UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII - GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

LIDIANE AZEVEDO DA SILVA

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E APLICAÇÕES

PATOS
2021

LIDIANE AZEVEDO DA SILVA

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura Plena em Matemática – CCEA – UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias

PATOS
2021

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586t Silva, Lidiane Azevedo da.
Teorema fundamental do cálculo e aplicações [manuscrito] / Lidiane Azevedo da Silva. - 2021.
32 p.: il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2021.
"Orientação : Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Cálculo diferencial e integral . 2. Teorema fundamental do cálculo . 3. Aplicações . I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por José E. da S. Eugênio - CRB - 15/591 BSC7/UEPB

LIDIANE AZEVEDO DA SILVA

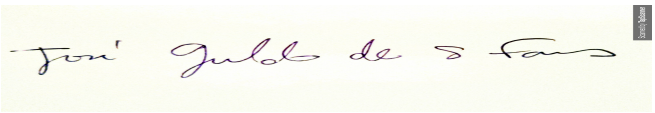
TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Programa de Graduação em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática.

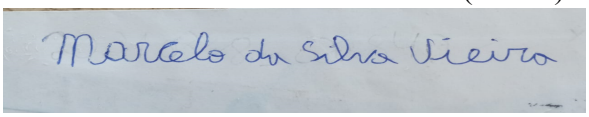
Área de concentração: Matemática.

Aprovado em: 07/06/21

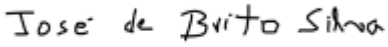
BANCA EXAMINADORA



Profª. Me. José Ginaldo de Souza Farias (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof Dr. Marcelo da Silva Vieira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Me José de Brito Silva
Universidade de Pernambuco (UEPB)

Para Painho, Mainha, Lílian e Desterro, com amor.

“A matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza."
Stephen Hawking

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	7
2	**PRELIMINARES**	7
2.1	**Limite de funções reais de uma variável real**	8
2.1.1	***Limites laterais***	10
2.1.2	***Funções contínuas***	10
2.2	**Derivadas de funções reais de uma variável real**	12
2.2.1	***Derivadas laterais***	14
2.2.2	***Primitivas***	15
2.3	**A integral definida de funções reais de uma variável real**	16
3	**O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO**	19
3.1	**Primeira etapa**	19
3.2	**Segunda etapa**	22
4	**APLICAÇÕES EMPREGANDO O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO**	23
4.1	**O comprimento de um círculo**	23
4.2	**A corrente elétrica em um circuito RL**	28
5	**CONCLUSÃO**	30
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	31

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁCULO E APLICAÇÕES

Lidiane Azevedo da Silva*

RESUMO

O presente artigo, baseado em referências bibliográficas, veste-se de definições e resultados essenciais à demonstração do célebre Teorema Fundamental do Cálculo e de duas de suas aplicações. Diante disso, foi enunciado e demonstrado o Teorema Fundamental do Cálculo de forma detalhada, apresentando a conexão entre as duas bases centrais do cálculo: a diferenciação e a integração, que são consideradas como inversas uma da outra. Em seguida dois modelos matemáticos esclarecem como o uso de tal teorema pode auxiliar na resolução de problemas em diferentes áreas. Neste sentido, fez-se uma aplicação na geometria, para o cálculo do comprimento de curvas limitadas no plano, e na física, para a obtenção da corrente elétrica em um circuito RL.

Palavras-chave: Cálculo diferencial e integral.Teorema Fundamental do Cálculo. Aplicações.

ABSTRACT

Based on bibliographic references, this manuscript rely on definitions and results that are essential to the demonstration of the famous Fundamental Theorem of Calculus and two of its applications. The Fundamental Theorem of Calculus was enunciated and demonstrated in detail with the presentation of the connection between two core bases of the calculation: differentiation and integration, which are inverses of each other. Then, two mathematical models were used to clarify how this theorem can help solving problems in different disciplines. More specifically, one application in geometry shows how to calculate the length of curves limited in the plane, whereas another application in physics illustrates how to quantify the electric current in an RL circuit.

Keywords: Differential and integral calculus. Fundamental Calculus Theorem. Applications.

*Aluna de graduação do curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba. E-mail: lidianeazevedodasilva@gmail.com. Este artigo de conclusão de curso foi escrito sob orientação do Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias.

1 INTRODUÇÃO

O Desenvolvimento da Matemática é marcado ao longo da história pela necessidade de responder às demandas e desafios da própria área e de outras ciências, como: Física, Química, Economia e outras. Neste trajeto, grandes pesquisadores e pesquisadoras desenvolveram um papel fundamental que definiram os rumos da Matemática que hoje conhecemos, e desta forma fez dela uma ciência indispensável para o desenvolvimento de outros estudos a partir da explicação formal de fenômenos que surgem e desafiam a inteligência humana.

No contexto de avanços da Matemática, o Cálculo Diferencial e Integral destacou-se como uma ferramenta extremamente importante e que exerce poder sobre a Matemática atual. Neste sentido, percebe-se que o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) é de fundamental importância em razão de conectar a diferenciação e a integração por meio da antiderivação da função a ser integrada, sendo um método eficiente e poderoso, pois permite determinar integrais mais facilmente.

A formulação deste teorema contou com diferentes contribuições de matemáticos, entre os quais citamos: Apolônio (262 - 190 a.C.) Eudoxo (390 - 320 a.C.), Arquimedes (287 - 212 a.C.), Torricelli (1608 - 1647), Fermat (1601 - 1665), Descartes (1596 - 1650), Gregory (1638 - 1675), Barrow (1630 - 1677), Newton (1642 - 1727), Leibniz (1646 - 1716), Cauchy (1789 - 1857). Ao leitor que deseje conhecer mais detalhes históricos, recomenda-se a leitura do trabalho (BOYER, 1996).

O presente texto está estruturado em três momentos. Inicialmente são postas as definições e os resultados preliminares necessários para o desenvolvimento da teoria que constitui o Teorema Fundamental do Cálculo.

Com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais que defende a utilização da demonstração, afirmando que "[...] a demonstração é, portanto, não apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas muitas vezes uma forma de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados", no segundo momento do presente artigo é enunciado e demonstrado o Teorema Fundamental do Cálculo. Este ritual faz com que a Matemática seja diferente das outras ciências, pois seu conhecimento é baseado na comprovação de diferentes afirmações, não apenas na intuição a partir da observação.

Por fim são apresentadas duas aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo como forma de ilustrar a importância desta proposição na resolução de modelos matemáticos dentro e fora da área da Matemática.

O artigo se encerra com a conclusão.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo serão apresentadas definições e alguns dos resultados relacionados ao limite e a continuidade de funções reais de uma variável real, além de duas técnicas fundamentais do

Cálculo: a derivação e a integração. Em resumo, estas definições preocupam-se em resolver dois problemas, o primeiro deles é: dado um gráfico de uma função, determinar a reta tangente a esse gráfico num ponto fixado; o outro é: determinar a área entre o eixo da abscissa e a representação geométrica do gráfico de uma função. Vale ressaltar que o conceito fundamental que permite abordar essas duas técnicas é o de limite.

