



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII - GOVERNADOR ANTONIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA**

SORAYA FERNANDES MONTEIRO

ANALOGIA ENTRE OSCILADOR ELÉTRICO E MECÂNICO

PATOS-PB

2019

SORAYA FERNANDES MONTEIRO

ANALOGIA ENTRE OSCILADOR ELÉTRICO E MECÂNICO

Artigo submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Física, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo da Silva
Vieira

PATOS-PB

2019

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

M775a Monteiro, Soraya Fernandes.
Analogia entre oscilador elétrico e mecânico [manuscrito] /
Soraya Fernandes Monteiro. - 2019.
20 p.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas
e Sociais Aplicadas, 2020.
"Orientação : Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira ,
Coordenação do Curso de Física - CCEA."
1. Oscilador. 2. Circuito RLC. 3. Sistema elétrico. 4.
Sistema mecânico. I. Título

21. ed. CDD 621.381 533

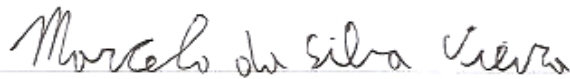
Soraya Fernandes Monteiro

ANALOGIA ENTRE OSCILADOR ELÉTRICO E MECÂNICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Aprovado em 03 de março de 2019


BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof.^a rozana Bandeira da Silva (Examinadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. Pedro Carlos de Assis Júnior (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Ao Nosso Senhor por todas as bênçãos, aos meus pais e ao meu irmão por todo amor, confiança e companheirismo, DEDICO.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	6
2	METODOLOGIA	7
2.1	Circuito RLC em Série: Representação Fasorial	7
2.2	Modelo Vibratório Massa-Mola: Oscilador Harmônico Amortecido Sujeito a uma Força Externa Periódica	13
2.3	Associação entre os sistemas	19
3	CONCLUSÃO	20
	REFERÊNCIAS	21

ANALOGIA ENTRE OSCILADOR ELÉTRICO E MECÂNICO
ANALOGY BETWEEN ELECTRIC AND MECHANIC OSCILLATORS

Soraya Fernandes Monteiro

RESUMO

O presente artigo tem como propósito demonstrar a analogia entre as equações matemáticas que regem o sistema elétrico, em específico o circuito RLC em série e o sistema mecânico, representado pelo modelo vibratório massa-mola: oscilador harmônico amortecido sujeito a uma força externa periódica. Com o objetivo de mostrar que a estrutura matemática de ambos os sistemas é a mesma e, que somente a terminologia e a interpretação física dos termos das equações são diferentes. Para tanto, resolveu-se o sistema elétrico aplicando o método fasorial que utiliza um vetor girante denominado fasor e o sistema mecânico baseado na segunda lei de Newton. Após os resultados obtidos, constatou-se que esses dois sistemas distintos são representados pelo mesmo modelo matemático, tais resultados estão explícitos em uma tabela comparativa.

PALAVRAS CHAVES: Oscilador. Reatância. Impedância.

ABSTRACT

This article aims to demonstrate the analogy between mathematical equations that conduct the electrical system, in particular, the RLC series circuit and the mechanical system, represented by the mass-spring vibratory model: a damped harmonic oscillator subdue to a periodic external force. Aiming to show that the mathematical structure of both systems is the same and that only the terminology and the physical interpretation of terms of the equations are different. In order to prove that, the electrical system was solved by applying the phasor method that uses a rotating vector called phasor and the mechanical system based in Newton's second law. After the results obtained, it was found that these two systems are represented by the same mathematical model, such results are explicit in a comparative table.

KEYWORDS: Oscillator. Reactance. Impedance.

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, existem várias ferramentas matemáticas que se fazem necessárias à resolução de problemas físicos envolvendo equações diferenciais lineares de segunda ordem, facilitando assim o estudo e análise dos fenômenos naturais.

