UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII - GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

MARLEY DIAS DA NÓBREGA

UMA NOVA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE ROLLE

PATOS
2019

MARLEY DIAS DA NÓBREGA

UMA NOVA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE ROLLE

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura Plena em Matemática – CCEA – UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira

PATOS
2019

N754n Nobrega, Marley Dias da.
Uma nova demonstração do teorema de Rolle [manuscrito] / Marley Dias da Nobrega. - 2019.
29 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2019.

"Orientação : Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Teorema de Rolle. 2. Análise Real. 3. Cálculo. I. Título

21. ed. CDD 515

Elaborada por José E. da S. Eugênio - CRB - 15/591 BSC7/UEPB

MARLEY DIAS DA NÓBREGA

UMA NOVA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE ROLLE

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovado em 02/12/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Me. José Elias da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. Israel Buriti Galvão
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho aos meus pais Celma Dias dos Santos e Olavo da Nóbrega Silva.

“Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda.”
Paulo Freire

SUMÁRIO

UMA NOVA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE ROLLE

Marley Dias da Nóbrega*

RESUMO

No presente artigo, apresentamos uma demonstração do Teorema de Rolle diferente da usual, encontrada em livros de Cálculo e de Análise Real e que faz uso do famoso teorema de Weierstrass a respeito de funções contínuas definidas sobre compactos. A demonstração que damos aqui, devida a H. Samelson (1979), baseia-se no uso iterativo de um caso particular do teorema da corda universal de P. Lévy e de um resultado sobre a convergência de certo tipo de sequência para a derivada de uma função em um ponto de seu domínio. Revisitamos inicialmente o cálculo diferencial para uma função real de uma variável real, no qual encontramos todos os conceitos e resultados preliminares necessários para a compreensão da referida prova.

Palavras-chave: Teorema de Rolle. Análise Real. Cálculo.

ABSTRACT

In the present paper, we present a different demonstration of Rolle's Theorem from the usual found in Calculus and Real Analysis books and which makes use of Weierstrass's famous theorem about continuous functions defined on compacts. The proof we give here, due to H. Samelson (1979), is based on an iterative use of a particular case of P. Lévy's universal chord theorem and a result on the convergence of a certain type of sequence to the derivative of a function at a point in its domain. We initially revisit the differential calculation for a real function of a real variable within which we find all the preliminary concepts and results needed to understand the aforementioned proof.

Keywords: Rolle's Theorem. Real Analysis. Calculus.

*Aluno de graduação do curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba. E-mail: marleydias42@gmail.com. Este artigo de conclusão de curso foi escrito sob orientação do Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira.

1 INTRODUÇÃO

O Teorema do Valor Médio, um dos resultados mais importantes do cálculo diferencial para funções reais de uma variável real, estabelece o fato geometricamente plausível de que, para uma função f contínua em um intervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), a declividade de alguma reta tangente é igual à declividade da reta determinada pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Este resultado, cuja demonstração é uma espécie de ápice dos estudos sobre limite e continuidade, pode ser apresentado em variados graus de generalidade.

O famoso teorema de Weierstrass afirma que toda função real contínua definida sobre um compacto da reta assume seus valores máximo e mínimo neste conjunto. Juntando este fato com o de que num extremo local interior a derivada se anula, obtemos o igualmente famoso Teorema de Rolle, que afirma que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e satisfaz $f(a) = f(b)$, então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Este resultado foi assim batizado em homenagem ao matemático francês Michel Rolle (1652-1719), responsável por apresentar uma demonstração do teorema em 1691, sem fazer uso dos métodos do cálculo diferencial e cobrindo apenas o caso de funções polinomiais. A primeira prova desse teorema foi dada em 1823 por Augustin-Louis Cauchy que o obteve como corolário do Teorema do Valor Médio.

Hoje em dia, a maioria dos livros de Cálculo e Análise pratica uma inversão histórica, apresentando primeiro uma prova do Teorema de Rolle (a qual segue essencialmente o roteiro que esboçamos no começo do parágrafo anterior) para depois demonstrar o Teorema do Valor Médio. A demonstração que é usualmente dada do Teorema de Rolle (e que revisitamos aqui também) é bastante sucinta e elegante, além de servir de base para estabelecer versões multidimensionais desse teorema (veja, por exemplo, Furi e Martelli (1995)), mas é pouco intuitiva.

Considerando a inegável relevância deste resultado, que está no cerne do cálculo diferencial na reta, no presente artigo, apresentamos uma nova demonstração dele, devida a H. Samelson (1979), baseia-se no uso iterativo de um caso particular do teorema da corda universal de P. Lévy e de um resultado sobre a convergência de certo tipo de sequência para a derivada de uma função em um ponto de seu domínio. Mais concretamente, precisamos dos seguintes dois resultados:

(i) Se f é contínua em $[c, d]$ e $f(c) = f(d)$, então existem α, β em $[c, d]$ com $\beta - \alpha = 1/2(c - d)$ e $f(\alpha) = f(\beta)$.

(ii) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável em $a \in X \cap X'$. Se $x_n < a < y_n$ para todo n com $x_n, y_n \to a$, então $[f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n) \to f'(a)$.

Para fundamentar a prova dos supracitados resultados, fazemos na Seção 2 um resumo dos principais conceitos e resultados de Análise em $\mathbb{R}$, dando ênfase aos elementos do Cálculo Diferencial. Na Seção 3, provamos os resultados auxiliares e apresentamos a prometida prova alternativa do Teorema de Rolle.

2 ELEMENTOS DE ANÁLISE EM $\mathbb{R}$

Nesta seção, revisitamos o cálculo diferencial para uma função real de uma variável real no qual encontramos todos os conceitos e resultados preliminares necessários para a compreensão da almejada prova do Teorema de Rolle.

2.1 O corpo ordenado completo dos números reais

O conjunto de todos os números reais, denotado aqui por $\mathbb{R}$, é um *corpo*, ou seja, nele se acham definidas operações de binárias de adição $(+)$, que a cada par $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associa um elemento $x + y \in \mathbb{R}$, chamado a *soma* de x e y, e de multiplicação $(\cdot)$, que a cada par $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associa um elemento $x \cdot y \in \mathbb{R}$, chamado o *produto* de x e y. A adição goza das propriedades associativa e comutativa, da existência de elemento neutro 0 e de um simétrico para cada número real. A multiplicação, por sua vez, é associativa e comutativa; com relação a ela, há um elemento neutro $1 \neq 0$ e, para cada número real não-nulo, há um simétrico multiplicativo. Como, contudo, este trabalho não tem um caráter algébrico, remetemos o leitor interessado em maiores detalhes a Abbott (2010), Lima (1989 e 2006).

$\mathbb{R}$ é um corpo *ordenado*. Ou seja, existe um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, que chamamos de *conjunto dos números reais positivos*, que cumpre as seguintes condições:

P1. A soma e o produto de números reais positivos são positivos, i.e., $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.

P2. Dado $x \in \mathbb{R}$, apenas uma das três alternativas ocorre: $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$, ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Exemplo 2.1. O quadrado de todo número $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é positivo; em particular, 1 é positivo, pois $1 = 1^2 = 1 \cdot 1$ e, daí, todo número natural é também positivo, pois

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ parcelas}}.$$

Com efeito, se $x \neq 0$, há apenas duas possibilidades, umas das quais tem de acontecer: $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$. Em qualquer caso, por (P1) e pela regra de sinais, temos $x^2 = x \cdot x = (-x)^2 = (-x) \cdot (-x) \in \mathbb{R}^+$.