Procurando tornar a leitura deste capítulo menos densa, diversos resultados serão apenas enunciadas, porém detalhes das demonstrações de todos eles podem ser encontrados em textos de cálculo avançado, por exemplo, em (LIMA, 2006). Além disso, os exemplos tratados aqui procurarão ajudar no entendimento de afirmações realizadas ao longo do próximo capítulo.

Ao longo do capítulo, X e Y denotarão subconjuntos do conjunto do números reais.

2.1 Limite de funções reais de uma variável real

Nesta seção definiremos limite de funções e demonstraremos um teorema importante para uso posterior. Iniciaremos com um conceito que contribuíra para os próximos assuntos.

Seja $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é um ponto de acumulação de X quando para todo $\varepsilon > 0$ tem-se

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \varnothing.$$

Indica-se com X' o conjunto dos pontos de acumulação de X.

Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real cujo domínio é X e $a \in X'$. Um número real L diz-se limite de $f(x)$ com x tendendo a quando para todo $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, existe $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$. Tal definição é denotada pela expressão

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Podemos representar dessa forma

$$\lim_{x \to a} f(x) = L. \equiv . \, \forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0; \, x \in X, \, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Informalmente, esta representação diz que é possível aproximar $f(x)$ de L tanto quanto se queira desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo, porém diferente de a.

É fundamental que a seja ponto de acumulação de X, pois deseja-se avaliar o comportamento da função em pontos suficientemente próximos de a. Além disso, não é necessário que $a \in X$, pois não é necessário que f esteja definida no ponto a.

Para uma fixação breve da definição descrita acima, será analisado o seguinte exemplo.

Exemplo 2.1. $\lim_{x \to c} x = c$, com $c \in \mathbb{R}$.

De acordo com a definição de limite deve-se obter que, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que $|x - c| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - c| < \delta$. Sendo assim, a análise da desigualdade envolvendo ε decifra facilmente que a escolha a ser feita é: $\delta = \epsilon$. Isto conclui que $\lim_{x \to c} x = c$.

Veja que

$$|(3x - 1) - 2| = |3x - 3| = |3(x - 1)| = 3|x - 1|.$$

Portanto, deseja-se que

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow 3|x-1| < \varepsilon$$

isto é,

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Isso sugere que a escolha para δ é $\frac{\varepsilon}{3}$. Consequentemente, dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x-1| < \delta$, então

$$|(3x-1)-2| = |3x-3| = 3|x-1| < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon.$$

Pela definiçao de limite, segue que

$$\lim_{x\to 1}(3x-1) = 2.$$

Teorema 2.1 (Teorema do Confronto)**.** *Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$. Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$, então $\lim_{x\to a} h(x) = L$.*

Demonstração. Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$ existem um $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$x \in X,\ 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

e

$$x \in X,\ 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então,

$$\begin{aligned} x \in X, 0 < |x-a| < \delta \ &\Rightarrow\ L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon \\ &\Rightarrow\ L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, pode-se afirmar que $\lim_{x\to a} h(x) = L$. □

Proposição 2.1 (Operações com limite)**.** *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $k \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então*

1. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;
2. $\lim_{x\to a}[k \cdot g(x)] = k \cdot M$;
3. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;
4. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ *(desde que $M \neq 0$ e $g(x) \neq 0$).*

2.1.1 Limites laterais

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que o número real a é um ponto de acumulação à direita para X, e escreve-se $a \in X'_+$ quando toda vizinhança de a contém algum ponto $x \in X$ com $x > a$. Equivalentemente, para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $X \cap (a, a+\varepsilon) \neq \varnothing$.

Analogamente se define ponto de acumulação à esquerda. Por definição, $a \in X'_-$ significa que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tem-se $X \cap (a-\varepsilon, a) \neq \varnothing$. Quando $a \in X'_+ \cap X'_-$ diz-se que a é um ponto de acumulação bilateral de x, ou seja, $a \in X'$.

Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$. Diz-se que o número real L é limite à direita de $f(x)$ quando x tende para a, e escreve-se $L = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se escolher $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$.

Analogamente se define o limite à esquerda $L = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$, no caso de $f : X \to \mathbb{R}$ com $a \in X'_-$: isto significa que, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariarmente, pode-se escolher $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \cap (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

As propriedades gerais dos limites, se adaptam facilmente para os limites laterais. Além disso, é fácil inferir que, dado $a \in X'_+ \cap X'_-$, existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L.$$

2.1.2 Funções contínuas

Diz-se que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe um $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Em especial, a definição de continuidade requer que o ponto a pertença ao conjunto X, sendo possível tomar $x = a$. Desse modo, $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a se, e somente se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Uma função é contínua em X, se ela for contínua em cada ponto de X.

Exemplo 2.2. Se $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = \sqrt{x}$, então f é contínua em $(0, +\infty)$.

Fixado $x_0 \in (0, +\infty)$, se $|x - x_0| < \delta$, tem-se

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \\
&= |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \cdot \left| \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \\
&= \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \\
&= \left| \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \\
&= \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \\
&= |x - x_0| \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \\
&< |x - x_0| \cdot \frac{1}{|\sqrt{x_0}|} \\
&< \delta \cdot \frac{1}{|\sqrt{x_0}|}.
\end{aligned}$$

Portanto, se $\delta < \dfrac{\varepsilon}{|\sqrt{x_0}|}$, é garantido que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ para $|x - x_0| < \delta$.

Sejam f e g funções reais de uma variável real contínuas em $a \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Utilizando a Proposição 2.1, segue que:

1. $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$;
2. $\lim\limits_{x \to a} (f - g)(x) = \lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = f(a) - g(a) = (f - g)(a)$;
3. $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a)$;
4. $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(a)$.

Sendo assim, a soma, a diferença, o produto e o quociente de funções contínuas são também funções contínuas.

Teorema 2.2 (Teorema do valor extremo)**.** *Se f for contínua em $[a, b]$, então existirão v e u em $[a, b]$ tais que $f(v) \leq f(x) \leq f(u)$ para todo x em $[a, b]$.*

O teorema revela que se f for contínua em $[a, b]$, então f assume um valor máximo $f(u)$ e mínimo $f(v)$ no intervalo $[a, b]$. Sua demonstração pode ser encontrada em Elon (2006).

2.2 Derivadas de funções reais de uma variável real

Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{1}$$

caso esse limite exista. Em caso afirmativo, diz-se que f é derivável ou diferenciável no ponto $a \in X \cap X'$.

Como se pode ver na expressão (1) é imprescindível que a pertença aos conjuntos X e X', pois percebe-se que tanto a quanto pontos suficientemente próximos dele são aplicados na função.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ cujo $I = (a, b)$ [ou (a, ∞) ou $(-\infty, a)$ ou $(-\infty, \infty)$]. Diz-se que f é derivável ou diferenciável em um intervalo aberto I se for diferenciável em cada número pertencente ao intervalo.

Exemplo 2.3. A função trigonométrica $f(x) = \cos x$ é derivável em $\mathbb{R}$.

