UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATHEUS GABRIEL NASCIMENTO LIMA

ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DE TOPOLOGIA EM ANÁLISE: APLICAÇÕES DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E DO TEOREMA DE BAIRE

CAMPINA GRANDE
2021

MATHEUS GABRIEL NASCIMENTO LIMA

ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DE TOPOLOGIA EM ANÁLISE: APLICAÇÕES DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E DO TEOREMA DE BAIRE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Análise

Orientador: Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho

CAMPINA GRANDE

2021

L732a Lima, Matheus Gabriel Nascimento.
Algumas consequências de topologia em análise [manuscrito] : aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach e do Teorema de Baire / Matheus Gabriel Nascimento Lima. - 2021.
53 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.
"Orientação : Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho , Departamento de Matemática - CCT."

1. Topologia. 2. Espaços métricos. 3. Análise matemática. I. Título

21. ed. CDD 514

Elaborada por Lucas H. A. da Silva - CRB - 15/898 BC/UEPB

MATHEUS GABRIEL NASCIMENTO LIMA

ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DE TOPOLOGIA EM ANÁLISE: APLICAÇÕES DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E DO TEOREMA DE BAIRE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Análise

Aprovado em: 20/07/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Profa. Dra. Luciana Rôze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho a minha mãe, por ser meu maior exemplo de perseverança, e a minha professora orientadora por me conduzir à realização do mesmo.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me guiado até aqui, com seu poder sobrenatural.

A minha amada mãe, Maria do Socorro de Sousa Nascimento, por ser minha base, por seu amor incondicional, sua coragem e seus ensinamentos tão singelos e fortes. Agradeço imensamente sua compreensão frente a minha dedicação exclusiva aos estudos. Agradeço também ao meu pai, Felismino Alves de Lima, por todo apoio dado.

A meus queridos irmãos Melquizedeque, Pérola, Paloma e Zeus pelo companheirismo, apoio, compreensão e ensinamentos.

Aos meus amigos da faculdade que fizeram com que minha caminhada acadêmica se tornasse mais leve, trazendo momentos divertidos. Os agradeço também por toda troca de conhecimento.

A Max Lira por seu companheirismo, incentivo e também por ajudar a tornar minha trajetória acadêmica mais leve.

A minha professora e orientadora, Emanuela Régia de Sousa Coelho, por ter me conduzido a fazer este trabalho, transmitindo seu conhecimento e me encorajado. Agradeço por sua paciência e disponibilidade frente às adversidades que passamos com a pandemia da COVID-19.

A Universidade Estadual da Paraíba por seu acolhimento e as diversas oportunidades que me deu. Agradeço também aos professores que me deram base para chegar até aqui.

A todos aqueles que contribuíram, de alguma forma, para a realização deste trabalho, deixo aqui registrada minha imensa gratidão. Sou resultado da confiança de todos vocês.

RESUMO

Neste trabalho abordamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach e o Teorema de Baire, teoremas clássicos da topologia, bem como algumas de suas aplicações em Análise Matemática. Como consequência do Teorema do Ponto Fixo de Banach estudamos a existência e unicidade de solução para variados tipos de equações; enquanto o Teorema de Baire garante que todo espaço métrico completo é um espaço de Baire e, com isso, provamos que toda função contínua, de período 2π, pode ser aproximada por funções que não possuem derivada em qualquer ponto. Inicialmente estudamos resultados da Topologia Geral, que embasam as demonstrações de tais teoremas. Também tratamos de resultados da Topologia dos Espaços Métricos, especialmente dos Espaços Métricos Completos, os quais englobam o Teorema do Ponto Fixo de Banach e o Teorema de Baire.

Palavras-chave: Topologia. Análise. Teorema do Ponto Fixo de Banach. Teorema de Baire.

ABSTRACT

In this work we will approach Banach's Fixed Point Theorem and Baire's Theorem, classic topology theorems, and also some of their applications in Mathematical Analysis. As a consequence of Banach's Fixed Point Theorem we have the existence and uniqueness of solutions for various types of equations, in addition to providing us with a method to find such a solution; while Baire's Theorem guarantees that every Complete Metric space is a Baire space and, with this, we prove that every continuous function, with period 2π, can be approximated by functions that have no derivative at any point. Thus, initially we will study results of General Topology, which support the proofs of such theorems. We will also deal with the results of the Topology of Metric Spaces, especially the Complete Metric Spaces, which encompass the Banach's Fixed Point Theorem and the Baire's Theorem.

