de Ação Estacionária

O quinto e último problema do Cálculo Variacional que vamos introduzir aqui é um dos mais importantes dentro deste campo de estudo e de suas aplicações. O Princípio de Ação Estacionária, também conhecido como Princípio de Mínimo Esforço ou Mínima Ação, é um conceito relacionado à grandeza física ação realizada pela trajetória de um determinado sistema no espaço.

A ação, segundo a Física, é uma grandeza mensurada pelo produto da energia pelo tempo, enquanto que sistema é a parte do universo que isolamos para estudar o comportamento. Assim, considere uma determinada partícula P em um estado inicial no tempo $t = t_0$. Essa partícula percorrerá uma trajetória no espaço e, em um momento posterior, chegará a um estado final num tempo $t = t_1$. A variação dos estados que o sistema executa é realizada pela ação da partícula. Contudo, existem diversas trajetórias possíveis no espaço que P poderia percorrer do seu estado

inicial para seu final. Nossa problema, neste caso, é identificar o caminho no qual a partícula realizará a mínima ação, conforme o funcional I :

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt.$$

Nesse funcional, a função T representa a energia cinética no sistema, dada por:

$$T = \frac{m}{2} \cdot (x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

enquanto que a função $U(x, y, z)$ representa a função potencial associada com o campo conservativo de força. As equações

$$mx'' = -U'_x, \quad my'' = -U'_y \quad \text{e} \quad mz'' = U'_z$$

são as equações diferenciais de movimento da partícula de massa m movendo-se por este campo.

4.3 A Equação de Euler-Lagrange

De acordo com Kot (2014), o matemático alemão Leonhard Euler foi o primeiro a sistematizar o estudo dos problemas variacionais. Em sua obra de 1744 intitulada *A Method for Finding Curved Lines Enjoying Properties of Maximum or Minimum, or Solution of Isoperimetric Problems in the Broadest Accepted Sense* [Um método para encontrar curvas satisfazendo propriedades de máximo ou mínimo, ou solução de problemas isoperimétricos no mais amplo sentido], ele mostra um método geral para manusearmos esse tipo de problema. Euler, contudo, abandonou seu método para adotar o método das variações proposto por Lagrange após receber deste uma carta. Em homenagem aos avanços conseguidos por Lagrange, Euler denominou esse campo da Matemática de Cálculo das Variações.

A ideia central apresentada pelo método desenvolvido por Euler se baseia em uma suposição para um problema n -dimensional que é estendido para um limite com n tendendo ao infinito.

Consideremos um funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

definido sobre funções reais $y(x)$ de classe pelo menos C^1 no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Vamos dividir esse intervalo em $n + 1$ subintervalos limitados pelos seguintes pontos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Cada subintervalo terá comprimento dado por:

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b - a}{n + 1}.$$

Substituíremos, então, nossa função $y(x)$ pela curva poligonal com vértices:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}),$$

em que $y_i = y(x_i)$.

Podemos aproximar o funcional $J[y]$ através da soma:

$$J(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = \sum_{i=0}^n f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x,$$

uma função de n variáveis. Recorde que $y_0 = y(a)$ e $y_{n+1} = y(b)$ estão fixados.

A questão que surge neste ponto é: qual é o efeito de incrementar ou reduzir um dos y_i ? Para responder isso, escolhemos um y_k qualquer e calculamos a derivada parcial do funcional $J[y]$ com relação a y_k . Assim, obtemos:

$$\frac{\partial J}{\partial y_k} = f_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) \Delta x + f'_y\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right) \cdot -f'_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right)$$

Em um extremo, as derivadas parciais deveriam se anular para cada k . Contudo, como desejamos tomar o limite de n tendendo ao infinito, quando o aplicarmos, obteremos $\Delta x \rightarrow 0$ que resultará numa igualdade $0 = 0$. Embora seja verdadeira, essa igualdade não é útil no desenvolvimento que estamos a fazer. Para evitar isso, devemos multiplicar ambos os lados da igualdade por $\frac{1}{\Delta x}$. Assim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial y_k} &= f_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) \\ &\quad - \frac{1}{\Delta x} \left[f_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) - f'_y\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right) \right]. \end{aligned}$$

Neste caso, quando fazemos $n \rightarrow \infty$ e, conseqüentemente, $\Delta x \rightarrow 0$, a expressão torna-se:

$$\frac{\delta J}{\delta y} = f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f'_y(x, y, y').$$

Essa derivada variacional possui o mesmo papel para funcionais que a derivada parcial possui para funções de várias variáveis reais. Quando temos uma função e desejamos procurar por possíveis candidatos a extremo, nós aplicamos o teste da primeira derivada e obtemos pontos que podem ser extremos, pois essa é uma condição necessária que os caracteriza. No caso dos funcionais, aplicamos essa derivada encontrada acima e impomos que seja igual a zero, resultando em:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (4.1)$$

Essa é a Equação de Euler-Lagrange e se configura como uma condição necessária para qual um candidato a extremo de um funcional deve satisfazer.

Exemplo 4.2. *Recorde o primeiro problema apresentado na Seção 4.2. Dados dois pontos distintos P_0 e P_1 do \mathbb{R}^2 , dentre todas as curvas que os conectam, desejamos encontrar aquela que possui o menor comprimento.*

Sabemos, do Cálculo Diferencial e Integral, que o comprimento de arco é dado por:

$$J[y] = \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Utilizamos a Equação de Euler-Lagrange (4.1) para resolver nosso problema.