Um dos métodos bastante utilizado é o fasorial, principalmente para resolver problemas envolvendo equações de segunda ordem não homogêneas com funções senoidais. Como por exemplo, sistemas relacionados a circuitos de corrente alternada, a oscilações mecânicas, entre outros. Para explicar o método de fasores, veja a equação (1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = F_0\cos\omega t \quad (1)$$

Vamos considerar agora uma função real $y(t)$ que resulta,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma\frac{dy}{dt} + \omega_0^2y = F_0\sin\omega t \quad (2)$$

Com y real.

Multiplicando-se a equação (2) por i , temos:

$$\frac{d^2(iy)}{dt^2} + 2\gamma\frac{d(iy)}{dt} + \omega_0^2(iy) = F_0i\sin\omega t \quad (3)$$

Somando-se a equação (1) com a equação (3), tem-se:

$$\frac{d^2(x + iy)}{dt^2} + 2\gamma\frac{d(x + iy)}{dt} + \omega_0^2(x + iy) = F_0(\cos\omega t + i\sin\omega t) \quad (4)$$

Fazemos

$$z = x + yi \quad (5)$$

Substituindo a equação (5) na equação (4), tem-se:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\gamma\frac{dz}{dt} + \omega_0^2z = F_0e^{i\omega t} \quad (6)$$

Sendo assim, transformamos a equação real (1) em uma equação complexa (6) que é mais

fácil de manipular. E a solução que satisfaz o problema corresponde a parte real de $z(t)$. A solução para $z(t)$ é do tipo:

$$z(t) = z_H(t) + z_P(t) \quad (7)$$

Onde $z_H(t)$ é a solução da equação homogênea associada, também chamada de transiente e $z_P(t)$ é a solução particular. O método de fasores consiste em considerar soluções tais que $z_H(t)$ vai a zero rapidamente e nesse caso consideramos:

$$z(t) = z_P(t) = z_0 e^{i\omega t} \quad (8)$$

No diagrama complexo, $z(t)$ corresponde a um vetor girante de módulo fixo.

Vamos aplicar esse método a dois sistemas oscilantes importantes na física, que são esses: o circuito RLC em série, alimentado por uma fonte de tensão alternada e o sistema massa-mola amortecido e forçado com uma força externa senoidal.

Neste referido trabalho, tratamos o caso do oscilador elétrico representado por um circuito de corrente alternada e do oscilador mecânico utilizando os conceitos de fasores e números complexos. O uso dos números complexos para resolver problemas em circuitos de corrente alternada foi apresentado pela primeira vez em um artigo de 1893 pelo matemático Charles Proteus Steinmetz.

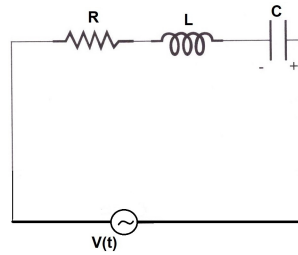
Por fim, fizemos a analogia entre esses dois sistemas distintos fazendo uma correspondência direta entre os termos das equações, mostrando que a estrutura matemática de ambos é a mesma e, que somente a nomenclatura e interpretação física dos termos são diferentes.

2 METODOLOGIA

2.1 Circuito RLC em Série: Representação Fasorial

O problema inicial a ser tratado será o do circuito RLC em série alimentado por uma fonte de tensão senoidal (figura 1).

Figura 1: Circuito RLC em Série



Fonte: Autoria Própria.

Se tratando de um circuito RLC podemos aplicar a lei das malhas de Kirchoff, nos diz que a soma das voltagens do resistor, do capacitor e do indutor é igual a voltagem da fonte de tensão $V(t)$. Sendo $q(t)$ e $i(t)$ respectivamente a carga do capacitor e a corrente que atravessa o circuito, a voltagem no resistor é Ri , a do capacitor é $\frac{q}{C}$ e a do indutor é $L\frac{di}{dt}$, onde R é a resistência do resistor, C é a capacitância do capacitor e L é a indução do indutor.