Utilizando a definição de derivada será constatada a existência do limite presente na expressão (1). Fixe $x \in \mathbb{R}$. Então, aplicando a igualdade trigonométrica $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \text{sen}(x)\text{sen}(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x)[\cos(h) - 1] - \text{sen}(x)\text{sen}(h)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\cos(x)[\cos(h) - 1]}{h} - \frac{\text{sen}(x)\text{sen}(h)}{h} \right].
\end{aligned}$$

A investigação deste limite ocorrerá por etapas, onde é avaliado cada uma das parcelas que aparece no limite acima. Em ambas as investigações será utilizado que $\lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1$. Inicialmente atente-se ao fato de que h está variando e x está fixado.

A primeira etapa investiga $\lim_{h \to 0}[\text{sen}(x)\text{sen}(h)]/h$. Utilizando a Proposição 2.1 é possível obter que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x)\text{sen}(h)}{h} &= \text{sen}(x) \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} \\
&= \text{sen}(x) \cdot 1 \\
&= \text{sen}(x).
\end{aligned} \tag{2}$$

A segunda etapa investiga $\lim_{h \to 0}\{\cos(x)[\cos(h) - 1]\}/h$. Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x)[\cos(h) - 1]}{h} &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\cos(x)[\cos(h) - 1]}{h} \right) \cdot \left(\frac{\cos(h) + 1}{\cos(h) + 1} \right) \\
&= \cos(x) \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2(h) - 1}{h[\cos(h) + 1]}.
\end{aligned}$$

Utilizando a relação trigonométrica $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ e a Proposição 2.1, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)[\cos(h)-1]}{h} &= \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2(h)-1}{h[\cos(h)+1]} \\
&= \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{1-\text{sen}^2(h)-1}{h[\cos(h)+1]} \\
&= -\cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}^2(h)}{h[\cos(h)+1]} \\
&= -\cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(h)\text{sen}(h)}{h[\cos(h)+1]} \\
&= -\cos(x) \left[\lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}\right] \cdot \left[\lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(h)}{\cos(h)+1}\right] \\
&= -\cos(x) \cdot (1) \cdot \frac{\text{sen}0}{\cos 0 + 1} \\
&= -\cos(x) \cdot 0 \\
&= 0. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 2.1 e pelas igualdades (2) e (3), tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\cos(x)[\cos(h)-1]}{h}\right] - \lim_{h\to 0} \left[\frac{\text{sen}(x)\text{sen}(h)}{h}\right] \\
&= 0 - \text{sen}(x) \\
&= -\text{sen}(x),
\end{aligned}$$

e isto conclui que $f'(x) = -\text{sen}(x)$.

Proposição 2.2. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$ e $k \in \mathbb{R}$. As funções $f \pm g$, $k \cdot f$, $f \cdot g$ e f/g (caso $g(a) \neq 0$) são também deriváveis no ponto a e têm-se*

1. $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;
2. $(k \cdot g)'(a) = k \cdot g'(a)$;
3. $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$;
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$.

Proposição 2.3 (Regra da Cadeia)**.** *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'$, $b \in Y \cap Y'$, $f(X) \subset Y$ e $f(a) = b$. Se f é derivável no ponto a e g é derivável no ponto b então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a, com*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Teorema 2.3. *Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.*

Demonstração. Por hipótese, f é derivável em a, isto é

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Para assegurar que f é contínua em a é preciso garantir que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Escreva $f(x)$ da forma como segue, desde que $x \neq a$,

$$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a).$$

Empregando a Proposição 2.1 e a definição de diferenciabilidade, obtem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a}(x - a) + \lim_{x \to a} f(a) \\ &= f'(a) \cdot 0 + f(a) \\ &= f(a). \end{aligned}$$

□

O resultado abaixo é necessário para verificação rápida do Teorema do Valor Médio de Lagrange, essencial para o desenvolvimento da próxima seção.

Teorema 2.4 (Rolle)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema 2.5 (Teorema do Valor Médio de Lagrange)**.** *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b). Então, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f(x) - wx$, em que a constante w é escolhida de modo que $g(a) = g(b)$, ou seja, $w = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. Pelo Teorema de Rolle, existe c pertencente ao intervalo aberto (a, b) tal que $g'(c) = 0$, isto é,

$$f'(c) - w = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

2.2.1 Derivadas laterais

Quando $a \in X$ é um ponto de acumulação à direita, isto é, $a \in X \cap X'_+$, pode-se tomar o limite $f'_+(a) = \lim_{x \to a+} [f(x) - f(a)]/(x - a)$. Quando existe, este limite chama-se a derivada à direita de f no ponto a. Analogamente, se $a \in X \cap X'_-$, tem sentido considerar o limite à esquerda $f'_-(a) = \lim_{x \to a-} [f(x) - f(a)]/(x - a)$. Se existe ele se chama a derivada à esquerda de f no ponto a.

Caso seja $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$, isto é, caso $a \in X$ seja ponto de acumulação bilateral, a função f é derivável no ponto a se, e somente se, existem e são iguais as derivadas à direita e à esquerda com $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$. O Teorema 2.3 vale para derivadas laterais. Por exemplo, se existe a derivada à direta $f'_+(a)$ então f é contínua à direita no ponto a.

2.2.2 Primitivas

Inicialmente será averiguada uma afirmação a qual é uma consequência do Teorema do Valor Médio de Lagrange e que somada a mais detalhes nos conduz a definição de objetos matemáticos essenciais no estudo do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 2.6. *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$, contínua no intervalo I, com derivada $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, é constante.*

Demonstração. Com efeito, dados arbitrariamente $x, y \in I$, segue do Teorema 2.5 a existência de c entre x e y tal que

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y).$$

O fato de c pertencer ao intervalo aberto (x, y) contido em I assegura que

$$f(x) - f(y) = 0 \cdot (x - y) = 0.$$

Portanto, $f(x) = f(y)$ para quaisquer $x, y \in I$. □

Corolário 2.1. *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Se $f'(x) = g'(x)$ em todo x pertencente ao interior a (a, b) então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$g(x) = f(x) + c$$

para todo x em $[a, b]$.

Demonstração. A hipótese de continuidade das funções f e g, unida a Proposição 2.1 garantem que a função $h(x) = g(x) - f(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$. Além disso, pela Proposição 2.2 e por hipótese, é sabido que para todo $x \in (a, b)$, tem-se que

$$h'(x) = [g(x) - f(x)]' = g'(x) - f'(x) = 0.$$

Pelo teorema anterior existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) - f(x) = c \Rightarrow g(x) = f(x) + c$$

para todo x pertencente ao intervalo $[a, b]$. □

Este corolário certifica que: caso duas funções possuam derivadas iguais em um dado intervalo, então neste intervalo elas diferirão por uma constante.

Uma função F é denominada uma primitiva de f no intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I. Sendo F uma primitiva de f em I, para qualquer $C \in \mathbb{R}$ facilmente percebe-se que $F(x) + C$ é também uma primitiva de f. Sendo assim, as primitivas da função f são da forma

$$F(x) + C,$$

com $C \in \mathbb{R}$. Elas são denominadas a família das primitivas de f em I.

Exemplo 2.4. A função $F(x) = cx$ é uma primitiva de $f(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$.

2.3 A Integral definida de funções reais de uma variável real

Uma partição do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito de pontos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ e $b \in P$. A notação será sempre usada de modo que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Seja $i \in \{1, \ldots, n\}$, o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ será chamado o i-ésimo intervalo da partição P, cujo comprimento é $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. O maior dentre estes comprimentos é indicado por

$$\|P\| = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Delta x_i$$

e denominamos norma da partição P.

