UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

IRIEDSON SOUTO MAIOR DE MORAES VILAR

ALGUNS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO E APLICAÇÕES

Campina Grande/PB
Fevereiro/2020

IRIEDSON SOUTO MAIOR DE MORAES VILAR

ALGUNS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. LUCIANA ROZE DE FREITAS

Campina Grande/PB
Fevereiro/2020

V697a Vilar, Iriedson Souto Maior de Moraes.

Alguns pontos notáveis do triângulo e aplicações [manuscrito] / Iriedson Souto Maior de Moraes Vilar. - 2020.

46 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2020.

"Orientação : Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas , Departamento de Matemática - CCT."

1. Geometria. 2. Triângulos. 3. Pontos notáveis. I. Título

21. ed. CDD 516

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

IRIEDSON SOUTO MAIOR DE MORAES VILAR

ALGUNS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 06 / 03 / 2020

BANCA EXAMINADORA:

Luciana Freitas

Prof^a. Dra. Luciana Roze de Freitas

Departamento de Matemática

Orientadora

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof^a. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano

Departamento de Matemática

Examinadora

Castor da Paz Filho

Prof. Me. Castor da Paz Filho

Departamento de Matemática

Examinador

Agradecimentos

À Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas, por todo auxilio, paciência e empenho.

À todo o corpo docente da UEPB, que me tornaram capaz de chegar até aqui.

À todos os funcionários administrativos da UEPB, que sempre estavam lá para atender as necessidades de todos.

Aos meus pais, do qual com o seu carinho e dedicação fizeram de tudo para que eu me tornasse uma pessoa responsável e de caráter.

Às minhas irmãs e meu irmão de consideração Joaquim, que me inspiram a seguir crescendo com os meus conhecimentos.

À todos os amigos que fiz nessa luta, que me ajudaram em muitas coisas e tornaram minha vida na UEPB mais divertida.

À todas pessoas que não citei aqui, mas que estão presentes no meu coração.

Resumo

Por inspiração das disciplinas de Tópicos de Geometria foi realizado o presente trabalho aonde aborda assuntos de geometria plana e tem como foco principal alguns pontos notáveis dos triângulos. Apresentamos de modo geral o que cada ponto abordado representa, aonde está localizado e estudamos alguns resultados envolvendo cada ponto notável. Em seguida, trabalhamos com a resolução de alguns problemas a fim de aplicar os conceitos e resultados estudados. O estudo realizado trata-se de uma revisão bibliográfica e teve como base as referências [6]. [3] e [2].

Palavras Chave: Geometria. Triângulos. Pontos notáveis do triangulo. Aplicações de pontos notáveis.

Abstract

Inspired by the subjects of Geometry Topics, it was carried out or the present work addresses subjects of plane geometry and focuses on the main notable points of the triangles. It presents a general way or that each point approached represents, is located and we study some results related to each notable point. Then, work on solving some problems to apply the studied concepts and results. The study carried out deals with a bibliographic review and was based on the references[6]. [3] e [2].

Keywords: Geometry. Triangles. Notable points of the triangle. Applications of notable points.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Alguns fatos elementares sobre a teoria dos triângulos foram apresentados em aproximado 300 a.C. por Euclides, no entanto, não há nenhuma referência precisa de como e quando surgiram os triângulos, porém sabemos que foram elementos necessários para a evolução do homem, principalmente na arquitetura.

Sabe-se que triângulos são figuras geométricas formadas por três retas que se encontram duas a duas e não passam pelo mesmo ponto, formando três lados e três ângulos. Porém apesar de sua definição simples, os triângulos são figuras muito "místicas", com bastante materiais para estudo, à exemplo, na Encyclopedia of Triangle Centers (ETC), são apresentados mais de cinco mil pontos notáveis!

Diferente de outras figuras geométricas (circunferências, quadrados e etc...) os triângulos têm mais de um centro. De acordo com Clark Kimberling [4], em um passado muito distante, uma certa pessoa desenhou um triângulo e ao fazer experimentos desenhou três segmentos ligando cada vértice ao ponto médio do lado oposto, assim os segmentos se encontraram em um ponto. A pessoa ficou impressionada e repetiu a experiencia com seus amigos, utilizando triângulos diferentes e novamente os segmentos se intersectaram em um ponto. A notícia se espalhou e na época foi considerada uma magia divina, porém conforme os séculos foram passando, foi realmente provado que as três medianas de fato encontram-se sempre em um único ponto, agora chamado de baricentro. Assim, com a formulação de triângulos foi possível localizar mais outros pontos notáveis, os mais conhecidos (Circuncentro, Incentro e Ortocentro) e outros que não são comumente abordados em cursos básicos de geometria plana (Ponto de Lemoine, Ponto de Nagel, Exincentro, Ponto de Fermat e etc...)

A princípio será trabalhado no primeiro capítulo conceitos básicos de geometria plana, há uma introdução sobre triângulos e alguns resultados úteis para o desenvolvimento do conteúdo. No segundo capítulo será feito um estudo sobre os pontos notáveis, aonde terá resultados e provas que os envolve. Por fim no terceiro capítulo, trabalhamos com algumas aplicações utilizando os resultados mostrados anteriormente.

Capítulo 1

Conceitos geométricos básicos

Neste capítulo há alguns conceitos básicos da geometria plana que serão essenciais para a compressão do principal conteúdo apresentado no trabalho. Explanamos de modo sucinto, pois é comum que o leitor já tenha um conhecimento prévio em relação ao que será apresentado. A teoria abordada pode ser encontrada nas referências [6] e [3].

1.1 Conceitos e notações

Na matemática sabemos que existem termos e notações específicas para os elementos, portanto é de suma importância que o leitor saiba a representação e nomenclatura de cada símbolo escrito. Iremos a seguir ver conceitos e notações que serão importantes nesse trabalho. Os elementos a seguir são conceitos primitivos, isto é, não admitem uma definição.

Ponto: é a representação geométrica mais simples, os pontos não têm dimensão, portanto são apenas uma representação no plano. A notação do ponto é representada por letras latinas maiúsculas (A, B, C, ...).

Figura 1.1: Pontos no plano.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Reta: é uma linha formada por um conjunto de pontos conseguintes. As retas são infinitas, ocupam apenas uma dimensão no plano, numa reta há infinitos pontos e elas podem estar em três posições diferentes (horizontal, vertical e inclinada). A notação de uma reta é representada por letras latinas minúsculas (r, s, t, ...).

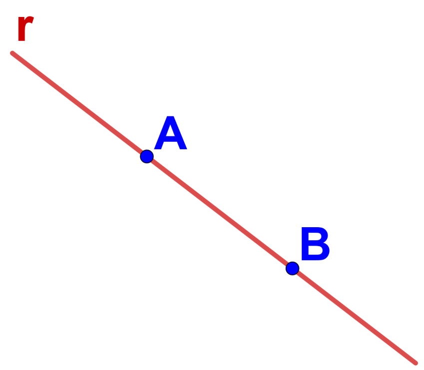
Figura 1.2: Retas no plano.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Seguem alguns tópicos importantes sobre retas.

- Por dois pontos distintos passa apenas uma reta; então é normal referir-se a reta utilizando a notação $\overleftrightarrow{AB}$, onde A, B $\in$ r.

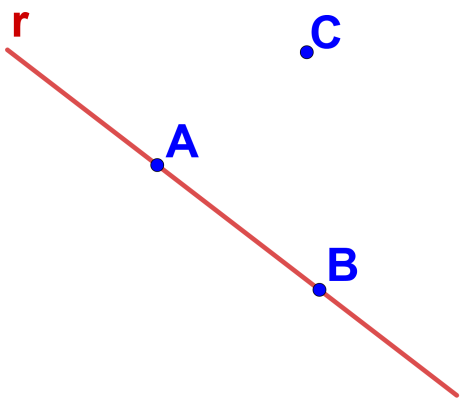
Figura 1.3: Reta determinada por dois pontos.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

- Três pontos são não colineares se não existir reta que os contenha.

