



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**MARIA EDUARDA DA CRUZ JUSTINO**

**APROXIMAÇÃO DE  $\pi$  UTILIZANDO O ALGORITMO ARQUIMEDIANO**

**PATOS  
2021**

MARIA EDUARDA DA CRUZ JUSTINO

**APROXIMAÇÃO DE  $\pi$  UTILIZANDO O ALGORITMO ARQUIMEDIANO**

Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**Área de concentração:** Matemática

**Orientador:** Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira

**PATOS  
2021**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

J967a Justino, Maria Eduarda da Cruz.  
Aproximação de  $\pi$  utilizando o algoritmo arquimediano  
[manuscrito] / Maria Eduarda da Cruz Justino. - 2021.  
52 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2021.

"Orientação : Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira ,  
Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Cálculo do número pi. 2. Algoritmo de Arquimedes. 3.  
Aproximação poligonal. 4. Círculo. I. Título

21. ed. CDD 510

MARIA EDUARDA DA CRUZ JUSTINO

## **APROXIMAÇÃO DE $\pi$ UTILIZANDO O ALGORITMO ARQUIMEDIANO**

Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovado em: 03 / 06 /2021.



---

Prof.<sup>o</sup> Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



---

Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



---

Prof.ª Dra. Sally Andria Vieira da Silva  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Aos meus pais, José Filho e Joelma, DEDICO.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por Sua bondade e misericórdia. Pela Sua presença em todos os momentos da minha vida e pela certeza de que todas as coisas cooperam para o bem daqueles que O amam.

À minha família, em especial, meus pais Joelma e José Filho, por todo apoio e incentivo. Por valorizarem a minha educação e não medirem esforços para que eu conseguisse chegar até aqui.

Ao meu irmão Edicarlos (*in memoriam*) que, embora ausente, estará sempre em nossos corações. Sua partida tão repentina nos ensinou a valorizar o dom da vida e entender que Deus está no controle de tudo.

Ao meu namorado Denn's, por acreditar em mim, pela compreensão nos momentos de ausência, pelo incentivo e afeto.

Aos meus professores por todos os ensinamentos e contribuições para a minha formação, em especial, agradeço ao meu orientador Arlandson por todo incentivo e dedicação na construção deste trabalho.

A todos os meus colegas da universidade, pelo companheirismo e amizade construída. Gratidão especial aos meus queridos amigos: Angela, Francinete, José, Janclesio, Luan, Mayrlla e Vinícius. Juntos partilhamos momentos dos quais sentirei saudades.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a minha formação. Muito Obrigada!

“Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda.”

(Paulo Freire)

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar e formalizar, sob a perspectiva da geometria euclidiana plana, o algoritmo arquimediano para aproximação da constante  $\pi$ . Este algoritmo baseia-se no método poligonal de Arquimedes para aproximar o comprimento de uma circunferência circunscrevendo e inscrevendo nela uma sequência de polígonos regulares com o número de lados cada vez maior. Ao calcular o perímetro desses polígonos utilizando as duas relações de recorrência no cerne do algoritmo arquimediano, vemos que esses perímetros possuem limite comum  $\pi$  e que esta constante pode ser obtida com qualquer grau de precisão desejada ao aumentar o número de iterações do algoritmo. Para chegar a tais resultados, precisamos de diversas informações da geometria euclidiana plana referentes a triângulos, polígonos, círculos e relações trigonométricas que compõem, destarte, os resultados preliminares deste artigo e que, uma vez apresentados, são seguidos do prometido estudo do algoritmo arquimediano. Nosso trabalho baseia-se no artigo de Miel (1983).

**Palavras-Chave:** Cálculo do número pi. Algoritmo de Arquimedes. Aproximação Poligonal. Círculo.



## ABSTRACT

This work aims at presenting and formalizing, under plane Euclidean geometry point of view, the Archimedean algorithm for approximating the constant  $\pi$ . This algorithm is based on Archimedes' polygonal method to approximate the length of a circle by circumscribing around it and inscribing in it a sequence of regular polygons with increasing number of sides. When calculating the perimeter of these polygons using the two recurrence relations at the heart of the Archimedean algorithm, we see that these perimeters have a common limit  $\pi$  and that this constant can be obtained with any degree of precision desired by increasing the number of iterations of the algorithm. To arrive at these results, we need a variety of information from plane Euclidean geometry regarding triangles, polygons, circles and trigonometric relations that thus compose the preliminary results of this article and which, once presented, are followed by the promised study of the Archimedean algorithm. Our work is based on the article by Miel (1983).

**Keywords:** Calculus of pi. Archimedean algorithm. Polygonal approximation. Circle.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	9
<b>2</b>	<b>ELEMENTOS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA</b>	11
<b>2.1</b>	<b>Triângulos</b>	11
<b>2.1.1</b>	<i>Elementos do triângulo</i>	11
<b>2.1.2</b>	<i>Congruência de triângulos</i>	12
<b>2.1.3</b>	<i>Semelhanças de triângulos</i>	14
<b>2.1.4</b>	<i>Trigonometria no triângulo retângulo</i>	20
<b>2.2</b>	<b>Circunferência</b>	23
<b>2.2.1</b>	<i>Elementos da circunferência</i>	23
<b>2.2.2</b>	<i>Proposições relativas a circunferência</i>	24
<b>2.2.3</b>	<i>Polígonos regulares inscritos e circunscritos</i>	25
<b>2.2.3.1</b>	<i>Inscrição e circunscricção do hexágono e dodecágono regulares</i>	29
<b>2.2.4</b>	<i>Comprimento da circunferência</i>	31
<b>3</b>	<b>MÉTODO ARQUIMEDIANO PARA APROXIMAÇÃO DE <math>\pi</math></b>	36
<b>3.1</b>	<b>Algoritmo Arquimediano</b>	41
<b>3.1.1</b>	<i>Notação trigonométrica</i>	42
<b>3.1.1.1</b>	<i>Limite dos perímetros</i>	44
<b>3.1.2</b>	<i>Aproximação de <math>\pi</math> pelo algoritmo arquimediano: tabela de estimativas numéricas</i>	45
<b>3.1.3</b>	<i>Estabilidade do algoritmo</i>	47
<b>3.1.4</b>	<i>Taxa de convergência</i>	48
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	51
	<b>REFERÊNCIAS</b>	52

## 1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos séculos, consolidou-se o fato de que o valor da razão entre comprimento de qualquer circunferência e seu diâmetro é uma constante, ou seja, esse valor independe das medidas tomadas em uma circunferência específica. Embora a letra grega  $\pi$  tenha sido adotada para representar esse valor constante apenas em 1706, estudos objetivando encontrar aproximações para essa razão têm sido realizados desde a Antiguidade.

Segundo Beckmann (2015), o primeiro registro do valor de  $\pi$  é atribuído aos babilônios, que, por volta dos anos 2.000 a.C., encontraram a aproximação  $3 + 1/8$ . No papiro de Rhind, encontra-se a representação fracionária  $256/81$  considerada o registro mais antigo de  $\pi$  feito pelos egípcios. Contudo, Arquimedes de Siracusa (287 a.C.–212 a.C.) é considerado o primeiro matemático a fornecer um método para calcular o valor de  $\pi$ .

Arquimedes nasceu em Siracusa por volta de 287 a.C. e foi matemático, físico, engenheiro e inventor, considerado o primeiro estudioso a aliar a Matemática e a Física em seus trabalhos. Acredita-se que ele estudou com sucessores imediatos de Euclides na Universidade de Alexandria, sendo responsável por grandes contribuições na área da Geometria. Dentre suas contribuições, está *A medida de um círculo*, uma obra dedicada ao estudo das propriedades geométricas do círculo, na qual encontra-se um método para determinar um intervalo contendo  $\pi$ .

Na Proposição 3 da referida obra, Arquimedes aproxima o comprimento de uma circunferência ao circunscrever e inscrever nela uma sequência de polígonos regulares com número de lados cada vez maior. A principal etapa numérica consiste em observar como os perímetros dos polígonos convergem para o comprimento do círculo, conforme se dobra o número de lados dos polígonos. Utilizando uma circunferência de diâmetro 1 e iniciando com dois hexágonos regulares, um circunscrito e um inscrito, ele construiu os polígonos circunscritos e inscritos de 12, 24, 48 e 96 lados e obteve como resultado o intervalo

$$3 + \frac{1}{7} > \pi > 3 + \frac{10}{71}.$$

Na demonstração dessa proposição, obtemos as duas relações de recorrência a seguir, que constituem o cerne do algoritmo de Arquimedes:

$$P_{2^n M} = \frac{2P_{2^{n-1}M} \cdot Q_{2^{n-1}M}}{Q_{2^{n-1}M} + P_{2^{n-1}M}} \quad \text{e} \quad Q_{2^n M} = \sqrt{P_{2^n M} \cdot Q_{2^{n-1}M}},$$

em que  $P_{2^n M}$  e  $Q_{2^n M}$  são, respectivamente, os perímetros dos polígonos regulares com  $2^n M$  lados circunscritos e inscritos numa dada circunferência e construídos a partir de um polígono regular circunscrito e de um polígono regular inscrito nessa mesma circunferência, ambos com  $M$  lados. As sequências  $\{P_{2^n M}\}$  e  $\{Q_{2^n M}\}$  são, respectivamente, aproximações por falta e por

excesso para  $\pi$  tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{2^n M} = \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2^n M}.$$

O método poligonal de Arquimedes permaneceu sendo utilizado até 19 séculos mais tarde por alguns matemáticos, possibilitando a obtenção de uma maior quantidade de dígitos de  $\pi$ . François Viète, em 1593, encontrou  $\pi$  com precisão de 9 dígitos decimais utilizando um polígono de  $6 \cdot 2^{16}$  lados; no mesmo ano, Adriaen van Roomen calculou 15 casas decimais utilizando polígonos de  $2^{30}$  lados; Van den Circkel, em 1596, encontrou 20 casas decimais utilizando  $60 \cdot 2^{29}$  lados; e o japonês Takebe encontrou  $\pi$  com 41 casas decimais, em 1722, utilizando um polígono de 1.024 lados.

Essa investigação acerca da representação de  $\pi$  com a maior quantidade de dígitos possíveis ganhou um novo capítulo com a descoberta feita por Lambert em 1767 de que  $\pi$  é irracional, ou seja, não pode ser expresso como uma razão de dois inteiros nem como uma dízima finita ou infinita periódica. Mais tarde, em 1882, Lindemann provou que  $\pi$ , além de irracional, é também transcendente<sup>1</sup>.

Considerando a importância do método poligonal de Arquimedes para a história do cálculo do número  $\pi$ , no presente trabalho temos por objetivo apresentar e formalizar, sob a perspectiva da geometria euclidiana plana, o algoritmo arquimediano para aproximação da constante  $\pi$ . Apresentaremos uma demonstração geométrica para esse algoritmo, baseada em Miel (1983), seguida de uma relação de equivalência em notação trigonométrica.

Esta monografia está estruturada em dois capítulos. No Capítulo 2, abordamos alguns resultados preliminares que servirão de embasamento teórico para os estudos desenvolvidos no Capítulo 3, na qual abordaremos o algoritmo arquimediano baseado no método iterativo proposto por Arquimedes para o cálculo de  $\pi$ .

---

<sup>1</sup>Um número transcendente é um número real ou complexo que não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes racionais.

## 2 ELEMENTOS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

### 2.1 Triângulos

Nesta subseção, apresentamos alguns resultados preliminares relacionados a triângulos que serão úteis no decorrer do trabalho. As definições e proposições aqui apresentadas foram baseadas em Barbosa (2004) e em Muniz Neto (2012).

#### 2.1.1 Elementos do triângulo

Um triângulo é uma figura plana formada por três pontos não colineares, ou seja, que não pertencem a uma mesma reta, e pelos três segmentos determinados por esses três pontos. Um triângulo formado pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  será denotado por  $\triangle ABC$ , o comprimento de um segmento  $AB$  será denotado por  $\overline{AB}$  e a medida de um ângulo  $A\hat{B}C$  será denotada por  $\angle A\hat{B}C$ . Dado um triângulo  $\triangle ABC$ , os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os seus **vértices**, os segmentos  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  são os seus **lados** e os ângulos  $A\hat{B}C$ ,  $B\hat{C}A$  e  $C\hat{A}B$  são os **ângulos internos** desse triângulo.

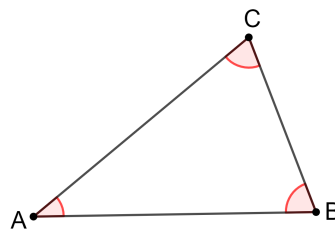


Figura 2.1: Triângulo  $\triangle ABC$ .

**Definição 2.1.** Consideremos um  $\triangle ABC$  e um ponto  $D$  da reta que contém o segmento  $AB$ . Se  $D$  for ponto médio de  $AB$ , o segmento  $CD$  é chamado de **mediana** do triângulo relativa ao lado  $AB$  (ou vértice  $C$ ). Se a semirreta de origem em  $C$  passando pelo ponto  $D$  divide o ângulo  $A\hat{C}B$  em dois ângulos congruentes, o segmento  $CD$  é chamado de **bissetriz** do ângulo  $\hat{C}$ . Se  $CD$  for perpendicular à reta que contém  $AB$  (neste caso, escrevemos  $CD \perp AB$ ), o segmento  $CD$  é chamado de **altura** do triângulo relativa ao lado  $AB$  (ou vértice  $C$ ).

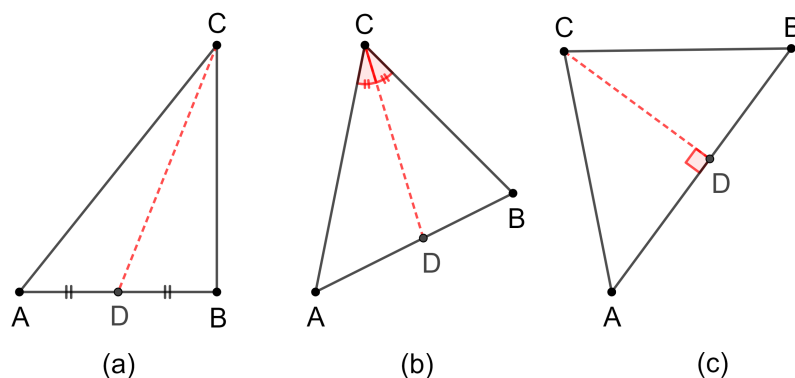


Figura 2.2: (a)  $CD$  é mediana. (b)  $CD$  é bissetriz. (c)  $CD$  é altura.

### 2.1.2 Congruência de triângulos

**Definição 2.2.** Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os seus vértices de forma que os ângulos internos em vértices correspondentes tenham a mesma medida e que os lados opostos a vértices correspondentes também tenham a mesma medida.

Ou seja, se  $\triangle ABC$  for congruente ao  $\triangle DEF$  (escrevemos  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ) e se a correspondência de vértices  $A \rightarrow D, B \rightarrow E, C \rightarrow F$  define a congruência, então são válidas as seis relações abaixo

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{DE}, & \overline{BC} &= \overline{EF}, & \overline{AC} &= \overline{DF} \\ \angle \hat{A} &= \angle \hat{D}, & \angle \hat{B} &= \angle \hat{E}, & \angle \hat{C} &= \angle \hat{F}. \end{aligned}$$

**Axioma 2.1.** Se dois lados um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de um outro triângulo e ao ângulo formado por esses lados, então esses dois triângulos são congruentes.

Pela Definição 2.2, para verificar se dois triângulos são congruentes devemos verificar as seis relações de congruência, as dos três pares de lados e as dos três pares de ângulos. Pelo axioma acima, é suficiente verificar apenas três relações, ou seja, dados os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , o axioma garante que

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{DE} \\ \overline{AC} = \overline{DF} \\ \hat{A} = \hat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$

Esse axioma é conhecido como o caso de congruência LAL. Os outros dois casos serão apresentados a seguir como teoremas.