Como $f = \sqrt{1 + y'^2}$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Daí,

$$0 - \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0.$$

Integrando ambos os lados, obtemos a expressão:

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{constante}.$$

Após manipulações algébricas e novamente por integração, concluímos que $y = Cx + D$.

4.4 Condições Suficientes para Minimalidade

Nesta seção, voltaremos nosso olhar aos conceitos de extremos de funcionais e sua caracterização, além de introduzirmos as ideias desenvolvidas por Lagrange em seu método para solucionar os problemas variacionais. Apresentaremos as primeira e segunda variações dos funcionais, importantes resultados que nos levarão aos lemas fundamentais.

Definição 4.1. Sejam $(\mathcal{F}, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $I : S \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que \bar{y} é um ponto de mínimo local para I se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$I[y] \geq I[\bar{y}]$$

para todo $y \in S$ satisfazendo a condição $\|y - \bar{y}\| < \varepsilon$.

Analogamente, chamamos \bar{y} de máximo local para I se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$I[y] \leq I[\bar{y}]$$

para todo $y \in S$ satisfazendo $\|y - \bar{y}\| < \varepsilon$.

Em 1879, o matemático Paul du Bois-Reymond introduziu o termo *extremo* para se referir de maneira genérica e direta aos máximos e mínimos. Dessa forma, evitamos a todo o momento falar que buscamos maximizar ou minimizar funcionais e podemos usar o termo *extremizar* para a ideia de encontrar um valor extremo que, a depender do problema, será um valor minimizante ou maximizante para nosso funcional.

Investigaremos condições para um vetor $y \in \mathcal{F}$ ser extremo de um funcional I . Seguiremos Barbosa (1975). Inicialmente, sejam U um aberto de um espaço vetorial normado \mathcal{F} e $I : U \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Fazendo $h = y - \bar{y}$, dizer que $\bar{y} \in U$ é um mínimo local para I é o mesmo que dizer que $I[\bar{y} + h] - I[\bar{y}] \geq 0$ sempre que $\|h\| < \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$. Considere a função

$$I(t) = I(y + th), \quad |t| < 1.$$

Essa função possui um mínimo quando $t = 0$. Seja $I(t)$ é de classe C^2 para todo h , então:

$$I'[0] = 0 \quad e \quad I''[0] \geq 0$$

são condições necessárias para que y seja um mínimo de I .

Definição 4.2. Chamaremos, respectivamente, de primeira e segunda variação do funcional I no ponto y , às funções

$$\delta I_y(h) = \frac{d}{dt} I(y + th) \quad e \quad \delta^2 I_y(h) = \frac{d^2}{dt^2} I(y + th) \quad (4.2)$$

sempre que elas estiverem definidas para todo $h \in \mathcal{F}$.

Suporemos que $I \in C^2$. Neste caso, a notação δI_y é o diferencial de I com relação à sua primeira derivada, enquanto que $\delta^2 I_y$ é a forma quadrática com relação à sua segunda derivada. Para h suficientemente pequeno, temos:

$$I[y + h] - I[y] = \delta I_y(h) + \frac{1}{2} \cdot \delta^2 I_y(h) + r(h) \cdot \|h\|^2, \quad (4.3)$$

em que $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$.

Com base das definições de variações definidas anteriormente, somos capazes de reescrever as condições necessárias (porém não suficientes) para que \bar{y} seja um mínimo de I da seguinte forma:

Teorema 4.1. *Seja $I : U \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional duas vezes diferenciável. São condições necessárias para que o funcional I tenha um mínimo em $y \in U$ que*

$$I_y(h) = 0 \quad e \quad \delta^2 I_y(h) \geq 0 \quad \forall h \in \mathcal{F}.$$

Para obter condições necessárias e suficientes, devemos introduzir o conceito a seguir:

Definição 4.3. *Um funcional quadrático ψ definido em um espaço vetorial \mathcal{F} é dito fortemente positivo se existe uma constante $k > 0$ tal que*

$$\psi(h) \geq k \cdot \|h\|^2$$

para todo $h \in \mathcal{F}$.

Com a introdução dessa definição somos capazes de, finalmente, determinar condições suficientes. Vejamos o Teorema que descreve tais condições:

Teorema 4.2. *Considere o funcional $I : U \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. São condições suficientes para que o funcional I tenha um mínimo em y que $\delta I_y = 0$ e $\delta^2 I_y$ seja fortemente positivo.*

Demonstração. Como $\delta I_y = 0$. A igualdade descrita em (4.3) se torna:

$$I[y + h] - I[y] = \frac{1}{2} \delta^2 I_y(h) + r(h) \cdot \|h\|^2, \quad (4.4)$$

em que $r(h) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. Além disso, temos $\delta^2 I_y(h) \geq k \cdot \|h\|^2$, onde $k > 0$ é uma constante. Como em (4.4) temos $\frac{\delta^2 I_y(h)}{2}$, então usaremos a seguinte desigualdade:

$$\frac{\delta^2 I_y(h)}{2} \geq \frac{k \cdot \|h\|^2}{2}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} I[y+h] - I[y] &= \frac{\delta^2 I_y(h)}{2} + r(h) \cdot \|h\|^2 \geq \frac{k}{2} \cdot \|h\|^2 + r(h) \cdot \|h\|^2 \\ &= \left[\frac{k}{2} + r(h) \right] \cdot \|h\|^2. \end{aligned}$$