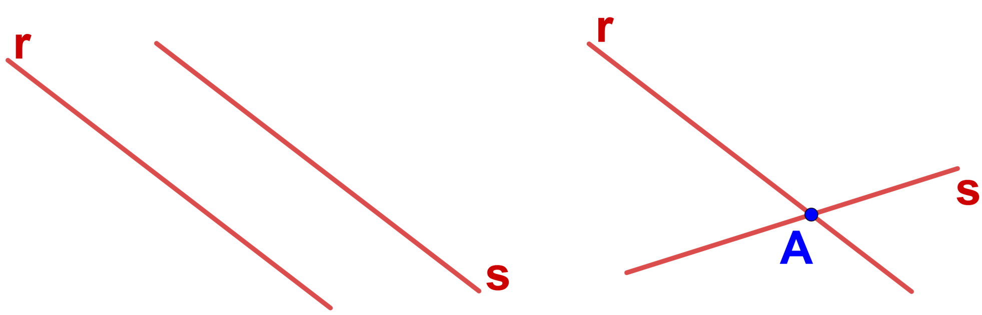
Figura 1.4: Pontos não colineares.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

- No plano quando duas retas distintas possuem apenas um ponto em comum, dizemos que elas se intersectam e são concorrentes. Se elas não possuem nenhum ponto em comum, elas são ditas paralelas.

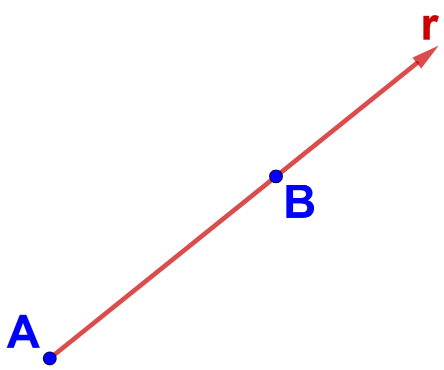
Figura 1.5: Retas paralelas e concorrentes.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Semirreta: Ao situar um certo ponto A em uma reta, esta será dividida em duas semirretas com origem em A, portanto uma semirreta é infinita somente em uma direção. Denotaremos a semirreta usando dois de seus pontos ($\overrightarrow{AB}$).

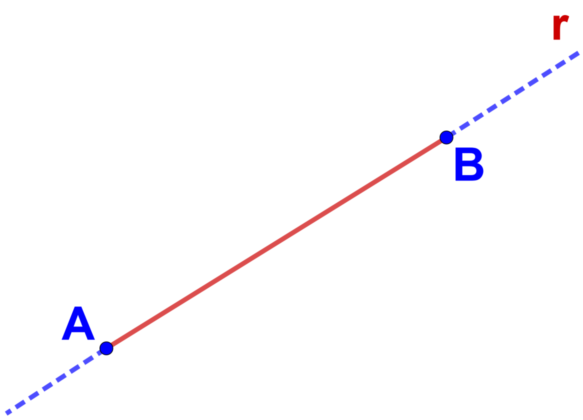
Figura 1.6: Semirreta AB de origem A.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Segmento de reta: Consiste de todos os pontos de uma reta, entre dois determinados pontos, sendo denotado por $\overline{AB}$, onde A e B são os extremos do segmento. A medida de um segmento que também denotaremos por $\overline{AB}$, é a distância entre os dois pontos extremos. Um ponto M localizado na metade do segmento AB, é denominado como ponto médio, isto é, $\overline{AM} = \overline{BM}$.

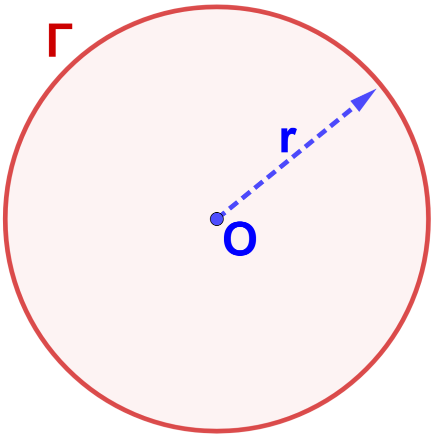
Figura 1.7: Segmentos de reta limitado por AB.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Circunferência: Dados um ponto O no plano e um numero real $r > 0$ a circunferência de centro O e raio r é conjunto dos pontos P tal que $\overline{OP} = r$. A circunferência é representada por letras gregas maiúsculas (Γ, Λ, Φ, ...), porém podemos querer enfatizar o seu centro e raio, sendo assim escrevemos da seguinte forma $\Gamma(O, r)$.

Figura 1.8: Circunferência com centro O e raio r.

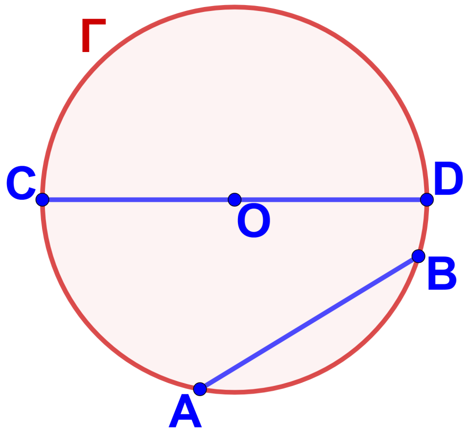


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Seguem alguns conceitos envolvendo circunferência.

- **Corda** é o segmento de reta que liga um ponto da circunferência a outro, quando esse segmento passa pelo centro da circunferência, o chamamos de **diâmetro** e a porção da circunferência delimitada por dois de seus pontos é chamada de **arco**.

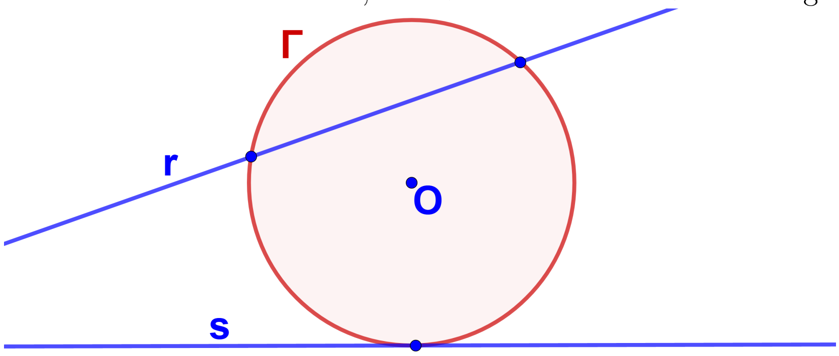
Figura 1.9: AB é corda e CD é diâmetro.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

- Uma reta que passa por dois pontos de uma circunferência é chamada de **reta secante** e quando passa em somente um ponto, chamamos de **reta tangente**.

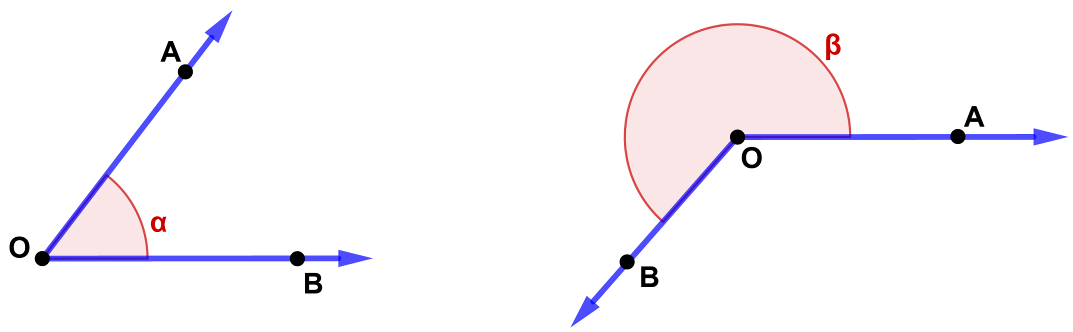
Figura 1.10: Circunferência Γ, com r reta secante e s reta tangente.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Ângulo: É uma região no plano delimitada por um vértice O e por duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, sua notação usada será representada por letras gregas minúsculas $(\alpha, \beta, \gamma ...)$. A região angular pode ser côncava ou convexa, como veremos na figura a seguir.

Figura 1.11: Respectivamente ângulo convexo e ângulo concavo.