**Teorema 2.1** (Caso de congruência ALA). *Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido por esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido por esses dois ângulos, então esses dois triângulos são congruentes.*

*Demonstração.* Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  dois triângulos tais que  $\hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F}$  e  $\overline{BC} = \overline{EF}$ . Seja  $P$  um ponto na semirreta com origem em  $B$  e que contém o ponto  $A$ , tal que  $\overline{BP} = \overline{DE}$ .

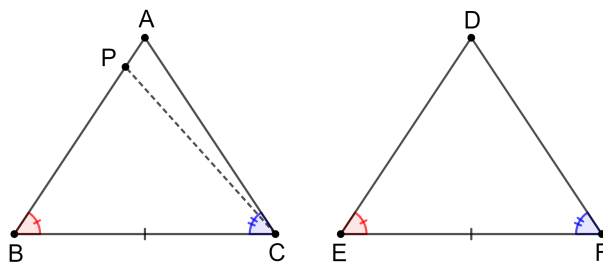


Figura 2.3: Caso de congruência ALA.

Consideremos o  $\triangle PBC$  e comparemo-lo com  $\triangle DEF$ . Como  $\overline{PB} = \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} = \overline{EF}$  e  $\hat{B} = \hat{E}$ , então, pelo primeiro caso de congruência (LAL), temos  $\triangle PBC \equiv \triangle DEF$ . Como consequência,  $\angle \hat{BCP} \equiv \angle \hat{F}$ ; mas, por hipótese,  $\hat{E} = \hat{BCA}$ ; logo,  $\angle \hat{BCP} \equiv \angle \hat{BCA}$ . Isso mostra que as semirretas com origem em  $C$  que contém os pontos  $P$  e  $A$  coincidem e, conseqüentemente, o ponto  $P$  coincide com o ponto  $A$ . Portanto, coincidem os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle PBC$ . Como  $\triangle PBC \equiv \triangle DEF$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .  $\square$

**Definição 2.3.** Se um triângulo possui dois lados congruentes então ele é chamado de triângulo isósceles. Os dois lados congruentes são chamados de laterais e o terceiro lado é chamado de base.

**Proposição 2.1.** Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

*Demonstração.* Seja  $\triangle ABC$  isósceles de base  $BC$  e  $AD$  a bissetriz relativa ao vértice  $A$ .

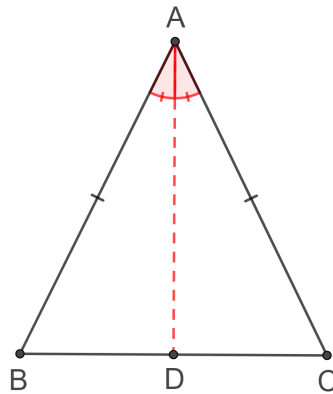


Figura 2.4: Triângulo  $\triangle ABC$  isósceles.

Como  $\overline{AB} = \overline{AC}$  (lados congruentes) e  $\angle \hat{BAD} = \angle \hat{CAD}$ , então os triângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle ACD$  são congruentes pelo caso LAL. Logo,  $\angle \hat{ABD} = \angle \hat{ACD}$ .  $\square$

**Proposição 2.2.** A mediana relativa à base de um triângulo isósceles é também a bissetriz e a altura desse triângulo.

*Demonstração.* Devemos provar que  $AD$  é mediana e também a altura relativa ao lado  $BC$ . Como  $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ , então  $\overline{BD} = \overline{DC}$ , logo  $AD$  é mediana. Ainda pela congruência  $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$  temos que  $\angle \hat{BDA} = \angle \hat{CDA}$  e, como  $\angle \hat{BDC} = \angle \hat{BDA} + \angle \hat{CDA} = 180^\circ$ , então  $\angle \hat{BDA} = 90^\circ$ . Como resultado, temos que  $AD \perp BC$ , logo  $AD$  é altura.  $\square$

**Teorema 2.2.** A soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é maior do que o comprimento do terceiro lado.

*Demonstração.* Seja  $\triangle ABC$  e  $D$  um ponto no prolongamento da semirreta  $BC$  de modo que  $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CA}$ .

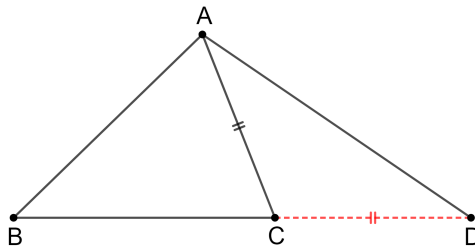


Figura 2.5: Lados do triângulo  $\triangle ABC$ .

Assim,  $\overline{CA} = \overline{CD}$  e, portanto,  $\triangle ACD$  é isósceles de base  $AD$  e  $\angle CAD = \angle CDA$  (ângulos da base). Como  $C$  está entre  $B$  e  $D$ , então  $\angle CAB < \angle BAD$ . É claro que  $\angle CDA < \angle BAD$ ; logo,  $\overline{BA} < \overline{BD}$ , isto é,  $\overline{BA} < \overline{BC} + \overline{CA}$ .  $\square$

**Teorema 2.3** (Caso de congruência LLL). *Se dois triângulos possuem três lados correspondentes congruentes, então esses triângulos são congruentes.*

*Demonstração.* Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  tais que  $\overline{AB} = \overline{DE}$ ,  $\overline{AC} = \overline{DF}$  e  $\overline{BC} = \overline{EF}$ . Construimos um ângulo de medida igual a  $\angle E$ , tendo por um dos lados o lado  $BC$  e por outro uma semirreta com origem em  $B$  no semiplano oposto ao que contém o ponto  $A$ . A seguir, marcamos o ponto  $P$  no lado desse ângulo que não contém  $C$  de modo que  $\overline{BP} = \overline{DE}$  e traçamos os segmentos  $CP$  e  $AP$ , conforme a figura abaixo.

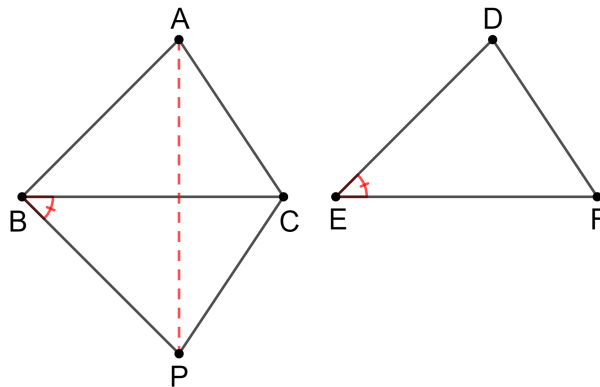


Figura 2.6: Caso de congruência LLL.

Por hipótese,  $\overline{BC} = \overline{EF}$  e, por construção,  $\angle PBC = \angle E$  e  $\overline{BP} = \overline{DE}$ . Então os triângulos  $\triangle BCP$  e  $\triangle EFD$  são congruentes pelo caso LAL.

Agora, como  $\overline{BP} = \overline{DE} = \overline{AB}$  e  $\overline{CP} = \overline{DF} = \overline{AC}$ , então os triângulos  $\triangle ABP$  e  $\triangle ACP$  são isósceles. Segue que  $\angle PAC = \angle CPA$  e  $\angle BAP = \angle APB$ ; portanto,  $\angle BAC = \angle CPB$ . Então, pelo caso LAL, os triângulos  $\triangle BAC$  e  $\triangle BPC$  são congruentes. Como já foi provado que  $\triangle BCP \equiv \triangle EFD$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .  $\square$

### 2.1.3 Semelhanças de triângulos

**Definição 2.4.** Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os seus vértices de forma que os ângulos internos em vértices correspondentes



tenham a mesma medida e que os lados opostos a vértices correspondentes sejam proporcionais.

Ou seja, se  $\triangle ABC$  for semelhante ao  $\triangle DEF$  (escrevemos  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ) e se a correspondência de vértices  $A \rightarrow D, B \rightarrow E, C \rightarrow F$  define a semelhança, então são válidas as seis relações abaixo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

$$\angle \hat{A} = \angle \hat{D}, \quad \angle \hat{B} = \angle \hat{E}, \quad \angle \hat{C} = \angle \hat{F}.$$

**Teorema 2.4** (Caso de semelhança AA). *Se dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes congruentes, então esses triângulos são semelhantes.*

*Demonstração.* Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  dois triângulos tais que  $\angle \hat{A} = \angle \hat{D}$  e  $\angle \hat{B} = \angle \hat{E}$ . Tomemos o ponto  $G$  na semirreta com origem em  $E$  e que contém o ponto  $F$  de maneira que  $\overline{EG} = \overline{BC}$ . Tracemos por  $G$  a paralela a  $DF$  que intercepta em  $H$  a semirreta com origem em  $E$  e que contém o ponto  $D$ .

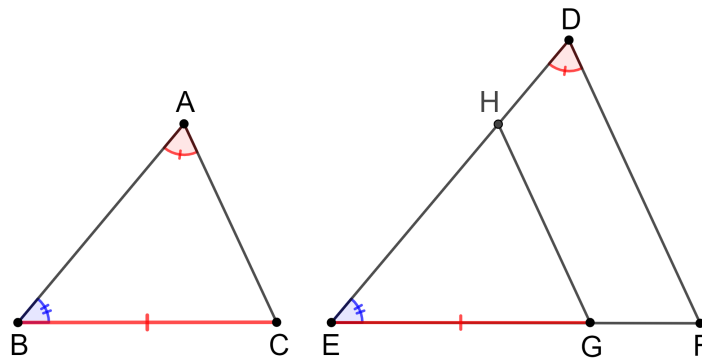


Figura 2.7: Caso de semelhança AA.

Como  $\angle \hat{A} + \angle \hat{B} + \angle \hat{C} = 180^\circ = \angle \hat{D} + \angle \hat{E} + \angle \hat{F}$  e, por hipótese,  $\angle \hat{A} = \angle \hat{D}$  e  $\angle \hat{B} = \angle \hat{E}$ , então  $\angle \hat{C} = \angle \hat{F}$ . Resta provar que os lados são proporcionais. Para isso, notamos que  $\triangle ABC \cong \triangle HEG$ , pois  $\angle \hat{B} = \angle \hat{E}$ ,  $\overline{BC} = \overline{EG}$  e  $\angle \hat{A} = \angle \hat{H}$ , em que a última igualdade deve-se ao paralelismo de  $DF$  e  $HG$ .

Sabemos que, se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo corta os outros dois lados, então essa reta divide esses lados na mesma proporção (aos leitores interessados, recomendamos ver Barbosa (2002)). Assim,

$$\frac{\overline{EG}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{DE}}.$$

Como  $\overline{EG} = \overline{BC}$  e  $\overline{EH} = \overline{AB}$ , substituindo na igualdade acima encontramos

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}.$$

De maneira análoga, mostra-se que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}},$$

provando que os lados são proporcionais.  $\square$

**Teorema 2.5** (Caso de semelhança LAL). *Se dois triângulos possuem dois pares de lados correspondentes proporcionais e o ângulo entre eles são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.*

*Demonstração.* Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  dois triângulos tais que  $\overline{AB}/\overline{DE} = \overline{BC}/\overline{EF}$  e  $\angle \hat{B} = \angle \hat{E}$ . Construimos  $\triangle GHI$  de forma que  $\overline{HI} = \overline{EF}$ ,  $\angle \hat{H} = \angle \hat{B}$  e  $\angle \hat{I} = \angle \hat{C}$ .

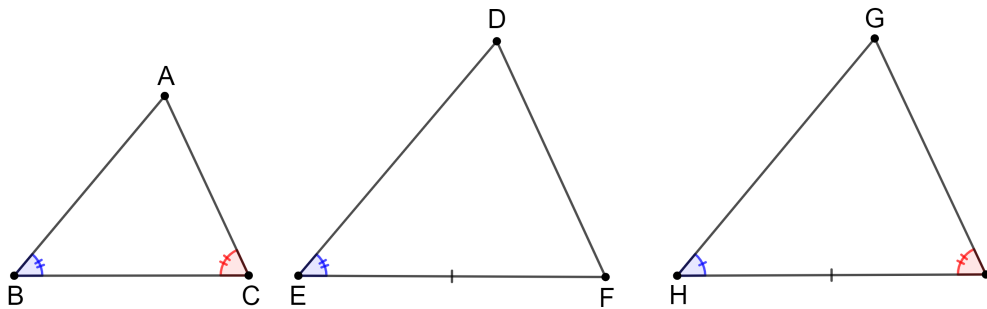


Figura 2.8: Caso de semelhança LAL.

Pelo teorema anterior,  $\triangle ABC \sim \triangle GHI$  (caso A.A), conseqüentemente

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{GH}}.$$

Como  $\overline{HI} = \overline{EF}$  e, por hipótese  $\overline{AB}/\overline{DE} = \overline{BC}/\overline{EF}$ , substituindo na igualdade acima, temos que  $\overline{GH} = \overline{DE}$ . Mostrando que  $\triangle DEF \equiv \triangle GHI$  pelo caso LAL. Como  $\triangle ABC \sim \triangle GHI$  e  $\triangle GHI \equiv \triangle DEF$ , então  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .  $\square$

**Teorema 2.6** (Caso de semelhança LLL). *Se dois triângulos possuem três pares de lados proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.*

*Demonstração.* Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  dois triângulos tais que  $\overline{AB}/\overline{DE} = \overline{AC}/\overline{DF} = \overline{BC}/\overline{EF}$ . Construimos  $\triangle GHI$  de forma que  $\angle \hat{H} = \angle \hat{B}$ ,  $\overline{HI} = \overline{EF}$  e  $\overline{GH} = \overline{DE}$ .

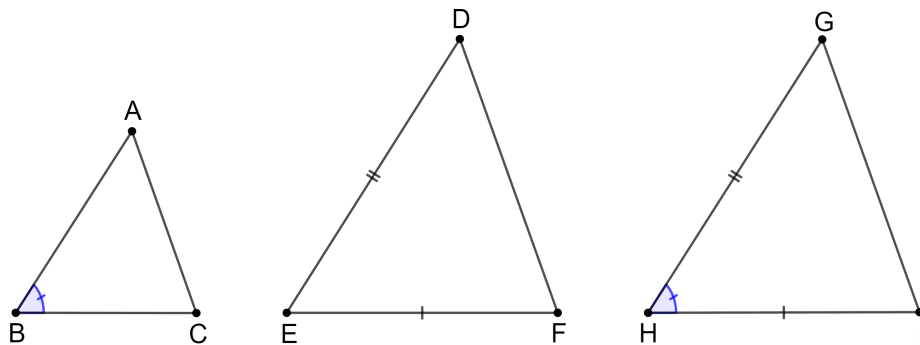


Figura 2.9: Caso de semelhança LLL.

Substituindo na igualdade da hipótese, segue que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{HI}}$$

e, pelo teorema anterior,  $\triangle ABC \sim \triangle GHI$  (caso LAL). Consequentemente,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{GI}}.$$

Segue daí e da hipótese que  $\overline{DF} = \overline{GI}$  e, portanto,  $\triangle DEF \equiv \triangle GHI$ . Como  $\triangle ABC \sim \triangle GHI$  e  $\triangle GHI \equiv \triangle DEF$ , então  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .  $\square$

Com base na noção de semelhança de triângulos, podemos demonstrar um teorema referente a triângulos retângulos que é um dos resultados mais importantes e conhecidos da geometria euclidiana plana.

**Definição 2.5.** Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado de triângulo retângulo. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os outros dois lados são chamados de catetos.

**Teorema 2.7** (Teorema de Pitágoras). *Em todo triângulo retângulo a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos é igual ao quadrado do comprimento da hipotenusa.*

*Demonstração.* Seja o triângulo  $\triangle ABC$  retângulo com o ângulo reto no vértice  $A$  e  $\overline{AH}$  a altura relativa à hipotenusa.

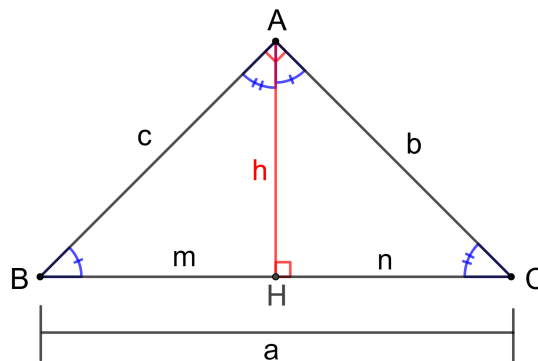


Figura 2.10: Teorema de Pitágoras.