Podendo descrever o comportamento do circuito como:

$$V(t) - \frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} - Ri = 0 \quad (9)$$

Considerando uma tensão que é variável com o tempo $V(t)$ e $i = \frac{dq}{dt}$, podemos dividir todos os elementos por L e assim reescrevemos a equação (9) da seguinte maneira:

$$\frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{CL} = \frac{V(t)}{L} \quad (10)$$

Vamos considerar uma tensão alternada do tipo:

$$V(t) = V_o \cos(\omega t) \quad (11)$$

Podemos então, usar o método dos fasores para tratar esta tensão como uma tensão complexa,

$$\hat{V} = V_o e^{i\omega t} \quad (12)$$

Assim podemos definir uma corrente complexa do tipo:

$$\hat{I} = I_o e^{i\omega t} \quad (13)$$

Com isso, definimos as voltagens complexas do sistema \hat{V}_R, \hat{V}_C e \hat{V}_L ,

$$\hat{V}_R = R\hat{I} \quad (14)$$

$$\hat{V}_C = \frac{q}{C} \quad (15)$$

$$\hat{V}_L = L \frac{d\hat{I}}{dt} \quad (16)$$

Agora, substituindo a equação (13) nas equações (14), (15) e (16), considerando $q = \int i dt$, logo, as voltagens complexas terão as seguintes definições:

$$\hat{V}_R = RI_o e^{i\omega t} \quad (17)$$

Com amplitude de tensão $V_R = RI_o$

$$\hat{V}_C = \frac{1}{C} \int I_o e^{i\omega t} dt \Rightarrow \hat{V}_C = -i \frac{1}{\omega C} I_o e^{i\omega t} \quad (18)$$

Com amplitude de tensão $V_C = \frac{I_o}{\omega C}$

$$\hat{V}_L = i\omega L I_o e^{i\omega t} \quad (19)$$

Com amplitude de tensão $V_L = \omega L I_o$

A voltagem indutiva é adiantada $\frac{\pi}{2}$ em relação à corrente e a voltagem capacitiva é atrasada $\frac{\pi}{2}$ em relação à corrente.

Por analogia a lei de Ohm, definimos as seguintes grandezas:

Reatância Indutiva \hat{X}_L :

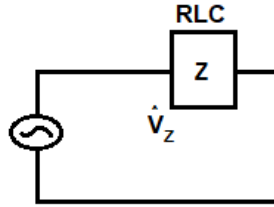
$$\hat{X}_L = \omega L \quad (20)$$

Reatância Capacitiva \hat{X}_C :

$$\hat{X}_C = \frac{1}{\omega C} \quad (21)$$

Agora, usando o conceito de circuito equivalente (figura 2), podemos definir outras grandezas.

Figura 2: Circuito Equivalente



Fonte: Autoria Própria.

Considerando que:

$$\hat{V}_z = \hat{V}_R + \hat{V}_L + \hat{V}_C \Rightarrow \quad (22)$$

$$\hat{V}_z = R\hat{I} + iX_L\hat{I} + (-i)X_C\hat{I} \Rightarrow \quad (23)$$

$$\hat{V}_z = [R + i(X_L - X_C)]\hat{I} \quad (24)$$

Sendo $\hat{I} = I_o e^{i\omega t}$, vamos considerar a amplitude de tensão

$$V_z = [R + i(X_L - X_C)] I_o \quad (25)$$

Definimos assim, a impedância do sistema como sendo:

$$Z = R + i(X_L - X_C) \quad (26)$$

Os circuitos RLC possuem além das resistências oferecidas pelo resistor V_R , a reatância indutiva X_L e reatância capacitiva X_C , que são as formas de oposição a passagem de corrente

oferecida pelos indutor V_L e capacitor C_L , tem a impedância Z , que em um circuito, é a combinação da resistência oferecida pelos resistores (parte real) com as resistências oferecidas pelos indutores e capacitores (parte imaginária) representada como número complexo.