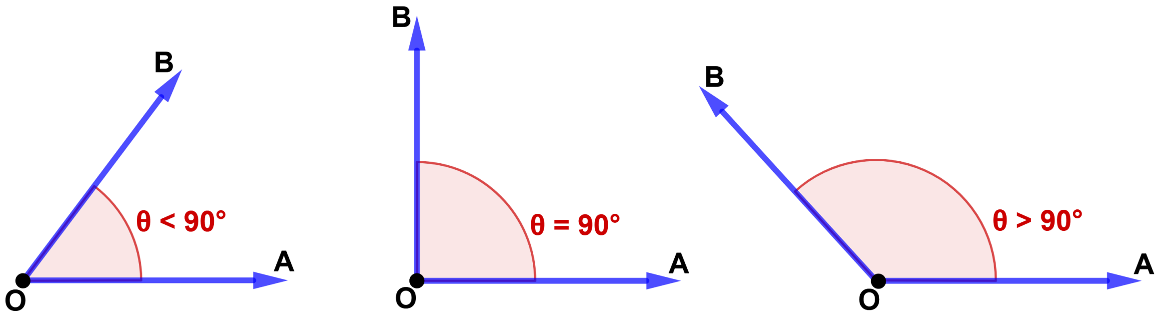
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Para medir um ângulo consideramos uma circunferência com centro no vértice O dividida em 360 arcos de mesmo comprimento. Cada um desses arcos está associado a um ângulo de $1°$.

Classificação do ângulo

- **Agudo**: quando o ângulo é menor que 90°.
- **Reto**: quando o ângulo é igual a 90°.
- **Obtuso**: quando o ângulo é maior que 90°.

Figura 1.12: Respectivamente angulo agudo, reto e obtuso.

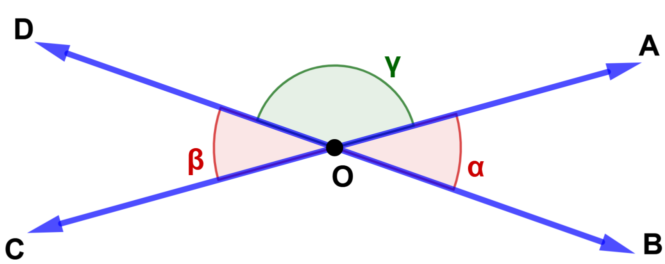


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Quando a soma das medidas de dois ângulos for igual a 90° graus, esses ângulos são ditos complementares e quando a soma de dois ângulos é 180°, serão chamados ângulos suplementares.

Dois ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ são opostos pelo vértice (OPV), se seus lados forem semirretas opostas em um mesmo vértice, ângulos OPV sempre terão medidas iguais.

Figura 1.13: Ângulos opostos pelo vértice.

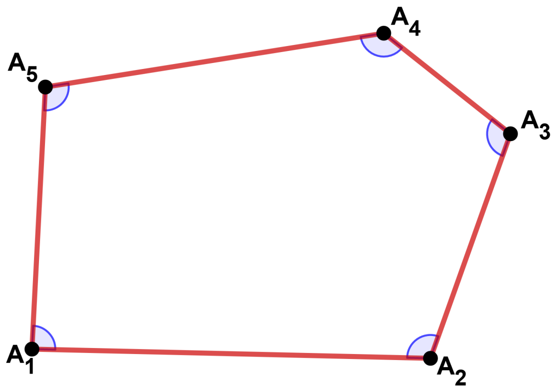


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Duas retas concorrentes são perpendiculares se, na interseção, são formados ângulos de 90°.

Polígono: Sejam $n \geq 3$ um número natural e $A_1, A_2, ..., A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2...A_n$ é um **polígono (convexo)** de gênero n (ou n-ágono) se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $A_iA_{(i+1)}$ não contém nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os quais ela determina (aqui e no que segue, $A_0 = A_n$, $A_{(n+1)} = A_1$ e $A_{(n+2)} = A_2$).

Figura 1.14: Polígono convexo de cinco vértices (e lados).



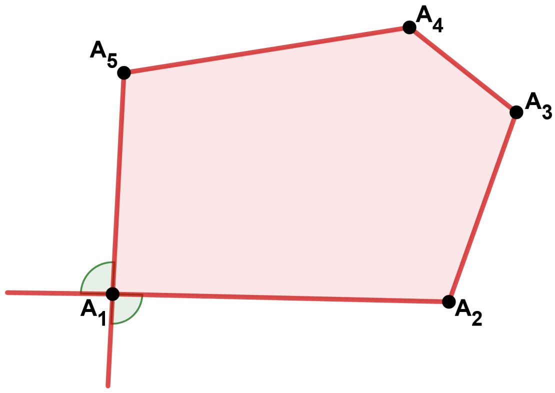
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Os pontos $A_1, A_2, ..., A_n$ são os **vértices** do polígono e os segmentos $A_1A_2, ..., A_nA_1$ os **lados**. A soma dos comprimentos dos lados é o **perímetro**.

Uma **diagonal** de um polígono é qualquer segmento com extremos em dois vértices e que não seja um lado; a exemplo, observe na figura acima que $A_1A_3, A_1A_4, A_2A_4, A_2A_5$ e A_3A_5 são todas suas diagonais.

Denotamos por $\angle A_i$, os **ângulos internos** $\angle A_{i-1}A_1A_{(i+1)}$ de um polígono. Um polígono convexo tem sempre dois **ângulos externos** em relação a cada vértice, eles são formados por um lado e pelo prolongamento do lado adjacente. Na figura a seguir estão os ângulos externos do vértice A_1.

Figura 1.15: Ângulos externos de um polígono no vértice A_1.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

O número de vértices de um polígono é sempre igual ao número de lados, e esse número é o que nomeia um polígono. O menor polígono tem três vértices e por sua vez três lados, sendo chamado de triângulo.

1.2 Triângulos

Definição 1.1. *Dados três pontos A, B e C não colineares, chamamos a região limitada pelos segmentos que unem os pontos dois a dois ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$), por "região triangular". Os pontos A, B, C são os vértices do triângulo e os segmentos os lados, somando todos os lados teremos o perímetro do triângulo.*

Triângulos podem ser classificados de duas maneiras, pelo comprimento dos seus lados ou em relação a medida de seus ângulos.

Classificação de triângulos em relação a medida dos seus lados:

- **Equilátero:** quando todos os lados do triângulo tem a mesma medida.
- **Isósceles:** se ao menos dois lados forem iguais.
- **Escaleno:** no caso de todos os lados serem diferentes.

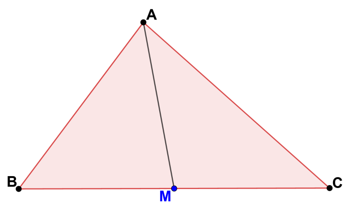
Classificação de triângulos em relação a medida dos seus ângulos:

- **Acutângulo:** possui todos os ângulos com medidas menores que 90° (agudo);
- **Retângulo:** tem um ângulo de 90°;
- **Obtusângulo:** possui um ângulo obtuso, isto é, ter um angulo maior que 90°.

Existem elementos no triangulo que são muito importantes, a partir deles são definidos alguns pontos notáveis, os quais vamos trabalhar no próximo capítulo.

- Em um triangulo ABC, definimos de **mediana** relativa ao lado BC (ou ao vértice A) como sendo o segmento de reta que liga o ponto médio do lado BC ao vértice A. Analogamente existem medianas relativas aos outros dois lados do triangulo AB e AC (ou aos vértices C e B, respectivamente).

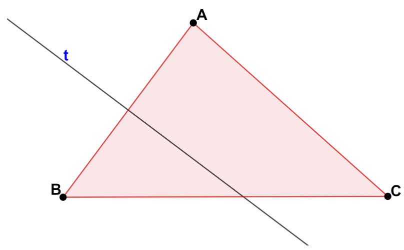
Figura 1.16: Mediana relativa ao lado BC.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

- Dados pontos A e B no plano, a **mediatriz** de AB é a reta perpendicular a AB que passa pelo ponto médio $M \in AB$. Os pontos da mediatriz de AB equidistam dos extremos A e B (ver referência [6]).