A existência e as propriedades do subconjunto $\mathbb{R}^+$, aqui postuladas, permite introduzir em $\mathbb{R}$ uma relação de ordem como segue. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, dizemos que *x é menor do que y* e escrevemos $x < y$ quando $y - x \in \mathbb{R}^+$. Note que os números reais positivos são precisamente os números x tais que $x > 0$. Por esta razão, passaremos a utilizar esta última simbologia para exprimir o fato de que um número é positivo. Dizemos que *x é menor do que ou igual a y* e escrevemos $x \leq y$ se $x = y$ ou $x < y$. Esta última é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{R}$. Detalhes podem ser encontrados em Abbott (2010), Lima (1989 e 2006).

Exemplo 2.2 (Desigualdade de Bernoulli)**.** Para todo número real $x \geq -1$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Provamos isso por indução em n. A desigualdade é trivialmente satisfeita se $n = 1$. Supondo que a desigualdade seja válida para n, multiplicando ambos os membros por $1+x \geq 0$ obtemos

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

Portanto, $(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2 > 1+(n+1)x$, pois $nx^2 > 0$. Logo, $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$, que é a desigualdade para $n+1$. Pelo Princípio da Indução, a desigualdade de Bernoulli é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. (Caso o leitor sinta vontade de saber mais sobre o funcionamento do Princípio da Indução, que é muito utilizado em demonstrações envolvendo números naturais, recomendamos que consulte Santos (2007).)

Graças à relação de ordem existente em $\mathbb{R}$, podemos definir o *módulo*, também conhecido como *valor absoluto*, de um número real $x \in \mathbb{R}$ assim: $|x| = x$, se $x > 0$, $|0| = 0$, e $|x| = -x$, se $x < 0$. Note que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $|x| = \max\{x, -x\}$, ou seja, $|x|$ é o maior dos números x e $-x$. Em particular, $x \leq |x|$.

Uma propriedade de corpos ordenados que nos será útil é a *desigualdade triangular*.

Lema 2.1 (Desigualdade Triangular)**.** *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos*

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = |x|^2+|y|^2+2xy \\ &\leq |x|^2+|y|^2+\underbrace{|2xy|}_{|2xy|=2|x|\cdot|y|} = (|x|+|y|)^2. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada, obtemos o resultado desejado. □

Seguindo com o texto, damos algumas definições que nos levarão aos importantes conceitos de supremo e ínfimo de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito *limitado superiormente* quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Chamamos um tal b de *cota superior* de X. Analogamente, dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é *limitado inferiormente* quando esxiste algum $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. Chamamos esse número a de *cota inferior* de X. Dizemos que X é um *conjunto limitado* quando X é limitado tanto inferiormente quanto superiormente. De maneira equivalente, X é limitado quando está contido em um intervalo limitado $[a, b]$ ou quando existe uma constante $C > 0$ tal que $|x| \leq C$ para todo $x \in X$.

Definição 2.1 (Supremo)**.** Sejam $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente e $b \in \mathbb{R}$. Chamamos b de *supremo* de X se b é a menor das cotas superiores de X. Neste caso, usamos a notação $b = \sup X$.

Para que isso aconteça, é necessário que duas condições sejam cumpridas. São elas:

S1. b é cota superior de X;

S2. se $c \in \mathbb{R}$ for cota superior de X, então $b \leq c$.

De forma semelhante, dados um conjunto limitado inferiormente $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, chamamos um número $a \in \mathbb{R}$ de *ínfimo* de X quando a é a maior das cotas inferiores desse conjunto. Neste caso, usamos a notação $a = \inf X$.

Para que a seja infimo de X as seguintes condições devem ser satisfeitas:

I1. a é cota inferior de X;

I2. se $c \in \mathbb{R}$ for cota inferior de X, então $c \leq a$.

O **Axioma Fundamental da Análise**, razão pela qual fazemos Cálculo em $\mathbb{R}$ e não em outro corpo ordenado, consiste no seguinte: *Todo conjunto* $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ *limitado superiormente possui supremo em* $\mathbb{R}$. Esse axioma é comumente enunciado dizendo-se que *o corpo ordenado* $\mathbb{R}$ *é completo*. É claro que isso implica que todo conjunto limitado inferiormente e não-vazio $X \subset \mathbb{R}$ possui ínfimo.

2.2 Intervalos de $\mathbb{R}$

É costumeiro que o conjunto de todos os números reais $\mathbb{R}$ seja identificado com uma reta euclidiana e que seus elementos sejam, assim, identificados com os pontos desta reta. Tendo isso em mente, a relação $x < y$ significa que o ponto x está à esquerda do ponto y. O número $|y - x| = |x - y|$ descreve a distância entre os pontos x e y. Além disso, os intervalos correspondem a segmentos de reta. Recordemos alguns fatos a respeitos dos intervalos da reta real.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, chamamos de *intervalo fechado de extremos* a *e* b o conjunto denotado por $[a, b]$ e definido da seguinte maneira:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}.$$

Se removemos os extremos a e b do intervalo, então o conjunto resultante é chamado de *intervo aberto* e denotado por (a, b), i.e.,

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}.$$

Um intervalo também pode ser *semi-aberto* ou *semi-fechado* como nos exemplos abaixo:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}.$$

Adicionando os símbolos $-\infty$ e $+\infty$, temos os intervalos ilimitados $(-\infty, b]$ e $(-\infty, b)$, que correspondem, respectivamente, à semi-reta que tem por origem o ponto b e à esta mesma semi-reta excluindo-se sua origem. Analogamente, temos os intervalos $[a, +\infty)$ e $(a, +\infty)$. Por fim, convencionamos que $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Um tipo especial de intervalo que convém destacar é o apresentado na definição a seguir.

Definição 2.2 (Vizinhança)**.** Dado $a \in \mathbb{R}$, chamamos ε-vizinhança de a todos os números x contidos no intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Denotaremos esse intervalo com o símbolo $V_\varepsilon(a)$. Podemos escrever a condição $x \in V\varepsilon(a)$ das seguintes três maneiras equivalentes:

$$|x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x-a < \varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon < x < a+\varepsilon.$$

O próximo importante resultado é uma consequência de o corpo ordenado $\mathbb{R}$ ser completo. Ou seja, todo conjunto náo-vazio, limitado superiormente, $X \subset \mathbb{R}$ possui supremo $b = \sup X \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.1 (Princípio dos Intervalos Encaixados)**.** *Dada uma sequência decrescente de $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ de intervalos limitados e fechados, $I_k = [a_n, b_n]$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. As inclusões $I_n \supset I_{n+1}$ significam que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

O conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ é, pois, limitado superiormente. Seja $c = \sup A$, de maneira que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $a_n \leq c$. Por outro lado, note que cada b_n é cota superior de A; logo $c \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ora, isso significa que $a_n \leq c \leq b_n$, ou seja, $c \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2.3 Sequências de números reais

Definição 2.3. Uma *sequência de números reais* é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Escrevendo $x_n = x(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. É comum denotarmos a sequência x por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente por (x_n). Cada número natural n que aí aparece é chamado *índice*, e o número x_n correspondente é denominado o *n-ésimo termo* ou *termo geral* da sequência.