Considere um $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, para o qual: se $\|h\| < \varepsilon$, então $|r(h)| < \frac{k}{2}$. Seja $\|h\| < \varepsilon$, então podemos desenvolver a inequação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I[y+h] - I[y] &\geq \left[\frac{k}{2} + r(h) \right] \cdot \|h\|^2 \\ &> \left[\frac{k}{2} + \frac{k}{2} \right] \cdot \|h\|^2 \\ &= k \cdot \|h\|^2. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $k > 0$ e $\|h\|^2 \geq 0$, é evidente que $k \cdot \|h\|^2 \geq 0$. Logo, $I[y+h] - I[y] \geq 0$. Portanto, y é um mínimo do funcional I . \square

Na maioria dos problemas abordados pelo Cálculo Variacional, embora o funcional I seja definido num certo conjunto aberto $U \subset \mathcal{F}$, nossa proposta é a de determinar um extremo y local em I restrito a um subconjunto $S \subset \mathcal{F}$. Por exemplo, recordemos o problema de identificar a curva plana de menor comprimento que interliga os pontos $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$. Nosso funcional, conforme definido na Seção 4.2 é:

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} [1 + y'^2]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Neste caso, $I[y]$ está bem definido em todo o espaço $\mathcal{F} = C^1[x_0, x_1]$. Contudo, desejamos identificar o mínimo \bar{y} restrito ao subconjunto $S \subset \mathcal{F}$ constituído pelas funções de \mathcal{F} que satisfazem às condições de contorno: $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, o qual não é um aberto de \mathcal{F} .

Seja, então, $\bar{y} \in S$ um extremo. Podemos escrever um ponto genérico de S na forma $\bar{y} + h$, em que $h \in \mathcal{H}$, o qual \mathcal{H} é o conjunto

$$\mathcal{H} = \{h \in \mathcal{F}; h(x_0) = h(x_1) = 0\}.$$

Note que \mathcal{H} é um subespaço vetorial de \mathcal{F} . Neste ponto, podemos definir um novo funcional J como:

$$\begin{aligned} J : \mathcal{F} &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto J[h] = I[\bar{y} + h] - I[\bar{y}]. \end{aligned}$$

Suponha $h = 0$. Então, $J[0] = I[\bar{y} + 0] - I[\bar{y}] = 0$. Assim, \bar{y} ser um extremo de I restrito ao conjunto S é equivalente a estudar se o funcional J possui extremo no valor 0.

Se J é suficientemente diferenciável, então:

$$\delta J_0 = \delta I_{\bar{y}}[h]|_{\mathcal{H}} \quad \text{e} \quad \delta^2 J_0 = \delta^2 I_{\bar{y}}[h]|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, nessas condições, \bar{y} será um mínimo local para I se $\delta I_{\bar{y}}[h] = 0$ e $\delta^2 I_{\bar{y}}[h] \geq 0$, para toda $h \in \mathcal{H}$.

O subconjunto $S \subset \mathcal{F}$ descrito acima será chamado de *conjunto das variações admissíveis*. Nossas considerações anteriores são válidas para problemas variacionais nos quais S é um subespaço linear de \mathcal{F} . Isto é, S pode ser escrito da forma $\bar{y} + \mathcal{H}$, em que \mathcal{H} é um subespaço de \mathcal{F} . Contudo, isso nem sempre acontece, como ilustramos no exemplo a seguir, que retoma o problema de determinar a geodésica minimal conectando pontos de uma dada superfície.

Exemplo 4.3. Considere as superfícies M e N contidas no \mathbb{R}^3 , de forma que N é uma superfície plana, e P e Q dois pontos existentes sobre ambas as superfícies. A curva fechada α é a interseção das superfícies M e N que contém os pontos P e Q .

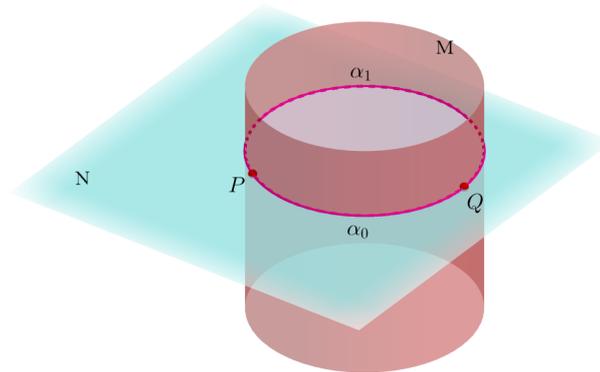


Figura 4.1: Variações admissíveis através de arcos de interseção entre superfícies.

Os pontos P e Q dividem a curva α em dois arcos, α_0 e α_1 , que consideraremos como curvas parametrizadas definidas sobre o mesmo domínio, isto é, $\alpha_0, \alpha_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Se $h = \alpha_1 - \alpha_0$, então $\alpha_0 + th$ será uma curva da superfície M somente se $t = 0$ ou $t = 1$. Portanto, o espaço S das variações admissíveis ao problema não é um subespaço linear do espaço vetorial \mathcal{F} constituídos pelas curvas parametrizadas $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Contudo, o exemplo precedente pode ser utilizado para que definamos uma família de variações. Substituímos $\alpha_0 + th$ por uma família a um parâmetro α_t de arcos que satisfazem as condições iniciais do problema e tal que

- I) α_0 é a curva a ser testada;
- II) A função $t \rightarrow \alpha_t$ é continuamente diferenciável até a segunda ordem.

Chamaremos essa família do parâmetro α_t de *variação da curva* α_0 .

Podemos ainda generalizar as definições dadas anteriormente através dos resultados descritos acima. Suponha que α_0 é um mínimo do funcional I . Então, se α_t é uma variação admissível de α_0 , temos que: $I[\alpha_t] \geq I[\alpha_0]$ para $|t| < \varepsilon$, com ε suficientemente pequeno.