Quando a reatância indutiva X_L é positiva, se X_C é negativa tem-se então uma reatância capacitiva. A impedância pode ser expressa nas formas retangular e polar, são elas respectivamente (ALEXANDE; SADIKU, 2003):

O módulo de Z

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (27)$$

A fase da voltagem equivalente \hat{V}_z

$$\theta = \text{arc tg} \frac{X}{R} \quad (28)$$

onde, $X = X_L - X_C$

A resistência R e a reatância X podem ser expressas em função do módulo da impedância através de:

$$R = |Z| \cos \theta \quad (29)$$

e

$$X = |Z| \text{sen} \theta \quad (30)$$

Logo,

$$\hat{V}_z = Z\hat{I} \quad (31)$$

Vamos colocar a amplitude de \hat{V}_z e Z em módulo, logo:

$$|V_z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} I_o \Rightarrow \quad (32)$$

$$I_o = \frac{|V_z|}{|Z|} \quad (33)$$

Ao analisarmos a equação (33), observamos que a corrente I_o do sistema será máxima quando a impedância Z for mínima. A condição necessária para que a impedância Z seja mínima é que a reatância capacitiva X_C de um circuito se torne igual à reatância indutiva X_L , logo:

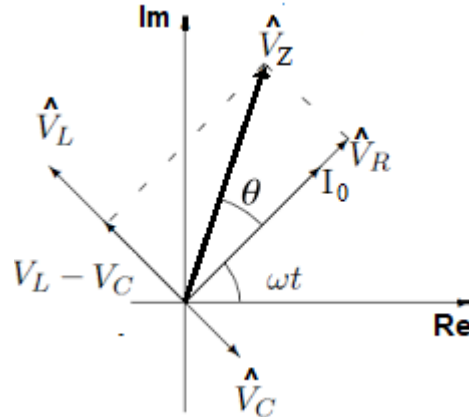
$$X_L - X_C = 0 \Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (34)$$

Nesse caso, quando fazemos $X_L = X_C$ definimos a frequência de ressonância

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \quad (35)$$

Que ocorre quando as reatâncias se cancelam entre si e a impedância do circuito se torna a resistência, a qual é um valor muito pequeno. A ressonância é responsável por sobrecorrentes que danificam os capacitores e os demais componentes do circuito.

Figura 3: Representação no plano complexo



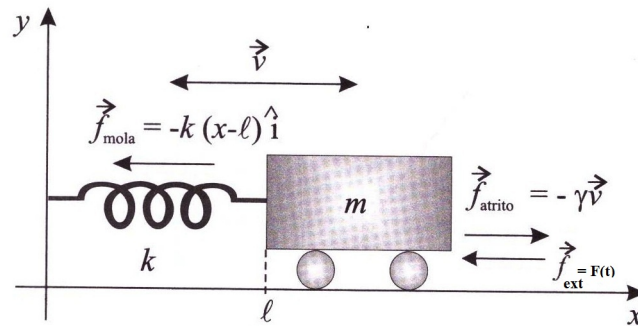
Fonte: Autoria Própria.

Na análise do gráfico, os fasores giram no sentido anti-horário com velocidade angular ω . Se multiplicarmos o número complexo por i , isto significa adiantar o fasor por 90° , enquanto se multiplicarmos por $-i$ está atrasando. O fasor \hat{V}_R é a diferença de potencial no resistor e está em fase com a corrente I_o , \hat{V}_C é a diferença de potencial do capacitor, que está atrasada 90° em relação a corrente I_o e \hat{V}_L é a diferença de potencial do indutor, que está adiantada em

relação a corrente I_0 . A ação conjunta da resistência e das reatâncias se combinam gerando a impedância.

2.2 Modelo Vibratório Massa-Mola: Oscilador Harmônico Amortecido Sujeito a uma Força Externa Periódica

Figura 4: Oscilador Harmônico Força



Fonte: Autoria Própria.

Vamos tratar nesta seção do problema do oscilador mecânico amortecido sujeito a uma força externa senoidal. Mostraremos que o tratamento matemático deste oscilador é idêntico ao feito anteriormente no circuito RLC de correntes alternadas. Antes de iniciarmos o problema, vamos fazer algumas considerações acerca do oscilador harmônico forçado - OHF

Seja o seguinte problema: um corpo de massa m , preso a uma mola de constante elástica k , sob atrito e sujeito a uma força externa variável $\vec{F}(t)$, tem seu movimento descrito pela segunda lei de Newton, como mostra a figura (4):

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (36)$$

temos que:

$$F = -\gamma v - kx + F(t) \quad (37)$$

onde:

$-\gamma v$ é a força de atrito,

$-kx$ é a força da mola,

$F(t)$ é a força externa.