Keywords: Topology. Analysis. Banach's Fixed Point Theorem. Baire's Theorem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Topologia Geral pode ser caracterizada como o estudo dos espaços topológicos e das propriedades dos elementos que os formam. Embora não seja estudada, em geral, como disciplina da graduação nos cursos de Licenciatura, as definições e resultados estudados nessa área são extremamente relevantes para o desenvolvimento de teorias da Análise Matemática, por generalizar conceitos de continuidade, distância e convergência. Sendo assim, a motivação para esse estudo surge da curiosidade em verificar como a Topologia Geral e a Topologia dos Espaços Métricos se apresentam em alguns resultados clássicos da Análise, como é o caso das contribuições do Teorema do Ponto Fixo de Banach e do Teorema de Baire.

O Teorema do Ponto Fixo de Banach, do polonês Stefan Banach (1892 - 1945), possui consequências bastante importantes na Análise, sendo um resultado da Teoria de Espaços Métricos, que, por sua vez, está embasada nos conceitos fundamentais da Topologia Geral. Este teorema é válido para espaços métricos completos e garante a existência e unicidade de pontos fixos para determinados tipos de operadores, o que implica na existência de soluções para uma gama de equações diferenciais ordinárias, equações integrais, equações diferenciais parciais e equações lineares em espaços de Banach.

O Teorema de Baire homenageia o francês René-Louis Baire (1874 - 1932) que, em uma de suas obras, trouxe a noção de conjunto magro. A demonstração deste teorema é rica em argumentos puramente topológicos e nos assegura que todo Espaço Métrico completo é um espaço de Baire. Algumas consequências clássicas deste teorema são o princípio da limitação uniforme e o teorema de Banach- Steinhaus, importantes resultados da Análise Funcional, que podem ser encontrados, por exemplo, em Botelho, Pellegrino & Teixeira (2012). Aqui, vamos nos ater a utilizá-lo para demonstrar a existência de funções contínuas sem derivada.

Este trabalho foi desenvolvido por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC). Tal programa propicia aos alunos de graduação a oportunidade de ampliar a formação acadêmica mediante a participação em projetos de pesquisa. Assim, o projeto, intitulado de "Um Estudo Introdutório de Aplicações da Topologia à Análise", tinha como objetivo estudar conceitos fundamentais em Topologia, bem como algumas de suas implicações em variados ramos da Análise. Para tanto, utilizamos, principalmente, o livro Topology: A First Course (2000), de James R. Munkres, para estudar os conceitos de Topologia Geral e Topologia dos Espaços Métricos, e o livro Aplicações da Topologia à Análise (2011), de Chaim Samuel Honig, para estudar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, o Teorema de Baire e algumas consequências destes teoremas à Análise.

Com isso, este trabalho se trata de uma revisão bibliográfica acerca dos conteúdos aqui tratados e, como objetivo geral, busca abordar e trazer aplicações do Teorema do

Ponto fixo de Banach e do Teorema de Baire à Análise. Como objetivos específicos, temos: estudar conceitos básicos da área de Topologia Geral e da Topologia dos Espaços Métricos; demonstrar o Teorema do ponto Fixo de Banach e aplicá-lo para obter soluções de certas equações diferenciais ordinárias, equações integrais e equações lineares em espaços de Banach; e demonstrar o Teorema de Baire e aplicá-lo na demonstração de um resultado que garante a existência de funções contínuas sem derivada.

Assim, o trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 aborda sobre Topologia Geral e Espaços Métricos, bem como resultados importantes para o que é discutido no Capítulo 3, que trata do Teorema do ponto Fixo de Banach e aplicações, e no Capítulo 4, que trata do Teorema de Baire.

2 UM POUCO DE TOPOLOGIA

A Topologia é um ramo da Matemática que objetiva estudar Espaços Topológicos e a relação entre os objetos de tais espaços. Nesta área se estuda, também, generalizações das ideias de limite e continuidade que conhecemos do Cálculo, por exemplo.

Um tipo de espaço topológico que embasa diversas teorias da Análise Matemática são os chamados Espaços Métricos, cuja ideia está associada à noção intuitiva de distância.

Neste capítulo, são apresentados alguns conceitos e resultados da Topologia Geral e da Topologia dos Espaços Métricos que são necessários para o entendimento dos teoremas dos capítulos posteriores. Para tanto, utilizamos neste capítulo principalmente o livro Topology: A First Course (2000), de James R. Munkres. Outras referências consultadas/recomendadas para o entedimento do Capítulo são Domingues (1982), Lima (1970) e Lima (2003).