Exemplo 2.3. Os termos gerais das sequências x_n de números naturais pares e y_n de números naturais ímpares são dados, respectivamente, por $a_n = 2n$ e $b_n = 2n-1$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Dizemos que uma sequência (x_n) é *limitada superiormente* quando o conjunto de seus termos, $\{x_n; n \in N\}$, é limitado superiormente. Definição análoga é dada para uma sequência *limitada inferiormente*. Dizemos, ainda, que uma sequência (x_n) é *limitada* quando o conjunto de seus termos é limitado.

Definição 2.4 (Limite de uma sequência)**.** O número real a é chamado *limite* da sequência (x_n) quando, para todo $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$. Escrevemos, então, $a = \lim x_n$. Em símbolos, temos

$$a = \lim x_n \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon.$$

Observação 2.1. *Note que dizer que* $\lim x_n = a$ *é o mesmo que dizer que qualquer* ε*-vizinhança de* a *contém todos os termos da sequência* x_n *a partir de um certo índice.*

Observação 2.2. *É claro que*

$$\lim x_n = a \Longleftrightarrow \lim(x_n - a) = 0 \Longleftrightarrow \lim |x_n - a| = 0.$$

Definição 2.5. Dizer que uma sequência (x_n) *converge para o número* $a \in \mathbb{R}$ é o mesmo que dizer que (x_n) tem limite a. Neste caso, escrevemos também $x_n \to a$ para denotar o fato de que $a = \lim x_n$ Uma sequência que não converge é dita *divergente*.

Exemplo 2.4. Vamos provar que a sequência

$$(x_n) = \left(\frac{n}{n + 2019}\right)$$

converge para o número 1. Para isso, veja que, para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n + 2019} - 1\right| = \frac{2019}{n + 2019} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2019}{\varepsilon} - 2019,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\mathbb{N} \ni n_0 > 2019/\varepsilon - 2019$ para garantir que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon.$$

Proposição 2.2 (Unicidade do limite)**.** *Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração. Sejam $a \neq b$ e x_n uma sequência com $\lim x_n = a$. Podemos escolher $\varepsilon > 0$, tal que os intervalos abertos $I = (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ e $J = (b - \varepsilon,\ b + \varepsilon)$ são disjuntos. Pela definição de limite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in I$. Como $I \cap J = \varnothing$, $x_n \notin J$ para $n > n_0$. Portanto, b não é limite de x_n. □

Proposição 2.3. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $x_n \to a$. Tomando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - 1, a + 1)$. Sejam α o menor e β o maior elemento do conjunto $\{x_1, \cdots, x_{n_0}, a - 1, a + 1\}$. Todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[\alpha, \beta]$. Portanto, x_n é limitada. □

Exemplo 2.5. A sequência $(1, 2, 4, 8, \ldots)$ com $x_n = 2^n$ não é convergente porque não é limitada.

Definição 2.6. Uma sequência $x_n \in \mathbb{R}$ é dita *monótona* quando, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $x_n \leq x_{n+1}$ ou $x_n \geq x_{n+1}$. No primeiro caso, dizemos que (x_n) é uma sequência monótona *não-crescente*; no segundo, dizemos que x_n é monótona *não-crescente*. Caso $x_n < x_{n+1}$ ou $x_n > x_{n+1}$ dizemos que x_n é *crescente* ou *decrescente*, respectivamente.

Proposição 2.4. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. A fim de fixar ideias, consideremos (x_n) uma sequência não-decrescente limitada. Definimos $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ e $a = \sup X$. Afirmamos que (x_n) converge para a. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X, já que a é a menor das cotas superiores de X. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Daí, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$. Assim, $\lim x_n = a$, como afirmado. □

Definição 2.7. Seja (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$. Uma *subsequência* de (x_n) consiste na restrição de x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$. Pondo $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$, representamos a subsequência correspondente por (x_{n_k}).

Proposição 2.5 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência limitada, portanto toda contida em um intervalo fechado $[\alpha, \beta]$. Observe que, dividindo esse intervalo ao meio, obtemos dois intervados fechados de comprimento igual a $(\beta - \alpha)/2$, um dos quais contém, necessariamente, infinitos termos de x_n. Seja I_1 esse intervalo. Repetindo esse procedimento indefinidamente obtemos, uma sequência de intervalos encaixados I_n. O intervalo I_n tem compriment $(\beta - \alpha)/2^{n-1}$. Pela Proposição 2.2, existe pelo menos um elemento que está contido em todos os intervalos gerados. Seja a esse elemento. Para $k \in \mathbb{N}$, tomamos um termo x_{n_k} da sequência (x_n) pertencente ao intervalo I_k. Assim, obtemos uma subsequência de (x_n) que converge para a. De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, seja $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que $(\beta - \alpha)/2^{n_{k_0}-1} < \varepsilon$, de modo que $I_m \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para $m > n_{k_0}$. Portanto, cada termo x_{n_k} da subsequência está no intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para $n_k > n_{k_0}$. □

Exemplo 2.6. A sequência $(\operatorname{sen} n)$ é limitada; logo, pelo Teorema de Bolzano-Weirstrass, ela possui uma subsequência convergente para um número $a \in [-1, 1]$.

2.3.1 Limites e ordem; operações com limites

Proposição 2.6. *Seja $a = \lim x_n$. Se $b < a$, então, para todo n suficientemente grande, temos $b < x_n$. Analogamente, se $a < b$ então $x_n < b$, para todo n suficientemente grande.*

Demonstração. Suponhamos que $b < a$ (o outro caso é tratado de forma totalmente análoga). Escolhendo $\varepsilon = a - b$, tem-se, para todo n suficientemente grande, $a - \varepsilon < x_n$. Ora, $a - \varepsilon = b$. □

Proposição 2.7 (Teorema do sanduíche)**.** *Sejam x_n, y_n e z_n sequências de números reais tais que $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, então $\lim z_n = a$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher um índice n_0 tal que $n > n_0$ implica $a - \varepsilon < x_n \leq y_n < a + \varepsilon$. Segue-se que $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ para todo $n > n_0$, uma vez que, por hipótese, $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande. □

Exemplo 2.7. Vamos provar que o Princípio dos Intervalos Encaixados implica em $\mathbb{R}$ ser um *Corpo Ordenado Completo*, mostrando, assim, que estas duas propriedades são equivalentes.

Seja $\varnothing \neq S \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente. Mostremos que S possui supremo. Sejam b_1 uma cota superior de S e a_1 um número que não é cota superior de S. Necessariamente, temos $a_1 < b_1$. Consideremos o intervalo fechado $I_1 = [a_1, b_1]$. Seja $c_1 = (a_1 + b_1/2)$ o ponto médio de I_1. Caso c_1 seja cota superior de S, escolhemos $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$; caso contrário, fazemos $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$. Em qualquer caso, o intervalo fechado $I_2 = [a_2, b_2]$ é tal que seu extremo inferior não é cota superior de S, enquanto seu extremo superior o é. Ademais, temos $I_2 \subset I_1$. Assim prosseguindo, construímos uma família de intervalos fechados encaixados $I_n = [a_n, b_n]$, cuja interseção determina um número real c. Afirmamos que $c = \sup S$. Fazendo $M = b_1 - a_1$, o comprimento do intervalo I_n, obtido na n-ésima etapa do processo de bisseção anteriormente descrito, é dado por $M/2^{n-1}$. Daí, segue-se que $\lim a_n = \lim b_n = c$. Dado arbitrariamente $s \in S$, temos $s \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $s \leq c$, ou seja, c é cota superior de S. Por outro lado, se d é cota superior de S, então $a_n < d$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $c \leq d$, mostrando que c é a menor cota superior de S.