Se a função $t \rightarrow I[\alpha_t]$ é duas vezes diferenciável no ponto $t = 0$, então:

$$\frac{d}{dt} I[\alpha_t] \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dt^2} I[\alpha_t] \Big|_{t=0} \geq 0.$$

As derivadas descritas acima correspondem, respectivamente, às primeira e segunda variações do funcional I na curva α_0 .

4.5 O Problema Variacional Mais Simples

Nessa seção abordaremos o chamado problema variacional mais simples, o qual ao longo deste trabalho foi citado diversas vezes através de exemplos. Nosso objetivo é encontrar um valor extremante ou extremo $y \in C^1[a, b]$ para um funcional com a forma:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (4.5)$$

sob as condições de borda: $y(x_a) = y_a$ e $y(x_b) = y_b$, em que F é uma função de classe C^2 que, por simplicidade, suporemos definida sobre todo o \mathbb{R}^3 . As hipóteses acerca de F nos garantem as primeira e segunda derivadas em qualquer curva $y \in C^1[a, b]$.

Ao longo dessa seção desenvolveremos fórmulas explícitas para as expressões da primeira e da segunda variação.

Considere que uma curva $y \in C^1[a, b]$ seja um extremo do nosso problema, satisfazendo as condições de contorno pré-estabelecidas. Seja $h \in C^1[a, b]$. Para que $\bar{y} = y + th$ seja uma variação admissível de y , devemos ter

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Com isso, o funcional J torna-se:

$$J[\bar{y} + th] = \int_a^b F(x, y + th, y' + th') dx \quad (4.6)$$

Ao permutarmos os sinais de derivação e derivação e aplicarmos a regra da cadeia, obtemos:

$$J'[0] = \int_a^b F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h' dx, \quad (4.7)$$

em que F_y e $F_{y'}$ denotam as derivadas parciais de F com relação a y e y' , respectivamente. Portanto, a primeira variação de J é dada pela expressão:

$$\delta J_y[h] = \int_a^b (F_y h + F_{y'} h') dx, \quad (4.8)$$

enquanto a segunda variação é dada por:

$$\delta^2 J_y[h] = \int_a^b (F_{yy} h^2 + 2F_{yy'} h h' + F_{y'y'} h'^2) dx. \quad (4.9)$$

Recorde o Teorema 4.1: se y é um ponto de mínimo local do funcional I , então $\delta I_y[h] = 0$ e $\delta^2 I_y[h] \geq 0$ para toda $h \in C^1[a, b]$ satisfazendo as condições de borda $h(a) = h(b) = 0$.

Após desenvolvidas as formas explícitas das variações de J , resta-nos obter mais informações acerca de um extremo. O lema a seguir, devido ao matemático francês Paul du Bois-Raymond, é de enorme valor em nosso estudo.

Lema 4.1. *Seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se*

$$\int_a^b g(x) \cdot h(x) dx = 0$$

para toda função $h(x) \in C^1[a, b]$ que satisfaz as condições de fronteira $h(a) = 0$ e $h(b) = 0$, então $g(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração. Seja $g(x) \in C[a, b]$, e suponha que

$$\int_a^b g(x) \cdot h(x) dx = 0$$

para toda $h(x) \in C^1[a, b]$, a qual $h(a) = 0$ e $h(b) = 0$. Suponha, por absurdo, que $g(x)$ é positiva em algum ponto $x \in [a, b]$. Por continuidade, g é positiva em um determinado intervalo $[x_1, x_2]$ contido em $[a, b]$.

Considere, então, uma função h dada por

$$h(x) = \begin{cases} (x - x_1)^2 \cdot (x_2 - x)^2, & x \in [x_1, x_2], \\ 0 & , x \notin [x_1, x_2]. \end{cases}$$

Para esta h , temos

$$\int_a^b g(x) \cdot h(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} g(x) \cdot [(x - x_1)^2 (x_2 - x)^2] dx > 0.$$

Isso contradiz nossa hipótese inicial. Portanto, $g(x) \equiv 0$. □

Devido à sua importância, esse resultado ficou conhecido como **Lema Fundamental do Cálculo das Variações**.

Considere a equação $\delta J_y[h] = 0$. Uma integração por partes nos permite reescrever a equação (4.8) como:

$$\delta J_y[h] = \int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) h dx. \quad (4.10)$$

Utilizando o **Lema Fundamental**, podemos concluir que uma condição necessária para que a curva y seja um mínimo do funcional J no problema proposto é que y satisfaça a equação:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (4.11)$$

Essa equação já nos foi apresentada anteriormente. Recorde que F_y é a derivada parcial de F com relação a y e $F_{y'}$ derivada parcial de F com relação a y' . Com uma simples troca de notações, obtemos:

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) = 0. \quad (4.12)$$

Essa é a **Equação de Euler-Lagrange**, já deduzida neste capítulo na Seção 4.3. Como vimos, essa equação é diretamente relacionada com a condição de extremabilidade de uma curva em um determinado espaço vetorial.

4.6 Caracterização Elementar do Mínimo Clássico

Nessa seção, faremos uma abordagem mais objetiva em busca de condições necessárias e, sobretudo, suficientes para definirmos curvas que minimizam nosso funcional em questão. Essa abordagem é baseada em Hrusa e Troutman (1981).

Assim como trabalhado anteriormente, é necessário que criemos um ambiente e deixemos clara a nossa proposta. Nessa primeira proposição, definiremos o nosso funcional e os conjuntos

para os quais voltaremos nossa atenção na busca por candidatos a extremos que, nesse caso específico, serão mínimos. Além disso, obteremos um resultado de extrema importância para encontrarmos posteriormente as geodésicas do cone.