Como  $AH \perp BC$ , então  $\triangle AHC$  e  $\triangle AHB$  são triângulos retângulos. Como,  $\angle \hat{B} + \angle \hat{C} = 90^\circ$  e  $\angle \hat{C} + \angle C\hat{A}H = 90^\circ$ , então  $\angle \hat{B} = \angle C\hat{A}H$ . Além disso, como também  $\angle \hat{B} + \angle B\hat{A}H = 90^\circ$ , então  $\angle \hat{C} = \angle B\hat{A}H$ . Portanto, pelo caso AA, os triângulos  $\triangle AHB$  e  $\triangle AHC$  são semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo  $\triangle ABC$ . Da semelhança de  $\triangle ABC$  e  $\triangle AHB$ , vem

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am.$$

Da semelhança de  $\triangle ABC$  e  $\triangle AHC$ , vem

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an.$$

Somando membro a membro essas duas relações, segue que

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m + n) = a \cdot a = a^2. \quad \square$$

O Teorema de Pitágoras permite encontrar uma relação para a medida da altura de um triângulo equilátero.

**Definição 2.6.** Um triângulo que possui três lados congruentes é chamado de triângulo equilátero.

**Corolário 2.1.** As alturas de um triângulo equilátero de lado  $a$  medem  $a\sqrt{3}/2$ .

*Demonstração.* Sejam  $\triangle ABC$  equilátero de lado  $a$  e  $H$  o ponto médio do lado  $BC$ .

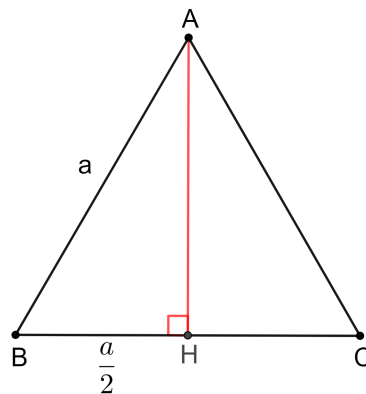


Figura 2.11: Altura de um triângulo equilátero.

Pela Proposição 2.2,  $AH$  é altura, isto é,  $AH \perp BC$ . Portanto,  $\triangle ABH$  é retângulo e, pelo Teorema de Pitágoras,

$$a^2 = (\overline{AH})^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow (\overline{AH})^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad \square$$

**Corolário 2.2.** Num triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa tem medida igual à metade da hipotenusa.

*Demonstração.* Seja  $\triangle ABC$  retângulo em  $A$ . Traçamos por  $B$  uma reta paralela à reta que contém  $AC$ , por  $C$  uma reta paralela à reta que contém  $AB$ , e seja  $D$  o ponto de interseção dessas duas retas.

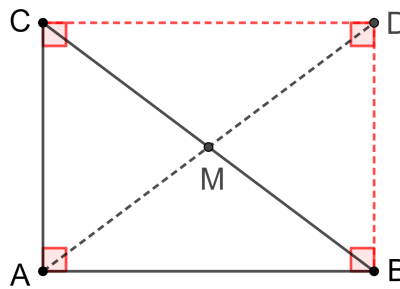


Figura 2.12:  $AM$  é mediana de  $\triangle ABC$ .

Como  $\angle B\hat{A}C = \angle A\hat{B}D = 90^\circ$ , pois  $AC$  é paralela a  $BD$ , e, de forma análoga,  $\angle A\hat{C}D = \angle B\hat{D}C = 90^\circ$ , pois  $CD$  é paralela a  $AB$ , segue que  $CABD$  é um quadrilátero retângulo e, assim, suas diagonais  $AD$  e  $BC$  têm comprimentos iguais, isto é,  $\overline{AD} = \overline{BC}$ . Seja  $M$  o ponto de interseção de  $AD$  com  $BC$ . Então  $M$  é ponto médio de ambas as diagonais. Logo,  $\overline{BC} = \overline{AD} = 2\overline{AM}$ .  $\square$

Para finalizar esta subseção, provamos agora um teorema relacionado à bissetriz interna de um triângulo que será utilizado no nosso estudo do algoritmo de Arquimedes.

**Teorema 2.8** (Teorema da bissetriz interna). *A bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.*

*Demonstração.* Dados  $\triangle ABC$  e  $AD$  a bissetriz interna relativa ao vértice  $A$ , devemos mostrar que  $\overline{BD}/\overline{AB} = \overline{CD}/\overline{AC}$ .

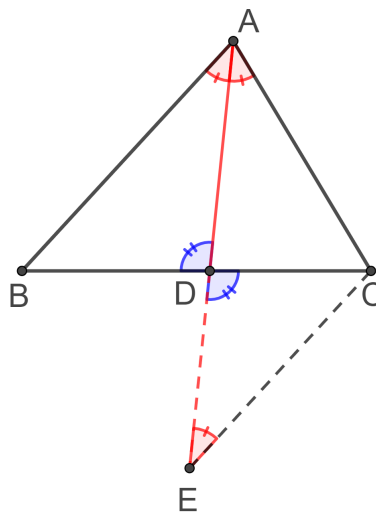


Figura 2.13: Teorema da bissetriz interna.

Prolongando a bissetriz  $AD$  no semiplano oposto ao que contém o ponto  $A$  e construindo pelo ponto  $C$  uma reta paralela a  $AB$  de modo que essa reta intercepte o prolongamento de  $AD$  no ponto  $E$ , temos, por paralelismo,  $\angle B\hat{A}E = \angle C\hat{E}A$ ; logo,  $\triangle ACE$  é isósceles e  $\overline{AC} =$

$\overline{CE}$ . Além disso,  $\angle A\hat{D}B = \angle C\hat{D}E$  (ângulos opostos pelo vértice) e, pelo caso AA, temos  $\triangle ADB \sim \triangle EDC$ . Por essa semelhança,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}},$$

e, como já foi provado que  $\overline{CE} = \overline{AC}$ , temos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}. \quad \square$$

### 2.1.4 Trigonometria no triângulo retângulo

Nesta subseção, apresentamos algumas funções e relações trigonométricas no triângulo retângulo que serão úteis para a demonstração da relação de equivalência trigonométrica do algoritmo de Arquimedes. As definições e proposições aqui apresentadas foram baseadas em Carmo, Morgado e Wagner (2005).

Dado um ângulo agudo  $\angle A\hat{O}B = \theta$ , com  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ , marcamos sobre a semirreta  $OA$  os pontos  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$  e, a partir desses pontos, traçamos as perpendiculares  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, \dots$  à semirreta  $OB$ .

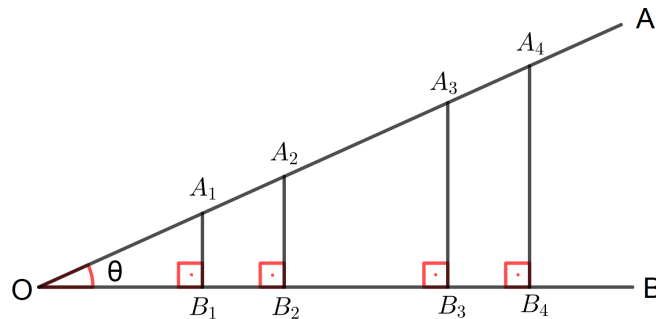


Figura 2.14: Funções trigonométricas no triângulo retângulo.

Os triângulos  $\triangle OA_1B_1, \triangle OA_2B_2, \triangle OA_3B_3, \triangle OA_4B_4, \dots$  são semelhantes pelo caso AA. Portanto,

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{OA_4}} = \dots,$$

mostrando que os catetos opostos a  $\theta$  e as hipotenusas são diretamente proporcionais;

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \frac{\overline{OB_4}}{\overline{OA_4}} = \dots,$$

mostrando que os catetos adjacentes a  $\theta$  e as hipotenusas são diretamente proporcionais; e

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{OB_4}} = \dots,$$

mostrando que os catetos opostos e adjacentes a  $\theta$  são diretamente proporcionais. Essas relações dependem apenas do ângulo  $\theta$ , e não dos comprimentos envolvidos, e permitem definir as seguintes funções para  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ .

**Definição 2.7.** O seno de um ângulo agudo num triângulo retângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

**Definição 2.8.** O cosseno de um ângulo agudo num triângulo retângulo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

**Definição 2.9.** A tangente de um ângulo agudo num triângulo retângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.

Ou seja,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{O A_1}}, \quad \operatorname{cos} \theta = \frac{\overline{O B_1}}{\overline{O A_1}}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{O B_1}}.$$

Essas funções são chamadas de funções trigonométricas.

Seja um ângulo  $\theta$  no vértice  $O$  de um  $\triangle OAB$  retângulo em  $B$ . Escrevamos  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{OA} = b$  e  $\overline{OB} = a$ , conforme a figura abaixo.

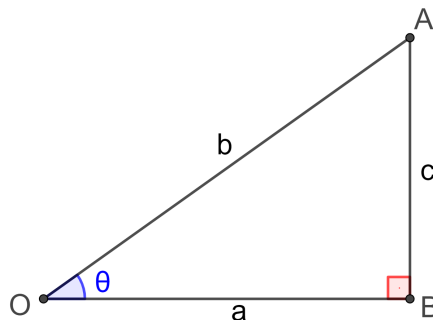


Figura 2.15: Relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Como  $\operatorname{sen} \theta = c/b$  e  $\operatorname{cos} \theta = a/b$ , então  $c = b \cdot \operatorname{sen} \theta$  e  $a = b \cdot \operatorname{cos} \theta$ . Utilizando o Teorema de Pitágoras, encontramos

$$\begin{aligned} b^2 = a^2 + c^2 &\Rightarrow b^2 = (b \cdot \operatorname{cos} \theta)^2 + (b \cdot \operatorname{sen} \theta)^2 = b^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \cdot \operatorname{cos}^2 \theta \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} = \frac{c/b}{a/b} = \frac{c}{a} = \operatorname{tg} \theta.$$

**Proposição 2.3.** Se  $\theta \in (0^\circ, 45^\circ)$ , então

(a)  $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{cos} \theta$

(b)  $\operatorname{cos} 2\theta = \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$ .

*Demonstração.* Sejam  $\triangle OBC$  isósceles de base  $BC$  e  $OA$  a bissetriz do ângulo  $B\hat{O}C$ .  $OA$  é também altura e mediana; logo,  $\triangle OAB$  e  $\triangle OAC$  são retângulos em  $A$ . Consideremos  $\overline{OB} = \overline{OC} = 1$ . Traçamos  $BD$  perpendicular a  $OC$ , conforme a figura abaixo.

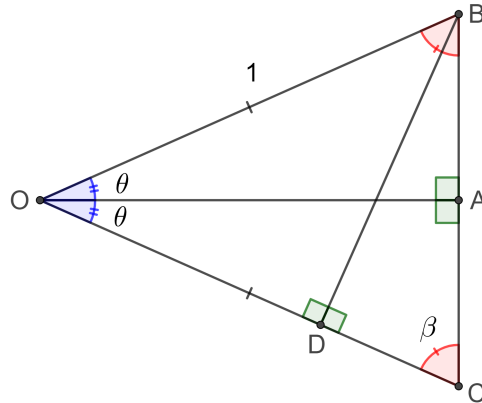


Figura 2.16: Relações para  $\text{sen } 2\theta$  e  $\text{cos } 2\theta$ .

Da congruência  $\triangle OAB \equiv \triangle OAC$  segue que  $\text{sen } \theta = \overline{BA} = \overline{AC}$  e  $\text{cos } \theta = \overline{OA}$  e, no  $\triangle OBD$ , temos  $\text{sen } 2\theta = \overline{BD}$  e  $\text{cos } 2\theta = \overline{OD}$ . O dobro da área de  $\triangle OBC$  é igual a  $\overline{BC} \cdot \overline{OA}$  que é também igual a  $\overline{OC} \cdot \overline{BD}$  e, substituindo  $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}$ , temos

$$(\overline{BA} + \overline{AC}) \cdot \overline{OA} = \overline{OC} \cdot \overline{BD} \Rightarrow 2 \text{sen } \theta \cdot \text{cos } \theta = \text{sen } 2\theta,$$

que demonstra a primeira parte da proposição.

Agora, como  $\overline{OD} = \text{cos } 2\theta$  e  $\overline{DC} = \overline{BC} \cdot \text{cos } \beta$ , substituindo na igualdade  $\overline{OD} + \overline{DC} = 1$ , obtemos

$$\text{cos } 2\theta + \overline{BC} \cdot \text{cos } \beta = 1.$$

Como  $\overline{BC} = 2 \text{sen } \theta$  e, no  $\triangle OAC$ ,  $\text{cos } \beta = \text{sen } \theta$ , segue que

$$\text{cos } 2\theta + 2 \text{sen } \theta \cdot \text{sen } \theta = 1 \Rightarrow \text{cos } 2\theta = 1 - 2 \text{sen}^2 \theta.$$

De  $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$ , vem

$$\text{cos } 2\theta = \text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta - 2 \text{sen}^2 \theta \Rightarrow \text{cos } 2\theta = \text{cos}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta,$$

o que demonstra a segunda parte. □

Utilizando a relação  $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$  e as relações da Proposição 2.3, encontramos as seguintes relações:

1.  $2 \text{cos}^2 \theta = 1 + \text{cos } 2\theta$ ,
2.  $2 \text{sen}^2 \theta = 1 - \text{cos } 2\theta$ .



*Demonstração.*

$$1. \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \Rightarrow \cos^2 \theta - \cos 2\theta = 1 - \cos^2 \theta \Rightarrow 2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta.$$

$$2. \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \Rightarrow \cos 2\theta + \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \Rightarrow 2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta. \quad \square$$

Na sequência, demonstramos duas relações que serão utilizadas no algoritmo arquimediano. São elas:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x} \quad \text{e} \quad 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Verifica-se a primeira utilizando a relação 1 demonstrada acima e a relação a) da Proposição 2.3, ambas para  $\theta = x/2$ . Temos:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cdot \cos x} = \frac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x}.$$

Verifica-se a segunda utilizando a relação 2 demonstrada acima para  $\theta = x/2$ . Temos:

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x = \frac{(1 - \cos x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}} = \frac{(1 - \cos^2 x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

## 2.2 Circunferência

Nesta subseção, apresentamos os principais resultados referentes à circunferência os quais serão úteis para o método de Arquimedes. Utilizamos aqui Barbosa (2004), Lima (2009) e Muniz Neto (2012).

### 2.2.1 Elementos da circunferência

**Definição 2.10.** Sejam  $A$  um ponto no plano e  $r > 0$  um número real. A circunferência de centro  $A$  e raio  $r$  é o conjunto de pontos  $B$  no plano tais que  $\overline{AB} = r$ .

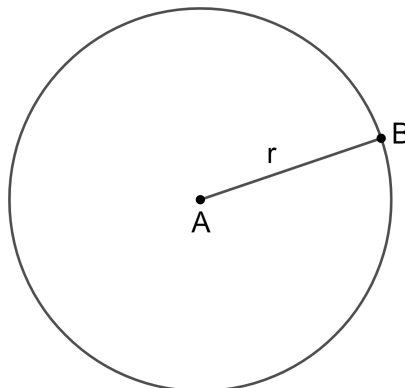


Figura 2.17: Circunferência de centro  $A$  e raio  $R$ .

Chamamos raio a todo segmento que une o centro de uma circunferência a um de seus pontos. Uma corda é o segmento que une dois pontos quaisquer da circunferência e diâmetro é uma corda que passa pelo centro da circunferência. Todo diâmetro divide a circunferência em duas partes iguais chamadas de semicircunferências.