É interessante lembrar que sequências nada mais são do que funções reais. Assim sendo, dadas duas sequências x_n e y_n, podemos obter novas sequências efetuando a soma, a diferença, o produto e o quociente das sequências originais termo a termo.

Antes de passarmos ao resultado principal desta parte, demonstramos o seguinte resultado auxiliar.

Lema 2.2. *Se* $\lim a_n = 0$ *e* b_n *é uma sequência limitada, então* $\lim(a_n \cdot b_n) = 0$.

Demonstração. Como b_n é limitada, existe $c > 0$ tal que $|b_n| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon/c$. Portanto $n > n_0 \Rightarrow |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < (\varepsilon/c) \cdot c = \varepsilon$. Assim, $\lim(a_n \cdot b_n) = 0$. □

Exemplo 2.8. Se $a_n = 1/n$ e $b_n = \sin n$, então (b_n) não converge, mas como $-1 \leq b_n \leq 1$, temos $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(\sin n/n) = 0$.

Por outro lado, se $\lim a_n = 0$, mas b_n não é limitada, o produto $a_n \cdot b_n$ pode divergir (tome, por exemplo, $a_n = 1/n$, $b_n = n^2$) ou convergir para qualquer valor (tome, por exemplo, $a_n = 1/n$, $b_n = c \cdot n$).

Proposição 2.8. *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$*, então:*

1. $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$.

2. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

3. $\lim x_n/y_n = a/b$ *se* $b \neq 0$.

É comum, em cursos de Cálculo, enunciarmos os itens da proposição precente das seguintes formas: *o limite da soma (respec., diferença) é a soma (respec., diferença) dos limites*, *o limite do produto é o produto entre os limites* e que *o limite dos quocientes é o quociente dos limites*. Passemos à prova destes fatos.

Demonstração. 1. Escolhendo arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existem, pela definição de limite, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon/2.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$; logo, pela desigualdade trangular (Lema 2.1), para $n > n_0$ temos

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim(a_n + b_n) = a + b$. O argumento para $x_n - y_n$ é análogo.

2. Temos

$$\begin{aligned} x_n y_n - ab &= x_n y_n - x_n b + x_n b - ab \\ &= x_n(y_n - b) + (x_n - a)b \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.3, (x_n) é limitada. Note que $\lim(x_n - a) = \lim(y_n - b) = 0$. Usando o Lema 2.2 e a parte 1 desta proposição que estamos provando, obtemos

$$\begin{aligned} \lim(x_n y_n - ab) &= \lim[x_n(y_n - b) + \lim[(x_n - a) \cdot b]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $\lim(x_n y_n) = ab$.

3. Primeiro, note que $(x_n/y_n) - (a/b) = (x_n b - y_n a)/y_n b$. Como o $\lim(x_n b - y_n a) = ab - ba = 0$, basta provarmos que a sequência $1/y_n$ é limitada para que possamos concluir que $\lim(x_n/y_n - a/b) = 0$ e, consequntemente, que $\lim x_n/y_n = a/b$. Escolhendo $c = b^2/2$ temos $0 < c < b^2 = \lim y_n b$ (note que, na última igualdade, usamos o item 2 que acabamos de provar). Pela Proposição 2.6, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos $c < y_n b$ e, portanto, $1/y_n b < 1/c$. Assim, $1/y_n b$ é uma sequência limitada. □

Corolário 2.1. *Se* $\lim x_n = a$ *e* $c \in \mathbb{R}$, *então* $\lim c x_n = ca$.

Demonstração. Este corolário segue do item 2 da Proposição 2.8. Como o limite de uma sequência constante é trivialmente igual a essa constante, temos:

$$\lim c x_n = (\lim c) \cdot (\lim x_n) = c \cdot a.$$

□

Exemplo 2.9. Se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim(x_{n+1}/x_n) = a < 1$, então $\lim x_n = 0$.

Com efeito, basta que tomemos $c \in \mathbb{R}$ com $a < c < 1$. Então, $0 < x_{n+1}/x_n < c$, para todo n suficientemente grande. Segue-se que $0 < x_{n+1} = (x_{n+1}/x_n)x_n < c \cdot x_n < x_n$; logo, para n suficientemente grande, a sequência (x_n) é monótona limitada. Seja $0 \leq b = \lim x_n$. Como consequência de $x_{n+1} < c \cdot x_n$ para todo n suficientemente grande, resulta, fazendo $n \to \infty$, em $b \leq c \cdot b$, isto é, $(1 - c) \cdot b \leq 0$. Como $b \geq 0$ e $0 < c < 1$, concluímos que $b = 0$.

2.4 Alguns conceitos topológicos

A Topologia é uma área de estudo que trata, de uma forma bastante generalizada, de assuntos que envolvem as noções de limite, continuidade, etc. Esta é bastante temida nos cursos de Análise por ser, realmente, muito abstrata e, por vezes, difícil de entender. Traremos aqui alguns poucos conceitos que nos darão apoio no conteúdo que vem pela frente.

2.4.1 Pontos de acumulação

Por *vizinhança aberta* de um ponto $a \in \mathbb{R}$, entendemos um conjunto V tal que $a \in V$ e, para todo ponto $x \in V$, existe um intervalo aberto I_x com $x \in I_x \subset V$. Quando conveniente, por simplicidade, podemos sempre pensar em vizinhanças como ε-vizinhanças.

Definição 2.8 (Pontos de acumulação). Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é *ponto de acumulação* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda a vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente do próprio a. Equivalentemente, a é ponto de acumulação de X se, para todo $\varepsilon > 0$, temos $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \varnothing$. Indicaremos o conjunto de todos os pontos de acumulação de X por X'.

Proposição 2.9. *Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as afirmações a seguir são equivalentes:*

1. *a é um ponto de acumulação de X;*

2. *a é limite de uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$;*

3. *todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos de X.*

Demonstração. Supondo que a é um ponto de acumulação de X, para cada $n \in \mathbb{N}$ é possível encontrar um ponto $x_n \in (a-1/n, a+1/n) \cap (X \setminus \{a\})$. É claro que $|x_n - a| < 1/n$, donde, pelo Teorema do sanduíche (Proposição 2.7), segue-se que $x_n \to a$. Supondo agora a validade de (2), para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ o conjunto $\{x_n : n > n_0\}$ é infinito (pois, do contrário, existiria um termo x_{n_1} que se repetiria infinitas vezes, gerando, assim, uma sequência constante com $\lim x_{n_1} \neq a$. Pela definição de limite, qualquer intervalo aberto contendo a conterá também todos os termos de x_n a partir de determinado índice. Juntando estas duas observações, concluímos que $(2) \Rightarrow (3)$. A implicação $(3) \Rightarrow (1)$ é óbvia. □

Proposição 2.10 (Teorema de Bolzano-Weierstrass; versão topológica)**.** *Todo conjunto infinito limitado de números reais admite pelo menos um ponto de acumulação.*

Para a demonstração, será necessário o conceito de conjunto enumerável. Por fugir ao escopo deste artigo, mesmo no que diz respeito a resultados preliminares, resolvemos não apresentar esse conceito e recomendamos ao leitor que sinta necessidade de aprofundamento que consulte, por exemplo, Lima (2006).