Dados $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ com $x_0 < x_1$, considere $C^k[x_0, x_1]$, para $k = 1, 2$, como o subespaço de $C[x_0, x_1]$ que contém todas as funções com derivadas de ordem k contínuas sobre o intervalo (x_0, x_1) e que admitem extensões contínuas para $[x_0, x_1]$. Além disso, considere os conjuntos D e D_0 descritos como:

$$\mathcal{D} = \{y \in C^1[x_0, x_1] : y(x_j) = y_j, j = 0, 1\}$$

e

$$\mathcal{D}_0 = \{v \in C^1[x_0, x_1] : v(x_j) = v_j, j = 0, 1\}.$$

Nossa proposta é encontrar um valor minimizante em \mathcal{D} para o funcional:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Vamos assumir que $F(x, y(x), y'(x))$ é contínua (ou, pelo menos, integrável) sobre $[x_0, x_1]$ para todo $y \in \mathcal{D}$.

Uma função $y \in \mathcal{D}$ minimiza o funcional $J[y]$ se, e somente se, $\Delta J[y; v] := J[y + v] - J[y] \geq 0$ para toda $v \in \mathcal{D}_0$. Além disso, se $\Delta J[y; v] = 0$ implica $v = 0$, então y fornece a única função minimizante para J em \mathcal{D} .

Teorema 4.3. *Seja*

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \alpha(x) \cdot [1 + (\beta y)^2(x) + (\gamma y')^2(x)]^{\frac{1}{2}} dx,$$

em que $\alpha, \beta, \gamma \in C[x_0, x_1]$ e ambos, α e $\beta^2 + \gamma^2$, são positivos sobre (x_0, x_1) . Então

$$\Delta J[y; v] \geq I[y; v] := \int_{x_0}^{x_1} \alpha \cdot \left[\frac{\beta^2 \cdot y \cdot v + \gamma^2 y' v'}{(1 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] (x) dx, \quad (4.13)$$

em que $I[y; v]$ é definido para todo $y \in D$ e para todo $v \in D_0$, com igualdade se, e somente se, $v = 0$. Se existe uma função $y \in D$ para a qual $I[y; v] = 0$, para todo $v \in D_0$, então y fornece a única função minimizante de J em D .

Demonstração. A desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\langle A, A \rangle^{1/2} \langle B, B \rangle^{1/2} \geq |\langle A, B \rangle|,$$

com igualdade se, e somente se, A e B são linearmente dependentes, aplicada a $A = (1, \beta(y + v), \gamma(y' + v'))$ e $B = (1, \beta y, \gamma y')$, para cada $y \in D$ e $v \in D_0$, fornece

$$[1 + \beta^2(y + v)^2 + \gamma^2(y' + v')^2]^{\frac{1}{2}} \geq [1 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 y'^2]^{-\frac{1}{2}} [1 + \beta^2 y(y + v) + \gamma^2 y'(y' + v')], \quad (4.14)$$

para todo $x \in (x_0, x_1)$. Daí, por manipulação algébrica do segundo membro, obtemos:

$$[1 + \beta^2(y + v)^2 + \gamma^2(y' + v')^2]^{\frac{1}{2}} \geq [1 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 y'^2]^{\frac{1}{2}} + \frac{\beta^2 y v + \gamma^2 y' v'}{[1 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 y'^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Usando o fato de que $\alpha > 0$, chegamos a

$$\alpha[1 + \beta^2(y + v)^2 + \gamma^2(y' + v')^2]^{\frac{1}{2}} - \alpha[1 + \beta^2y^2 + \gamma^2y'^2]^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\alpha[\beta^2yv + \gamma^2y'v']}{[1 + \beta^2y^2 + \gamma^2y'^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.15)$$

Note agora que a igualdade em (4.14), equivalente à colinearidade dos vetores A e B que escolhemos, ocorre, num dado $x \in (x_0, x_1)$, somente se $v(x)v'(x) = 0$.

Ao integrarmos a desigualdade (4.15) sobre $[x_0, x_1]$ e utilizando a definição de ΔJ , obtemos (4.13).

É claro que $v \equiv 0$ garante a igualdade em (4.13). De fato, se $v \equiv 0$, então, em particular, v é constante, donde $v' \equiv 0$. Ademais, para $v \equiv 0$, temos $\Delta J[y; v] = \Delta J[y; 0] = J(y+v) - J(y) = J(y) - J(y) = 0$, enquanto que $v \equiv 0 \equiv v'$ implicam $I(y; v) = I(y, 0) = 0$. Reciprocamente, a igualdade das integrais em (4.13), tendo em vista (4.15), implica, por continuidade, igualdade em (4.15) sobre (x_0, x_1) e, portanto, $(v^2)' = 2v \cdot v' \equiv 0$. Então, $v^2 \equiv \text{constante}$. Daí, como $v^2(x_0) = 0$ (pois $v \in \mathcal{D}_0$), concluímos que $v \equiv 0$, como desejado. \square

Observação 4.1. *Se existe $y \in \mathcal{D}$ tal que $I[y; v] = 0$ para toda $v \in \mathcal{D}_0$, então argumentos padrão de aproximação garantem que $I[y; \bar{v}] = 0$, para toda $\bar{v} \in \bar{\mathcal{D}}_0$, em que:*

$$\bar{\mathcal{D}}_0 = \{\bar{v} \in C[x_0, x_1] : \bar{v} \text{ é } C^1[x_0, x_1] \text{ por partes e } \bar{v}_j = 0, j = 0, 1\}.$$

e J é definido sobre o seguinte conjunto:

$$\bar{\mathcal{D}} = \{\bar{y} \in C[x_0, x_1] : \bar{y} \text{ é } C^1[x_0, x_1] \text{ por partes e } \bar{y}_j(x_j) = y_j, j = 0, 1\}.$$

A demonstração da Teorema 4.3 pode ser adaptada de maneira a mostrar que $\Delta J[y; \bar{v}] \geq I[y; \bar{v}] = 0$ para toda $\bar{v} \in \bar{\mathcal{D}}_0$, com igualdade se, e somente se, $\bar{v} = 0$. Assim, $y \in \mathcal{D}$ é também a função que minimiza o funcional J em $\bar{\mathcal{D}}$.