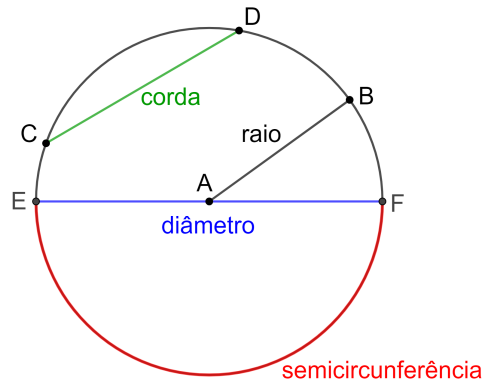


Figura 2.18: Elementos da circunferência.

### 2.2.2 Proposições relativas a circunferência

**Definição 2.11.** Dizemos que uma reta é tangente a uma circunferência se ela intercepta a circunferência em um único ponto, chamado de ponto de tangência.

**Proposição 2.4.** Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

*Demonstração.* Sejam  $\Gamma$  uma circunferência de centro  $O$  e  $t$  tangente a  $\Gamma$  no ponto  $P$ . Considerando  $Q$  o pé da perpendicular a  $t$  baixada de  $O$ , devemos mostrar que  $P$  e  $Q$  coincidem.

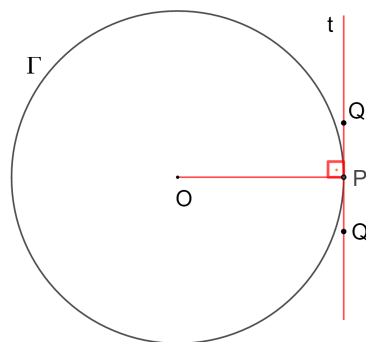


Figura 2.19: Tangente à circunferência.

Supondo que  $P$  e  $Q$  são distintos, segue que  $\overline{OP}$  é a hipotenusa do triângulo retângulo  $\triangle OQP$ . Portanto,  $\overline{OQ} < \overline{OP}$ , e, como  $\overline{OP}$  é raio de  $\Gamma$ , então  $Q$  é um ponto dentro da região limitada pela circunferência. Tomando  $Q' \in t$  tal que  $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$  com  $Q \neq Q'$ , temos  $\triangle OPQ \equiv \triangle OPQ'$  pelo caso LAL. Portanto,  $\overline{OQ} = \overline{OQ'}$ , e, assim,  $Q'$  também é um ponto

dentro da região limitada pela circunferência, mostrando que  $t$  não é tangente. Uma contradição! Logo,  $P$  e  $Q$  coincidem e  $OP$  é perpendicular a  $t$ .  $\square$

**Proposição 2.5.** *Todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo.*

*Demonstração.* Seja  $AB$  o diâmetro de uma semicircunferência de centro  $O$  e seja  $AC$  uma corda.

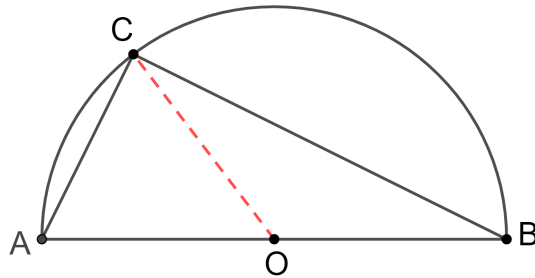


Figura 2.20: Ângulo inscrito numa semicircunferência.

Como  $\overline{OA} = \overline{OC}$ , então  $\triangle OAC$  é isósceles de base  $AC$ ; logo  $\angle O\hat{A}C = \angle O\hat{C}A$ . Da mesma forma, como  $\overline{OB} = \overline{OC}$ , então  $\triangle OBC$  é isósceles de base  $BC$ , logo  $\angle O\hat{B}C = \angle O\hat{C}B$ . Considerando o  $\triangle ABC$  temos

$$\begin{aligned} \angle O\hat{A}C + \angle O\hat{B}C + \angle O\hat{C}A + \angle O\hat{C}B &= 180^\circ \Rightarrow 2\angle O\hat{C}A + 2\angle O\hat{C}B = 180^\circ \\ &\Rightarrow \angle O\hat{C}A + \angle O\hat{C}B = 90^\circ \\ &\Rightarrow \hat{C} = 90^\circ; \end{aligned}$$

logo,  $\triangle ABC$  é retângulo em  $C$ .  $\square$

### 2.2.3 Polígonos regulares inscritos e circunscritos

Vale relembrar, inicialmente, a definição de polígono regular.

**Definição 2.12.** A figura formada por uma sequência de pontos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$  e pelos segmentos  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$  chama-se poligonal. Os pontos são os seus vértices e os segmentos os seus lados.

**Definição 2.13.** Uma poligonal é chamada de polígono se satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $A_n = A_1$ ;
- (ii) os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades;
- (iii) cada vértice é a extremidade de dois lados;
- (iv) dois lados com a mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

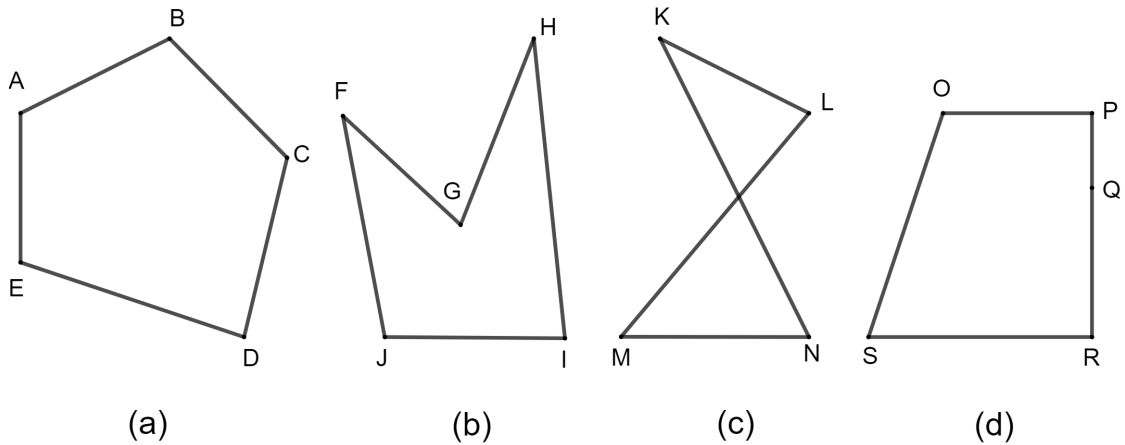


Figura 2.21: (a) e (b) são polígonos.

Um polígono de vértices  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n = A_1$  será representado por  $A_1A_2A_3 \dots A_n$ . Ele possui  $n$  vértices,  $n$  lados e  $n$  ângulos internos e seu perímetro é dado pela soma dos comprimentos de seus lados.

**Definição 2.14.** Se um polígono está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contém os seus lados, então esse polígono é chamado de convexo.

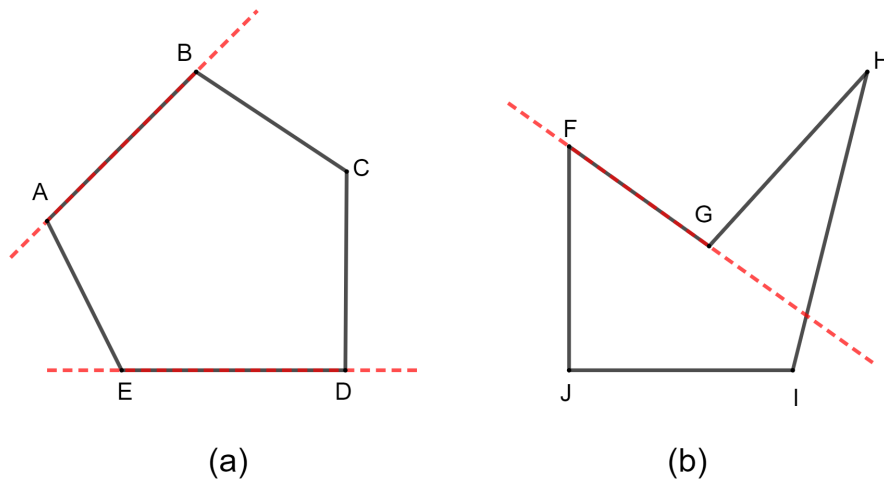


Figura 2.22: (a) Polígono convexo e (b) polígono não convexo.

O nome de um polígono faz referência a seu número  $n$  de lados. Em geral, um polígono  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  chama-se um  $n$ -ângulo. As designações usadas são triângulo para  $n = 3$ , quadrilátero para  $n = 4$ , pentágono para  $n = 5$ , hexágono para  $n = 6$ , heptágono para  $n = 7$ , octógono para  $n = 8$ , nonágono para  $n = 9$  e decágono para  $n = 10$  etc.

**Definição 2.15.** Dizemos que um polígono convexo é regular se ele é equilátero (todos os lados congruentes) e equiângulo (todos os ângulos internos congruentes).

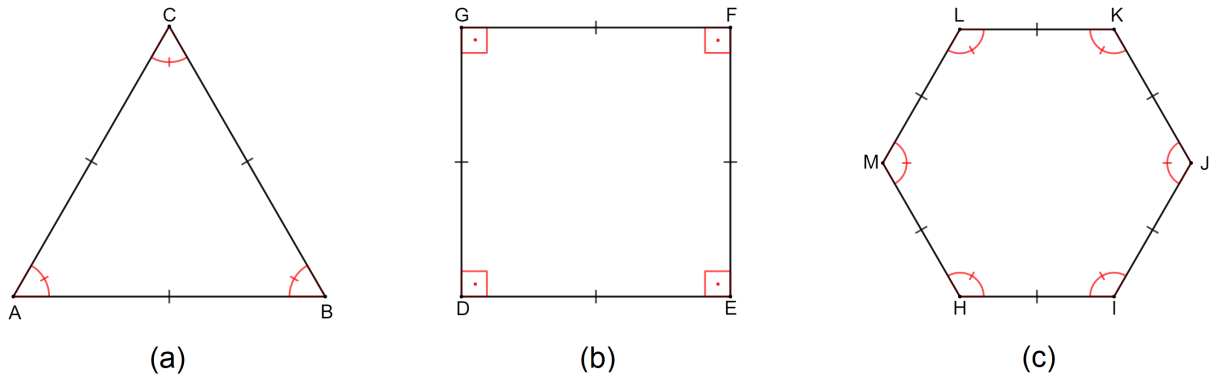


Figura 2.23: (a) Triângulo regular. (b) Quadrilátero regular. (c) Hexágono regular.

**Proposição 2.6.** *Todo polígono regular é inscrito a uma circunferência.*

*Demonstração.* Seja  $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_{n-1}A_n$  um polígono regular (na figura abaixo, à direita, tomamos um hexágono  $ABCDEF$  regular como exemplo). Tracemos uma circunferência  $\Gamma$  pelos pontos  $A_1, A_2$  e  $A_3$ , e seja  $O$  o centro dessa circunferência. Devemos provar que  $\Gamma$  também contém os demais vértices  $A_4, \dots, A_{n-1}, A_n$  do polígono.

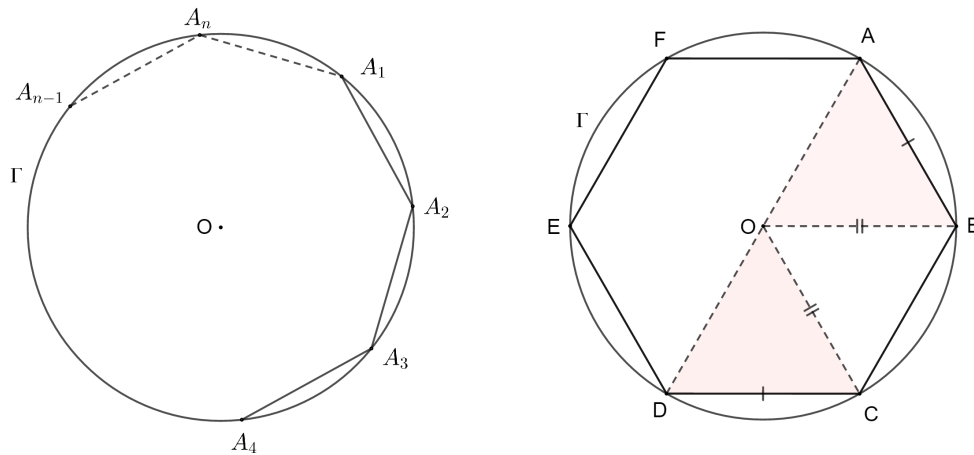


Figura 2.24: Polígono regular inscrito em  $\Gamma$ .

Provemos que  $A_4 \in \Gamma$ : Como  $\overline{OA_2} = \overline{OA_3}$  (raios da circunferência), então  $\triangle OA_2A_3$  é isósceles, e, assim,  $\angle A_2\hat{A}_3O = \angle A_3\hat{A}_2O$ . Sabemos que todos os ângulos internos de um polígono regular são congruentes; portanto,  $\angle A_1\hat{A}_2A_3 = \angle A_2\hat{A}_3A_4$ . Daí,  $\angle A_1\hat{A}_2O = \angle A_4\hat{A}_3O$ . Além disso,  $\overline{A_1A_2} = \overline{A_3A_4}$  (lados congruentes do polígono regular) e  $\overline{OA_2} = \overline{OA_3}$ , então

$$\triangle OA_1A_2 \cong \triangle OA_3A_4 \Rightarrow \overline{OA_1} = \overline{OA_4} \Rightarrow A_4 \in \Gamma.$$

Analogamente, prova-se que  $A_5 \in \Gamma, A_6 \in \Gamma, \dots, A_{n-1} \in \Gamma$  e  $A_n \in \Gamma$ .

Da unicidade da circunferência que passa por  $A_1, A_2$  e  $A_3$  sai a unicidade de  $\Gamma$  contendo  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{n-1}, A_n$ . Daí, todo polígono regular é inscrito a uma circunferência.  $\square$

**Proposição 2.7.** *Todo polígono regular circunscreve uma circunferência.*

*Demonstração.* Seja  $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_{n-1}A_n$  um polígono regular. Pela proposição anterior, ele é inscrito numa circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$ , e  $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = \cdots = \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_nA_1}$  (pois são cordas congruentes de  $\Gamma$ ), e, portanto, equidistam do centro  $O$ .

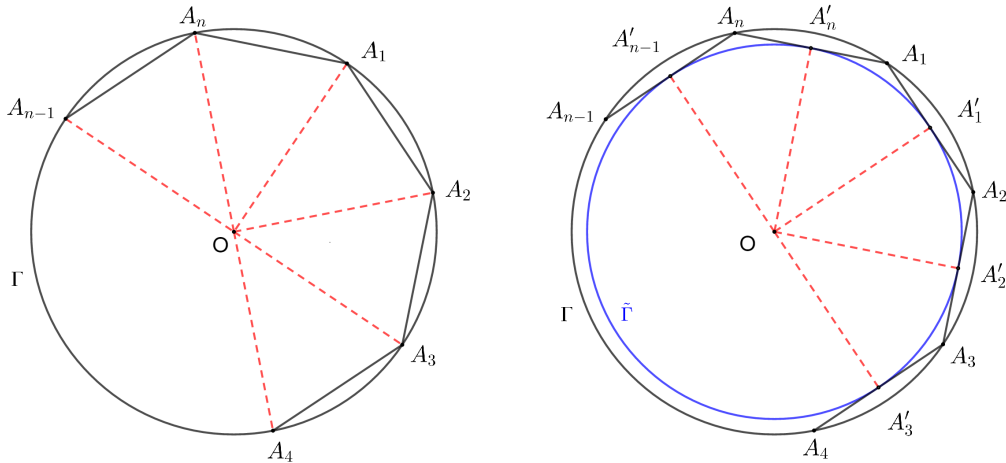


Figura 2.25: Polígono regular circunscreve  $\tilde{\Gamma}$ .

Tomando  $A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_{n-1}$  e  $A'_n$  como respectivos pontos médios de  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$  e  $A_nA_1$ , temos  $\overline{OA'_1} = \overline{OA'_2} = \overline{OA'_3} = \cdots = \overline{OA'_{n-1}} = \overline{OA'_n}$  (distância do centro a cordas congruentes), e, portanto,  $O$  também é centro de uma circunferência  $\tilde{\Gamma}$  que passa pelos pontos  $A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_{n-1}$  e  $A'_n$ . Assim, concluímos que o polígono regular  $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_{n-1}A_n$  está circunscrito na circunferência  $\tilde{\Gamma}$ .