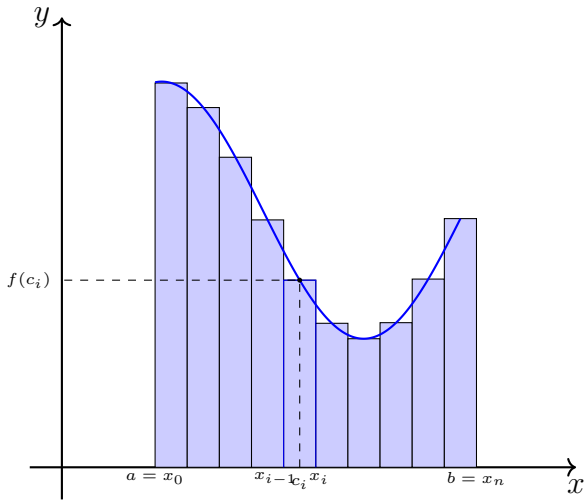
Para cada i-ésimo intervalo da partição P escolhemos, arbitrariamente, $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Dada uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, a soma de Riemann de f relativa à partição P e à escolha dos $\{c_i\}_{i=1}^n$ é

$$\begin{aligned} S(f, P, \{c_i\}_{i=1}^n) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \\ &= f(c_1)\Delta x_1 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n. \end{aligned}$$

Geometricamente, no caso em que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, a soma de Riemann de f relativa à partição P é vista como a área da região em destaque na figura 1.

Figura 1: Soma de Riemann relativa à partição, vista como a área de uma região



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021

Para cada número c_i em $[x_{i-1}, x_i]$ determinamos um retângulo que tem base no eixo x com Δx_i e toca a curva em $(c_i, f(c_i))$ sendo $f(c_i)$ sua altura. Dependendo do valor de $f(c_i)$, os retângulos construídos podem estar tanto acima como abaixo do eixo, ou ainda sobre ele. Sendo assim, o produto $f(c_i)\Delta x_i$ pode ser positivo, negativo ou nulo, conforme o sinal de $f(c_i)$.

Atentemos ao fato de que existem infinitas somas $S(f, P, \{c_i\}_{i=1}^n)$, conforme são escolhidas a partição P e os números c_i nos i-ésimos intervalos.

Quando $\|P\|$ tende a zero, a região que corresponde a "área" (o valor $f(c_i)\Delta x_i$ pode ser positivo, negativo ou nulo) de todos os retângulos controlados pela partição e pela escolha dos números c_i aproxima-se da região entre a curva da representação geométrica do gráfico de f e o eixo x, com maior precisão. Essa aproximação sempre chegará a um valor limite, pois trata-se de uma região limitada.

Desta forma, define-se a soma de Riemann como

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L$$

para um número real L. Essa definição diz que, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, se P é uma partição de $[a, b]$ com $\|P\| < \delta$, então

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - L \right| < \varepsilon$$

para qualquer escolha dos números c_i nos i-ésimos intervalos $[x_{x-i}, x_i]$ de P. O número L é um limite de somas (de Riemann).

Finalmente, seja f definida em um intervalo $[a, b]$. A integral definida de f, de a a b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

desde que o limite exista. Se o limite existe, diz-se que f é integrável em $[a, b]$. Caso f seja não-negativa no intervalo em questão, a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ dará a área da região sob o gráfico de f de a até b.

Um importante teorema será enunciado a seguir. Ele esclarece o emprego da hipótese de continuidade sobre as funções no próximo capítulo.

Teorema 2.7. *Se f é contínua em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.*

Demonstração. Veja Elon (2006) □

O Teorema 3.1 diz que funções contínuas em $[a, b]$ são integráveis nesse intervalo, já as funções descontínuas podem ou não ser integráveis, isto dependerá do tipo de descontinuidade.

Um exemplo de uma função não integrável é: seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ a função definida por partes tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se x é racional} \\ 0, & \text{se x é irracional} \end{cases}.$$

Aplicando a construção dada na definição das integrais, tome uma partição P de $[0, 1]$ e escolha c_i para ser o valor máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$, então a soma de Riemann relacionada é

$$S(f, P, \{c_i\}_{i=1}^{n}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(1)\Delta x_i = 1,$$

pois cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ contém um número racional, assegurando que $f(c_i) = 1$. Em seguida, perceba que $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$. Consequentemente, cada soma de Riemann de f relativa à partição P e a essa escolha dos c_i sempre será igual a 1, e o limite de somas utilizando este processo de escolha sempre será igual a 1 (um).

Em contrapartida, ao escolher c_i como sendo o valor mínimo de f em $[x_{i-1}, x_i]$, a soma de Riemann de f correspondente é

$$S(f, P, \{c_i\}_{i=1}^{n}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(0)\Delta x_i = 0,$$

pois cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ contém um número irracional assegurando que $f(c_i) = 0$. Portanto, ao utilizar esse processo de escolha dos c_im o limite em estudo será igual a 0 (zero).

Por fim, como a soma de Riemann trata-se em avaliar a existência de um limite das somas de Riemann para qualquer partição e escolha dos números c_i, percebe-se pelos argumentos acima que não há um número L tal que

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L.$$

Portanto, f não é integrável em $[0, 1]$.

Ao definir $\int_a^b f(x)dx$ como um limite de soma de Riemann assume-se que $a < b$. Esta definição também faz sentido mesmo que $a > b$. De fato, caso $a > b$, com as mesmas escolhas de c_i o valor de cada Δx_i mudaria de sinal, assim

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)[x_i - x_{i-1}] = -\sum_{i=1}^{n} f(c_i)[x_{i-1} - x_i].$$

Portanto,

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Além disso, é importante observar o caso em que $a = b$. Desse modo, $\Delta x = 0$ e, consequentemente,

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Proposição 2.4. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $c \in [a, b]$. Então*

1. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$;

2. *Se $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, então* $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.

Teorema 2.8 (Mudança de variável)**.** *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h : [c, d] \to \mathbb{R}$ com derivada contínua e $h([c, d]) \subset [a, b]$. Então*

$$\int_{h(c)}^{h(d)} f(x)dx = \int_c^d f(h(t)) \cdot h'(t)dt.$$

3 O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Neste capítulo será enunciado e certificado o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Pensando em facilitar a leitura e o estudo neste trajeto, o TFC será apresentado em duas etapas por meio de dois teoremas.

3.1 Primeira etapa

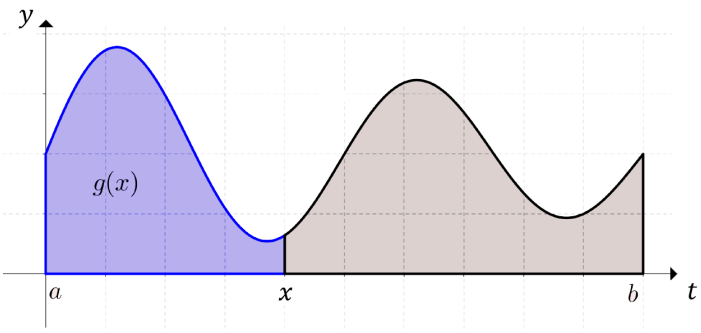
Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $x \in [a, b]$. Pelo Teorema sabe-se que f é integrável em qualquer subintervalo de $[a, b]$. Sendo assim, defina g por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

onde $x \in [a, b]$.