Observação 4.2. *Considere a seguinte função:*

$$F(x, y, y') := \alpha(x) \cdot [1 + (\beta(x)y)^2 + (\gamma(x)y')^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Com esta definição, podemos reescrever o funcional $I[y; v]$ como segue:

$$I[y; v] = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x), y'(x))v(x) + F_{y'}(x, y(x), y'(x))v'(x)]dx.$$

Como estamos interessados apenas em condições suficientes, podemos procurar por um mínimo $y \in \mathcal{D} \cap C^2[x_0, x_1]$. Então, se $\alpha, \beta, \gamma \in C^1[x_0, x_1]$, podemos integrar o segundo termo por partes para obter:

$$I[y; v] = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x), y'(x)) \right] v(x) dx,$$

para toda $v \in \mathcal{D}_0$.

Qualquer $y \in \mathcal{D} \cap C^2[x_0, x_1]$ que satisfaça a Equação de Euler-Lagrange (4.1) deve minimizar o funcional J em \mathcal{D} (e, portanto, em $\bar{\mathcal{D}}$).

Observação 4.3. No caso mais simples, em que temos $\beta \equiv 0$, podemos verificar que uma função $y \in \mathcal{D}$ que torne

$$\frac{\alpha\gamma^2 y'}{(1 + \gamma^2 y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

constante sobre $[x_0, x_1]$ provê a única função minimizante para J em \mathcal{D} (e em $\bar{\mathcal{D}}$). Particularmente, quando, além de $\beta \equiv 0$, também temos α e γ constantes, podemos verificar que a função linear definida sobre $[x_0, x_1]$ por

$$y(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

está em \mathcal{D} e nos fornece a única função minimizante para J em \mathcal{D} (e em $\bar{\mathcal{D}}$).

Observação 4.4. Podemos fazer uma análise similar para o funcional

$$J_R(y) = \int_{x_0}^{x_1} [(\beta y)^2(x) + (\gamma y')^2(x)]^{\frac{1}{2}} dx,$$

desde que β e γ sejam contínuas e não nulas sobre o intervalo $[x_0, x_1]$ e substituindo \mathcal{D} por

$$\mathcal{D}_R = \{y \in \mathcal{D} : y^2 + y'^2 > 0 \text{ em } [x_0, x_1]\}.$$

Neste caso, temos:

$$\Delta J_R[y; v] \geq I_R[y; v] = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\beta^2 y v + \gamma^2 y' v'}{[(\beta y)^2 + (\gamma y')^2]^{\frac{1}{2}}} \right] (x) dx, \quad \forall y \in \mathcal{D}_R, v \in \mathcal{D}_0.$$

A igualdade na expressão acima ocorre em y somente se $vy' = v'y$ em (x_0, x_1) , ou seja, somente se $v = \lambda y$, em que λ é uma constante real. Recorde que $v \in \mathcal{D}_0$. Assim, a condição $v = \lambda y$ implica $v \equiv 0$, exceto no caso em que $y_0 = y_1 = 0$. Logo, se y_0 ou y_1 é não nulo, então, novamente, qualquer $y \in \mathcal{D}_0$ para a qual $I_R[y; v] = 0$, para toda $v \in \mathcal{D}_0$, fornece a única função minimizante para J_R em \mathcal{D}_R (e em $\bar{\mathcal{D}} = \{\bar{y} \in \bar{\mathcal{D}} : \bar{y}^2 + \bar{y}'^2 > 0 \text{ em } [x_0, x_1]\}$).

4.7 Caracterizando as Geodésicas no Cilindro

No capítulo direcionado à Geometria Diferencial, verificamos que as hélices, os paralelos e os meridianos são as únicas geodésicas no cilindro. A seguir, faremos uma abordagem voltada à identificação das geodésicas no cilindro através dos métodos apresentados ao longo deste capítulo de Cálculo Variacional.

Para nossos cálculos, vamos supor um cilindro regular que possui raio um. Dados dois pontos não-coincidentes $P_0 = (\theta_0, z_0)$ e $P_1 = (\theta_1, z_1)$ representados através de coordenadas cilíndricas $(1, \theta, z)$, o que se propõe é determinar a curva sobre o cilindro que conecta P_0 e P_1 e que possui o menor comprimento dentre todas as curvas possíveis.

Podemos supor que $0 < \theta_1 - \theta_0 < \pi$.