Além disso, como  $OA'_1 \perp A_1A_2, OA'_2 \perp A_2A_3, OA'_3 \perp A_3A_4, \dots, OA'_{n-1} \perp A_{n-1}A_n$  e  $OA'_n \perp A_nA_1$ , então  $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_{n-1}A_n$  tem lados tangentes a  $\tilde{\Gamma}$  nos pontos médios, provando a unicidade de  $\tilde{\Gamma}$ , já que, se existisse outra circunferência inscrita em  $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_{n-1}A_n$  ela passaria exatamente pelos pontos  $A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_{n-1}$  e  $A'_n$  e seria, então, coincidente a  $\tilde{\Gamma}$ .  $\square$

Pelas Proposições 2.6 e 2.7, é possível fazer algumas observações acerca de polígonos regulares:

- (i) Todo polígono regular é formado por  $n$  triângulos isósceles e congruentes.
- (ii) O ângulo central de um polígono regular é o ângulo central da circunferência na qual ele está inscrito que passa por dois vértices consecutivos do polígono.
- (iii) O apótema de um polígono regular é o segmento com extremidades no centro e no ponto médio de um dos lados desse polígono. O apótema é também o raio da circunferência inscrita nesse polígono.

- (iv) Todos os ângulos centrais de um polígono regular são congruentes e sua medida comum é dada pela razão entre o ângulo central da circunferência ( $360^\circ$ ) e o número de lados do polígono ( $n$ ), ou seja:

$$a_c = \frac{360^\circ}{n}.$$

### 2.2.3.1 Inscrição e circunscrição do hexágono e dodecágono regulares

Na subseção anterior vimos que todo polígono regular pode ser inscrito e circunscrito em uma circunferência. Para enriquecer nosso estudo acerca do algoritmo aquirmediano, vejamos, agora, como inscrever e circunscrever um hexágono regular numa circunferência dada e, a partir desse hexágono, inscrever e circunscrever um dodecágono regular nessa mesma circunferência.

Dada uma circunferência  $\Gamma_1$  de centro  $O$  e diâmetro  $AB$ , construímos a circunferência  $\Gamma_2$  com centro em  $B$  e raio  $\overline{OB}$  que intercepta  $\Gamma_1$  nos pontos  $C$  e  $D$ . Com mesmo raio, construímos as circunferências  $\Gamma_3, \Gamma_4$  e  $\Gamma_5$  com centros em  $A, C$  e  $D$ , respectivamente.  $\Gamma_3$  intercepta  $\Gamma_1$  nos pontos  $E$  e  $F$ ;  $\Gamma_4$  intercepta  $\Gamma_1$  nos pontos  $E$  e  $B$ , e  $\Gamma_5$  intercepta  $\Gamma_1$  nos pontos  $F$  e  $B$ , conforme a figura abaixo.

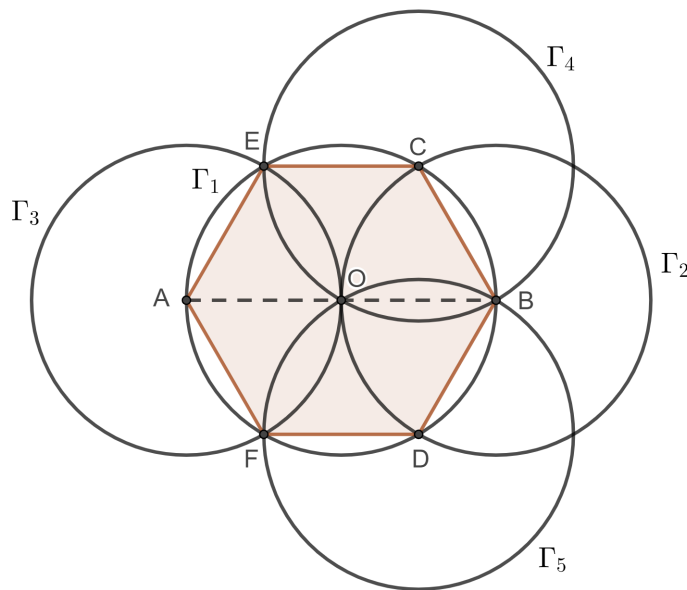


Figura 2.26: Hexágono regular inscrito em  $\Gamma_1$ .

Como, por construção, os raios dessas circunferências são iguais, então  $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{AE} = \overline{AF} = \overline{CE} = \overline{DF}$ . Portanto,  $AFDBCE$  é um hexágono regular inscrito na circunferência  $\Gamma_1$ .

Podemos observar que um hexágono regular inscrito é formado por seis triângulos equiláteros cujos lados medem o mesmo que o raio da circunferência no qual o hexágono está inscrito.

Agora, para circunscrever um hexágono regular numa circunferência dada, consideramos  $AFDBCE$  um hexágono regular inscrito em  $\Gamma_1$ . Traçamos as mediatrizes dos la-

dos de  $AFDBCE$ . Essas mediatrizes são também as alturas e as bissetrizes dos seis triângulos equiláteros congruentes que formam  $AFDBCE$ . Em seguida, traçamos, pelos vértices de  $AFDBCE$ , as tangentes a  $\Gamma_1$  que interceptam as mediatrizes construídas nos pontos  $I, J, K, L, M$  e  $N$ , conforme a direita da figura abaixo.

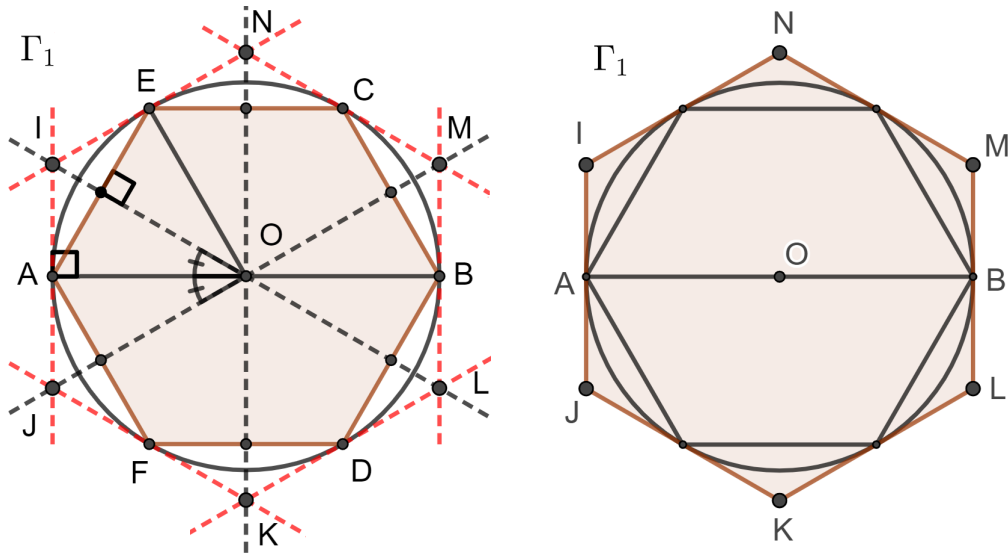


Figura 2.27: Hexágono regular circunscrito em  $\Gamma_1$ .

Como os triângulos  $\triangle AIO$  e  $\triangle AJO$  são congruentes pelo caso ALA, então  $\overline{IA} = \overline{AJ}$ . Pelas congruências dos demais triângulos, prova-se que  $\overline{IA} = \overline{AJ} = \overline{JF} = \overline{FK} = \overline{KD} = \overline{DL} = \overline{LB} = \overline{BM} = \overline{MC} = \overline{CN} = \overline{NE} = \overline{EI}$ . Portanto,  $IJKLMN$  é um hexágono regular que circunscribe  $\Gamma_1$ .

Para a inscrição do dodecágono regular dado  $AFDBCE$  um hexágono regular inscrito na circunferência  $\Gamma_1$ , traçamos as mediatrizes dos lados de  $AFDBCE$  e marcamos os pontos  $G, H, I, J, K$  e  $L$  como os pontos de intersecção entre as mediatrizes e  $\Gamma_1$ .

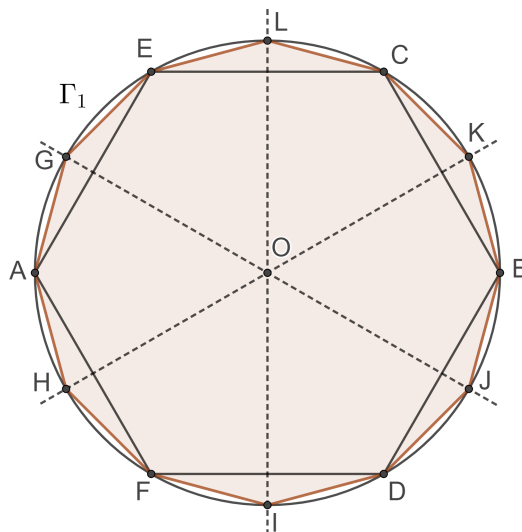


Figura 2.28: Dodecágono regular inscrito em  $\Gamma_1$ .



Como as mediatrizes são também bissetrizes dos seis triângulos equiláteros congruentes que formam  $AFDBCE$  então, os arcos determinados pelos doze pontos em  $\Gamma_1$  são congruentes e  $AHFIDJBKCLEG$  é um dodecágono regular inscrito em  $\Gamma_1$ .

A construção do dodecágono regular circunscrito é análoga à do hexágono regular circunscrito apresentada anteriormente.

#### 2.2.4 Comprimento da circunferência

**Proposição 2.8.** *Em uma circunferência qualquer, o perímetro de qualquer polígono regular que a circunscribe é maior que o perímetro de qualquer polígono regular nela inscrito.*

*Demonstração.* Seja  $\Gamma$  uma circunferência de raio  $R$ . Consideremos polígonos regulares de  $2^n M$  lados (com  $M \geq 3$  e  $n \geq 0$  inteiros) e denotemos por  $L_{2^n M}$  e  $l_{2^n M}$  os respectivos comprimentos dos lados desses polígonos.

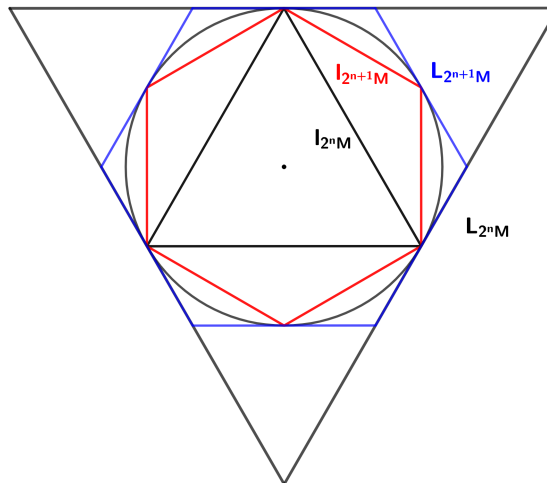


Figura 2.29: Perímetros de polígonos inscritos e circunscritos.

Sejam  $P_{2^n M}$  o perímetro dos polígonos circunscritos e  $p_{2^n M}$  o perímetro dos polígonos inscritos. Então

$$P_{2^n M} = 2^n M \cdot L_{2^n M} \quad \text{e} \quad p_{2^n M} = 2^n M \cdot l_{2^n M}.$$

Sabemos que a medida de qualquer lado de um triângulo é menor que a soma da medida dos outros dois lados. Assim,  $L_{2^{n+1} M} > l_{2^{n+1} M}$ ,  $2l_{2^{n+1} M} > l_{2^n M}$  e também  $L_{2^n M} > 2L_{2^{n+1} M}$ . Portanto

$$P_3 > P_6 > P_{12} > P_{2^n M} > P_{2^{n+1} M} > \cdots > p_{2^{n+1} M} > p_{2^n M} > p_{12} > p_6 > p_3.$$

O argumento adapta-se para qualquer  $M \geq 3$ . □

**Proposição 2.9.** *Dada uma circunferência qualquer e um  $\epsilon > 0$ , arbitrário, existem dois polígonos regulares, um circunscrito e outro inscrito, tal que a diferença entre os perímetros desses polígonos é menor que  $\epsilon$ .*

*Demonstração.* Seja  $\Gamma$  uma circunferência e sejam  $P_n$  e  $p_n$ , respectivamente, os perímetros dos polígonos regulares circunscritos e inscritos em  $\Gamma$  e  $R$  e  $a_n$  os respectivos apótemas desses polígonos, conforme a figura abaixo.

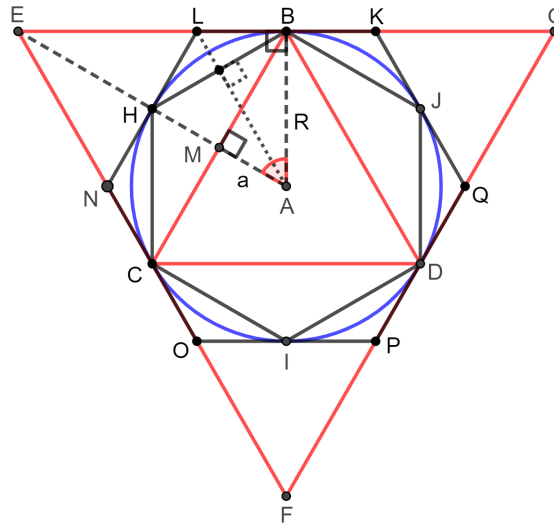


Figura 2.30: Diferença entre os perímetros de polígonos inscritos e circunscritos.

Os triângulos  $\triangle BAE$  e  $\triangle MAB$  são semelhantes pelo caso AA, donde

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BM}} = \frac{R}{a} \Rightarrow \frac{P_3}{p_3} = \frac{R}{a_3}.$$

Analogamente, obtemos

$$\frac{P_n}{p_n} = \frac{R}{a_n}.$$

Subtraindo 1 em ambos os lados dessa igualdade, temos

$$\frac{P_n - p_n}{p_n} = \frac{R - a_n}{a_n} \Rightarrow P_n - p_n = \frac{P_n}{R} \cdot (R - a_n).$$

Pela proposição anterior,  $P_3 = 6R\sqrt{3} > P_n > p_n$  com  $n > 3$ ; logo

$$\frac{P_n}{R} \cdot (R - a_n) < \frac{6R\sqrt{3}}{R} \cdot (R - a_n).$$

Segue que

$$P_n - p_n < \frac{6R\sqrt{3}}{R} \cdot (R - a_n) \Rightarrow P_n - p_n < 6\sqrt{3} \cdot (R - a_n).$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ ,  $R - a_n$  tende a zero. Portanto, existe um  $n$  tal que  $P_n - p_n < \epsilon$ .  $\square$

Antes de prosseguirmos, precisamos recordar algumas definições e fatos da Análise. Para detalhes, recomendamos ao leitor consultar Lima (2009).

O **supremo** de um subconjunto limitado superiormente e não-vazio  $X \subset \mathbb{R}$  é, por definição, a menor de suas cotas superiores e é denotado por  $\sup X$ , isto é, valem as seguintes duas

condições

- (i)  $x \leq \sup X$  para todo  $x \in X$ ;
- (ii) Se  $z \in \mathbb{R}$  é tal que  $x \leq z$  para todo  $x \in X$ , então  $\sup X \leq z$ .

De maneira análoga, definimos o **ínfimo** de um subconjunto limitado inferiormente e não-vazio  $Y \subset \mathbb{R}$  é, por definição, a maior de suas cotas inferiores. Este ínfimo é denotado por  $\inf Y$ . A existência de supremo para todo subconjunto limitado superiormente e não-vazio da reta real constitui o Axioma Fundamental da Análise Matemática. Observamos que não é preciso estipular também a existência de ínfimo para todo subconjunto limitado inferiormente e não-vazio da reta, pois isso segue-se imediatamente do Axioma Fundamental.