Figura 1.17: Mediatriz relativa ao lado AB.

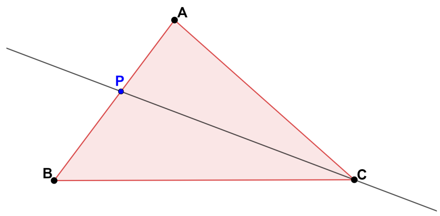


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

- A bissetriz de um ângulo dado $\angle AOB$, é a semirreta com origem em O que divide o ângulo ao meio, prova-se que o ponto P pertence a **bissetriz** do ângulo, se e somente se, P equidista dos lados (ver referência [6]).

$$d(P; \overleftrightarrow{AO}) = d(P; \overleftrightarrow{BO}).$$

Figura 1.18: Bissetriz relativa ao ângulo C.

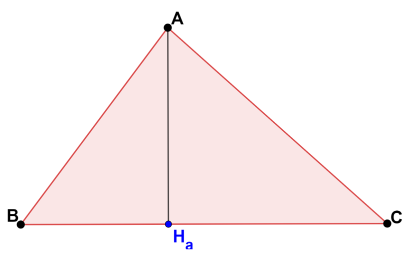


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Desse modo diremos que as bissetrizes de um triângulo são as semirretas que dividem cada ângulo em dois ângulos congruentes.

- Num triângulo ABC, a **altura** relativa ao lado BC (ou ao vértice A) é o segmento que une o vértice A ao *pé da perpendicular* baixada de A à reta $\overleftrightarrow{BC}$. Nesse caso, denominamos o pé da perpendicular em questão de **pé da altura** relativa a BC. Do mesmo modo podemos definir as alturas relativas aos outros dois lados AC e AB (ou aos vértices B e C, respectivamente).

Figura 1.19: Altura relativa ao vértice A e ao lado BC.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Congruência de triângulos: Duas figuras são ditas congruentes quando elas têm o mesmo tamanho e a mesma forma, pois os ângulos e os lados correspondentes são iguais. Deste modo, há algumas semelhanças que podemos observar entre triângulos distintos, para avaliar se eles são *iguais*, estudemos um pouco mais sobre os chamados **casos de congruência de triângulos**.

- **Caso lado, ângulo, lado (LAL):** Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

- **Caso angulo, lado, ângulo, (ALA):** Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

- **Caso lado, lado, lado, (LLL):** Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Área de triângulos: A área de um polígono é a quantidade de espaço delimitado interiormente pelos seus lados. A formula da área do triângulo é dada pela seguinte expressão:

$$A = \tfrac{b \cdot h}{2}.$$

Onde b é a base (medida de um lado) e h é a altura referente à base b.

Observação 1.1. *É fácil analisar na Figura 1.16 que a mediana divide o triângulo em dois outros de mesma área, já que ambos tem a mesma base e mesma altura.*

Capítulo 2

Pontos Notáveis

Apresentamos agora a teoria principal deste trabalho, ou seja, faremos um estudo sobre alguns pontos notáveis de um triângulo. Tratam-se de elementos importantes na caracterização e formação estrutural de uma determinada forma geométrica. No caso, quando nos referimos a triângulos, os pontos notáveis são características únicas e muito importantes, é essencial estudá-los de forma mais robusta, abordando os principais conceitos e resultados com as devidas demonstrações, para que seja melhor interpretadas as aplicações possíveis a esses pontos.

Por ordem estudaremos neste capítulo:

- **Baricentro**
- **Circuncentro**
- **Ortocentro**
- **Incentro**
- **Exincentro**
- **Ponto de Fermat**

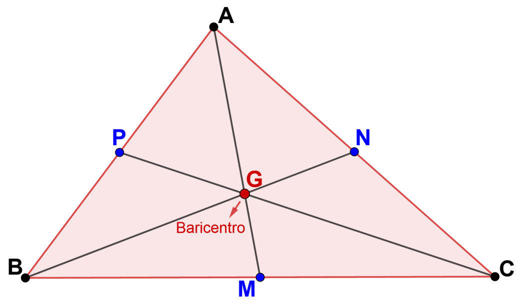
Como já mencionado, existem também aplicações possíveis e úteis, em relação à estes elementos geométricos, que veremos quando tratarmos do capítulo seguinte a este.

2.1 Baricentro

Ao traçarmos as três medianas de um triângulo qualquer encontramos um ponto comum a todas elas o qual é chamado de baricentro **G**, ou seja, trata-se do ponto de interseção das medianas.

Baricentro também é conhecido por ser o centro de gravidade do triângulo, portanto ao segurarmos esta forma pelo baricentro, o triângulo estará em equilíbrio.

Figura 2.1: Baricentro e suas medianas.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Teorema 2.1. *As três medianas de um triângulo ABC qualquer o divide em seis triângulos de mesma área. O baricentro divide cada mediana, na razão 2:1 a partir do vértice correspondente.*

Demonstração. Observando a figura anterior de um triângulo ABC, primeiro provaremos que as medianas dividem o triângulo em 6 triângulos de mesma área. Vamos denotar por S_{ABC} a área do triângulo ABC e considerando as respectivas medianas AM, BN e CP, podemos encontrar as seguintes relações (ver Observação 1.1):

$$S_{AGP} = S_{BGP}. \tag{2.1}$$

$$S_{BGM} = S_{CGM}.$$

$$S_{CGN} = S_{AGN}.$$

Analogamente,

$$S_{AMB} = S_{AMC}.$$

Por outro lado,

$$S_{AMB} = S_{AGP} + S_{BGP} + S_{BGM} = 2S_{AGP} + S_{BGM}. \tag{2.2}$$

e

$$S_{AMC} = S_{AGN} + S_{CGN} + S_{CGM} = 2S_{AGN} + S_{CGM}. \tag{2.3}$$

Assim de (2.1) - (2.3), temos que,

$$S_{AGP} = S_{AGN}.$$

E de mesmo modo,

$$S_{AGP} = S_{BGM}.$$

Portanto, os seis triângulos possuem mesma área.

Mostraremos agora que o baricentro divide as medianas na razão de 2:1, usando como base a figura 2.1 e a prova anterior.

Como pudemos observar anteriormente,

$$S_{AGB} = 2S_{GBM}. \tag{2.4}$$

Observe que os triângulos têm a mesma altura, portanto as bases $\overline{AG}$ e $\overline{GM}$ implicam que os triângulos AGB e GBM têm a mesma altura h, logo,

$$S_{AGB} = \frac{1}{2}\overline{AG} \cdot h. \tag{2.5}$$

e

$$S_{GBM} = \frac{1}{2}\overline{GM} \cdot h. \tag{2.6}$$

Assim de (2.4) - (2.6),

$$\overline{AG} = 2\overline{GM}.$$

Obtemos de modo análogo que,

$$\overline{BG} = 2\overline{GN}.$$

e

$$\overline{CG} = 2\overline{GP}.$$

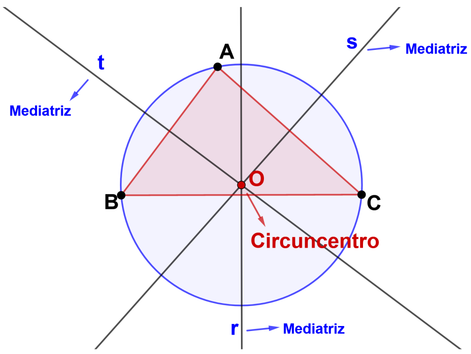
■

Deste modo, podemos observar que o baricentro realmente divide a mediana de um triangulo, na proporção de 2:1.

2.2 Circuncentro

Quando traçamos as três mediatrizes de um triângulo encontramos um ponto em comum entre elas o qual representaremos por **O** e denominado como circuncentro.

Figura 2.2: Circuncentro e as mediatrizes.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Teorema 2.2. *As três mediatrizes de um triângulo ABC qualquer se intersectam no mesmo ponto chamado de circuncentro. O circuncentro é centro de um círculo que circunscreve o triângulo, isto é, um círculo que contém os três vértices do triângulo, implicando dizer que ele está sempre a mesma distância dos três vértices.*

Demonstração. Temos que t, s e r são mediatrizes de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. assim, devemos mostrar que $t \cap s \cap r = O$ e $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$.