Com a mudança das variáveis,

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (38)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad (39)$$

substituindo as equações (36), (38) e (39) na equação (37), podemos reescrevê-la como:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (40)$$

ou

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F(t) \quad (41)$$

Dividindo toda a equação (41) por m temos:

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m} \quad (42)$$

definimos a grandeza

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \quad (43)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (44)$$

que é a frequência angular natural do sistema.

Considerando também,

$$2b = \frac{\gamma}{m} \quad (45)$$

que está associada ao termo de amortecimento.

Com as definições das equações (43) e (45), podemos reescrever a equação (42) da seguinte forma:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (46)$$

Como nosso interesse é tratar do modelo vibratório massa-mola, oscilador harmônico amortecido sujeito a uma força externa periódica, vamos considerar que a força externa que atua nesse sistema seja periódica no tempo variando da seguinte maneira:

$$F_{ext} = F_0 \cos(\omega t) \quad (47)$$

Neste caso, a equação (46) que representa o oscilador harmônico amortecido sujeito a uma força externa periódica é escrita como:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0 \cos(\omega t)}{m} \quad (48)$$

A equação (48) é idêntica a do oscilador elétrico, e todo tratamento que fizemos anteriormente na equação do oscilador elétrico pode ser feito na equação do oscilador mecânico.

Com tudo definido, podemos encontrar a solução particular da equação (48), que será a solução estacionária em contraposição à solução da equação homogênea, que vai ser umas das soluções encontradas no caso do oscilador harmônico amortecido, onde todas essas soluções tendem a zero se esperarmos um tempo longo suficiente, ou seja, são soluções transientes. Por isso, o que nos interessa é apenas a solução particular do oscilador harmônico amortecido forçado. Para definirmos essa solução, temos duas hipóteses:

1ª - mantendo todo o trabalho restrito a números reais podemos achar a solução para esse problema se;

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (49)$$

Onde A está em função de ω quando φ está em função de ω , que vai depender da frequência da força externa.

2ª - corresponde a definir

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (50)$$

e

$$f(t) = f(t) + if_{Im}(t) \quad (51)$$

ao fazer isso e dizer que

$$\ddot{z} + 2b\dot{z} + \omega_o^2 z = \frac{f(t)}{m} \quad (52)$$

Achando a solução da equação (52), a parte real vai ser a solução que interessa. Isso implica que:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (53)$$

e

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega_o^2 y = \frac{f_{Im}(t)}{m} \quad (54)$$

As duas equações tem que ser válidas se a equação vale pra z . Escolhendo uma função $f(t)$ simples, onde:

$$f(t) : f(t) = F_o e^{i\omega t} \quad (55)$$

Nesse caso, na equação (55) a parte real da função é $f(t)$, e portanto a gente tem exatamente a mesma equação, podendo assim, buscar uma uma solução tentativa,

$$f(z) = z_o e^{i\omega t} \quad (56)$$

Se derivarmos a equação (56), temos:

$$\dot{z} = i\omega z \quad (57)$$

e

$$\ddot{z} = -\omega^2 z \quad (58)$$

Logo nossa equação se torna:

$$(-\omega^2 + i\omega 2b + \omega_0^2)z_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (59)$$

Sabendo que sempre a $e^{i\omega t} \neq 0$, logo a equação (59) fica:

$$z_0 = \frac{F_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) + i2b + \omega]} \quad (60)$$

Considerando que qualquer número complexo pode ser escrito como $Ae^{i\varphi}$

Onde:

A é a amplitude,

$e^{i\varphi}$ é a fase.