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto infinito limitado. X possui um subconjunto infinito enumerável $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Temos, assim, uma sequência (x_n) de termos dois a dois distintos, pertencentes a X, portanto uma sequência limitada, a qual, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Proposição 2.3), possui uma subsequência convergente. Desprezando os termos que estão fora dessa subsequência e mudando a notação, podemos admitir que (x_n) converge. Seja $a = \lim x_n$. Como os termos x_n são todos distintos, no máximo um deles pode ser igual a a. Descartando-o, caso exista, teremos a como limite de uma sequencia de pontos $x_n \in X - \{a\}$, logo $a \in X'$. □

Um ponto x de um conjunto X chama-se *isolado* quando não é ponto de acumulação de X, ou seja, quando existe uma vizinhança V_x de x tal que $V_x \cap X = \{x\}$. Um conjunto é dito *discreto* quando todos os seus pontos são isolados.

2.4.2 Conjuntos compactos

Definição 2.9. Um conjunto $X \in \mathbb{R}$ é dito *fechado* quando cumpre a seguinte condição: Se $a \in \mathbb{R}$ é limite de uma sequência de pontos de X, então $a \in X$. Dizemos que X é *compacto* quando é limitado e fechado.

Damos a seguinte caracterização sequencial de compacidade:

Proposição 2.11. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X.*

Demonstração. Suponhamos que X seja compacto. Como X é, em particular, limitado, então toda sequência de pontos de X é limitada. Seja x_n uma tal sequência. Pelo Proposição 2.3, x_n possui uma subsequência convergente, cujo limite, por X ser fechado, é um ponto de X. Seja, agora, $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que toda sequência $x_n \in X$ possui uma subsequência que converge para um ponto de X. Então X é limitado, pois, caso contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$ seria possível obter $x_n \in X$ tal que $|x_n| > n$. Observamos que a sequência x_n, assim obtida, não possuiria subsequência limitada; logo, não possuiria subsequência convergente, o que contradiria a hipótese. Além disso, se X não fosse fechado, existiriam $a \notin X$ e uma sequência $x_n \in X$ com $a = \lim x_n$. Como toda subsequência de x_n convergiria para a, isso novamente daria uma contradição com a hipótese. Portanto, X é compacto. □

Exemplo 2.10. Todo intervalo do tipo $[a, b]$ é compacto. Com efeito, dada uma sequência convergente $(x_n) \subset [a, b]$, como $a \leq x_n \leq b$ para todo n, segue-se da Proposição 2.6 que $a \leq \lim x_n \leq b$. O intervalo (a, b) não é compacto, pois, apesar de limitado, não é fechado, já que, por exemplo, para n suficientemente grande a sequência $(a+1/n)$ está contida no intervalo (a, b) e converge para $a \notin (a, b)$.

Exemplo 2.11. Todo conjunto compacto de números reais possui um elemento máximo e um elemento mínimo. Com efeito, como X é limitado, existem $\sup X$ e $\inf X$. Para o supremo, basta observar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sup X - 1/n$ não é cota superior de X e, assim, existe $x_n \in X$ tal que $\sup X - 1/n < x_n \leq \sup X$. Fazendo $n \to \infty$, vemos que $x_n \to \sup X$. Sendo X fechado, concluímos que $\sup X \in X$. Analogamente, mostramos que $\inf X \in X$.

2.5 Limite de funções

Aqui veremos como funciona, de uma forma mais rigorosa, o conceito de limite quanto trabalhamos com funções. Já vimos, anteriormente, o caso particular de limites de sequências.

Definição 2.10 (Limite de funções)**.** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto de números reais, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real cujo domínio é X e $a \in X'$ um ponto de acumulação do conjunto X. Dizemos que um número real L é o limite de $f(x)$ com x tendendo a, e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = L$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, *existe* $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$. Simbolicamente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L. \equiv . \,\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0;\, x \in X,\, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Informalmente, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ quer dizer que se pode aproximar $f(x)$ de L tanto quanto se queira desde que se tome $x \in X$suficientemente próximo, porém diferente, de a.

É essencial que a seja ponto de acumulação de X, mas não é necessário que $a \in X$. Ou seja, não é necessário que $f(x)$ esteja definida no ponto a.

Observe que, se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então f é limitada numa vizinhança de a. De fato, tomando ε, segue-se da definição recém apresentada que existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in (X \setminus \{a\}) \cap V_\delta(a)$, então $|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < |L| + 1$.

Muitos resultados para limites de sequências podem ser transpostos para o caso de limites de funções.

Proposição 2.12 (Teorema do sanduíche)**.** *Seja* $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$. *Se* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in X - \{a\}$, *então* $\lim_{x\to a} h(x) = L$.

Demonstração. Tomando arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$x \in X,\ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

e

$$x \in X,\ 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon.$$

Seja $\delta \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$x \in X,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

Logo, $\lim_{x\to a} h(x) = L$. □

Vale salientar que a noção de limite é local, ou seja, dadas as funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ e dado a pertencente ao conjunto de pontos de acumulação de X, se existir uma vizinhança V do ponto a tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$ em $V \cap X$ então existe $\lim_{x\to a} f(x)$ se, e somente se, existe $\lim_{x\to a} g(x)$. Além do mais, esses limites serão iguais, se existirem.

Proposição 2.13. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. A fim de que seja $\lim_{x\to a} f(x) = L$ é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X \setminus \{a\}$ com $\lim x_n = a$, tenhamos $\lim f(x_n) = L$.*

Demonstração. Suponhamos, primeiro, que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, e seja $x_n \in X\setminus\{a\}$ uma sequência com $\lim x_n = a$. Escolhendo arbitrariamente um $\varepsilon > 0$, pela definição de limite de função, existe $\delta > 0$, tal que $x \in X,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Pela definição de limite de sequência, existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $n > n_0 \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta$. Consequentemente, $n > n_0 \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$; portanto, $\lim f(x_n) = L$.

Reciprocamente, suponhamos que para toda sequência $x_n \in X - \{a\}$, com $\lim x_n = a$, tenhamos $\lim f(x_n) = L$ e demonstremos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Ora, se $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe $x_\delta \in X \setminus \{a\}$ tal que $0 < |x_\delta - a| < \delta$, mas $0 < |f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon_0$. Tomando sucessivamente $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, obtemos, assim, uma sequência $x_n \in X \setminus \{a\}$ tal que $0 < |x_n - a| < 1/n$. Por estas últimas desigualdades, é claro que $\lim x_n = a$. Mas, como $|f(x_n - L)| \geq \varepsilon_0$, não pode ser $\lim f(x_n) = L$. Contradição. □

Corolário 2.2 (Unicidade do limite). *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} f(x) = M$, então $L = M$.*

Demonstração. Basta tomarmos uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$, com $\lim x_n = a$, a qual existe em virtude da Proposição 2.9. Então, pela Proposição 2.13, $L = \lim f(x_n)$ e $M = \lim f(x_n)$. Segue-se da Proposição 2.3 que $L = M$. □

Corolário 2.3 (Operações com limites). *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$, e $a \in X'$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então*

1. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;

2. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;

3. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ *(desde que $M \neq 0$ e $g(x) \neq 0$).*

Além disso, se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *e* g *é limitada numa vizinhança de* a*, temos* $\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = 0$.