Preliminarmente e intuitivamente, a partir de visualizações geométricas, será reconhecido que g é uma primitiva de f, isto é, $g' = f$. Para constatar essa afirmação, considere qualquer função contínua f com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Não há perda de generalidade em tal hipótese, pois apenas deseja-se fazer uso do termo área nas argumentações. Sendo assim, o valor $g(x)$ pode ser interpretado como a área sob o eixo das abscissas e a representação geométrica do gráfico de f de a até x, representada pela figura 2.

Figura 2: Representação geométrica do gráfico de f de a até b e do valor de $g(x) = \int_a^x f(t)dt$.



Fonte: Marcos Eduardo Valle (2019, com adaptações)

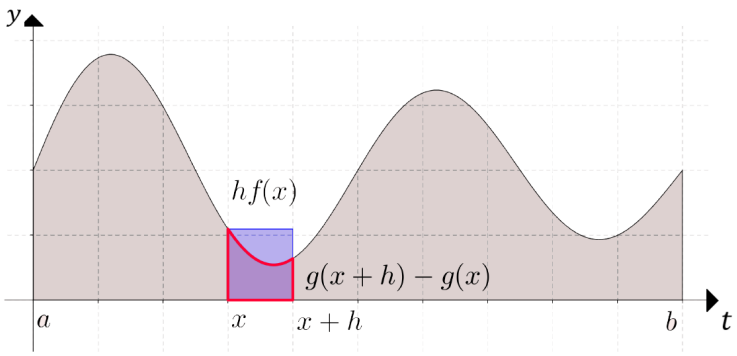
Para obter $g'(x)$, considere $h > 0$ e tal que $x+h \in (x, b]$. Veja que a diferença $g(x+h)-g(x)$ é a área sob o gráfico de f de x a $x+h$ e o número h é a largura do intervalo $[x, x+h]$, mostrada na figura 3. Além disso, visualmente é possível inferir que à medida que $h \to 0$, tem-se

$$g(x + h) - g(x) \approx hf(x).$$

Logo,

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \approx f(x).$$

Figura 3: Área sob o gráfico de f de x até $x+h$



Fonte: Marcos Eduardo Valle (2019, com adaptações)

Desse modo, intuitivamente, conclui-se que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

Finalmente, de posse da motivação da abordagem visual, segue a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo junto aos argumentos formais de sua evidência.

Teorema 3.1 (TFC - Parte 1)**.** *Se f for contínua em $[a,b]$, então a função g definida por*

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

com $x \in [a,b]$, é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e $g'(x) = f(x)$.

Demonstração. Primeiramente perceba que a função g está bem posta, pois é sabido pelo Teorema 3.1 que as restrições de f em $[a,x]$ são integráveis para cada x pertencente ao intervalo $[a,b]$.

O próximo passo será averiguar que g é derivável em (a,b). Para utilizar a definição de derivabilidade, avalia-se a existência do limite dado por

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

onde $x, x+h \in (a,b)$.

Pela definição da função g, tem-se

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}. \tag{4}$$

Admitindo $h > 0$, com $x+h \in (x,b]$, e empregando a Propriedade 2.4 que diz como combinar integrais da mesma função em intervalos adjacentes, segue que

$$\begin{aligned} g(x+h)-g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Substituindo (5) em (4), tem-se:

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}. \tag{6}$$

Dada a continuidade de f no intervalo fechado $[a,b]$, o Teorema do Valor Extremo afirma que há números u e v em $[x, x+h]$ tais que $f(u) = \max\{f(s); s \in [x, x+h]\}$ e $f(v) = \min\{f(s); s \in [x, x+h]\}$. De posse desse fato e da Propriedade 2.4, obtém-se que

$$f(v)h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(u)h.$$

Uma vez que $h > 0$, multiplicando as desigualdades acima por $\frac{1}{h}$, tem-se:

$$\frac{f(v)h}{h} \leq \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \leq \frac{f(u)h}{h},$$

o que implica que

$$f(v) \leq \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \leq f(u).$$

Reescrevendo as desigualdades acima ao empregar a igualdade (6), conclui-se que

$$f(v) \leq \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leq f(u). \tag{7}$$

Para tornar mais clara onde localiza-se a variação de h nas desigualdade (7), denote $f(u)$ e $f(v)$ por $\max\limits_{s\in[x,x+h]} f(s)$ e $\min\limits_{s\in[x,x+h]} f(s)$, respectivamente, e reescreva (7). Assim,

$$\min_{s\in[x,x+h]} f(s) \leq \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leq \max_{s\in[x,x+h]} f(s). \tag{8}$$

Vale destacar que estas desigualdades podem ser verificadas de modo inteiramente análogo para o caso em que $h < 0$. Logo, a expressão (8) é verdadeira para todo h suficientemente próximo de 0 (zero).

Sabendo que

$$\lim_{h\to 0} \max_{s\in[x,x+h]} f(s) = f(x)$$

e

$$\lim_{h\to 0} \min_{s\in[x,x+h]} f(s) = f(x),$$

finalmente, a partir das informações obtidas acima e utilizando o Teorema do Confronto, é possível concluir que

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x),$$

com $x \in (a,b)$. Portanto, o Teorema 2.3 garante que g é contínua em (a,b).

Apenas será avaliado

$$\lim_{h\to 0} \max_{s\in[x,x+h]} f(s) = f(x),$$

pois de maneira análoga é obtido o limite associado ao mínimo da restrição de f.

De acordo com a definição de limite deve-se obter que, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que $\left| \max_{s\in[x,x+h]} f(s) - f(x) \right| < \varepsilon$ sempre que $0 < |h| < \delta$. De fato, note que

$$\left| \max_{s\in[x,x+h]} f(s) - f(x) \right| = \tag{9}$$

Finalmente, perceba que conforme $h \to 0$, tem-se: $u \to x$ e $v \to x$, visto que u e v estão entre x e $x+h$. Por conseguinte,

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x)$$

e

$$\lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$$

pois f é contínua em x. Concluímos, de 7 e do Teorema 2.1, que

No caso em que $x = a$ ou b, é possível apenas inferir que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = f(a)$$

e

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(b+h)-g(b)}{h} = f(b).$$

Pelo que foi mencionado na subseção sobre derivadas laterias, em particular que o Teorema 2.3 continua válido para derivadas laterais, as informações acima são suficientes para concluir que g é contínua à direita e à esquerda nos pontos a e b, respectivamente. Enfim, pode-se afirmar que g é contínua em $[a,b]$. □

3.2 Segunda etapa

No capítulo anterior foi dada ênfase ao cálculo de integrais definidas a partir das somas de Riemann e, claramente, este procedimento torna complicado a tarefa de calcula-las. Esta segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo segue facilmente da primeira, e fornece um mecanismo mais elementar para o cálculo de integrais definidas.