Nosso problema, então, é minimizar o valor do funcional

$$I[y] = \int_{\theta_0}^{\theta_1} (1 + y'(\theta)^2)^{\frac{1}{2}} d\theta$$

sobre o conjunto $\mathcal{D} = \{y \in C^1[\theta_0, \theta_1] : y(\theta_j) = y_j, j = 0, 1\}$. Após uma mudança de variáveis, o funcional I pode ser visto como uma função do tipo mais simples, conforme abordada na Observação 4.3 com $\alpha(x) = \gamma(x) \equiv 1$ e $\beta(x) \equiv 0$. Logo, a hélice circular

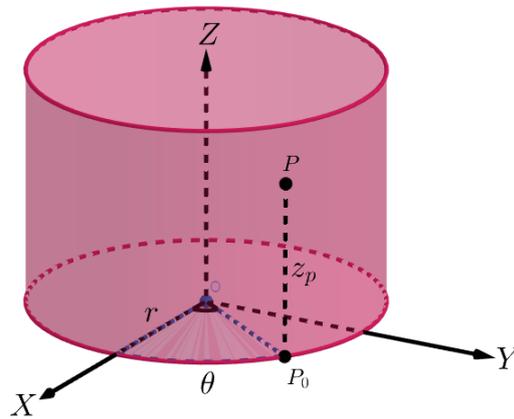


Figura 4.2: Coordenadas cilíndricas.

$$y(\theta) = \frac{y_1 - y_0}{\theta_1 - \theta_0}(\theta - \theta_0) + y_0, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_1],$$

é a única geodésica do cilindro. Ou seja, a hélice circular $y(\theta)$ é, dentre todas as curvas representáveis por funções em \mathcal{D} (ou em $\bar{\mathcal{D}}$).

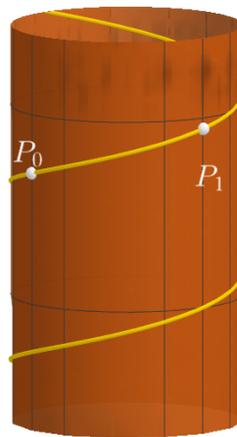


Figura 4.3: Hélice do cilindro conectando P_0 e P_1 .

4.8 Caracterizando as Geodésicas no Cone

Nesta seção, descrevemos como encontrar as geodésicas do cone fazendo uso do Teorema 4.3. Inicialmente, é importante ressaltar que permanecemos a utilizar o sistema de coordenadas cilíndricas e que, no cone, temos uma variação do raio, algo que não ocorria no cilindro, pois este possui um raio uniforme r ao longo de toda altura z fixada.

Considere uma cone cujo vértice possui ângulo equivalente a 2ϕ e se encontra na origem do sistema cartesiano de coordenadas. Além disso, seu eixo de simetria é a parte positiva do eixo z .

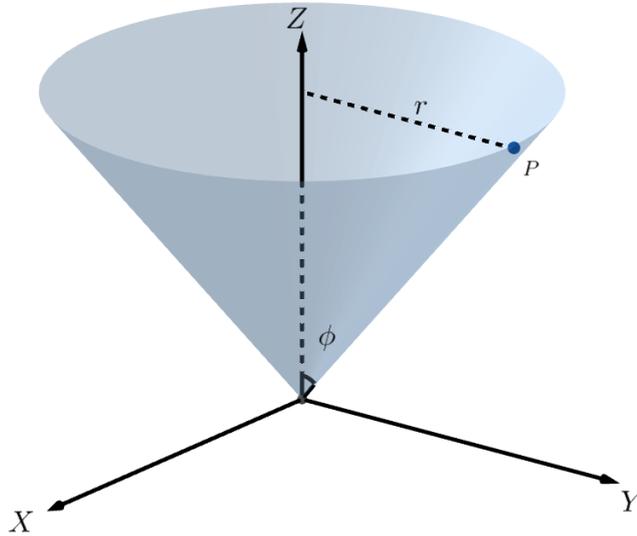


Figura 4.4: Cone em coordenadas cilíndricas.

As coordenadas cilíndricas de um ponto P desse cone relacionam-se com coordenadas cartesianas no \mathbb{R}^3 da seguinte maneira:

$$(x, y, z) = (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta), r \cdot \cot(\phi)).$$

Dados dois pontos distintos no cone, podemos representá-los através das coordenadas r e θ : $P_0 = (r_0, \theta_0)$ e $P_1 = (r_1, \theta_1)$, em que podemos supor $r_0 < r_1$, $\theta_0 = 0$ e $0 < \theta_1 < \pi$.

As curvas mais adequadas para nossos métodos são as representáveis por funções do seguinte conjunto:

$$\mathcal{D}_R = \{r \in C^1[0, \theta_1] : r(0) = r_0, r(\theta_1) = r_1 \text{ e } r^2 + r'^2 > 0 \text{ sobre } [0, \theta_1]\}$$

(veja a Observação 4.4). Cada $r \in \mathcal{D}_R$ representa uma curva de comprimento

$$L[r] = \int_{\theta_0}^{\theta_1} [r(\theta)^2 + b^2 r'(\theta)^2]^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

em que $b = \sqrt{1 + \cot(\phi)^2}$.

Pelas Observações 4.2 e 4.4, o funcional L pode ser minimizado unicamente em \mathcal{D}_R por alguma função $r \in \mathcal{D}_R \cap C^2[0, \theta_1]$ que satisfaça a Equação de Euler-Lagrange. Aplicando-a, obtemos:

$$\frac{d}{d\theta} \frac{b^2 r'(\theta)}{[r(\theta)^2 + b^2 r'(\theta)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{r(\theta)}{[r(\theta)^2 + b^2 r'(\theta)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Com a substituição trigonométrica $b\left(\frac{r'}{r}\right) = \tan(\psi)$, a equação diferencial anterior torna-se

$$b \frac{d}{d\theta} \sin(\psi(\theta)) = \cos(\psi(\theta)),$$

cuja solução é $\psi'(\theta) = b^{-1}$, donde $\psi = b^{-1}\theta + c$, em que c é uma constante. Daí,