Podemos determinar a amplitude a partir de:

$$z_0 = Ae^{i\varphi} \Rightarrow z_0 \cdot z_0^* = Ae^{i\varphi} \cdot Ae^{-i\varphi} \quad (61)$$

ou seja,

$$A^2 = |z_0|^2 \Rightarrow \quad (62)$$

$$A^2 = \frac{F_0^2}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2b)^2 + \omega^2]} \quad (63)$$

Agora definindo

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2b)^2 + \omega^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (64)$$

Temos também que determinar φ . Sabemos que a fase de um número complexo qualquer é igual a:

$$tg\varphi = \frac{Imz_0}{Rez_0} \quad (65)$$

Considerando o caso z_0 . Equação (59), temos que:

$$z_0 = \frac{F_0}{mz_1} \quad (66)$$

ao mesmo tempo é,

$$z_0 = \frac{F_0}{m|z_1|} e^{-i\theta_1} \quad (67)$$

Logo,

$$z_1 = |z_1| e^{i\theta_1} \quad (68)$$

Se eu escrever z_1 no numerador, $e^{i\theta_1}$ no denominador é a mesmo caso que $e^{-i\theta_1}$. Isso implica que $\varphi = -\theta_1$.

Então:

$$\varphi = -tg^{-1} \left(\frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (69)$$

Onde, pela equação (66), definimos $\omega_0^2 - \omega^2$ como sendo a parte real da equação e $2b\omega$ sendo a parte imaginária. A partir desses definições resolvemos o problema inteiro, pois se acharmos A , consequentemente acharemos φ .

Agora podemos examinar o que acontece com a ressonância: $\omega \rightarrow \omega_0$

Na primeira condição vamos considerar a vizinhança, onde $|\omega_0 - \omega| \ll \omega_0$. Na segunda condição vamos considerar o caso de amortecimento muito fraco, $2b \ll \omega_0$.

Fazendo algumas aproximações, $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega) \cdot (\omega_0 - \omega) \cong 2\omega_0(\omega_0 - r)$. Como ω é muito próximo de ω_0 , aproxima-se $\omega_0 + \omega$ por $2\omega_0$. Fazendo também $2b\gamma$ aproximado a $2b\gamma_0$ podemos agora fazer algumas substituições. Na equação (63), temos:

$$A^2(\omega) \cong \frac{F_0^2}{m^2[(4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + (2b)^2\omega_0^2]} \Rightarrow \frac{F_0^2}{4m^2\omega_0^2[(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{(2b)^2}{4}]} \quad (70)$$

Fazendo também para a equação (69):

$$\varphi(\omega) = -tg^{-1} \left[\frac{2b\omega}{2\omega_0(\omega_0 - \omega)} \right] \Rightarrow -tg^{-1} \left[\frac{2b}{2(\omega_0 - \omega)} \right] \quad (71)$$

De acordo com as definições anteriores, percebemos que estamos próximos da expressão do oscilador harmônico forçado, pois estamos considerando que o oscilador é forçado com amortecimento muito fraco. Estamos analisando o comportamento próximo à ressonância em que o oscilador forçado sem amortecimento tinha a divergência em que $A \rightarrow \infty$; no caso do oscilador com amortecimento fraco, A não tende mais ao infinito. Com isso observamos que a amplitude tem um valor máximo, igualando ω a ω_0 . Aplicando na equação (70), temos:

$$A_{max}^2(\omega) = \frac{F_0^2}{m^2\omega_0^2 2b^2} \quad (72)$$

2.3 Associação entre os sistemas

Considerando as subseções acima, vamos comparar a equação (10) que representa o circuito RLC em série com a equação (48) que representa o modelo vibratório massa-mola: oscilador harmônico amortecido sujeito a uma força externa periódica.

Com base nas características físicas dos termos que aparecem nas equações acima, podemos fazer a analogia entre eles. Tal que, a carga q corresponde à posição \vec{x} , enquanto $i = \frac{dq}{dt}$ está associada à velocidade $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$, a resistência R do resistor é representado pelo atrito γ , o papel inercial da massa m , ou seja, a resistência do corpo em mudar seu movimento, corresponde à indutância L do indutor, que se opõe às variações na corrente, a força externa $\vec{F}(t)$ está associada à $V(t)$ que tem o papel de sistema restaurador, onde acontece o armazenamento de energia potencial, é exercido pela mola no sistema mecânico e pelo capacitor no sistema elétrico, no entanto, a constante da mola k está associado ao inverso da capacitância C do capacitor.