Teorema 3.2 (TFC - Parte 2)**.** *Se f for contínua em $[a, b]$, então* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ *onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.*

Demonstração. Defina $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \int_a^x f(t)dt$. Pela primeira etapa do Teorema Fundamental do Cálculo, sabe-se que g é uma primitiva para f em $[a, b]$. Diante disso, se F for qualquer outra primitiva de f em $[a, b]$, então, pelo Corolário 2.1, F e g diferem por uma constante, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$

$$F(x) = g(x) + c, \tag{10}$$

para todo $x \in [a, b]$.

Fazendo x igual a a na expressão de g, tem-se que

$$g(a) = \int_a^a f(t)dt = 0.$$

Consequentemente, utilizando a equação (10) com $x = b$ e, em seguida, $x = a$, é obtido que

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [g(b) + c] - [g(a) + c] \\ &= g(b) - g(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt + 0 \\ &= \int_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

□

4 APLICAÇÕES EMPREGANDO O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Neste capítulo serão tratadas duas aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo, ambas disponíveis em (NETO, 2015).

4.1 O comprimento de um círculo

A primeira aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo a ser explorada refere-se a dimensão de um objeto geométrico, em especial, o cálculo do comprimento de uma curva limitada no plano.

Uma curva é uma figura geométrica gerada pelo movimento contínuo de um ponto no plano. Em particular, nesta ocasião será avaliado o comprimento de curvas dadas pela representação geométrica do gráfico de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$.

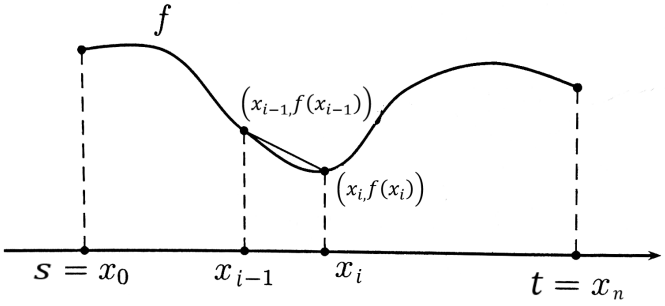
Inicialmente é preciso se perguntar: como definir e calcular o comprimento ℓ de tais curvas? A resposta sobre a definição do comprimento será dada utilizando os conceitos de limite e integração; para o cálculo destes comprimentos será utilizado o Teorema Fundamental do Cálculo.

Sendo assim, seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e tal que sua função derivada é contínua em (a, b). As restrições solicitadas sobre a função f serão justificada no decorrer da construção dada abaixo.

Primeiramente, fixe um intervalo $[s, t] \subset (a, b)$ e uma partição $P = \{s = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = t\}$ de $[s, t]$. Em seguida, considere o segmento de reta unido pelos pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$. É razoável supor, para $||P||$ suficientemente pequeno, que esse segmento seja uma boa aproximação para a região do gráfico compreendida entre as retas $x = x_{i-1}$ e $x = x_i$.

Consequentemente, o comprimento de tal segmento de reta é uma aproximação razoável para o comprimento ℓ_i da região do gráfico de f situado entre as retas $x = x_{i-1}$ e $x = x_i$, representada na figura 4.

Figura 4: Aproximação do comprimento da curva por um caminho poligonal



Fonte: Fundamentos de Cálculo (2015, com adaptações)

Com facilidade, é possível calcular o comprimento dos segmento de reta formado pelos pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$ pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \|(x_{i-1}, f(x_{i-1})) - (x_i, f(x_i))\| &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &= \sqrt{[(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2]\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{(x_i - x_{i-1})^2}} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}(x_i - x_{i-1}). \end{aligned} \tag{11}$$

Pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, existe $\theta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que $\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\theta_i)$ de modo que (11) torna-se

$$\|(x_{i-1}, f(x_{i-1})) - (x_i, f(x_i))\| = \sqrt{1 + f'(\theta_i)^2}(x_i - x_{i-1}).$$

Logo, $\sqrt{1 + f'(\theta_i)^2}(x_i - x_{i-1})$ é uma aproximação ainda instável para o que pretende-se definir como o comprimento ℓ_i. Porém, é possível afirmar que, à medida que $\|P\|$ tende a 0 (zero) tem-se que ℓ_i se aproximará de $\sqrt{1 + f'(\theta_i)^2}(x_i - x_{i-1})$. Desse modo, acrescente os n comprimentos dos segmentos obtidos a partir da partição P, isto é, considere a soma

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_i)^2}(x_i - x_{i-1}). \tag{12}$$

À vista disso, à medida que $||P||$ tenda a 0 (zero) a soma em (12) é uma aproximação desejável para a definição do comprimento da visualização geométrica do gráfico da restrição de f em $[s, t]$.

No entanto, como (12) equipara-se com a soma de Riemann

$$\sum S(\sqrt{1 + f'(x)^2}; P; \theta_i),$$

percebe-se que

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x)^2} \Delta x_i \longrightarrow \int_s^t \sqrt{1 + f'(x)^2} dx,$$

à medida que $||P||$ tende a zero. Consequentemente, $\displaystyle\int_s^t \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ é uma definição possível para o comprimento da visualização geométrica do gráfico da restrição de f em $[s, t]$.

A hipótese de continuidade sob a função f' em (a, b) assegura, pelo Teorema 3.1, que a função $p : (a, b) \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = \sqrt{1 + f'(x)}$ é integrável em qualquer intervalo $[a + \epsilon, b - \epsilon]$, com $\epsilon > 0$ e tal que $[a + \epsilon, b - \epsilon] \subset (a, b)$. Sendo assim, ao aplicar o desenvolvimento detalhado anteriormente aos intervalos do tipo $[a + \epsilon, b - \epsilon]$, com ϵ suficientemente próximo de 0 (zero), é obtido valores, são eles: $\displaystyle\int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$, que aproximam-se do comprimento ℓ.

Em suma, o cálculo do comprimento ℓ será obtido a partir da expressão

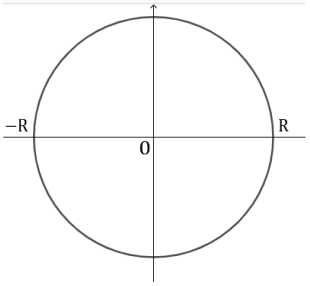
$$\ell = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

É importante ressaltar que: caso seja sabido que f é derivável em $[a, b]$ e $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ é integrável em $[a, b]$, o cálculo do comprimento da curva resume-se a

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Os argumentos a seguir referem-se, em particular, ao cálculo do comprimento da curva Γ, que é o círculo de centro $O(0, 0)$ e raio R de acordo com a figura 5, cuja equação é dada por $x^2 + y^2 = R^2$.

Figura 5: Círculo de centro $O(0, 0)$ e raio R



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021

A equação da circunferência pode ser reescrita da forma: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ou $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ e representa o semicírculo superior e inferior respectivamente.