Seja O o ponto de encontro de t e s, ou seja,

$$t \cap s = O.$$

Como a mediatriz é o conjunto de pontos que equidistam dos extremos temos que.

$$O \in t \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OB}.$$
$$O \in s \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OC}.$$

Assim, $\overline{OB} \equiv \overline{OC}$ e portanto,

$$O \in r.$$

Logo,

$$t \cap s \cap r = O.$$

Agora mostraremos que o circuncentro está sempre a mesma distância dos vértices. Seja ABC um triângulo qualquer com r, s e t, retas mediatrizes dos respectivos segmentos, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$, e seja O o ponto de interseção das mediatrizes. Assim, como já foi mencionado os pontos das mediatrizes estão sempre equidistantes dos extremos do segmento, portanto,

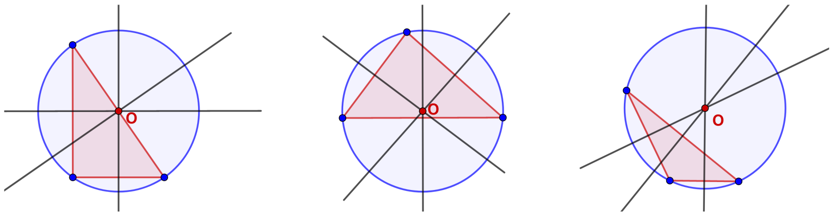
$$\overline{OA} = \overline{OC}, \overline{OC} = \overline{OB} \text{ e } \overline{OB} = \overline{OA}.$$

Já que O pertence a s, r e t, os vértices A, B e C pertencem a circunferência de centro em O e raio $r = OA = OB = OC$.

$\blacksquare$

Observação 2.1. *Dependendo o tipo do triângulo o circuncentro pode estar localizado em três locais, se for retângulo o circuncentro estará no ponto médio da hipotenusa, se for um acutângulo o circuncentro estará no interior do triângulo e se for um obtusângulo o circuncentro estará exterior ao triangulo.*

Figura 2.3: Circuncentro dos triângulos, retângulo, acutângulo e obtusângulo.

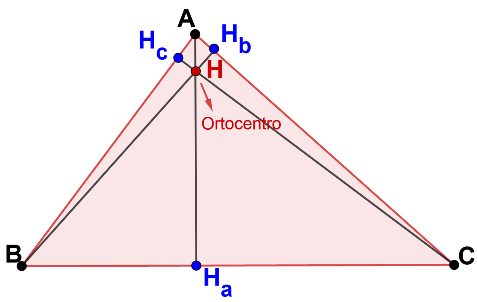


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

2.3 Ortocentro

Ao determinar as três alturas de um triângulo, encontramos um ponto em comum, ou seja, interseção das alturas, ponto denominado de ortocentro do triângulo, o qual vamos denotar por **H**.

Figura 2.4: Ortocentro e as alturas.



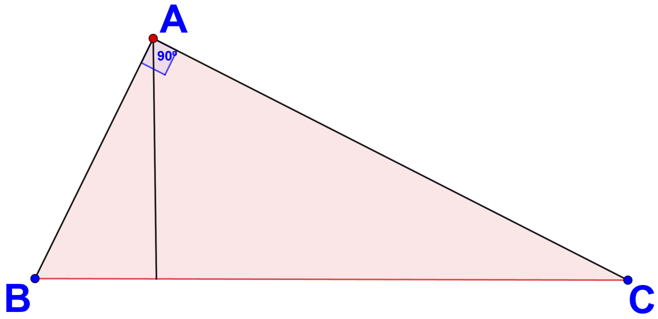
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Teorema 2.3. *Em qualquer triângulo, as três alturas se intersectam em um único ponto, o ortocentro.*

Demonstração. Iremos dividir a demonstração em três casos, para verificar o ortocentro referente a todos os tipos de triângulo.

Caso I - Triângulo retângulo.

Figura 2.5: Figura auxiliar para a demonstração do caso I.

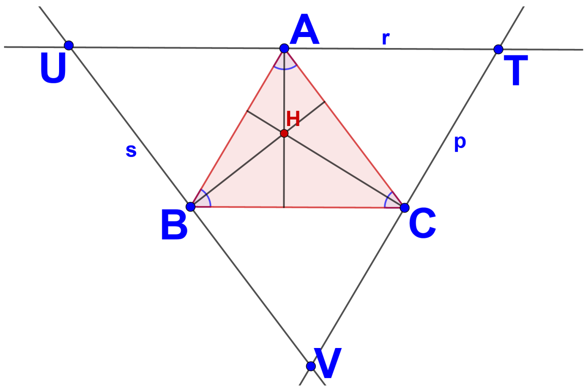


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Supondo que em um triângulo retângulo ABC, $\hat{A} = 90°$ e portanto o vértice A é o pé das alturas b e c. Assim, como a altura h, por definição passa pelo vértice A, teremos que as alturas de ABC concorrem em A, sendo então ortocentro de ABC.

Caso II - Triângulo acutângulo.

Figura 2.6: Figura auxiliar para a demonstração do caso II.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Em um triângulo acutângulo ABC, respectivamente, traçaremos por A, B e C, retas r, s e p respectivamente paralelas a $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$, sendo então o encontro das retas r e s o ponto U, o encontro das retas s e p o ponto V e por fim o encontro de p e r o ponto T.

Portanto, teremos que os quadriláteros $ABCT$ e $ABVC$ são paralelogramos, com $\overline{AB} = \overline{CT} = \overline{VC}$, Portanto, C é ponto médio de $\overline{VT}$. De modo análogo conclui-se que, A é ponto médio de $\overline{UT}$ e B é ponto médio de $\overline{VU}$.

Logo, sabendo que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{VT}$ e que a altura relativa ao vértice c é perpendicular a $\overline{AB}$, então a mesma será igualmente perpendicular a $\overline{VT}$, e analisando obtemos que as alturas em relação a $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ serão respectivamente perpendiculares a $\overline{UT}$ e $\overline{VU}$. Desse modo, concluímos que as alturas de ABC equivale as mediatrizes de UVT e já foi visto que as mediatrizes se intersectam em um determinado ponto, as alturas também se intersectarão.

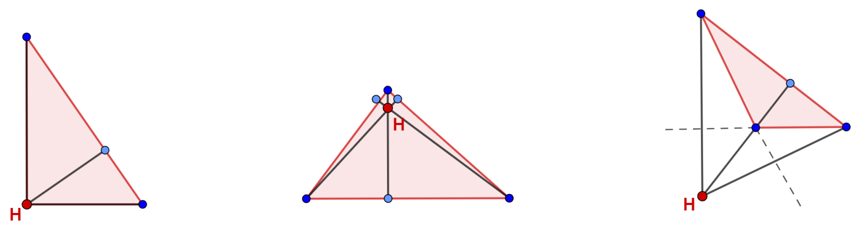
Caso III - Triângulo obtusângulo.

A demonstração do caso III é análoga a do caso II.

■

Observação 2.2. *O ponto do ortocentro pode ser localizado em três regiões; coincide com o vértice do ângulo reto se for retângulo, interna do triângulo se este é acutângulo e fora do triângulo no caso deste ser obtusângulo.*

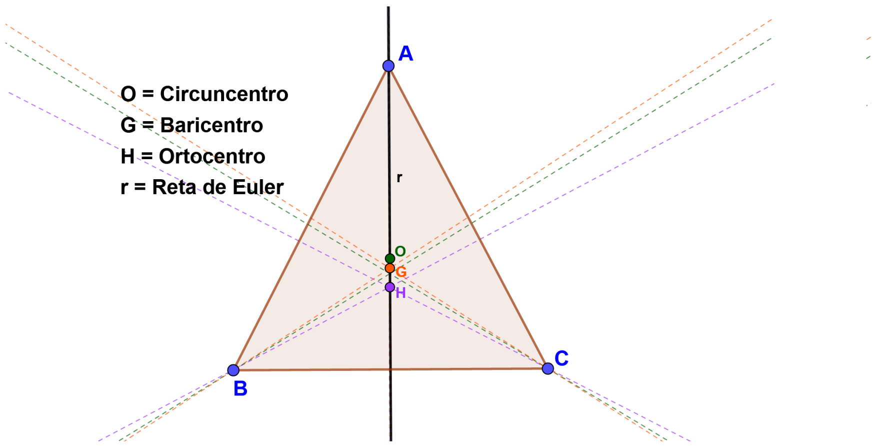
Figura 2.7: Ortocentro dos triângulos, retângulo, acutângulo e obtusângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Observação 2.3. *Antes de falar do próximo ponto notável, gostaria de comentar um pouco sobre a* ***Reta de Euler****. Leva esse nome em homenagem a Leonhard Euler (1707-1783) que, mostrou que, independente do triângulo sempre existirá uma reta em que o* ***ortocentro****, o* ***circuncentro****, e o* ***baricentro****, concorrem. Desse modo Euler observou que a distância do baricentro ao circuncentro é igual à metade da distância do baricentro ao ortocentro, como podemos ver na referencia [8]*

Figura 2.8: Reta de Euler.