Analisando as equações (35) e (34), definimos $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ que é a frequência angular do oscilador elétrico e $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ que é a frequência angular do oscilador mecânico, relacionando também o termo $2b = \frac{R}{L}$ que está associado ao termo de amortecimento $2b = \frac{\gamma}{m}$. Esquemáticamente temos:

Tabela 1: Tabela representando a analogia entre a matemática do oscilador elétrico e o oscilador mecânico.

Oscilador Elétrico	Oscilador Mecânico
q	\vec{x}
$i = \frac{dq}{dt}$	$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$
R	γ
L	m
$V(t)$	$\vec{F}(t)$
k	$\frac{1}{C}$
$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
$2b = \frac{R}{L}$	$2b = \frac{\gamma}{m}$

Logo, podemos observar que as duas equações apresentam a mesma estrutura matemática, apesar de representarem sistemas físicos diferentes.

3 CONCLUSÃO

Neste trabalho, demonstramos a analogia do procedimento matemático entre o oscilador elétrico, representado pelo circuito RLC em série através do método de fasores e o oscilador mecânico, representado pelo modelo vibratório massa-mola, fazendo uma correspondência direta entre os termos desses dois sistemas.

Após o estudo dos conceitos matemáticos desses sistemas distintos e estabelecer certas características comuns entre eles, constatamos que a estrutura matemática das equações desses sistemas é a mesma e, que somente a nomenclatura e interpretação física dos termos são diferentes.

O desenvolvimento deste trabalho foi de importante relevância para mostrar que uma única equação pode servir como modelo matemático para muitos fenômenos físicos diferentes. O que facilita a resolução de alguns problemas estudados não só na área de Física, mas em outras.

Referências

- [1] MACHADO, Kleber Daum. **Equações Diferenciais Aplicadas**. TODAPALAVRA, 1v. Ponta Grossa, 2012.
- [2] ZILL, Dennis G. e CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. Pearson, 3ª edição, 1v. São Paulo, 2001.
- [3] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica: Eletromagnetismo**. Edgard Blucher, 1ª edição. São Paulo, 1997.
- [4] MARKUS, Otávio. **Circuitos Elétricos: Corrente Contínua e Corrente Alternada**. Érica Ltda, 1ª edição, São Paulo, 2001.
- [5] ÁVILA, Geraldo. **Variáveis Complexas e Aplicações**. LTC, 3ª edição, Rio de Janeiro, 2008.
- [6] CARMO, Manfredo Perdigão Do. **Trigonometria: Números Complexos**. SBM, 3ª edição. Rio de Janeiro, 2005.
- [7] ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. Bookman, 1ª edição. Porto Alegre, 2003.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente a Deus pelo dom da vida e pela sabedoria.

À meus pais que me incentivaram a não desistir e seguir nos estudos, sempre apoiando meus projetos.

À meu irmão pelo carinho e incentivo durante todo o processo de desenvolvimento deste trabalho.

À meu orientador Marcelo da Silva Vieira pela oportunidade permitida de poder trabalhar com ele. Serei eternamente grata por toda ajuda e disponibilidade, não só para a elaboração deste trabalho, mais também durante todo o curso e claro pela ideia fundamental que foi a base desse TCC. Sem ele, essa artigo não seria possível.

Agradeço enormemente a Victor Emmanoel, meu colega de turma, amigo e parceiro. Sem sua boa vontade, eu estaria em uma situação completamente diferente no que diz respeito a elaboração e entrega deste trabalho.

Agradeço também a Geovane Júnior, que foi o auxílio fundamental no uso do latex.

E por fim, aos meus colegas de turma e funcionários por toda disponibilidade e respeito.