Seja $g : [-R, R] \to \mathbb{R}$ uma função dada por $g(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. O gráfico de g é visualmente o semicírculo situado no semiplano superior do plano cartesiano. Observe que g é contínua em $[-R, R]$ e continuamente derivável em $(-R, R)$. Logo, o comprimento da cuva Γ é igual ao dobro do limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon} \sqrt{1 + g'(x)^2} dx, \tag{13}$$

se o limite existe. Para tal fim, inicialmente deseja-se manipular com a expressão

$$\sqrt{1 + g'(x)^2} = \sqrt{1 + [(\sqrt{R^2 - x^2})']^2}.$$

Veja que

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{R^2 - (x+h)^2} - \sqrt{R^2 - x^2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{R^2 - (x+h)^2} - \sqrt{R^2 - x^2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - (x+h)^2} + \sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{R^2 - (x+h)^2} + \sqrt{R^2 - x^2}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{R^2 - (x+h)^2 - (R^2 - x^2)}{h\left[\sqrt{R^2 - (x+h)^2} + \sqrt{R^2 - x^2}\right]} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-h(2x+h)}{h\left[\sqrt{R^2 - (x+h)^2} + \sqrt{R^2 - x^2}\right]} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-(2x+h)}{\sqrt{R^2 - (x+h)^2} + \sqrt{R^2 - x^2}} \\
&= \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \\
&= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.
\end{aligned}$$

Logo, resulta que

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + g'(x)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} \qquad (14) \\
&= \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}} \\
&= \frac{\sqrt{R^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\
&= \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}. \qquad (15)
\end{aligned}$$

Retomando a expressão (13), deseja-se agora detalhar sobre a integral $\int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon} \sqrt{1+g'(x)^2}dx$. Para tanto, defina $h : \left[\arccos\left(1-\frac{\epsilon}{R}\right), \arccos\left(-1+\frac{\epsilon}{R}\right)\right] \to \mathbb{R}$ por $h(t) = R\cos t$. Primeiro, observe que

$$h\left(\arccos\left(1-\frac{\epsilon}{R}\right)\right) = R\cos\left(\arccos\left(1-\frac{\epsilon}{R}\right)\right) = R\left(1-\frac{\epsilon}{R}\right) = R-\epsilon \tag{16}$$

e

$$h\left(\arccos\left(-1+\frac{\epsilon}{R}\right)\right) = R\cos\left(\arccos\left(-1+\frac{\epsilon}{R}\right)\right) = R\left(-1+\frac{\epsilon}{R}\right) = -R+\epsilon. \tag{17}$$

Logo, as expressões (15), (16) e (17) garantem que

$$\begin{aligned}\int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon} \sqrt{1+g'(x)^2}dx &= \int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx \\ &= \int_{h\left(\arccos\left(-1+\frac{\epsilon}{R}\right)\right)}^{h\left(\arccos\left(1-\frac{\epsilon}{R}\right)\right)} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx.\end{aligned}$$

Outras informações sobre a função h são essenciais para o próximo passo, porém elas não serão detalhadas, são elas: h possui derivada contínua e

$$h\left(\left[\arccos\left(1-\frac{\epsilon}{R}\right), \arccos\left(-1+\frac{\epsilon}{R}\right)\right]\right) \subset [-R+\epsilon, R-\epsilon].$$

Finalmente, de posse destas informações, é possível aplicar o Teorema 2.8, o que implicará que

$$\int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon} \sqrt{1+g'(x)^2}dx = \int_{\arccos\left(-1+\frac{\epsilon}{R}\right)}^{\arccos\left(1-\frac{\epsilon}{R}\right)} \frac{R}{\sqrt{R^2-R^2\cos^2 t}}(-R\text{sen}t)dt.$$

Lembrando da identidade trigonométrica fundamental $sen^2t + cos^2t = 1$, facilmente sabe-se que $R^2 - R^2cos^2t = R^2sen^2t$, e assim:

$$\begin{aligned}\int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon} \sqrt{1+g'(x)}dx &= \int_{\arccos\left(-1+\frac{\epsilon}{R}\right)}^{\arccos\left(1-\frac{\epsilon}{R}\right)} \frac{-R^2sent}{\sqrt{R^2\text{sen}^2t}}dt \\ &= \int_{\arccos\left(-1+\frac{\epsilon}{R}\right)}^{\arccos\left(1-\frac{\epsilon}{R}\right)} -Rdt.\end{aligned}$$

Finalmente, o uso do Teorema Fundamental do Cálculo resulta que

$$\int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon} \sqrt{1+g'(x)}dx = R\left[\arccos\left(-1+\frac{\epsilon}{R}\right) - \arccos\left(1-\frac{\epsilon}{R}\right)\right].$$

Por fim, aplicando o limite quando ϵ tende a 0 (zero) e se beneficiando da continuidade da função trigonométrica $\arccos$, conclui-se que

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon} \sqrt{1+g'(x)^2}dx &= \lim_{\epsilon\to 0} R\left[\arccos\left(-1+\frac{\epsilon}{R}\right) - \arccos\left(1-\frac{\epsilon}{R}\right)\right] \\ &= R(\arccos(-1) - \arccos(1)) \\ &= R\pi.\end{aligned}$$

Portanto, o comprimento de Γ é igual a $2R\pi$.

4.2 A corrente elétrica em um circuito RL

Um circuito elétrico é uma interconexão de elementos elétricos, tais como: geradores, receptores, resistores, capacitores, interruptores, realizada por meio de um elemento condutor, formando um caminho fechado e produzindo assim um fluxo de corrente elétrica, que passa pelos componentes causando a diferença de potencial em cada componente.

A corrente elétrica é definida como o movimento dos portadores de carga (elétrons e prótons) de um polo de um componente à outro. Matematicamente, a relação entre a corrente i, a carga elétrica q e o tempo t é dado por:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}.$$

Desse modo, como a unidade de carga é o Coulomb (C) e o tempo é dado em segundos (s), a unidade de medida de corrente é C/s, também conhecida como ampère (A).

Em um circuito, a diferença de potencial (d.d.p.) também conhecida como tensão elétrica, é a diferença de potencial elétrico entre dois pontos de um circuito. No Sistema Internacional (SI) a unidade de energia é o Joule (J) e a unidade de carga é o Coulomb (C). Portanto, a tensão é medida em J/C, também conhecida por volt (V).

A tensão instântanea entre os terminais de um indutor é expressa como

$$U(t) = L\frac{di}{dt}.$$

A tensão é diretamente proporcional à taxa de variação da corrente que o atravessa, sendo L sua constante de proporcionalidade, chamada de indutância do indutor. Assim, vemos que L é medida em $V\frac{s}{A}$, unidade conhecida como Henry (H).

Os circuitos são classificados de acordo com os elementos que o compõem. Este estudo dará destaque ao circuito RL que são compostos por:

Resistor: componente que controla a passagem de corrente elétrica e converter energia elétrica em energia térmica

Indutor: dispositivo que armazena energia elétrica quando um campo magnético é formado pela corrente elétrica que atravessa o seu interior. Sabe-se que a lei de Ampère do eletromagnetismo estabelece que um campo magnético é gerado sempre que uma corrente elétrica atravessa um condutor.