2.1 Espaços Topológicos

Definição 2.1. Seja X um conjunto arbitrário. Uma topologia sobre X é uma família τ de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\varnothing$ e X pertencem a τ;

2. A interseção de elementos de uma subcoleção finita de τ pertence a τ;

3. A união dos elementos de uma subcoleção arbitrária de τ pertence a τ.

Um Espaço Topológico é um par ordenado (X, τ), em que X é um conjunto e τ uma topologia sobre X. Em geral, diz-se apenas que X é um Espaço Topológico, ficando implícito que foi definida uma topologia sobre X. Ademais, os elementos da topologia τ são chamados de abertos.

Exemplo 2.2. Seja $X = \{a, b, c\}$ um conjunto com três elementos. Tem-se

a) $\tau_1 = \{\varnothing, X, \{b\}, \{b, c\}\}$ é uma topologia sobre X.

   Devemos verificar se τ_1 satisfaz as três condições da Definição 2.1. Para isso, observemos que $\varnothing$ e X pertencem a X. Ademais, a interseção de quaisquer elementos de τ_1, bem como a união de quaisquer elementos de τ_1 pertencem a τ_1. Portanto, τ_1 é uma topologia sobre X.

b) $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$ não é uma topologia sobre X.

   Como vemos, $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ não pertence a τ_2. Portanto, como a condição 3 da Definição 2.1 não é satisfeita, τ_2 não é uma topologia sobre X.

Exemplo 2.3. Se X é um conjunto qualquer, a família formada por todos os subconjuntos de X é uma topologia sobre X, chamada de Topologia Discreta. Além disso, a coleção $\{X, \varnothing\}$ é também uma topologia sobre X, chamada de Topologia Indiscreta ou Trivial.

Exemplo 2.4. A família de intervalos abertos de $\mathbb{R}$, dados por

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \ (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \text{ e } (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$, formam uma topologia sobre $\mathbb{R}$, chamada de topologia canônica.

Definição 2.5. Sejam X um Espaço Topológico e $x \in X$. Se U é um aberto contendo x, diremos que U é uma vizinhança de x.

Definição 2.6. Se X é um conjunto, uma base para uma topologia em X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X, tais que

1. Para cada $x \in X$, há, ao menos, um elemento $B \in \mathcal{B}$ com $x \in B$;

2. Se $x \in B_1 \cap B_2$, com $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, então existe $B_3 \in \mathcal{B}$ com $x \in B_3$ e $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Se $\mathcal{B}$ satisfaz as duas condições, então definimos a Topologia τ gerada por $\mathcal{B}$ como segue: $U \subset X$ é elemento de τ se, para cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Observemos que, nas condições da definição anterior, τ é, de fato, uma topologia sobre X.

Com efeito, se $U = \varnothing$, então, por vacuidade $U \in \tau$. Ainda, $X \in \tau$, pois para cada $x \in X$, por (1), $x \in B$ para algum $B \in \mathcal{B}$, que é a definição dos elementos de τ.

Agora, sejam $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família arbitrária de elementos de τ e $U = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. Dado $x \in U$, existe $\alpha \in J$ com $x \in U_\alpha$. Como $U_\alpha \in \tau$, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subset U_\alpha \subset U$ e, portanto, $U \in \tau$. Por indução, prova-se para a interseção finita.

Finalmente, se U_1 e U_2 são elementos de τ e $x \in U_1 \cap U_2$, existem $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, com $x \in B_1 \subset U_1$ e $x \in B_2 \subset U_2$. Do item (2), segue que existe $B_3 \in \mathcal{B}$, com $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$ e, portanto, $U_1 \cap U_2 \in \tau$, como queríamos.

2.2 Topologia Induzida

Definição 2.7. Sejam X um Espaço Topológico com a topologia τ e $Y \subset X$ um subconjunto. Definimos a topologia induzida τ_y em Y como a coleção dos conjuntos da forma $U \cap Y$, em que $U \subset X$ é um aberto em X. Dizemos que Y é um subespaço de X.

Podemos mostrar que τ_y é, de fato, uma topologia, verificando que são satisfeitas as condições da Definição 2.1. Vejamos:

1. $\varnothing = \varnothing \cap Y \in \tau_y$ e $Y = X \cap Y \in \tau_y$.

2. $(U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) \cap \cdots \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n) \cap Y \in \tau_y$.

3. $\bigcup_{\alpha \in J}(U_\alpha \cap Y) = (\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha) \cap Y \in \tau_y$.

Proposição 2.8. *Sejam X um Espaço Topológico e $Y \subset X$ um subespaço. Se U é aberto em Y e Y é aberto em X, então U é aberto em X.*

Demonstração:
Se $U \in \tau_y$, então $U = V \cap Y$, com V aberto em X. Como Y é aberto em X, então, por definição, $V \cap Y$ também o é.