Demonstração. Dada qualquer sequência $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, pelas Proposições 2.8 e 2.13, valem $\lim[f(x_n) \pm g(x_n)] = \lim f(x_n) \pm \lim g(x_n) = L \pm M$, $\lim[f(x_n) \cdot g(x_n)] = \lim f(x_n) \cdot \lim g(x_n) = L \cdot M$ e também $\lim[f(x_n)/g(x_n)] = \lim f(x_n)/\lim g(x_n) = L/M$, neste último caso desde que $M \neq 0$. Por fim, se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e g é limitada numa vizinhança de a, então, pelo Lema 2.2 e pela Proposição 2.2, temos $\lim[f(x_n) \cdot g(x_n)] = 0$. $\square$

2.6 Continuidade

Definição 2.11. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *contínua no ponto* $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe um $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Em linguagem simbólica, f ser contínua no ponto a traduz-se em:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Vale salientar que a continuidade é um fenômeno local, ou seja, a função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, existe uma vizinhança V de a tal que a restrição de f a $V \cap X$ é contínua no ponto a.

Diferentemente da condição encontrada em limites de funções, na definição de função contínua o ponto a deve pertencer ao conjunto X, sendo possível tomar $x = a$, caso em que a condição $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ se torna, obviamente, $0 < \varepsilon$, sendo, pois, satisfeita de maneira trivial. Se $a \in X \cap X'$, ou seja, se $a \in X$ é um ponto de acumulação desse conjunto, então $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a se, e somente se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Proposição 2.14. *Sejam* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *contínuas no ponto* $a \in X$*, com* $f(a) < g(a)$*. Existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) < g(x)$ *para todo* $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$*.*

Demonstração. Tomemos $c = [g(a) + f(a)]/2$ e $\varepsilon = g(a) - c = c - f(a)$. Então $\varepsilon > 0$ e $f(a) + \varepsilon = g(a) - \varepsilon = c$. Pela definição de continuidade, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que $x \in X,\ |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) < c$ e , $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow c < g(x)$. Seja δ o mínimo entre δ_1 e δ_2. Então $x \in X,\ |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < c < g(x)$. $\square$

Exemplo 2.12. Todo polinômio é contínuo em $\mathbb{R}$. Na verdade, funções racionais (isto é, quocientes de polinômios) são contínuas onde quer que estejam definidas.

Isso acontece porque a caracterização sequencial de limites dada na Proposição 2.13 admite a seguinte versão para continuidade, com prova análoga à do caso de limites: A função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente, para toda sequência $(x_n) \in X$ com $\lim x_n = a$ temos $\lim f(x_n) = f(a)$. A partir daí, é fácil provar que se f e g são contínuas no ponto a, então também o são $f \pm g, fg$ e f/g (onde esta última estiver bem definida).

Ora, as funções $f(x) = x$ e $g(x) \equiv c$ são trivialmente contínuas, e polinômios nada mais que são somas de "parcelas" do tipo $a_n x^n$, em que a_n é uma constante real.

Um exemplo de função descontínua em um ponto e contínua nos demais é a função f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Esta é descontínua em zero e contínua nos demais pontos da reta. Admitindo, para fins deste trabalho, a continuidade de f em todo $x \neq 0$, mostremos a descontinuidade em $x = 0$. Consideremos a sequência $x_n = (\pi/2 + 2(n-1)\pi)^{-1}$. É claro que $x_n \to 0$, mas $f(x_n) \equiv 1 \neq 0 = f(0)$.

Proposição 2.15 (A composição de duas funções contínuas é contínua)**.** *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, contínua em $a \in X$, $g : Y \to \mathbb{R}$ contínua em $b = f(a) \in Y$ e $f(X) \subset Y$, de modo que a composta $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ está bem definida. Então $g \circ f$ é contínua em a.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ existe, pelo fato de g ser contínua no ponto b, um número $\eta > 0$, tal que $y \in Y,\ |y - b| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon$. Por outro lado, a continuidade de f em a garante a existência de $\delta > 0$, tal que $x \in X,\ |x - a| < \delta$ implicam em $|f(x) - b| < \eta$. Assim sendo,

$$x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow |g(f(x)) - g(b)| = |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon.$$

$\square$

O próximo resultado nos diz, essencialmente, que a imagem de um intervalo por uma função contínua é também um intervalo.

Teorema 2.1 (Teorema do valor intermediário de Bolzano)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) < d < f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $d = 0$. Com efeito, se isso já não ocorrer, basta substituirmos a função f pela função contínua $\phi(x) := f(x) - d$.

Seja $m_1 := (a + b)/2$ o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Caso $f(m_1) = 0$, nada mais há a fazer. Caso contrário, há duas possibilidades a considerar: $f(m_1) > 0$ ou $f(m_1) < 0$. No primeiro caso, tomamos $a_1 := a$ e $b_1 := m_1$; no segundo, escolhemos $a_1 := m_1$ e $b_1 := b$. Os extremos do invervalo $[a_1, b_1]$ satisfazem $f(a_1) < 0 < f(b_1)$. Além disso, o comprimento $\ell([a_1, b_1])$ deste novo intervalo é dado por $\ell([a_1, b_1]) = (b - a)/2$. Tomamos, agora, $m_2 := (a_1 + b_1)/2$ e repetimos o procedimento anterior, de maneira a obter um novo intervalo $[a_2, b_2]$ tal que $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ e $\ell([a_2, b_2]) = (b - a)/4$ e cujos extremos satisfazem $f(a_2) < 0 < f(b_2)$. Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma sequência descrescente de intervalos encaixados

$$[a, b] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

tais que

(i) $\ell([a_n, b_n]) = \frac{b-a}{2^n}$, e

(ii) $f(a_n) < 0 < f(b_n)$,

para todo $n \geq 0$. Pelo Princípio dos Intervalos Encaixados, existe algum $c \in \mathbb{R}$ que está em todos os intervalos $[a_n, b_n]$. Como a_n, b_n e c pertencem ao intervalo $[a_n, b_n]$, temos em particular que $|a_n - c|, |b_n - a| \leq \ell([a_n, b_n])$. Segue-se do item (i) acima que $\ell([a_n, b_n]) \to 0$. Logo,

$$c = \lim a_n = \lim b_n$$

De $f(a_n) < 0 < f(b_n)$, para todo $n \geq 0$, resulta

$$\lim f(a_n) \leq 0 \leq \lim f(b_n).$$

Como f é contínua em c, inferimos que $f(c) = 0$, como desejado. □

Exemplo 2.13. Seja $f[a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(a) \leq a$ e $b \leq f(b)$. Nessa conjuntura, existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. Efetivamente, a função $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por $\lambda(x) = x - f(x)$, é contínua, com $\lambda(a) \geq 0$ e $\lambda(b) \leq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, deve existir $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = c$. Um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$ chama-se um ponto fixo da função $f : X \to \mathbb{R}$.

Estudaremos agora dois resultados que nos serão necessários para a demonstração do Teorema de Rolle encontrada em Lima (2006).