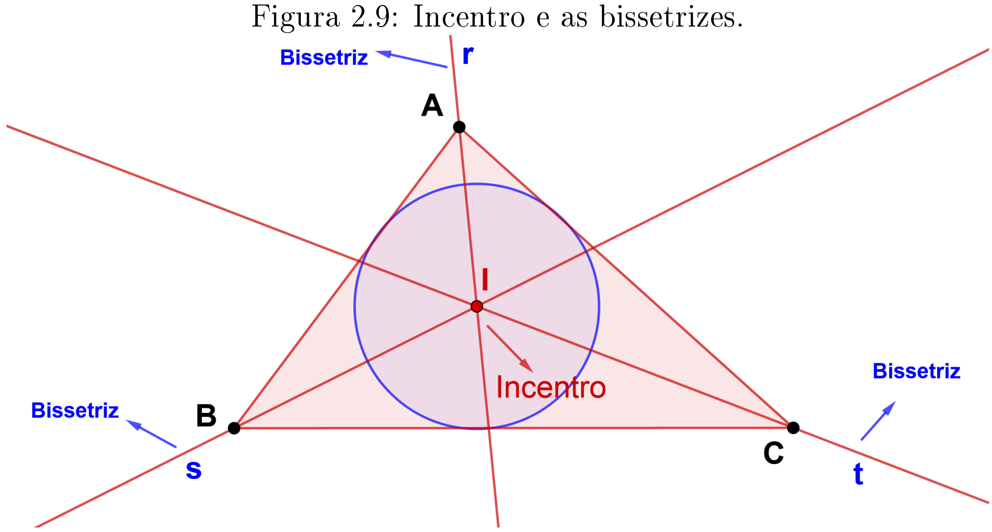


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

2.4 Incentro

Traçando as bissetrizes internas de um triângulo, encontramos um ponto de interseção **I** o qual é chamado de incentro.

Figura 2.9: Incentro e as bissetrizes.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Teorema 2.4. *As bissetrizes de um triângulo se intersectam em um único ponto, o qual é ponto central de um círculo que está inscrito ao triângulo, ele está localizado a mesma* *distancia dos lados do triângulo.*

Demonstração. As retas r, s e t, são respectivamente bissetrizes internas dos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ do triângulo ABC e I é ponto de interseção das retas r e s. Como $I \in r$, segue que I equidista de AB e AC. Analogamente como I pertence a s, temos que I equidista dos lados AB e BC. Portanto, concluímos que I também pertence a bissetriz do ângulo $\angle C$, já que com I equidistante a AC e BC, ou seja pertence a reta t. Assim, garante que r, s e t concorre em I, logo como este ponto I está a uma mesma distância R dos lados do triângulo. Podemos, assim, concluir que a circunferência de centro em I e raio R está inscrita ao triângulo, isto é, tangencia os seus lados

■

2.5 Outros pontos notáveis

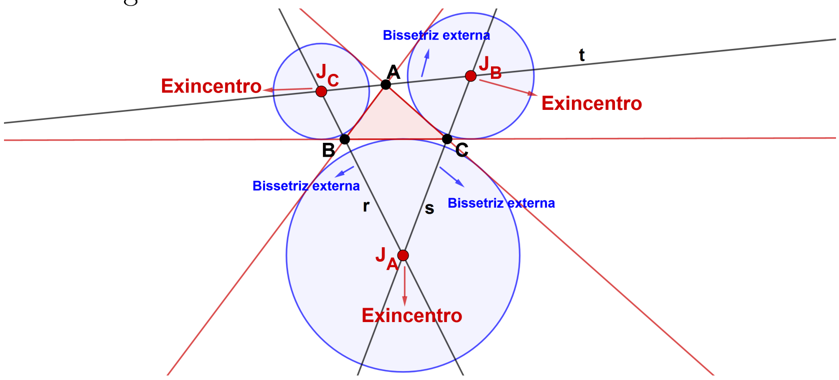
Apesar de termos falado do baricentro, circuncentro, incentro e ortocentro, existem ainda muitos outros pontos notáveis. Nesta seção abordamos mais dois pontos notáveis, são eles: **Exincentro** e o ponto de **Fermat**. Apesar de não serem muito conhecidos são realmente bem interessantes e têm uma bela construção.

2.5.1 Exincentro

Ao prolongarmos os lados de um triângulo veremos que existe referente a cada lado um único círculo que tangencia o lado e ao mesmo tempo o prolongamento dos outros dois lados do triângulo, diremos que esses círculos são exinscritos ao triângulo. O centro do círculo exinscrito é chamado de **exincentro** do triângulo e usaremos como **J** a sua representação. Para obtermos os exincentros é fácil, basta observarmos as interseções das bissetrizes dos ângulos externos do triângulo;

Teorema 2.5. *Em um triângulo qualquer, existem três círculos exinscritos distintos, cada um tangente a um dos lados do triângulo.*

Figura 2.10: Exicentro e as bissetrizes externas.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Demonstração. Sejam r e s as bissetrizes externas relativas aos pontos B, C de um triângulo ABC qualquer. Suponha que, r e s se intersectam em um ponto J_A, porem como já observamos, J_A pertence a r, reta essa que é bissetriz, logo;

$$d(J_A, \overleftrightarrow{BC}) = d(J_A, \overleftrightarrow{AB}).$$

De modo semelhante, J_A também pertence a s, então analogamente,

$$d(J_A, \overleftrightarrow{BC}) = d(J_A, \overleftrightarrow{AC}).$$

Usando como r_a a distancia do J_A às retas suportes dos lados, teremos então o círculo exinscrito de raio r_a e centro J_A, qual tangencia o lado BC e os prolongamentos de AB e AC.

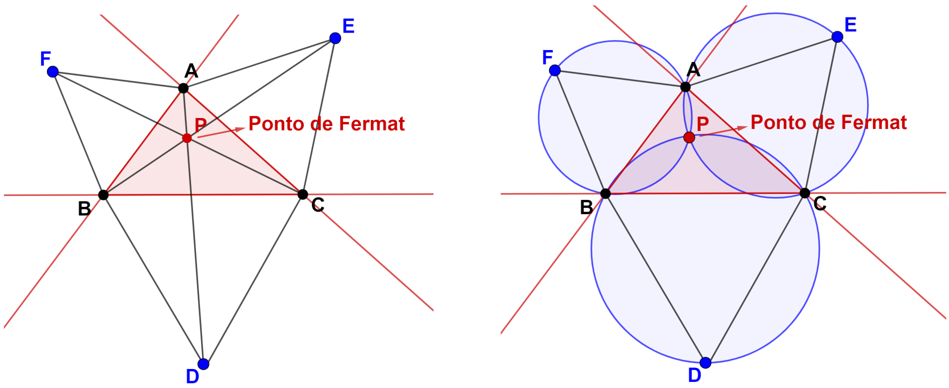
$\blacksquare$

2.5.2 Ponto de Fermat

O Ponto de Fermat é um ponto notável bastante esquecido apesar de sua história interessante. Por via de carta Fermat propôs o seguinte desafio a Evangelista Torricelli "Dados três pontos no plano, ache o quarto ponto tal que a soma das distâncias até os três dados atinge o mínimo!", Torricelli conseguiu encontrar a solução fazendo com que o ponto também leve o seu nome. Podemos encontrar o ponto de Fermat criando triângulos equiláteros construídos sobre a cada lado do triângulo, após criarmos basta circunscrever cada um destes triângulos e a interseção dos círculos será equivalente ao ponto **P**. Outra maneira de construir **P** é traçando diagonais entre os vértices do triângulo com o vértice oposto do referente triângulo equilátero (ver Figura 2.11).