∎

2.3 Conjuntos Fechados e Pontos Limite

Definição 2.9. Seja X um Espaço Topológico. Dizemos que $A \subset X$ é fechado se seu complementar $X \smallsetminus A$ for aberto.

Exemplo 2.10. O intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, com $\mathbb{R}$ munido da topologia canônica, é um conjunto fechado, pois seu complementar é

$$X \smallsetminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty),$$

que é a união de abertos e, portanto, também é aberto. Da mesma forma, $[a, +\infty)$ é fechado.

Teorema 2.11. *Seja X um Espaço Topológico, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $\varnothing$ e X são fechados;

2. A interseção arbitrária de fechados é fechado;

3. A união finita de fechados é fechado.

Demonstração:
De fato, temos:

1. $X \smallsetminus \varnothing = X$ é aberto, assim, $\varnothing$ é fechado.
   $X \smallsetminus X = \varnothing$ é aberto, assim, X é fechado.

2. Seja $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ uma família de fechados, temos

$$X \smallsetminus \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} (X \smallsetminus A_\alpha).$$

   Uma vez que os conjuntos $X \smallsetminus A_\alpha$ são abertos por definição, o lado direito desta equação representa uma união arbitrária de conjuntos abertos e, portanto, pela condição 3 da Definição 2.1, é aberto. Logo, $\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ é fechado.

3. Analogamente, se A_i é fechado para $i = 1, 2, \dots, n$, considere a igualdade

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus A_i).$$

   O lado direito dessa equação é uma interseção finita de abertos e, portanto, pela condição 2 da Definição 2.1, é aberto. Assim, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ é fechado.

Assim, os itens 1, 2 e 3 estão satisfeitos e segue o resultado.

■

Teorema 2.12. *Sejam X um Espaço Topológico e $Y \subset X$ um subespaço, então um subconjunto $A \subset Y$ é fechado se, e somente se, A é a interseção de um fechado de X com Y.*

Demonstração:

Assuma que $A = C \cap Y$, em que C é fechado em X. Temos que $X \setminus C$ é aberto em X e assim, $(X \setminus C) \cap Y$ é aberto em Y. Agora $(X \setminus C) \cap Y = Y \setminus A$. Portanto, A é fechado em Y. Reciprocamente, suponha que A é fechado em Y. Então, $Y \setminus A$ é aberto em Y. Pela definição de topologia induzida $Y \setminus A = U \cap Y$, em que U é aberto em X. Assim, $X \setminus U$ é fechado em X. Agora,

$$A = Y \setminus (U \cap Y) = (X \cap Y) \setminus (U \cap Y) = (X \setminus U) \cap Y.$$

Logo, A é a interseção de um fechado de X com Y.

■

Definição 2.13. Sejam X um Espaço Topológico e A um subconjunto de X. Definimos o interior de A, simbolizado por $int\ A$, como a união de todos os conjuntos abertos contidos em A e o fecho de A, simbolizado por $\overline{A}$, como a interseção de todos os conjuntos fechados que contém A.

Da Definição 2.1, segue que $int\ A$ é aberto, pois é uma união de abertos, e, do Teorema 2.11, segue que $\overline{A}$ é fechado, pois é uma interseção de fechados. Além disso,

$$int\ A \subset A \subset \overline{A}.$$

Ademais, se A é fechado, então $\overline{A} = A$ e se A é aberto, então $int\ A = A$.

Se Y é um subespaço de X, então o fecho de A em Y pode ser diferente do fecho de A em X. Reservamos a notação $\overline{A}$ para indicar o fecho de A em X e $\overline{A}^y$ para indicar o fecho de A em Y.

Teorema 2.14. *Seja Y um subespaço de X e $A \subset Y$ um subconjunto. Então, o fecho de A em Y é $\overline{A} \cap Y$, ou seja, $\overline{A}^y = \overline{A} \cap Y$.*

Demonstração:

Seja $\overline{A}^y$ o fecho de A em Y. Pelo Teorema 2.12, temos que $\overline{A} \cap Y$ é fechado em Y. Além disso, temos que $A \subset \overline{A} \cap Y$. Como $\overline{A}^y$ é a interseção de todos os fechados que contêm A, então $\overline{A}^y \subset \overline{A} \cap Y$. Agora, como $\overline{A}^y$ é fechado em Y, então $\overline{A}^y = C \cap Y$ com C fechado em X. Como $A \subset \overline{A}^y$, então $A \subset C$. Desta forma, $\overline{A} \subset C$. Assim, $\overline{A} \cap Y \subset C \cap Y = \overline{A}^y$. Portanto, $\overline{A}^y = \overline{A} \cap Y$.