Precisamos do seguinte

**Lema 2.1.** *Sejam  $X, Y \subset \mathbb{R}$  tais que, para todo  $x \in X$  e todo  $y \in Y$ , temos  $x \leq y$ . Então  $\sup X \leq \inf Y$ . A fim de ser  $\sup X \leq \inf Y$  é necessário e suficiente que, para todo  $\epsilon > 0$ , existam  $x \in X$  e  $y \in Y$  tais que  $y - x < \epsilon$ .*

*Demonstração.* Todo  $y \in Y$  é cota superior de  $X$ ; logo  $\sup X \leq y$ . Isso mostra que  $\sup X$  é cota inferior de  $Y$ ; logo  $\sup X \leq \inf Y$ . Se a desigualdade fosse estrita, então tomando  $\epsilon = \inf Y - \sup X > 0$ , teríamos  $y - x \geq \epsilon$  para quaisquer  $x \in X, y \in Y$ . Reciprocamente, se  $\sup X = \inf Y$ , então, para todo  $\epsilon > 0$ ,  $\sup X - \epsilon/2$  não é cota superior de  $X$  e  $\inf Y + \epsilon/2$  não é cota inferior de  $Y$ , donde existem  $x \in X$  e  $y \in Y$  tais que  $\sup X - \epsilon/2 < x \leq \sup X = \inf Y \leq y < \inf Y + \epsilon/2$ . Segue-se que  $y - x < \epsilon$ .  $\square$

Seja  $\Gamma$  uma circunferência. Dado  $\epsilon > 0$ , sabemos pela Proposição 2.9 que existem um polígono regular inscrito com perímetro  $p_n$  e um polígono regular circunscrito com perímetro  $P_n$  tais que  $P_n - p_n < \epsilon$ . Sobre todo par de tais polígonos, a Proposição 2.8 já nos dizia que  $p_n \leq P_n$ . Essas informações junto com o Lema 2.1 justificam a seguinte

**Definição 2.16.** Dada uma circunferência  $\Gamma$  qualquer, definimos seu comprimento  $\ell(\Gamma)$  por

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &:= \sup\{\text{perímetro}(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é um polígono regular inscrito em } \Gamma\} \\ &= \inf\{\text{perímetro}(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ é um polígono regular circunscrito a } \Gamma\}. \end{aligned}$$

**Proposição 2.10.** *A razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e seu diâmetro é um valor constante representado por  $\pi$ .*

*Demonstração.* Sejam  $C$  e  $C'$  os comprimentos de duas circunferências de raios  $R$  e  $R'$ , respectivamente, e consideremos polígonos regulares de  $n$  lados inscritos e circunscritos nessas circunferências.

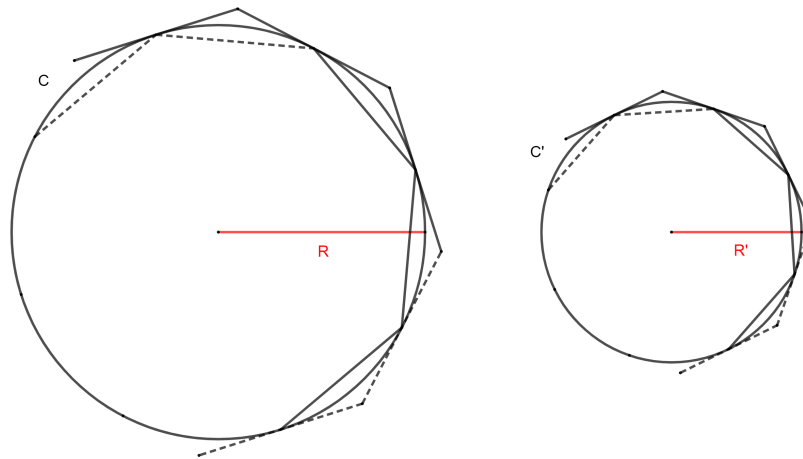


Figura 2.31: Comprimento da circunferência.

Denotando por  $p_n$  e  $p'_n$  e  $P_n$  e  $P'_n$  os perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos nos círculos de comprimentos  $C$  e  $C'$ , respectivamente. Por semelhança entre os polígonos regulares, temos

$$\frac{p_n}{p'_n} = \frac{R}{R'} \quad \text{e} \quad \frac{P_n}{P'_n} = \frac{R}{R'}.$$

Pela Proposição 2.8 e utilizando a definição de comprimento de circunferência, temos

$$p_n < C < P_n \quad \text{e} \quad p'_n < C' < P'_n.$$

Assim,

$$\frac{p_n}{2R} < \frac{C}{2R} < \frac{P_n}{2R} \quad \text{e} \quad \frac{p'_n}{2R'} < \frac{C'}{2R'} < \frac{P'_n}{2R'}.$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'},$$

o que mostra que a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro é a mesma, independente da circunferência que se tenha tomado. Chamando essa razão de  $\pi$ , temos

$$\frac{C}{2R} = \pi \Rightarrow C = 2\pi R. \quad \square$$

Então o número  $\pi$  equivale ao comprimento de uma semicircunferência de raio 1 e também ao comprimento de uma circunferência de diâmetro 1.

**Definição 2.17.** Seja  $c$  a medida do comprimento de um arco, com  $c > 0$ ; a medida em radiano do ângulo central  $\alpha$  determinado por esse arco é dada pela razão entre o comprimento desse arco e a medida do raio da circunferência. Ou seja,

$$\alpha = \frac{c}{R}.$$

Como o comprimento de uma semicircunferência é  $\pi R$ , temos

$$\alpha = \frac{\pi R}{R} = \pi \text{ rad}.$$

Como o ângulo da semicircunferência equivale a  $180^\circ$ , então  $180^\circ = \pi \text{ rad}$ .

### 3 MÉTODO ARQUIMEDIANO PARA APROXIMAÇÃO DE $\pi$

Com base nos conhecimentos adquiridos até aqui, finalmente estamos em condições de descrever e formalizar o método poligonal de Arquimedes para aproximação da constante  $\pi$  contido na Proposição 3 de sua obra *A medida de um círculo*. A demonstração aqui apresentada é baseada em Miel (1983). O conteúdo da referida proposição de Arquimedes é o seguinte:

**Proposição 3.1.** *A razão entre a circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro é menor que  $3 + 1/7$ , mas maior que  $3 + 10/71$ .*

*Demonstração.* Consideremos  $AC$  a tangente em  $A$  de um semicírculo de centro  $O$  e diâmetro  $AB$  e tracemos a bissetriz  $OD$  do ângulo  $\hat{A}OC$ , conforme a figura abaixo.

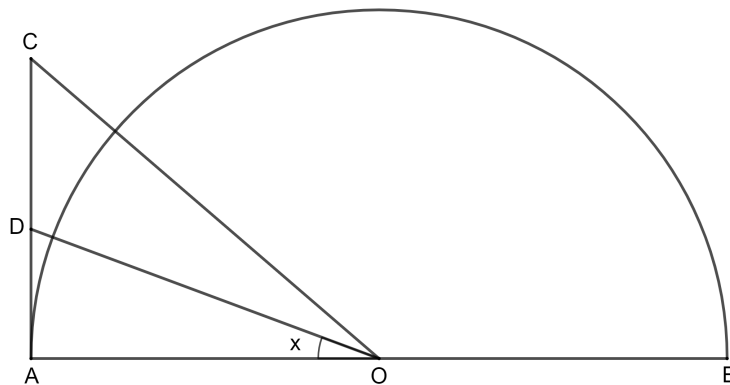


Figura 3.1: Semicírculo.

Pelo Teorema da Bissetriz Interna, temos

$$\frac{OC}{OA} = \frac{DC}{AD}.$$

Somando 1 em ambos os lados desta última equação, obtemos

$$\frac{OA + OC}{OA} = \frac{AD + DC}{AD} \Rightarrow \frac{OA + OC}{AC} = \frac{OA}{AD}. \quad (3.1)$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$(OD)^2 = (OA)^2 + (AD)^2. \quad (3.2)$$

Com relação a  $\triangle OAD$ , escrevamos

$$\gamma_n = \frac{OA}{AD} \quad e \quad \eta_n = \frac{OD}{AD}. \quad (3.3)$$

Com relação a  $\triangle OAC$ , escrevamos

$$\gamma_{n-1} = \frac{OA}{AC} \quad e \quad \eta_{n-1} = \frac{OC}{AC}. \quad (3.4)$$

Substituindo (3.3) e (3.4) em (3.1), obtemos

$$\gamma_n = \gamma_{n-1} + \eta_{n-1}, \quad (3.5)$$

Dividindo todos os termos da equação (3.2) por  $(AD)^2$  e fazendo a substituição das relações (3.3) e (3.4), obtemos

$$\eta_n^2 = \gamma_n^2 + 1 \Rightarrow \eta_n = \sqrt{\gamma_n^2 + 1}. \quad (3.6)$$

Agora, construímos a mediana do  $\triangle OAD$  em relação ao vértice  $A$  a qual encontra o ponto médio de  $OD$ . Traçando o segmento  $AE$  (com  $E$  pertencente à semicircunferência) passando por esse ponto médio e traçando o segmento  $BE$ , obtemos o  $\triangle ABE$  retângulo inscrito na semicircunferência, conforme a figura abaixo.

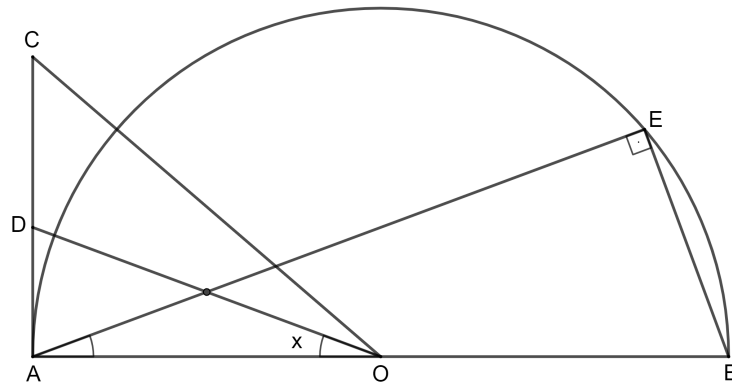


Figura 3.2: Triângulo  $ABE$  inscrito na semicircunferência

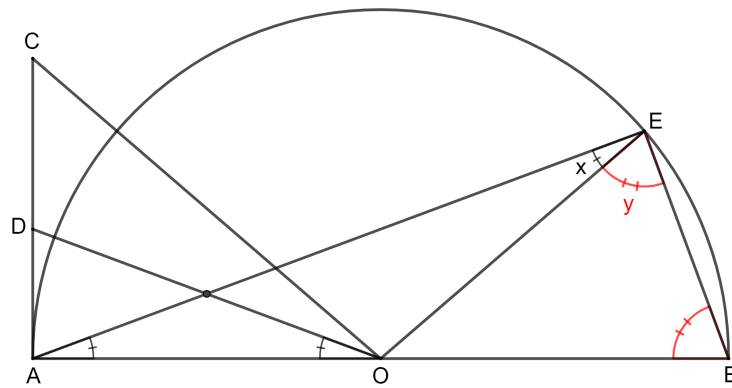
Como  $\triangle OAD$  também é retângulo, pois  $AD$  pertence à tangente, e, pelas propriedades de triângulo retângulo, a mediana que parte do ângulo reto divide a hipotenusa em dois segmentos de mesmo tamanho da mediana, então  $\angle B\hat{A}E \equiv \angle A\hat{O}D$ . Além disso,

$$AB = 2(OA) \Rightarrow \frac{AB \cdot AD}{OA} = 2(AD) = \frac{AB}{\gamma_n} \quad (3.7)$$

e, por semelhança de triângulos,

$$\frac{AD}{OD} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow BE = \frac{AB}{\eta_n}. \quad (3.8)$$

Traçando o segmento  $OE$  cuja medida equivale ao raio da semicircunferência, segue que  $\overline{OE} = \overline{OA} = \overline{OB}$ , conforme a figura abaixo.

Figura 3.3: Lado  $BE$ 

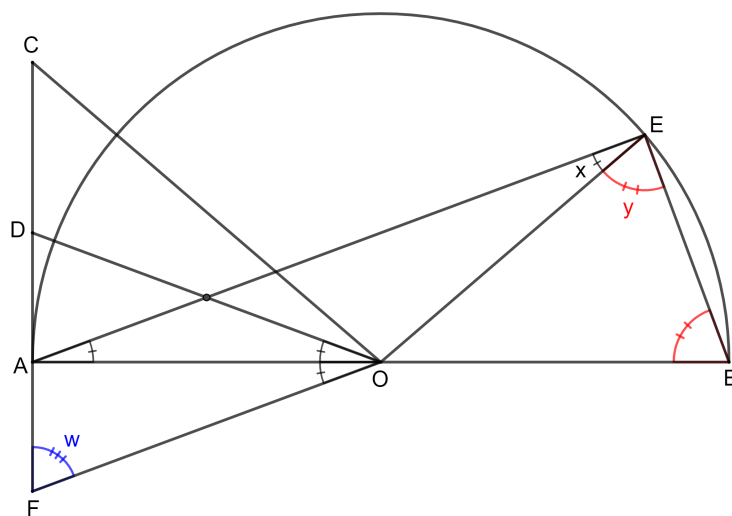
Como  $\triangle OAE$  e  $\triangle OBE$  são isósceles, então  $\angle O\hat{A}E \equiv \angle A\hat{E}O$  e  $\angle O\hat{E}B \equiv \angle E\hat{B}O$ . Além disso, como  $\triangle ABE$  é retângulo em  $E$ , então  $x + y = \pi/2$  ou, equivalentemente,  $y = \pi/2 - x$ .

Para  $BE$  ser a medida do lado de um polígono regular de  $2^n M$  lados inscrito numa circunferência de diâmetro  $AB$ ,  $\angle BOE$  deve ser o ângulo central desse polígono e, por definição, deve medir  $2\pi/(2^n M)$ . Assim,

$$2(\pi/2 - x) + \frac{2\pi}{2^n M} = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2^n M},$$

mostrando que, para  $BE$  ser o lado de um polígono regular de  $2^n M$  lados inscrito nessa circunferência,  $x$  deve medir  $\pi/(2^n M)$ .

Agora, traçando  $\overline{AF} \equiv \overline{AD}$ , tal que  $D$  e  $F$  sejam equidistantes a  $A$  e pertençam à mesma reta e, traçando o segmento  $OF$ , temos o  $\triangle ODF$  isósceles, conforme a figura abaixo.

Figura 3.4: Lado  $2(AD)$ 

Como, pelo caso LAL,  $\triangle OAD \equiv \triangle OAF$ , então  $\angle A\hat{O}D \equiv \angle F\hat{O}A$ . Considerando  $\angle O\hat{F}A = w$ , têm-se que  $x + w + \pi/2 = \pi \Rightarrow w = \pi/2 - x$ . E, de forma semelhante ao caso



anterior, prova-se que, para  $\overline{AD} + \overline{AF} = 2(\overline{AD})$  ser a medida do lado de polígono regular de  $2^n M$  lados circunscrito numa circunferência de diâmetro  $AB$ ,  $x$  deve medir  $\pi/(2^n M)$ .

Dessa forma, concluímos que, se  $\angle A\hat{O}D$  e  $\angle B\hat{A}E$  medirem  $\pi/(2^n M)$  com  $M \geq 3$  inteiro fixo e  $n \geq 0$ , então  $2 \cdot \overline{AD}$  e  $\overline{BE}$  são, respectivamente, as medidas dos lados de  $2^n M$ -ângulos regulares circunscritos e inscritos em uma mesma circunferência de diâmetro  $AB$ .