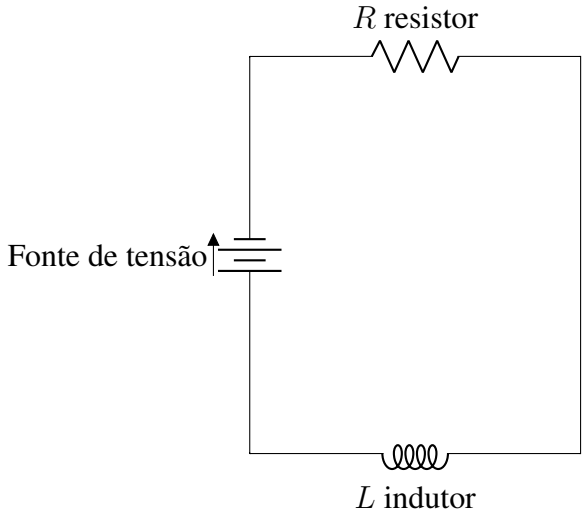
A figura 6 ilustra exemplo de um circuito RL, composto por: uma fonte de tensão $U(t)$: dispositivo que gera uma d.d.p., é usado uma bateria; um resistor R; um indutor L e fios que os unem.

Existem leis fundamentais para a análise de circuitos elétricos, entre elas estão, a lei de Ohm e as leis de Kirchhoff.

De acordo com a primeira lei de Ohm, a tensão (U) é diretamente proporcional à corrente elétrica (i) aplicada as extremidades de um resistor. Logo,

$$R = \frac{U(t)}{i(t)}$$

Figura 6: Circuito RL.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021

e dizemos que R é a resistência elétrica do resistor, que representa a capacidade de um elemento resistir ao fluxo de corrente elétrica; ela é medida em V/A, unidade conhecida como Ohm (Ω).

A primeira lei de Kirchhoff também conhecida como a lei das correntes ou lei dos nós, afirma que em um nó (ponto ao qual estão ligados dois ou mais elementos ou ponto de junção), a soma das correntes que entram é igual à soma das correntes que saem, isto significa que um nó não acumula carga. A segunda lei de Kirchhoff, conhecida como a lei das tensões ou das malhas, afirma que a soma algébrica da d.d.p.(diferença de potencial elétrico) em um percurso fechado é nula.

No circuito RL acima, uma diferença de potencial $U(t)$ entre os polos da fonte gera uma corrente elétrica de intensidade $i(t)$. De acordo com a segunda lei de Kirchhoff, a tensão que entra no circuito é a soma da diferença de tensão em cada componente. No circuito o indutor gera uma diferença de tensão $L\dfrac{di}{dt}$ e, de acordo com a primeira lei de Ohm, no resistor gera uma diferença de tensão $Ri(t)$. Portanto, conclui-se, pela segunda lei de Kirchhoff e pela diferença de tensão em cada componente do circuito, que

$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) = U(t).$$

Analogamente,

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}U(t). \tag{18}$$

é uma equação diferencial linear de primeira ordem, pois tem a forma-padrão

$$\frac{dy}{dt} + f(t)y(t) = g(t),$$

com variável t e $y(t) = i(t)$, $f(t) = \dfrac{R}{L}$, $g(t) = \dfrac{1}{L}U(t)$.

A partir da identificação da equação acima, é possível aplicar o Método dos Fatores Integrantes para obtenção da solução desejada $i(t)$. Textos sobre equações diferenciais elementares abordam este método, por exemplo, (BOYCE, 1996).

Dessa forma, multiplica-se ambos os membros da expressão (18) pelo fator integrante $e^{\frac{R}{L}t}$, obtendo

$$e^{\frac{R}{L}t}\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}e^{\frac{R}{L}t}i(t) = \frac{U(t)}{L}e^{\frac{R}{L}t}. \tag{19}$$

A expressão à esquerda do sinal de igualdade na equação acima é a derivada de $e^{\frac{R}{L}t}i(t)$ (uso das Proposições 2.2 e 2.3), de modo que a equação (19) fica

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{R}{L}t}i(t)\right) = \frac{U(t)}{L}e^{\frac{R}{L}t}. \tag{20}$$

Por fim, ao tomar o instante inicial igual a 0 (zero) e integrar a equação (21), obtem-se que

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{\frac{R}{L}s}i(s)\right)\,ds = \int_0^t \frac{U(s)}{L}e^{\frac{R}{L}s}\,ds. \tag{21}$$

Finalmente, o uso do Teorema Fundamental do Cálculo conclui que

$$e^{\frac{R}{L}t}i(t) - i(0) = \int_0^t \frac{U(s)}{L}e^{\frac{R}{L}s}\,ds,$$

o que implica que

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(i(0) + \int_0^t \frac{U(s)}{L}e^{\frac{R}{L}s}\,ds\right).$$

A resolução da integral à direita da igualdade na equação acima dependerá da expressão da função $U(t)$.

5 CONCLUSÃO

O Teorema Fundamental do Cálculo é, antes de qualquer outra virtude, uma ferramenta poderosa na determinação de integrais definidas em razão de reduzir esta questão à obtenção de uma primitiva para a função associada ao problema. Somado a esse fato, o TFC também traz consigo uma relação valiosa entre os conceitos de derivação e integração, esclarecendo que eles não estão desvinculados uns dos outros. Diante desta distinta conexão há a possibilidade de elevar a ocorrência de aprendizagem significativa destes assuntos.

Neste artigo buscou-se também exemplificar o uso do TFC na resolução de problemas modelados matematicamente, o que clarifica a utilidade e a relevância dele, não se limitando ao ambiente da matemática. Porém vale ressaltar que no processo de resolução dos mais diversos problemas há ainda os entraves das exigências técnicas sobre os assuntos aos quais se referem.

Portanto, desejou-se aqui despertar a curiosidade e o interesse em investigar diferentes aplicações deste insigne teorema, motivados pelo fato de que não há fronteiras para a utilização do Teorema Fundamental do Cálculo no que se refere a área científica.

REFERÊNCIAS

ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. **Fundamentos de Circuitos Elétricos.** 5. ed. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda, 2013.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro, 2014.

BOYER, C. B. **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo.** 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2001. Vol. 1.

JÚNIOR, G. B. T. **Cálculo.** São Paulo: Adisson Wesley, 2009. Vol. 1.

LIMA, E. L. **Análise Real.** 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

NETO, A. C. M. **Fundamentos de Cálculo.** Rio de Janeiro: SBM, 2015.

STEWART, J. **Cálculo.** 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. Vol. 1.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica.** 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994. Vol. 1.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por acalmar meu coração nos momentos mais difíceis e me mostrar que sou capaz de realizar meus sonhos e meus ideais.

À minha família, em especial aos meus Pais Agamenon Penha da Silva e Maria de Fátima Azevedo da Silva, exemplos de humildade e honestidade.

Às minhas irmãs Lílian Azevedo e Maria do Desterro por partilhar da felicidade em minhas conquistas.

Agradeço, carinhosamente, ao meu namorado Manoel Messias, pela paciência, incentivo e toda preocupação durante todo esse trajeto.

Meus avós, Maria e Antônia (in memorian), Francisco e Elias (in memorian) por serem exemplos de coragem e determinação.

Aos meus amigos que a vida me deu de presente, Maria Solange, Marla Monar, Marley Dias, Denilma Leite, obrigada por sempre me darem o apoio e a confiança de vocês.

Ao meu orientador Prof. Jóse Ginaldo, pela orientação, apoio e ricas contribuições fundamentais na conclusão desse trabalho.

Aos professores, funcionários e colegas da UEPB, que diretamente tive a oportunidade de conviver durante todos os anos de graduação.