Proposição 2.16. *A imagem $f(X)$ de um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$ por uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é um conjunto compacto.*

Demonstração. Devemos provar que toda sequência $y_n \in f(X)$ possui uma subsequência que converge para algum ponto em $f(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos a sequência $y_n = f(x_n)$, com $x_n \in X$. A sequência (x_n) possui uma subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ que converge para um ponto $a \in X$, pois X é compacto. Sendo f contínua no ponto a, de $\lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n = a$, concluímos que $\lim_{n \in \mathbb{N}'} y_n = \lim_{n \in \mathbb{N}'} f(x_n) = f(a) \in f(X)$. □

Teorema 2.2 (Weierstrass)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$. Existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Como vimos na seção de conceitos topológicos, um conjunto compacto possui os elementos máximo e mínimo. Pela Proposição 2.16, $f(X)$ é compacto. Assim, existem $f(x_1) = \min X$ e $f(x_2) = \max X$. □

2.7 Derivadas

Definição 2.12. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X \cap X'$ um ponto. A *derivada da função f no ponto a* é o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

caso esse limite exista. Em caso afirmativo, dizemos que f é *derivável* no ponto a.

Exemplo 2.14. **(a)** Verifiquemos que $f(x) = x^n$ é derivável em todo ponto da reta.

Seja c um ponto arbitrário de $\mathbb{R}$. Usando a identidade algébrica

$$x^n - c^n = (x - c)(x^{n-1} + cx^{n-2} + c^2x^{n-3} + \cdots + c^{n-1}),$$

encontramos

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x\to c} \frac{x^n - c^n}{x - c} = \lim_{x\to c}(x^{n-1} + cx^{n-2} + c^2x^{n-3} + \cdots + c^{n-1}) \\ &= c^{n-1} + c^{n-1} + \cdots + c^{n-1} = nc^{n-1}. \end{aligned}$$

Isso mostra que f é derivável em c e que $f'(c) = nc^{n-1}$, fórmula já bem conhecida do Cálculo.

(b) Seja $g(x) = |x|$. Ao tentarmos calcular a derivada em $c = 0$ produzimos o limite

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x},$$

que é $+1$ ou -1, dependendo de x se aproximar de zero da direita ou da esquerda. Consequentemente, esse limite não existe, e concluímos que g não é diferenciável em zero.

O item (b) do exemplo precendente é um lembrete de que a continuidade de uma função não implica que ela seja necessariamente derivável. Por outro lado, se g for derivável em um ponto, é verdade que g deve ser contínua nesse ponto. Com efeito, seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in X \cap X'$. Ou seja, existe o limite

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Queremos mostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Para isso, basta observamos que, pela Corolário 2.5, temos

$$\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x\to a} \left[\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)(x - a)\right] = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

2.7.1 Regras Operacionais

Proposição 2.17. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$. As funções $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (caso $g(a) \neq 0$) são também deriváveis no ponto a, com*

1. $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;
2. $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$;
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g(a)^2}$.

Demonstração. Veja Abbott (2010). □

Proposição 2.18 (Regra da Cadeia)**.** *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'$, $b \in Y \cap Y'$, $f(X) \subset Y$ e $f(a) = b$. Se f é derivável no ponto a e g é derivável no ponto b, então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a, com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência, com $x_n \in X \setminus \{a\}$ com $\lim x_n = a$. Então, pondo $y_n = f(x_n)$, temos $\lim y_n = b$. Definimos $\mathbb{N}_1 := \{n \in \mathbb{N} : \ f(x_n) \neq f(a)\}$ e $\mathbb{N}_2 := \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) = f(a)\}$. Caso $n \in \mathbb{N}_1$ e $y_n \in Y \setminus \{b\}$, temos

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

Logo, se $\mathbb{N}_1$ é infinito, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[g(f(x_n)) - g(f(a))]}{x_n - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Se $\mathbb{N}_2$ é infinito, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[f(x_n) - f(a)]}{x_n - a} = 0;$$

logo $f'(a) = 0$. Ainda no caso de $\mathbb{N}_2$ ser infinito, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[g(f(x_n)) - g(f(a))]}{x_n - a} = 0 = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Portanto, em qualquer das hipóteses vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[g(f(x_n)) - g(f(a))]}{x_n - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a),$$

já que $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$. □

3 TEOREMA DE ROLLE

Antes de apresentarmos uma demonstração alternativa do Teorema de Rolle, vejamos a demonstração mais comum que se encontra, por exemplo, em Lima (2006).

Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que $c \in X \cap X'$ é um *ponto de máximo local* de f se existe uma vizinhança V de c tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in V \cap X$; c é dito um *ponto de máximo global* se a última desigualdade é válida para todo $x \in X$. Dizemos também que f *atinge máximo (global ou local) em c*. Analogamente, dizemos que $c \in X$ é um *ponto de mínimo local* de f se existe uma vizinhança V de c tal que $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in V \cap X$; c é dito um *ponto de mínimo global* se a última desigualdade é válida para todo $x \in X$. Dizemos, ainda, que f *atinge mínimo (global ou local) em c.*

No caso de c ser um *ponto interior* de $X = [a, b]$, então se c é ponto de máximo ou mínimo e f é derivável em c, temos $f'(c) = 0$. Com efeito, para fixar ideias, suponhamos que c seja um ponto de máximo de f. Então, tomando sequências $(x_n), (y_n)$ tais que $x_n < c < y_n$ em (a, b), convergindo ambas para c, temos

$$\frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \leq 0$$

e

$$\frac{f(y_n) - f(c)}{y_n - c} \geq 0,$$

donde segue-se $f'(c) = 0$.

Teorema 3.1 (Rolle). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Como f é contínua num intervalo fechado, então pelo Teorema de Weierstrass, f atinge seu valor mínimo m e seu valor máximo M em pontos de $[a, b]$. Se esses pontos forem a e b então $m = M$ e f será constante, daí $f'(x) = 0$ qualquer que seja $x \in (a, b)$. Se um desses pontos, c por exemplo, estiver em (a, b) então $f'(c) = 0$. □

Exemplo 3.1. Dada a função $f : [0, 2\sqrt{3}] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 12x$. Determinemos $x_0 \in (0, 2\sqrt{3})$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Note que f é contínua em $[0, 2\sqrt{3}]$ e derivável em $(0, 2\sqrt{3})$ (com efeito, f é derivável em toda a reta). Ademais, $f(2\sqrt{3}) = 0 = f(0)$. Portanto, podemos aplicar o Teorema de Rolle 3.1 para garantir a existência de x_0 no intervalo $(0, 2\sqrt{3})$ de maneira que $f'(x_0) = 0$. Como $f'(x) = 3x^2 - 12$, para encontrarmos o valor de x_0 basta igualarmos $f'(x)$ a zero, o que nos dá $x_0 = \pm 2$. Assim, constatamos que o ponto desejado é $x_0 = 2$.

Como dissemos na Introdução deste artigo, o Teorema de Rolle é empregado na demonstração do Teorema do Valor Médio.

Teorema 3.2 (Teorema do Valor Médio de Lagrange). *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b). Então, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1}$$

Demonstração. Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f(x) - wx$, em que a constante w é escolhida de modo que $g(a) = g(b)$, ou seja, $w = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. Pelo Teorema de Rolle, existe c no intervalo aberto (a, b) tal que $g'(c) = 0$, isto é, $f'(c) = w = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. □

O Teorema 3.2 pode ser empregado para demonstrar fatos básicos do Cálculo Diferencial. Vejamos alguns.