Considerando  $x = \pi/(2^n M)$ , denotando por  $P_{2^n M}$  o perímetro do polígono circunscrito, por  $Q_{2^n M}$  o perímetro do polígono inscrito, considerando que a circunferência tem diâmetro  $\overline{AB} = 1$  e utilizando as relações (3.7) e (3.8), temos

$$P_{2^n M} = 2^n M \cdot 2(\overline{AD}) \Rightarrow P_{2^n M} = \frac{2^n M}{\gamma_n} \quad (3.9)$$

e

$$Q_{2^n M} = 2^n M \cdot \overline{BE} \Rightarrow Q_{2^n M} = \frac{2^n M}{\eta_n}. \quad (3.10)$$

As sequências  $\{P_{2^n M}\}$  e  $\{Q_{2^n M}\}$  são aproximações por excesso e por falta, respectivamente, para o comprimento da circunferência e convergem para esse comprimento quando  $n \rightarrow \infty$ . Como o raio mede  $1/2$ , o comprimento da circunferência mede  $\pi$ . Ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{2^n M} = \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2^n M}.$$

Para estimar esse limite comum, Arquimedes iniciou seus cálculos com um hexágono regular circunscrito e com um hexágono regular inscrito em uma mesma circunferência de diâmetro 1 e dobrou o número de lados desse polígono quatro vezes, ou seja,  $M = 6$  e  $n = 0, 1, 2, 3$  e 4. Sabemos que o lado do hexágono circunscrito mede  $1/\sqrt{3}$ . Assim, utilizando (3.3) para  $n = 0$ , encontramos

$$\gamma_0 = \frac{OA}{AD} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad \eta_0 = \frac{OD}{AD} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = 2.$$

Utilizando as equações (3.5) e (3.6) para calcular  $\gamma_n$  e  $\eta_n$  para  $n = 1, 2, 3$  e 4, temos

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_0 + \eta_0 \approx 3,73205 & \eta_1 &= \sqrt{\gamma_1^2 + 1} \approx 3,86370 \\ \gamma_2 &\approx 7,59575 & \eta_2 &\approx 7,66130 \\ \gamma_3 &\approx 15,25705 & \eta_3 &\approx 15,28979 \\ \gamma_4 &\approx 30,54684 & \eta_4 &\approx 30,56320. \end{aligned}$$

Agora, substituindo nas relações (3.9) e (3.10) para encontrar os perímetros, temos

$$\begin{aligned}
 P_6 &= \frac{6}{\sqrt{3}} \approx 3,46410 & Q_6 &= \frac{6}{2} = 3 \\
 P_{12} &\approx 3,21539 & Q_{12} &\approx 3,10583 \\
 P_{24} &\approx 3,15966 & Q_{24} &\approx 3,13263 \\
 P_{48} &\approx 3,14609 & Q_{48} &\approx 3,13935 \\
 P_{96} &\approx 3,14271 & Q_{96} &\approx 3,14103
 \end{aligned}$$

mostrando que

$$3,14271 > \pi > 3,14103. \quad (3.11)$$

Devido à condição da aritmética na época de Arquimedes, ele trabalhou com aproximações e, para controlar os efeitos dos arredondamentos, ele fez mais duas avaliações: uma com os valores abaixo dos valores reais obtendo os valores  $\underline{\gamma}_n$  e  $\underline{\eta}_n$  e outra com os valores acima dos valores reais obtendo os valores  $\overline{\gamma}_n$  e  $\overline{\eta}_n$ . Na Tabela 1, encontram-se esses valores em forma fracionária e decimal aproximada. Os números resultantes satisfazem, portanto, as desigualdades:

$$\overline{\gamma}_n > \gamma_n > \underline{\gamma}_n \quad e \quad \overline{\eta}_n > \eta_n > \underline{\eta}_n$$

**Tabela 1** - Aproximações de  $\gamma_n$  e  $\eta_n$

$n$	$\underline{\gamma}_n$	$\gamma_n$	$\overline{\gamma}_n$	$\underline{\eta}_n$	$\eta_n$	$\overline{\eta}_n$
0	$\frac{265}{153}$ $\approx 1.73203$	1.73205	$\frac{1351}{780}$ $\approx 1.73205$	$\frac{306}{153}$ $\approx 2.00000$	2.00000	$\frac{1560}{780}$ $\approx 2.00000$
1	$\frac{571}{153}$ $\approx 3.73203$	3.73205	$\frac{2911}{780}$ $\approx 3.73205$	$\frac{591 + \frac{1}{8}}{153}$ $\approx 3.86356$	3.86370	$\frac{3013 + \frac{3}{4}}{780}$ $\approx 3.86378$
2	$\frac{1162 + \frac{1}{8}}{153}$ $\approx 7.59559$	7.59575	$\frac{1823}{240}$ $\approx 7.59583$	$\frac{1172 + \frac{1}{8}}{153}$ $\approx 7.66095$	7.66130	$\frac{1838 + \frac{9}{11}}{240}$ $\approx 7.66174$
3	$\frac{2334 + \frac{1}{4}}{153}$ $\approx 15.25654$	15.25705	$\frac{1007}{66}$ $\approx 15.25758$	$\frac{2339 + \frac{1}{4}}{153}$ $\approx 15.28922$	15.28979	$\frac{1009 + \frac{1}{6}}{66}$ $\approx 15.29040$
4	$\frac{4673 + \frac{1}{2}}{153}$ $\approx 30.54575$	30.54684	$\frac{2016 + \frac{1}{6}}{66}$ $\approx 30.54798$	$\frac{4676 + \frac{1}{266}}{153}$ $\approx 30,56211$	30.56320	$\frac{2017 + \frac{1}{4}}{66}$ $\approx 30.56439$

Fonte: Adaptada de MIEL (1983).

Para obter esses resultados encontrados na tabela acima, utiliza-se um método de aproximações racionais. No livro *As obras de Arquimedes*, encontra-se um possível método adotado por Arquimedes para a aproximação da  $\sqrt{3}$  e das demais raízes quadradas envolvidas nesses cálculos.

As estimativas para  $\pi$  seguem das divisões

$$\overline{P}_{96} = \frac{96}{\gamma_4} \quad e \quad \underline{Q}_{96} = \frac{96}{\eta_4} \quad (3.12)$$

e, substituindo pelas aproximações encontradas, na Tabela 1

$$\overline{P}_{96} = \frac{96}{\frac{4673 + \frac{1}{2}}{153}} = \frac{96 \cdot 153 - 667 - \frac{1}{2}}{4673 + \frac{1}{2}} + \frac{667 + \frac{1}{2}}{4673 + \frac{1}{2}} = 3 + \frac{667 + \frac{1}{2}}{4673 + \frac{1}{2}} < 3 + \frac{1}{7}$$

e

$$\underline{Q}_{96} = \frac{96}{\frac{2017 + \frac{1}{4}}{66}} = \frac{96 \cdot 66 - 284 - \frac{1}{4}}{2017 + \frac{1}{4}} + \frac{284 + \frac{1}{4}}{2017 + \frac{1}{4}} = 3 + \frac{284 + \frac{1}{4}}{2017 + \frac{1}{4}} > 3 + \frac{10}{71}$$

Através desse uso sistemático de arredondamento Arquimedes obteve o intervalo  $[\underline{Q}_{96}, \overline{P}_{96}] \supset [Q_{96}, P_{96}]$ . Portanto,

$$3 + \frac{1}{7} > \pi > 3 + \frac{10}{71}. \quad \square$$

### 3.1 Algoritmo Arquimediano

Substituindo (3.5) em  $\eta_n = \sqrt{\gamma_n^2 + 1}$ , obtemos

$$\eta_n = \sqrt{(\gamma_{n-1} + \eta_{n-1})^2 + 1}.$$

Substituindo as relações em (3.4), encontramos

$$\eta_n = \sqrt{\left(\frac{OA}{AC} + \frac{OC}{AC}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{(OA)^2 + 2(OA)(OC) + (OC)^2 + (AC)^2}{(AC)^2}}.$$

Por Pitágoras,  $(OA)^2 + (AC)^2 = (OC)^2$ , e, daí,

$$\eta_n = \sqrt{\frac{2(OC)(OA + OC)}{(AC)^2}}.$$

Utilizando (3.1), chegamos a

$$\eta_n = \sqrt{2 \cdot \frac{OC}{AC} \cdot \frac{OA}{AD}}.$$

Por fim, utilizando (3.3) e (3.4), encontramos

$$\eta_n = \sqrt{2 \cdot \gamma_n \cdot \eta_{n-1}}. \quad (3.13)$$

Agora, por (3.9) e (3.10), vemos que

$$\gamma_{n-1} = \frac{2^{n-1}M}{P_{2^{n-1}M}} \quad \text{e} \quad \eta_{n-1} = \frac{2^{n-1}M}{Q_{2^{n-1}M}}. \quad (3.14)$$

Substituindo (3.14) em (3.5), obtemos

$$\gamma_n = \frac{2^{n-1}M}{P_{2^{n-1}M}} + \frac{2^{n-1}M}{Q_{2^{n-1}M}}$$

e, substituindo em (3.9), temos

$$P_{2^n M} = \frac{2^n M}{2^{n-1}M \left( \frac{1}{P_{2^{n-1}M}} + \frac{1}{Q_{2^{n-1}M}} \right)} = \frac{2}{\frac{Q_{2^{n-1}M} + P_{2^{n-1}M}}{P_{2^{n-1}M} \cdot Q_{2^{n-1}M}}} \Leftrightarrow P_{2^n M} = \frac{2P_{2^{n-1}M} \cdot Q_{2^{n-1}M}}{Q_{2^{n-1}M} + P_{2^{n-1}M}},$$

que é a primeira relação de recorrência do algoritmo arquimediano.

A segunda relação de recorrência é encontrada substituindo (3.13) em (3.10) e utilizando as relações em (3.14), fornecendo

$$Q_{2^n M} = \frac{2^n M}{\sqrt{2 \cdot \frac{2^n M}{P_{2^n M}} \cdot \frac{2^{n-1}M}{Q_{2^{n-1}M}}}} = \frac{2^n M}{\sqrt{\frac{(2^n M)^2}{P_{2^n M} \cdot Q_{2^{n-1}M}}}} \Leftrightarrow Q_{2^n M} = \sqrt{P_{2^n M} \cdot Q_{2^{n-1}M}}.$$

Obtemos, assim, as duas relações de recorrência conhecidas como o algoritmo de Arquimedes para o cálculo de  $\pi$ . São elas, em resumo:

$$P_{2^n M} = \frac{2P_{2^{n-1}M} \cdot Q_{2^{n-1}M}}{Q_{2^{n-1}M} + P_{2^{n-1}M}} \quad \text{e} \quad Q_{2^n M} = \sqrt{P_{2^n M} \cdot Q_{2^{n-1}M}}. \quad (3.15)$$

### 3.1.1 Notação trigonométrica

O algoritmo de Arquimedes apresentado aqui foi obtido de forma puramente geométrica. Apresentamos, a seguir, uma tradução do algoritmo arquimediano em termos de Trigonometria.

Retomemos nossas considerações prévias e recordemos as relações (3.9) e (3.10) para os cálculos de perímetro dos polígonos com os quais trabalhamos. Ora, todo polígono regular é formado por  $n$  triângulos isósceles e congruentes entre si, em que  $n$  é a quantidade de lados desse polígono.

Diante disso, analisando o primeiro caso, referente ao polígono circunscrito de lado  $2(\overline{AD})$ , observa-se o  $\triangle OFD$  isósceles, conforme a figura abaixo.

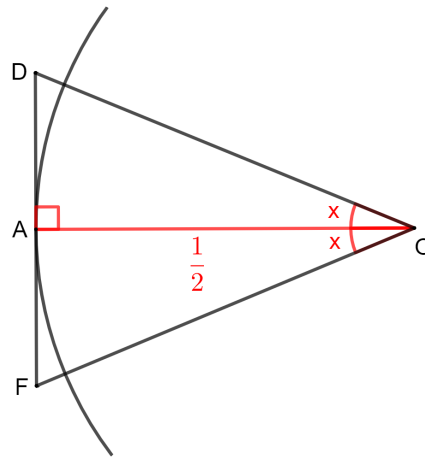


Figura 3.5: Polígono circunscrito.

Como  $\triangle OAD$  é retângulo e, por definição, a tangente de um ângulo num triângulo retângulo é dada pela razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a esse ângulo, então  $\operatorname{tg} x = 2 \cdot \overline{AD}$ . Além disso, como  $x = \pi/(2^n M)$ , por (3.9), temos

$$P_{2^n M} = 2^n M \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n M}. \quad (3.16)$$

Agora, analisando o segundo caso, referente ao polígono inscrito de lado  $BE$ , observamos que o  $\triangle OBE$  é isósceles, conforme a figura abaixo.

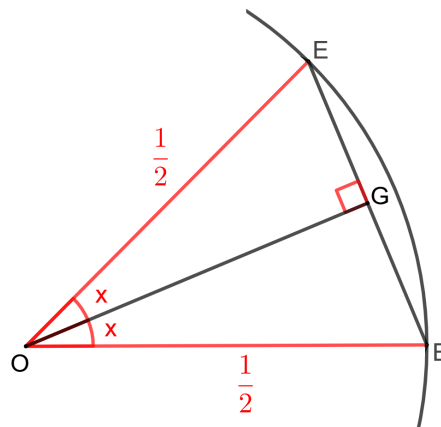


Figura 3.6: Polígono inscrito.

Como  $\triangle OGE$  é retângulo e, por definição, o seno de um ângulo num triângulo retângulo é dado pela razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa, então  $\operatorname{sen} x = 2 \cdot \overline{EG}$ . Além disso, como  $2 \cdot \overline{EG} = \overline{BE}$  e  $x = \pi/(2^n M)$ , por (3.10), temos

$$Q_{2^n M} = 2^n M \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^n M}. \quad (3.17)$$

Recordemos as seguintes relações trigonométricas:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{sen} \theta} \quad (3.18)$$

e

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{2}. \quad (3.19)$$

Como  $\theta/2 = x$ , substituindo (3.18) em (3.16), temos

$$P_{2^n M} = 2^n M \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n-1} M} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^{n-1} M}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n-1} M} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^{n-1} M}} = \frac{2 \cdot 2^{n-1} M \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n-1} M} \cdot 2^{n-1} M \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^{n-1} M}}{2^{n-1} M \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n-1} M} + 2^{n-1} M \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^{n-1} M}}$$

ou seja,

$$P_{2^n M} = \frac{2P_{2^{n-1} M} \cdot Q_{2^{n-1} M}}{Q_{2^{n-1} M} + P_{2^{n-1} M}},$$

que é a primeira relação do algoritmo arquimediano.

Agora, elevando todos os termos de (3.17) ao quadrado e utilizando (3.19) com  $\theta/2 = x$ , obtemos

$$(Q_{2^n M})^2 = (2^n M)^2 \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2^{n-1} M} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n M}}{2} = 2^{n-1} M \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^{n-1} M} \cdot 2^n M \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n M}$$

ou seja,

$$Q_{2^n M} = \sqrt{P_{2^n M} \cdot Q_{2^{n-1} M}},$$

que é a segunda relação do algoritmo arquimediano.

### 3.1.1.1 Limite dos perímetros

Utilizando as fórmulas trigonométricas (3.16) e (3.17) e nossos conhecimentos de Cálculo, argumentamos aqui que as sequências de perímetros  $P_{2^n M}$  e  $Q_{2^n M}$  possuem limite comum igual a  $\pi$ .

Sabemos que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \theta}{\theta}.^1 \quad (3.20)$$

Devemos provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n M \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n M} = \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n M \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^n M}.$$

<sup>1</sup>Para uma demonstração da primeira igualdade, com argumentos bastante geométricos, recomendamos ver Simmons (1996).

Temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n M \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n M} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n M}}{\frac{\pi}{2^n M}} = \pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n M}}{\frac{\pi}{2^n M}}.$$

Ora,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n M}}{\frac{\pi}{2^n M}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Logo,

$$\pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n M}}{\frac{\pi}{2^n M}} = \pi \cdot 1 = \pi.$$

O outro limite é tratado de forma análoga. De fato:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n M \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^n M} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^n M}}{\frac{\pi}{2^n M}} = \pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2^n M}}{\frac{\pi}{2^n M}}.$$

Temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2^n M}}{\frac{\pi}{2^n M}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Segue que

$$\pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2^n M}}{\frac{\pi}{2^n M}} = \pi \cdot 1 = \pi.$$

### 3.1.2 Aproximação de $\pi$ pelo algoritmo arquimediano: tabela de estimativas numéricas

Em seus cálculos, Arquimedes realizou apenas 4 iterações e obteve  $\pi$  com uma precisão de 2 casas decimais. Apresentamos, na Tabela 2, uma continuação dos cálculos da Página 39 e realizando 33 iterações do algoritmo arquimediano para calcular os perímetros dos polígonos de  $2^n M$  lados, com  $M = 6$  e  $n = [0, 33]$ . Para esses cálculos, utilizamos como ferramenta a Calculadora do computador. Observamos que, para  $n = 33$ ,  $\pi$  é encontrado com precisão de 20 casas decimais.