■

Teorema 2.15. *Sejam X um Espaço Topológico e $A \subset X$ um subconjunto. Então, $x \in \overline{A}$ se, e somente se, toda vizinhança de x intersecta A.*

Demonstração:

Mostraremos que $x \notin \overline{A}$ se, e somente se, existe uma vizinhança U de x tal que $U \cap A = \varnothing$. De fato, se $x \notin \overline{A}$, então existe um fechado C com $A \subset C$ e $x \notin C$. Temos que $X \setminus C$ é aberto, com $x \in (X \setminus C)$, e $A \cap (X \setminus C) = \varnothing$. Reciprocamente, seja U um aberto contendo x tal que $U \cap A = \varnothing$, então $X \setminus U$ é fechado e $\overline{A} \subset X \setminus U$. Como $x \notin X \setminus U$, então $x \notin \overline{A}$.

■

Definição 2.16. Se A é um subconjunto de um Espaço Topológico X e $x \in X$, diremos que x é um ponto limite de A se toda vizinhança de x intersecta A em um ponto diferente de x. Denotaremos por A' o conjunto dos pontos limite de A.

Teorema 2.17. *Seja A um subconjunto de um Espaço Topológico X e denote por A' o conjunto dos pontos limite de A. Então,*

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Demonstração:

Se $x \in A'$, então, por definição, qualquer vizinhança de x intersecta A. Portanto, pelo Teorema 2.15, $x \in \overline{A}$. Assim, $A' \subset \overline{A}$ e, como $A \subset \overline{A}$, segue que $A \cup A' \subset \overline{A}$. Logo, $A \cup A' \subset \overline{A}$.

Agora, tome $x \in \overline{A}$. Consideramos dois casos: $x \in A$ e $x \notin A$. Se $x \in A$ então $x \in A \cup A'$. Suponha agora que $x \notin A$. Como $x \in \overline{A}$, então qualquer vizinhança de x intersecta A. Como $x \notin A$, qualquer vizinhança de x intersecta A em um ponto diferente de x, isto é, $x \in A'$. Portanto, $x \in A \cup A'$, ou seja, $\overline{A} \subset A \cup A'$ e segue o resultado.

■

Corolário 2.18. *A é fechado se, e somente se, A contém todos os seus pontos limite.*

Demonstração:

De fato, A é fechado se, e somente se, $A = \overline{A} = A \cup A'$. Isso ocorre se, e somente se, $A' \subset A$.

■

Definição 2.19. Sejam X um Espaço Topológico e $A \subset X$ um subconjunto. Dizemos que A é denso em X quando $A \cap U \neq \varnothing$, para toda vizinhança U de x e para todo $x \in X$.

Proposição 2.20. *Seja X um Espaço Topológico. $F \subset X$ tem interior vazio se, e somente se, $X \setminus F$ é denso em X.*

Demonstração:

F tem interior vazio se, e somente se, para todo aberto O em X tem-se $F \cap O = \varnothing$. Isso ocorre se, e somente se, todos os abertos estão em $X \setminus F$, ou seja, para todo aberto O, tem-se $O \cap X \setminus F \neq \varnothing$ e isso, por definição, equivale a dizer que $X \setminus F$ é denso em X.

■

Definição 2.21 (Sequência)**.** Uma sequência em um Espaço Topológico X é uma função

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N} &\to X \\ n &\mapsto x(n) = x_n \end{aligned}$$

que a cada número $n \in \mathbb{N}$ associa um elemento da sequência que chamamos o n-ésimo termo da sequência e denotamos por x_n. O conjunto dos termos da sequência é indicado por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e a sequência é indicada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definição 2.22. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um Espaço Topológico X. Diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x \in X$ se, para qualquer vizinhança U de x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow x_n \in U.$$

2.4 Espaços de Hausdorff

Definição 2.23. Um Espaço Topológico X é chamado espaço de Hausdorff se para quaisquer $x, y \in X$, com $x \neq y$, existem vizinhanças U e V de x e y, respectivamente, com $U \cap V = \varnothing$.