$$b \left(\frac{r'}{r} \right) = \tan (b^{-1}(\theta) + c),$$

que, por integração, fornece

$$r(\theta) = c_1 \cdot \sec(b^{-1}(\theta) + c), \quad (4.16)$$

c e c_1 sendo constantes que devem ser tomadas em conformidade com as condições de borda $r(0) = r_0$ e $r(\theta_1) = r_1$. Como $0 < b^{-1}\theta_1 < \pi$, devemos escolher c satisfazendo

$$\frac{\cos(b^{-1}\theta_1 + c)}{\cos(c)} = \frac{r_0}{r_1} = \rho$$

ou $\tan c = \cot(b^{-1}\theta_1) - \rho \cdot \csc(b^{-1}\theta_1)$ (em que fizemos uso da fórmula do cosseno da soma de dois ângulos), o que é sempre possível. Para esta escolha de c , tomamos $c_1 = r_0 \cos c$.

A curva definida pela equação (4.16), com as constantes c e c_1 apropriadamente determinadas, é, dentre todas as que conectam os pontos P_0 e P_1 representadas por funções $r \in \mathcal{D}_R$, aquela que possui menor comprimento.

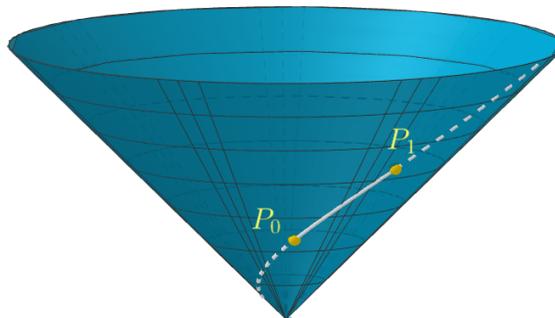


Figura 4.5: Geodésica do cone.

5 CONCLUSÃO

O Cálculo Variacional e a Geometria Diferencial, por mais que sejam campos distintos da Matemática, se completam quando abordamos algumas problemáticas, dentre as quais a voltada às geodésicas, que foi desenvolvida nesta monografia. Tendo em mente os conceitos e definições formalizados pela Geometria Diferencial, somos capazes de entender melhor o comportamento das curvas sobre superfícies e como essas aplicações definidas de maneiras distintas interagem, pois tanto as curvas parametrizadas quanto as superfícies parametrizadas remetem a uma mesma ideia inicial de selecionar um determinado conjunto de pontos, sejam estes um intervalo na reta ou região no plano, e transformá-los em um segundo conjunto, desta vez num espaço-ambiente “maior”.

Contudo, por mais que a Geometria Diferencial proponha toda uma teoria formalizada acerca de geodésicas, é com o complemento do Cálculo Variacional que podemos verificar, de uma maneira mais direta, se determinadas curvas são, de fato, solução para nossos problemas. Enquanto que a Geometria define as estruturas e afirma com uma base teórica que as geodésicas existem no cilindro e no cone e fornece ferramentas, tais como as isometrias, para que possamos expressar as curvas algebricamente, o Cálculo Variacional age de uma maneira mais direta e através da extremização de um funcional e da aplicação dos métodos já conhecidos de derivação e integração, que são estudados largamente durante o curso de graduação, podemos encontrar a forma explícita das curvas geodésicas com uma maior facilidade.

Por fim, verificamos que a Matemática em ambas as áreas de estudo se constituiu como uma construção coletiva, recebendo contribuições com o passar dos anos de diversos estudiosos. O Cálculo das Variações, por exemplo, teve seu pontapé inicial com Johann Bernoulli, mas recebeu contribuições de extrema importância de Euler e Lagrange, os quais desenvolveram a famosa Equação de Euler-Lagrange, por diversas vezes mencionada durante o decorrer desta pesquisa, além da contribuição valiosa de Paul du-Bois Reymond na elaboração do Lema Fundamental, ao “costurar” a teoria desenvolvida anteriormente por Lagrange acerca de extremos de funcionais. Assim, vemos claramente um exemplo de como diversos matemáticos diferentes em tempos distintos contribuíram e ajudaram no desenvolvimento de um campo de estudo que, conforme apresentamos anteriormente, tem diversas aplicações que vão além da problemática das geodésicas, como nas superfícies mínimas de revolução e na física através dos estudos acerca da braquistócrona e da lagrangiana, apresentada anteriormente como o Princípio de Mínima Ação.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J.L. **Geometria Diferencial e Cálculo das Variações**. IMPA: Rio de Janeiro, 1975.
- HESTENES, M.R. An Elementary Introduction to the Calculus of Variations. **Mathematics Magazine**. Vol. 23, No. 5 (May - Jun., 1950), pp. 249-267
- HRUSA, W.; TROUTMAN, J.L. Elementary Characterization of Classical Minima. **The American Mathematical Monthly**, Vol. 88, No. 5 (May, 1981), pp. 321-327
- KOT, M. **A First Course in the Calculus of Variations**. Providence: American Mathematical Society, 2014.
- LIMA, E.L. **Curso de Análise**. v.1. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014.
- LIMA, R.F. **Introdução à geometria diferencial**. Macapá: SBM, 2016.
- LOURÊDO, A. T.; OLIVEIRA, A. M.; LIMA, O. A. **Cálculo Avançado**. 2.ed. Campina Grande: EDUEPB, 2012.
- MESTERTON-GIBBONS, M. **A Primer on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory**. Providence: American Mathematical Society, 2009.
- PINTO, D.; MORGADO, M.C.F. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. 3.ed. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 2009.
- TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2.ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.