Teorema 2.6. *O ponto de Fermat é tal qual que a distância dos vértices a esse ponto é a mínima possível.*

Figura 2.11: Respectivamente ponto de Fermat determinado pelas diagonais e pelas circunferências.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Demonstração.

Nesta demonstração, denotaremos por $C(P_1P_2P_3)$ a circunferência que passa pelos pontos P_1, P_2 e P_3.

Dado um triângulo ABC, construa triângulos equiláteros ABF, BCD e ACE, exteriormente aos seus lados.

Com A e P pontos intercessores entre as circunferências $C(AFB)$ e $C(AEC)$, observemos que pelo quadrilátero $APCE$ ser inscritível (ver Anexo A);

$$A\hat{P}C + A\hat{E}C = 180° \Longrightarrow A\hat{P}C = 180° - 60° = 120°.$$

Analogamente, como $APBF$ é inscritível, temos;

$$A\hat{P}B + A\hat{F}B = 180° \Longrightarrow A\hat{P}B = 180° - 60° = 120°.$$

Ademais,

$$A\hat{P}C + A\hat{P}B + B\hat{P}C = 360^\circ \Longrightarrow B\hat{P}C = 120^\circ.$$

Assim,

$$B\hat{P}C + B\hat{D}C = 180^\circ.$$

Então, $BPCD$ também será inscritível, ou seja P pertence a $C(BDC)$, mostrando que P é ponto de interseção entre $C(AFB)$, $C(AEC)$ e $C(BDC)$.

Como já vimos $A\hat{P}B = 120^\circ$ e $B\hat{P}D = B\hat{C}D = 60^\circ$ (Ângulos inscritos ao arco $\overset{\frown}{BD}$). Assim,

$$A\hat{P}B + B\hat{P}D = 180^\circ.$$

Logo, os pontos A, P e D são colineares. Portanto, analogamente (B, P e E) e (C, P e F) também são. Desse modo implica dizer que P é ponto de interseção entre $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$.

Mostraremos que $\overline{BE} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$. Já que P pertence a $C(AEC)$ e o triângulo AEC é equilátero, termos que pelo teorema de Schooten (ver Anexo A),

$$\overline{PE} = \overline{PA} + \overline{PC}.$$

E como $\overline{BE} = \overline{PB} + \overline{PE}$, temos que,

$$\overline{BE} = \overline{PB} + \overline{PA} + \overline{PC}.$$

Os resultados para $\overline{AD}$ e $\overline{CF}$ são obtidos de modo análogo. Portanto, as diagonais $\overline{BE}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CF}$ têm o mesmo tamanho e são iguais a $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$.

Para finalizar, vejamos que, para um ponto qualquer Q do triângulo ABC, tem-se que $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ é sempre menor que $\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC}$. Seja Q um ponto qualquer em ABC e como AFB esta no mesmo plano que ABC. Usaremos a desigualdade de Ptolomeu (ver Anexo A),

$$\overline{AQ}.\overline{BF} + \overline{BQ}.\overline{AF} \geq \overline{QF}.\overline{AB}.$$

E sendo AFB equilátero, temos;

$$\overline{AQ} \cdot \cancel{\overline{BF}} + \overline{BQ} \cdot \cancel{\overline{AF}} \geq \overline{QF} \cdot \cancel{\overline{AB}} \Longrightarrow \overline{AQ} + \overline{BQ} \geq \overline{QF}.$$

Portanto, ao somarmos $\overline{CQ}$ em ambos os lados obtemos,

$$\overline{AQ} + \overline{BQ} + \overline{CQ} = \overline{CQ} + \overline{QF} \Longrightarrow \overline{AQ} + \overline{BQ} + \overline{CQ} \geq \overline{CF}.$$

Logo, na etapa anterior vimos que: $\overline{CF} = \overline{PB} + \overline{PA} + \overline{PC}$ e então,

$$\overline{AQ} + \overline{BQ} + \overline{CQ} \geq \overline{PB} + \overline{PA} + \overline{PC}.$$

Provando que a menor soma das distância dos vértices do triângulo com um determinado ponto, será sempre entre os vértices e o ponto de Fermat.

■

A seguir veremos algumas aplicações em relação aos conhecimentos adquiridos sobre os pontos notáveis trabalhados neste capítulo.

Capítulo 3

Aplicações com pontos notáveis

Com intuito de mostrar o quanto o estudo dos pontos notáveis é importante, neste capítulo serão apresentados alguns problemas que podem ser resolvidos ao utilizar o conhecimento que foi adquirido no estudo do capítulo anterior.

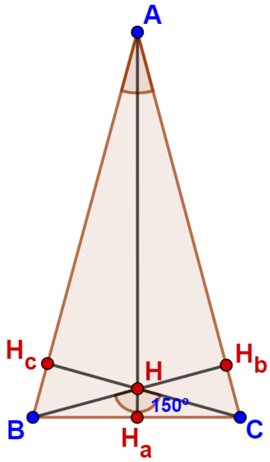
3.1 Questões e resoluções

Questão 1: Um determinado prefeito decidiu construir um local de lazer na sua cidade, conversando com o arquiteto eles decidiram que neste local haveria uma área que obtivesse: um palco, uma quadra, uma pista de corrida e um banheiro. Com o intuito de facilitar para todos que lá frequentassem, decidiram que o banheiro deveria ser localizado numa mesma distância dos outros três ambientes. Então como determinar o seu local?

Solução: Este problema tem um modo muito fácil de resolver. Iremos associar cada ambiente a um determinado ponto, deste modo teremos que: palco $= A$, quadra $= B$ e pista de corrida $= C$. Assim obteremos os vértices de um triângulo e de modo que, utilizando do conhecimento de pontos notáveis, lembramos que existe um único ponto que esta a mesma distancia dos três vértices: O circuncentro. Então basta encontrar o circuncentro do triângulo ABC, que saberemos o local em que o banheiro deve ser construído.

Questão 2 (ver [3]): Sendo H o ortocentro de um triângulo ABC e que o ângulo $B\hat{H}C$ mede $150°$, determine $\hat{A}$.

Figura 3.1: Figura auxiliar para resolução do problema.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Solução: Como H é o ortocentro e sendo ele ponto de encontro das alturas relativas a cada lado do triângulo. Nomearemos as alturas como H_c relativa a AB, H_b relativa a AC e H_a relativa a BC.

Observe agora que BH, HC e BC, formam um triângulo no qual $B\hat{H}C = 150°$. Perceba que ao lado deste triângulo existe um outro triângulo menor que é formado pelos lados HH_b, HC e CH_b.

Assim, podemos ver que o ângulo $C\hat{H}H_b$ é suplementar ao ângulo de $B\hat{H}C = 150°$. Logo,

$$C\hat{H}H_b = 30°.$$

E como $H\hat{H}_bC = 90°$ (pois é o ponto de encontro da Altura), então, $H\hat{C}H_b = 60°$.

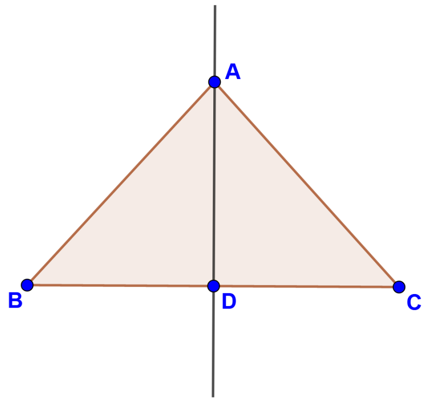
Analisando agora outro pequeno triângulo ACH_c formado pelos lados AC, AH_c e CH_c, temos as seguintes relações,

$$A\hat{H}_cC = H\hat{H}_bC = 90°,\ A\hat{C}H_c = H\hat{C}H_b = 60° \text{ e } C\hat{A}H_c = 180° - 90° - 60° = 30°.$$

Ou seja, $\hat{A} = 30°$.