Teorema 2.24. *Todo subconjunto finito de um espaço de Hausdorff é fechado.*

Demonstração:

Primeiramente, mostremos que se $x_1 \in X$ então o conjunto unitário $\{x_1\}$ é fechado. Se $y \in X$ com $y \neq x_1$, então existem abertos U e V contendo x_1 e y, respectivamente, com $U \cap V = \varnothing$. Uma vez que V não intercepta $\{x_1\}$, o ponto y não pode pertencer ao fecho do conjunto $\{x_1\}$. Como resultado, $\overline{\{x_1\}} = \{x_1\}$, de modo que $\{x_1\}$ é fechado. Portanto, o conjunto finito

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \bigcup_{i=1}^{i=n} \{x_i\}$$

é fechado, dado que a união finita de fechados é fechado.

■

Teorema 2.25. *Sejam X um espaço Hausdorff e $A \subset X$ um subconjunto. Então $x \in X$ é um ponto limite de A se, e somente se, toda vizinhança de x intersecta A em uma quantidade infinita de pontos de A.*

Demonstração:

Se toda vizinhança de x contém infinitos pontos de A, então contém um ponto diferente de x que pertence a A, logo, x é ponto limite. Reciprocamente, seja x um ponto limite de A. Suponha que existe uma vizinhança U de x, tal que $U \cap A$ é finito. Então U também intersecta $(A \setminus \{x\})$ em uma quantidade finita de pontos. Escrevendo $U \cap (A \setminus \{x\}) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, temos que $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ é fechado, por ser um conjunto finito, assim, $X \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ é aberto. Além disso, $x \in X \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Dessa forma, $U \cap (X \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_n\})$ é uma vizinhança de x. Agora, $[U \cap (X \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_n\})] \cap (A \setminus \{x\}) = U \cap (A \setminus \{x\}) \cap (X \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}) = \varnothing$, ou seja, uma vizinhança de x não intersecta A, o que contradiz o fato de x ser um ponto limite de A. Portanto, U intersecta A em uma quantidade infinita de pontos.

$\blacksquare$

Teorema 2.26. *Seja X um espaço de Hausdorff, então qualquer sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de X converge para, no máximo, um ponto de X.*

Demonstração:

Suponha que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x, se $y \neq x$, então, como X é um espaço de Hausdorff, existem vizinhanças U e V de x e y respectivamente, tais que $U \cap V = \varnothing$. Além disso, por definição, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então $x_n \in U$. Como $U \cap V = \varnothing$, então $x_n \notin V$. Como $y \in V$, então x_n não converge para y.

$\blacksquare$

Se X é um espaço de Hausdorff e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x, diremos que x é o limite da sequência e escrevemos $x_n \to x$.

2.5 Funções Contínuas

Definição 2.27. Sejam X e Y Espaços Topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é contínua, se para cada aberto V de Y, a imagem inversa $f^{-1}(V)$ é aberta em X.

Exemplo 2.28. A definição de continuidade dada aqui é equivalente à definição $\varepsilon - \delta$ de continuidade em $\mathbb{R}$.

De fato, suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja contínua de acordo com a definição dada aqui. Dados $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ temos que $V = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ é aberto em $\mathbb{R}$. Desta forma, $f^{-1}(V)$ é aberto e como

$$f^{-1}(V) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in V\}$$

então, $x_0 \in f^{-1}(V)$. Logo, existe um intervalo aberto (a, b) com $x_0 \in (a, b) \subset f^{-1}(V)$. Tome $\delta = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$. Se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b) \subset f^{-1}(V)$, então $f(x) \in V =$

$(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

Reciprocamente, suponha que f seja contínua de acordo com a definição $\varepsilon - \delta$, seja $V \in \mathbb{R}$ aberto e tome $x_0 \in f^{-1}(V)$. Assim, $f(x_0) \in V$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subset V$, então existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, então $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subset V$. Desta forma, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(V)$. Como $x_0 \in \mathbb{R}$ é arbitrário, segue que $f^{-1}(V)$ é aberto.

Proposição 2.29. *Sejam X um Espaço Topológico e $A \subset X$ um subconjunto. Se existe uma sequência de pontos de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ que converge para x, então $x \in \overline{A}$.*

Demonstração:

Seja $x_n \to x$, com $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$. Dado um aberto U contendo x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então $x_n \in U$. Portanto, toda vizinhança de x intersecta A, o que implica que $x \in \overline{A}$.

■

Proposição 2.30. *Sejam X e Y Espaços Topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Seja $x_n \to x$ uma sequência em X. Se f é contínua, então $f(x_n) \to f(x)$.*

Demonstração:

Suponha que f é contínua e seja $x_n \to x$ em X. Seja $U \subset Y$ uma vizinhança de $f(x)$. Então

$$f^{-1}(U) = \{x' \in X : f(x') \in U\}$$

é uma vizinhança de x. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então $x_n \in f^{-1}(U)$ e, portanto, $f(x_n) \in U$. Como U é uma vizinhança qualquer de $f(x)$, então $f(x_n) \to f(x)$.