Corolário 3.1. *Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, contínua em $[a, b]$, com derivada $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, é constante.*

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in (a, b)$, sendo $x_1 < x_2$. Como f é derivável em (a, b), ela deve ser derivável em (x_1, x_2). Além disso, é claro que f é contínua em $[x_1, x_2]$. Aplicando o Teorema 3.2 à restrição de f ao intervalo $[x_1, x_2]$, obtemos um número c tal que $x_1 < c < x_2$ e

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{2}$$

Como, por hipótese, $f'(x) = 0$, para todo x, temos $f'(c) = 0$. A equação (2) fornece, então, $f(x_2) - f(x_1) = 0$, ou seja, $f(x_2) = f(x_1)$. Portanto, f é constante em (a, b). $\square$

Corolário 3.2. *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são contínuas, deriváveis em (a, b) e $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \to (a, b)$, então existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = g(x) + c$.*

Demonstração. Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Note que, como $f'(x) = g'(x)$, então $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, para todo $x \in (a, b)$. Assim, pelo Corolário 3.1, h é constante; logo $f - g$ é igual a uma constante. $\square$

3.1 Uma nova demonstração

Doravante, prepararemos o caminho para a demonstração do Teorema de Rolle devida a H. Samelson (1979).

Proposição 3.1. *Se f é contínua em $[c, d]$ e $f(c) = f(d)$, então existem α, β em $[c, d]$ com $\beta - \alpha = (c - d)/2$ e $f(\alpha) = f(\beta)$.*

Este é um caso particular do teorema da corda universal de P. Lévy; para detalhes, veja Boas (1975).

Demonstração. Definamos a função auxiliar $g(x) := f(x + (d - c)/2) - f(x)$, $x \in [c, d]$. Observamos que, sendo obtida a partir de f por meio de operações algébricas e composição de funções e sendo f contínua, segue-se que g é contínua. Ademais, temos $g((c + d)/2) = -g(c)$. De fato, basta, usando a definição de g, calcular $g((c+d)/2)$ e $g(c)$ e constatar que as expressões resultantes são iguais a menos do sinal negativo. Caso $g(c) = 0$, nada há a fazer. Neste caso, tomamos $\alpha = (c+d)/2$ e $\beta = c$. Caso contrário, um dos valores $g((c+d)/2)$ ou $g(c)$ é positivo e outro, negativo. Por fim, aplicamos o Teorema do Valor Intermediário de Bolzano para obter $x_0 \in (c, d)$ tal que $g(x_0) = 0$. Neste caso, escolhemos $\alpha = x_0 + (d - c)/2$ e $\beta = x_0$. $\square$

Lema 3.1. *Sejam $(a_n), (b_n)$ sequências limitadas tais que $a_n + b_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(u_n), (v_n)$ sequências que convergem para o mesmo limite a. Então $(a_n u_n + b_n v_n)$ também converge para a.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} a_n u_n + b_n v_n &= a_n u_n - a_n a + \underbrace{a_n}_{1-b_n} a + b_n v_n \\ &= a_n(u_n - a) + a + b_n(v_n - a). \end{aligned} \tag{3}$$

Como $u_n - a, v_n - a \to 0$ e $(a_n), (b_n)$ são limitadas, sabemos que $a_n(u_n - a) + b_n(v_n - a) \to 0$. Segue-se de (3) $a_n u_n + b_n v_n \to a$. Isso encerra a prova. $\square$

Proposição 3.2. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável em $a \in X \cap X'$. Se $x_n < a < y_n$ para todo n com $x_n, y_n \to a$, então $[f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n) \to f'(a)$.*

Demonstração. Temos

$$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = \frac{y_n-a}{y_n-x_n}\cdot\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}+\left(1-\frac{y_n-a}{y_n-x_n}\right)\cdot\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}.$$

Fazendo $t_n := (y_n-a)/(y_n-x_n)$, a igualdade acima se reescreve da seguinte forma:

$$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = t_n\cdot\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}+(1-t_n)\cdot\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}.$$

Como $x_n < a < y_n$, segue-se que $0 < (y_n-a)/(y_n-x_n) < 1$, ou seja, a sequência t_n é limitada, o mesmo valendo para a sequência $1-t_n$. Como ambas as sequências $[f(y_n)-f(a)]/(y_n-a)$ e $[f(x_n)-f(a)]/(x_n-a)$ convergem para $f'(a)$, podemos aplicar o Lema 3.2 para obter o resultado desejado. □

Demonstração alternativa do Teorema 3.1. Dada f em $[a,b]$, derivável em (a,b), contínua em $[a,b]$, com $f(a)=f(b)$, queremos mostrar que existe c em (a,b) com $f'(c)=0$.

Aplicando repetidamente a Proposição 3.1, obtemos uma sequência $\{[a_n,b_n]\}_{n=0}^{\infty}$ de subintervalos de $[a,b]$, tais que

i. $b_n-a_n=(b-a)/2^n$;

ii. $f(a_n)=f(b_n)$;

iii. $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$.

Claramente, por (i), as sequências (a_n) e (b_n) têm o mesmo limite c e satisfazem $a_n\le c\le b_n$. Este ponto c é produzido pelo Princípio dos Intervalos Encaixados, tendo em vista (iii). É fácil assegurar que $c\neq a,b$; no caso "perigoso" em que $f((a+b)/2)$ e também $f((3a+b)/4)$ ou $f((a+3b)/4)$ é igual a $f(a)$, podemos escolher a segunda ou terceira quarta parte de $[a,b]$ como $[\alpha_2,\beta_2]$.

Aplicando a Proposição 3.2 às sequências (α_n) e (β_n), encontramos $f'(c)=0$, uma vez que, em virtude de (ii), todos os denominadores dos quocientes $[(f(\beta_n)-f(\alpha_n)]/(\beta_n-\alpha_n)$ se anulam.

Para finalizar, notamos que esta é, de fato, uma prova diferente, sobretudo porque o ponto c encontrado não é necessariamente o máximo ou mínimo absoluto (ou mesmo local) de f. □

4 CONCLUSÃO

A prova de H. Samelson (1979) para o Teorema de Rolle, por nós aqui apresentada, nos possibilitou um rico itinerário de revisão e aprofundamento do Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}$. Julgamos imensamente valioso ter percorrido este itinerário para consolidar a nossa formação matemática, uma vez que, por ocasião da escritura deste trabalho, pudemos estudar com riqueza de detalhes resultados novos e outros mais clássicos, mas com os quais não havíamos ainda estabelecido familiaridade.

Por fim, este trabalhou descortinou possibilidades e temas de estudos que esperamos poder desenvolver em um curso de pós-graduação.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, S. **Understanding Analysis.** Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 2010.

BOAS JR., R.P. **Lion hunting and other mathematical pursuits.** MAA, 1995.

FURI, M.; MARTELLI, M. **A Multidimensional Version of Rolle's Theorem.** The American Mathematical Monthly, Vol. 102, No. 3. (Mar., 1995), p. 243-249.

LIMA, E.L. **Curso de Análise.** Volume 1. 6.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.

__________. **Análise Real.** Volume 1 – Funções de uma variável. 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

SAMELSON, H. **On Rolle's Theorem.** The American Mathematical Monthly, Volume 86, No. 6 (Jun.-Jul., 1979), p. 486.

SANTOS, J.P.O. **Introdução à Teoria dos Números.** Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me trouxe até aqui.

A minha família, em especial aos meus pais, Celma Dias dos Santos e Olavo da Nóbrega Silva, pelo incentivo aos estudos.

Aos professores da UEPB, pelos ensinamentos.

Ao meu orientador, Professor Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira, pela disponibilidade e compreensão.

Aos meus amigos da graduação, por terem dividido comigo intempéries e conquistas ao longo do curso.