Questão 3): Mostre que, em um triângulo isósceles ABC a mediatriz relativa à base, a bissetriz relativa ao ângulo oposto da base, a mediana e a altura relativas a base são coincidentes.

Figura 3.2: Figura auxiliar para resolução do problema.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Solução: Como ABC é um triângulo isósceles de base BC. Então $AB = AC$ e $\hat{B} \equiv \hat{C}$. Desse modo, considere um ponto D pertencente ao segmento BC tal que $BD = DC$. Assim, AD é a mediana do triângulo ABC.

Perceba agora que como $AB \equiv AC$, $BD \equiv DC$ e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são iguais. Temos então, pelo caso LAL, que,

$$AB \equiv AC.$$

Portanto, AD é bissetriz do triângulo ABC.

Por fim, veja que ADC e ADB são iguais e que $ADC + ADB = 180°$.

Logo,

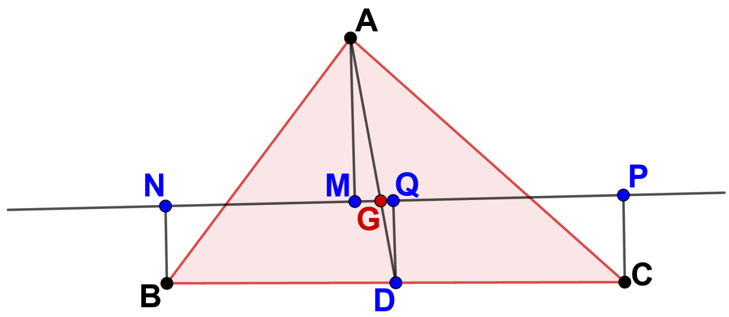
$$A\hat{D}C = A\hat{D}B = 90°$$

Então, AD é a altura do triângulo ABC relativa à base BC.

Assim, conclui que a bissetriz, a mediana e a altura relativas a BC coincidem. ■

Questão 4 (ver [6]): Uma reta r passa pelo baricentro G de um triângulo ABC e deixa o vértice A de um lado e os vértices B e C do outro. Prove que a soma das distâncias de B e C à reta r é igual à distancia de A a r.

Figura 3.3: Figura auxiliar para resolução do problema.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Solução: Considere as projeções na reta r de A, B e C como respectivamente M, N e P. Seja AD uma mediana e Q o ponto médio de NP. Então, DQ é a base média do trapézio $NBCP$ (ver Anexo A) assim $DQ \parallel BN$ e $DQ = \frac{BN+CP}{2}$. Como G é o baricentro do triângulo ABC então $AG = 2GD$. É fácil ver que AMG é semelhante GQD, então $\frac{AM}{2} = DQ$. Portanto, $AM = BN + CP$.

Conclusão

Estudar geometria é algo muito importante para podemos resolver questões do nosso dia à dia, apesar de que no passado ela era muito mais requisitada pelos matemáticos, ela ainda não perdeu a sua importância sendo sempre de grande auxilio para o desenvolvimento de problemas. Da para observar que podemos contar com o estudo dos pontos notáveis para aumentar nossa gama de ferramentas uteis na matemática, de modo que se formos pesquisar nos livros de geometria, sempre acharemos aplicações muito interessantes em relação a esses pontos.

Referências Bibliográficas

[1] ALVES, Lairton Geraldo Formiga. **Uma abordagem sobre o triângulo equilátero para o ensino básico.** 2019. 108 f. Dissertação / Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2019.

[2] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana.** Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

[3] DOLCE, Oswaldo e POMPEO, Jose Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana.** Volume 9. 8ª ed. São Paulo: Editora Atual, 2005.

[4] KIMBERLING, **Clark.Encyclopedia of Triangle Centers - ETC**. Disponível em:http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html. Acesso em: 12/12/2019.

[5] MAIA FILHO, Raimundo Alves. **O Teorema de Ptolomeu e aplicações.** 2016. 43 f. Dissertação / Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.

[6] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana**/ Caminha Muniz Neto. -1.ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[7] MACHADO, P. F. **Fundamentos de geometria plana.** Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012.

[8] MAGALHÃES, Elton Jones da Silva. **Pontos notáveis do triângulo. Quantos você conhece?.** 2013. 32 f. Dissertação / Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2013.

[9] MARINHO, Allan Klisman Arnaud. **Os pontos notáveis do triângulo e algumas aplicações.** 2017. 72 f. Trabalho de Conclusão de Curso / Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

[10] OLIVEIRA, Osmar Cordeiro. **A Utilização do GeoGebra com Auxílio Didático no Ensino dos Polígonos Inscritíveis e Circunscritíveis.** 2018. NN f. Trabalho de Conclusão de Curso / Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2018.

[11] PAPA NETO, Angelo. **Geometria plana e construções geométricas** / Angelo Papa Neto. - Fortaleza: UAB/IFCE, 2017.

Anexo A

Informações Complementares

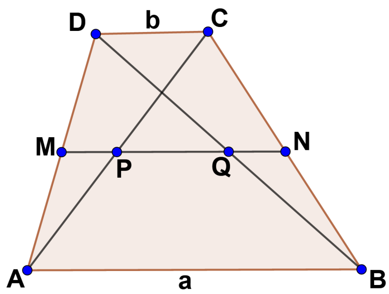
A.0.1 Base media do trapézio.

Teorema A.1. *Seja $ABCD$ um trapézio de base AB e CD e lados não paralelos AD e BC. Sejam, ainda, M e N os pontos médios dos lados não paralelos AD e BC, e P e Q os pontos médios das diagonais AC e BD. Então:*

(a) *M, N, P e Q são colineares e $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.*

(b) *$\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$ e $\overline{PQ} = \frac{1}{2} \mid \overline{AB} - \overline{CD} \mid$.*

Figura A.1: Base media de um trapézio.



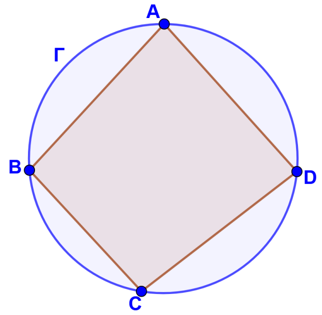
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

A demonstração detalhada deste teorema pode ser encontrada nas referencias [3] e [6].

A.0.2 Quadrilátero inscrito.

Teorema A.2. *Um quadrilátero convexo é inscritível se, somente, se os ângulos opostos forem suplementares.* $\hat{A}+\hat{C}$ *e* $\hat{B}+\hat{D}=180°$.

Figura A.2: Quadrilátero inscrito em uma circunferência.



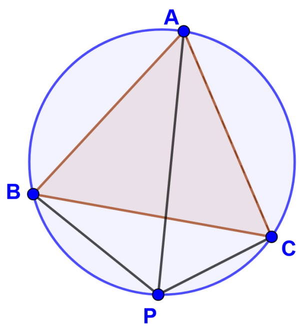
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

A demonstração detalhada deste teorema pode ser encontrada nas referencias [3] e [6].

A.0.3 Teorema de Schooten.

Teorema A.3. *Para um ponto P pertencente a circunferência que circunscreve um triângulo equilátero ABC, o maior dos segmentos PA, PB ou PC é a soma dos dois segmentos mais curtos, ou seja, sendo PA o maior segmento então: $PA = PB + PC$.*

Figura A.3: Ponto P não pertencente a um triângulo ABC inscrito em uma circunferência.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

A demonstração detalhada deste teorema pode ser encontrada nas referencias [1] e [5].

A.0.4 A Desigualdade de Ptolomeu.

Teorema A.4. *Seja ABC um triângulo qualquer e P um ponto do plano deste triângulo, então $AB \cdot CP + BC \cdot AP > AC \cdot BP$. A igualdade ocorre se, e somente se o quadrilátero $ABCP$ é inscritível.*

A demonstração detalhada deste teorema pode ser encontrada nas referencias [1] e [5].