**Tabela 2** - Aproximações de  $\pi$  pelo algoritmo de Arquimedes

$n$	$P_{2^n 6}$	$Q_{2^n 6}$
0	3,46410161513775458705	3,00000000000000000000
1	3,21539030917347247767	3,10582854123024914818
2	3,15965994209750048331	3,13262861328123819716
3	3,14608621513143497109	3,13935020304686720713
4	3,14271459964536829816	3,14103195089050963811
5	3,14187304997982387174	3,14145247228546207545
6	3,14166274705684852622	3,14155760791185764551
7	3,14161017660468953876	3,14158389214831840866
8	3,14159703432152615199	3,14159046322805009573
9	3,14159374877135202797	3,14159210599927155054
10	3,14159292738509703354	3,14159251669215744759
11	3,14159272203861381834	3,14159261936538395518
12	3,14159267070199804787	3,14159264503369089667
13	3,14159265786784441984	3,14159265145076765170
14	3,14159265465930603249	3,14159265305503684169
15	3,14159265385717143688	3,14159265345610413926
16	3,14159265365663778806	3,14159265355637096366
17	3,14159265360650437586	3,14159265358143766976
18	3,14159265359397102281	3,14159265358770434628
19	3,14159265359083768455	3,14159265358927101541
20	3,14159265359005434998	3,14159265358966268270
21	3,14159265358985851634	3,14159265358976059952
22	3,14159265358980955793	3,14159265358978507872
23	3,14159265358979731833	3,14159265358979119852
24	3,14159265358979425842	3,14159265358979272847
25	3,14159265358979349345	3,14159265358979311096
26	3,1415926535897930221	3,14159265358979320658
27	3,14159265358979325439	3,14159265358979323049
28	3,14159265358979324244	3,14159265358979323647
29	3,14159265358979323945	3,14159265358979323796
30	3,14159265358979323871	3,14159265358979323833
31	3,14159265358979323852	3,14159265358979323843
32	3,14159265358979323847	3,14159265358979323845
33	3,14159265358979323846	3,14159265358979323846

Fonte: Elaborado pela autora.



### 3.1.3 Estabilidade do algoritmo

Apresentamos, a seguir, uma breve análise numérica do Algoritmo Arquimediano. Para tal, utilizamos como referência Gilat e Subramaniam (2008), Lima (2004), Phillips (1981), Ruggiero e Lopes (1997) e Simmons (1996).

**Definição 3.1.** Uma sequência  $(a_n)$  é definida recursivamente se existir uma equação que permite calcular qualquer termo de  $(a_n)$  em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

**Exemplo 3.1.** A sequência  $x_n$  dos números naturais pares  $2, 4, 6, 8, \dots$  pode ser definida por  $x_{n+1} = x_n + 2$  ( $n \geq 1$ ) com  $x_1 = 2$ .

Pelo que vimos, o algoritmo arquimediano envolve uma relação de recorrência, visto que os termos das sequências dos perímetros dependem de seus antecessores imediatos. Sabendo disso, é importante analisar se os erros de arredondamento e de truncamento são ampliados ou não pela relação de recorrência, ou seja, deve-se analisar a sua estabilidade numérica.

Toda solução numérica inclui erros e, por isso, é uma aproximação. Ao utilizar métodos numéricos na solução de um problema deve-se considerar os erros de arredondamento e de truncamento que são introduzidos, principalmente quando muitas operações são realizadas. Um número é considerado arredondado se ele foi encurtado, ou seja, se foram descartados algarismos ou se o último algarismo armazenado foi arredondado. Consideram-se erro de arredondamento os erros numéricos causados devido ao corte ou ao arredondamento dos números envolvidos nos cálculos. Já os erros de truncamento são os erros introduzidos pela aproximação do método numérico, ou seja, quando o método numérico contém processos infinitos para obter o valor exato e encontra-se uma aproximação truncando esses processos.

Para o cálculo de estabilidade do algoritmo arquimediano, damos as definições a seguir.

**Definição 3.2.** O erro absoluto é definido pela diferença entre o valor exato de um número  $x$  e de seu valor aproximado  $\tilde{x}$ . Ou seja,  $ER_x = |x - \tilde{x}|$ .

**Exemplo 3.2.** Consideremos os números  $x = 20.1221$  e  $y = 1.1221$ . Sejam  $\tilde{x} = 20.0000$  e  $\tilde{y} = 1.0000$  suas respectivas aproximações. Os erros absolutos são:

$$ER_x = 20.1221 - 20.0000 = 0.1221 \quad \text{e} \quad ER_y = 1.1221 - 1.0000 = 0.1221.$$

Apesar de os erros absolutos serem iguais, não é correto afirmar que  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  representam aproximações com a mesma precisão. Para isso, é necessário comparar a ordem de grandeza dos números  $x$  e  $y$ . Como resultado, dependendo da ordem de grandeza dos números, o erro absoluto não é eficiente para apresentar a precisão de um cálculo e, por isso, costuma-se utilizar o erro relativo para garantir uma melhor precisão.

**Definição 3.3.** O erro relativo é definido pela razão entre o erro absoluto e o valor exato. Ou seja,  $Er_x = \frac{|x - \tilde{x}|}{x}$ .

**Exemplo 3.3.** Para os dados do exemplo anterior, temos:

$$Er_x = \frac{0.1221}{20.1221} = 0.00606795513 \quad \text{e} \quad Er_y = \frac{0.1221}{1.1221} = 0.108813831,$$

e, portanto,  $\tilde{x}$  é mais preciso.

Um algoritmo é considerado estável se ele produz um erro relativo muito pequeno. Deve-se verificar se o erro relativo do algoritmo arquimediano é ampliado. Devido aos erros de arredondamento, os perímetros  $P_{2^n M}$  e  $Q_{2^n M}$  encontrados não são os valores exatos, mas, sim, aproximados. Dessa forma, os valores que são encontrados são  $\tilde{P}_{2^n M}$  e  $\tilde{Q}_{2^n M}$  em vez de  $P_{2^n M}$  e  $Q_{2^n M}$ ; especificamente para os valores adotados neste trabalho, temos  $\tilde{P}_{2^n M} > P_{2^n M}$  e  $\tilde{Q}_{2^n M} > Q_{2^n M}$ . Seja  $\delta$  o erro relativo que representa uma medida dos números de dígitos significativos em  $P_{2^n M}$  e  $Q_{2^n M}$ . Assim:

$$\delta = \frac{\tilde{P}_{2^n M} - P_{2^n M}}{P_{2^n M}} \Leftrightarrow \tilde{P}_{2^n M} = P_{2^n M}(1 + \delta) \quad (3.21)$$

$$\delta = \frac{\tilde{Q}_{2^n M} - Q_{2^n M}}{Q_{2^n M}} \Leftrightarrow \tilde{Q}_{2^n M} = Q_{2^n M}(1 + \delta) \quad (3.22)$$

Para verificar se esse erro é ampliado, deve-se observar o comportamento dos termos seguintes das seqüências. Para  $k = n + 1$ , temos

$$\tilde{P}_{2^{n+1}M} = \frac{2 \cdot P_{2^n M}(1 + \delta) \cdot Q_{2^n M}(1 + \delta)}{P_{2^n M}(1 + \delta) + Q_{2^n M}(1 + \delta)} = P_{2^{n+1}M}(1 + \delta) \Leftrightarrow \delta = \frac{\tilde{P}_{2^{n+1}M} - P_{2^{n+1}M}}{P_{2^{n+1}M}}$$

e

$$\tilde{Q}_{2^{n+1}M} = \sqrt{P_{2^{n+1}M}(1 + \delta) \cdot Q_{2^n M}(1 + \delta)} = Q_{2^{n+1}M}(1 + \delta) \Leftrightarrow \delta = \frac{\tilde{Q}_{2^{n+1}M} - Q_{2^{n+1}M}}{Q_{2^{n+1}M}},$$

mostrando, assim, que o erro relativo não é ampliado pelo algoritmo, e, portanto, a relação de recorrência utilizada por Arquimedes é estável.

### 3.1.4 Taxa de convergência

É desejável, sempre que possível, utilizar séries infinitas para representar funções.

**Definição 3.4.** Chamamos série de Taylor de  $f$  no ponto  $a$  a série de polinomial:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x - a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + \cdots ;$$

em particular, quando  $a = 0$  obtemos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x)^n = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!} (x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x)^n + \cdots,$$

chamada Série de Maclaurin de  $f$ , em que  $f^{(n)}$  é a  $n$ -ésima derivada de  $f$ .

Para uma discussão acerca dessas séries, recomendamos ver Simmons (1996).

É possível estabelecer a taxa de convergência das sequências  $\{P_{2^n M}\}$  e  $\{Q_{2^n M}\}$  utilizando a série de Maclaurin para  $\sin x$  e  $\operatorname{tg} x$ . Para analisar  $P_{2^n M}$ , consideremos  $f(x) = \operatorname{tg} x$  cuja série de Maclaurin é

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots,$$

e, assim,

$$P_{2^n M} = 2^n M \left[ \frac{\pi}{2^n M} + \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{2^n M} \right)^3 + \frac{2}{15} \left( \frac{\pi}{2^n M} \right)^5 + \frac{17}{315} \left( \frac{\pi}{2^n M} \right)^7 + \cdots \right].$$

Assim:

$$P_{2^n M} \approx \pi + \frac{1}{3} \frac{\pi^3}{(2^n M)^2} \Leftrightarrow \pi - P_{2^n M} \approx -\frac{1}{3} \frac{\pi^3}{(2^n M)^2}.$$

Agora, para  $f(x) = \sin x$  a série de Maclaurin é:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

Assim:

$$Q_{2^n M} = 2^n M \left[ \frac{\pi}{2^n M} - \frac{1}{3!} \left( \frac{\pi}{2^n M} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left( \frac{\pi}{2^n M} \right)^5 - \frac{1}{7!} \left( \frac{\pi}{2^n M} \right)^7 + \cdots \right].$$

Então:

$$Q_{2^n M} \approx \pi - \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{(2^n M)^2} \Leftrightarrow \pi - Q_{2^n M} \approx \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{(2^n M)^2}.$$

Analisando  $P_{2^{n+1}M}$  e  $Q_{2^{n+1}M}$ , temos:

$$P_{2^{n+1}M} \approx \frac{2 \left( \pi + \frac{1}{3} \frac{\pi^3}{(2^n M)^2} \right) \cdot \left( \pi - \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{(2^n M)^2} \right)}{\left( \pi + \frac{1}{3} \frac{\pi^3}{(2^n M)^2} \right) + \left( \pi - \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{(2^n M)^2} \right)} = \frac{\pi^2 + \frac{1}{6} \frac{\pi^4}{(2^n M)^2} - \frac{1}{18} \frac{\pi^6}{(2^n M)^4}}{\pi + \frac{1}{12} \frac{\pi^3}{(2^n M)^2}} \Rightarrow$$

$$P_{2^{n+1}M} \approx \pi + \frac{1}{12} \frac{\pi^3}{(2^n M)^2} - \frac{9}{144} \frac{\pi^6}{(2^n M)^4},$$

donde

$$P_{2^{n+1}M} \approx \pi + \frac{1}{12} \frac{\pi^3}{(2^n M)^2} \Leftrightarrow \pi - P_{2^{n+1}M} \approx \frac{1}{4} (\pi - P_{2^n M});$$

e

$$Q_{2^{n+1}M} \approx \sqrt{\left(\pi - \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{(2^n M)^2}\right) \cdot \left(\pi + \frac{1}{12} \frac{\pi^3}{(2^n M)^2}\right)} = \sqrt{\pi^2 - \frac{1}{12} \frac{\pi^4}{(2^n M)^2} - \frac{1}{72} \frac{\pi^6}{(2^n M)^4}} \Rightarrow$$

$$Q_{2^{n+1}M} \approx \sqrt{\left(\pi - \frac{1}{24} \frac{\pi^3}{(2^n M)^2}\right)^2 - \frac{1}{64} \frac{\pi^6}{(2^n M)^4}},$$

donde

$$Q_{2^{n+1}M} \approx \pi - \frac{1}{24} \frac{\pi^3}{(2^n M)^2} \Leftrightarrow \pi - Q_{2^{n+1}M} \approx \frac{1}{4}(\pi - Q_{2^n M}).$$

Dessa forma, verificamos que os erros nas seqüências  $\{P_{2^n M}\}$  e  $\{Q_{2^n M}\}$  são reduzidos por um fator 4.

**Definição 3.5.** Seja  $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$  com  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x^*$ , uma seqüência de aproximações produzida por um método numérico. Dizemos que a seqüência converge linearmente para  $x^*$  se existir uma constante real  $0 < c < 1$ , chamada de taxa de convergência, tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{(n+1)} - x^*|}{|x^{(n)} - x^*|} = c.$$

A taxa de convergência permite comparar a velocidade com qual a seqüência converge para a solução. Analisando o algoritmo arquimediano:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi - P_{2^{n+1}M}}{\pi - P_{2^n M}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi - Q_{2^{n+1}M}}{\pi - Q_{2^n M}} = \frac{1}{4}.$$

conclui-se que as seqüências  $\{P_{2^n M}\}$  e  $\{Q_{2^n M}\}$  convergem para  $\pi$  com uma taxa de convergência igual a  $1/4$ .

## 4 CONCLUSÃO

A apresentação detalhada dos aspectos geométricos e trigonométricos do algoritmo de Arquimedes para aproximar a famosa constante  $\pi$ , seguindo Miel (1983), aqui apresentada, possibilitou revisão e aprofundamento de diversos conceitos e propriedades geométricas, num processo que contribuiu para o enriquecimento da formação acadêmica da autora. O itinerário percorrido propiciou familiaridade com alguns resultados que ainda não haviam sido estudados detalhadamente, assim como propiciou ter um primeiro contato com a Análise Numérica.

O estudo do algoritmo arquimediano oferece uma abordagem histórica interessante para a construção do conceito do número  $\pi$ , visto que esse algoritmo possibilita obter uma aproximação numérica para  $\pi$  por meio de construções geométricas que podem ser realizadas em sala de aula. Dessa forma, este trabalho permitiu vislumbrar possíveis atividades a serem desenvolvidas como continuação para esse estudo, assim como novos estudos a serem realizados em nível de pós-graduação.

## REFERÊNCIAS

- BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 7. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
- BECKMANN, Petr. **A history of Pi**. 19th ed. Colorado: St. Martin's Press, 2015.
- CARMO, Antonio Caminha Muniz; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria-Números Complexos**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- GILAT, Amos; SUBRAMANIAM, Vish. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas**: Uma introdução com aplicações usando o MATLAB. Tradução: Alberto Resende de Conti. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- HEATH, Thomas L (ed.). **The works of Archimedes**. New York: Cambridge University Press, 2010.
- LIMA, Elon lages. **Análise Real**: Funções de uma variável. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. v. 1.
- LIMA, Elon lages *et al.* **A matemática do ensino médio**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. v. 2.
- MIEL, George. Of calculations past and present: the Archimedean algorithm. **The American Mathematical Monthly**, v. 90, n. 1, p. 17-35, jan. 1983.
- MUNIZ NETO, Antonio Caminha Muniz. **Tópicos de matemática elementar**: Geometria euclidiana plana. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. v. 2.
- PHILLIPS, G. M. Archimedes the Numerical Analyst. **The American Mathematical Monthly**, v. 88, n. 3, p. 165-169, mar. 1981.
- RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo numérico**: Aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1997.
- SIMMONS, G.F. **Calculus with analytic geometry**. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1996.