■

2.6 Espaços Regulares

Definição 2.31. Diremos que um Espaço Topológico X é regular se dados um fechado $A \subset X$ e um ponto $b \in X$ tal que $b \notin A$, existem abertos disjuntos U, V em X tais que $A \subset U$ e $b \in V$.

Proposição 2.32. *Seja X um Espaço Topológico. X é regular se, e somente se, dados um ponto $a \in X$ e uma vizinhança U de a, existe um aberto $V \subset X$ tal que $a \in V \subset \overline{V} \subset U$.*

Demonstração:

Supondo X regular, sejam $a \in X$ e U uma vizinhança de a. Sendo U aberto em X, então $a \notin X \setminus U$ e $X \setminus U$ é fechado. Como X é regular, então existem abertos disjuntos V, W em X tais que $a \in V$ e $X \setminus U \subset W$. Logo, $a \in V \subset X \setminus W \subset U$. Como $X \setminus W$ é fechado, segue que

$$a \in V \subset \overline{V} \subset X \setminus W \subset U.$$

Reciprocamente, dados $b \in X$ e um conjunto A, fechado, tal que $b \notin A$, definimos $U = X \setminus A$. Temos que U é aberto e, portanto, uma vizinhança de b. Da hipótese, existe uma vizinhança V de b de modo que $\overline{V} \subset U$. Logo, V e $X \setminus \overline{V}$ são abertos, disjuntos, contendo b e A, respectivamente e X é regular.

■

2.7 Espaços Métricos

Ao longo da evolução, principalmente depois do século XIX, a Matemática ganhou uma roupagem mais abstrata para a noção de distância, passando a aplicá-la a conjuntos não tão comuns como $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$. Assim, tais estudos conduziram às noções de Espaços Métricos, que foram introduzidas pelo matemático francês Maurice René Fréchet (1878 - 1973).

A grosso modo, um Espaço Métrico é um Espaço Topológico no qual as distâncias entre quaisquer de seus elementos é definida. Tais distâncias formam a métrica do conjunto. Vejamos agora alguns resultados primordiais dos Espaços Métricos.

Definição 2.33. Uma métrica sobre um conjunto X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(x,y) \geq 0,\ \forall x,y \in X$ e $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in X$;
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x,y,z \in X$.

O número $d(x,y)$ é chamado distância entre x e y.

Um Espaço Métrico é um par (X,d), em que X é um conjunto e d é uma métrica sobre X.

Exemplo 2.34.

(a) Se X é um conjunto arbitrário, então a função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

é uma métrica sobre X.

(b) Em $\mathbb{R}$ a métrica usual é definida por

$$d(x,y) = |x - y|, \forall x,y \in X.$$

(c) Seja $x = (x_1, \cdots, x_n) \in X = \mathbb{R}^n$. Definimos a norma de x como

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

e a métrica euclidiana d por

$$d(x,y) = |x-y| = [(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2]^{\frac{1}{2}}$$

Dados uma métrica d sobre X, um ponto $a \in X$ e um número $r > 0$, definimos uma bola aberta de centro em a e raio r como sendo o conjunto

$$B_d(a,r) = \{y \in X : d(a,y) < r\}.$$

Analogamente, definimos uma bola fechada de centro em a e raio r como sendo o conjunto

$$B_d[a,r] = \{y \in X : d(a,y) \leq r\}.$$

Para facilitar a notação, em geral escreveremos apenas $B(a,r)$ para representar a bola aberta de centro em a e raio r e $B[a,r]$ para representar a bola fechada de centro em a e raio r, ficando implícita a métrica d.

Definição 2.35. Se d é uma métrica sobre o conjunto X, então a coleção de todas as Bolas Abertas $B(a,r)$, para $x \in X$ e $r > 0$, é uma base para uma topologia em X, chamada de Topologia Métrica induzida por d.

Observemos que as bolas abertas formam, de fato, uma base para uma topologia sobre X, segundo a Definição 2.6. Com efeito, a condição 1 é imediata, uma vez que basta tomar qualquer bola centrada em x, para $x \in X$. Para a segunda parte, sejam $B(x_1,r_1)$ e $B(x_2,r_2)$, com $x_1, x_2 \in X$ e $r_1, r_2 > 0$ e $x \in B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$. Queremos exibir $\delta > 0$ de modo que $B(x,\delta) \subset B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$. Tomando $\delta_1 = r_1 - d(x_1,x)$, $\delta_2 = r_2 - d(x_2,x)$ e $\delta = min(\delta_1,\delta_2)$, temos, para $y \in B(x,\delta)$,

$$d(y,x_1) \leq d(y,x) + d(x,x_1) < r_1 - d(x_1,x) + d(x,x_1) = r_1$$

e

$$d(y,x_2) \leq d(y,x) + d(x,x_2) < r_2 - d(x_2,x) + d(x,x_2) = r_2,$$

ou seja, $y \in B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$, consequentemente, $B(x,\delta) \subset B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$, como queríamos.

Segue imediatamente da definição anterior que as Bolas Abertas são conjuntos abertos na Topologia da Métrica.

Teorema 2.36. *Toda bola fechada de um Espaço Métrico E é um conjunto fechado.*

Demonstração:

De fato, seja $B[a, r]$ a bola fechada de centro em a e raio r e escolha $x \in E \setminus B[a, r]$. Assim temos que $d(x, a) > r$. Tome $s = d(x, a) - r$ e considere a bola aberta $B(x, s)$. Se $y \in B(x, s)$, então $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ e, como $B(x, s)$ é aberta, temos $d(x, a) < s + d(y, a) = d(x, a) - r + d(y, a)$, logo, $d(y, a) > r$. Assim, $y \notin B[a, r]$. Como y foi tomado arbitrariamente em $B(x, s)$, segue que $B(x, s) \cap B[a, r] = \varnothing$. Assim, x não é ponto limite de $B[a, r]$, para todo $x \in M \setminus B[a, r]$. Dessa forma, $B[a, r]$ contém todos os seus pontos limites e, portanto, é um conjunto fechado.

■

Proposição 2.37. *Todo Espaço Métrico é regular.*

Demonstração: A prova pode ser encontrada em Munkres (2000). ■

Teorema 2.38. *Todo Espaço Métrico é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração:

Sejam E um Espaço Métrico e $x, y \in E$ distintos. Seja

$$\varepsilon = \frac{d(x, y)}{2},$$

considere os abertos $U = B(x, \varepsilon)$ e $V = B(y, \varepsilon)$. Então, $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \varnothing$, portanto, E é um espaço de Hausdorff.

■

Corolário 2.39. *Sejam E um Espaço Métrico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de E, então o limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, quando existe, é único.*

Demonstração:

Como E é um Espaço Métrico, pelo Teorema 2.38, E é um espaço de Hausdorff e, do Teorema 2.26, segue que o referido limite é único.

■

Observação 2.40 (Convergência de sequências em Espaços Métricos)*.* Reescrevendo a Definição 2.22 em termos de bolas, dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em um espaço métrico E, dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $x \in E$ se, para qualquer bola aberta de centro em x e raio ε, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(x, \varepsilon),$$

ou seja, para todo $n > n_0$, temos $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Definição 2.41. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de um Espaço Métrico é uma sequência de Cauchy, se dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, para $m, n \geq n_0$, temos $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Dizemos que duas sequências de Cauchy x_n e x'_n são equivalentes se $d(x_n, x'_n) \to 0$ quando $n \to 0$.

Proposição 2.42. *Toda sequência convergente em um Espaço Métrico E é de Cauchy.*

Demonstração: De fato, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x, então, por definição, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \geq n_0$ tal que $x_n \in B_d\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, ou seja, $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Então, para todo $m, n \geq n_0$, segue

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

∎

Observação 2.43. Da definição de Continuidade em Espaços Topológicos, se E e E' são Espaços Métricos com métricas d e d', respectivamente. Uma aplicação $f : E \to E'$ é contínua no ponto $x = x_0 \in E$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, se $d(x, x_0) < \delta$, então $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Dizemos que $f : E \to E'$ é contínua quando for contínua em todos os pontos de E.

Definição 2.44. Uma aplicação f de um Espaço Métrico E, com métrica d, em um Espaço Métrico E', com métrica d', é uniformemente contínua se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $d(x, y) < \delta$, então $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$, para todo $x, y \in E$.

Exemplo 2.45 (Função lipschitziana)**.** Sejam E e E' Espaços Métricos, com métricas d e d', respectivamente. Dizemos que uma função $f : E \to E'$ é lipschitziana se existe uma contante $L \geq 0$, denominada constante de Lipschitz, tal que

$$d'(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$$

para quaisquer $x,\ y \in E$. Afirmamos que as funções lipschitzianas são uniformemente contínuas.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar um $\delta > 0$ que satisfaça

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Então, para $d(x, y) < \delta$, temos $d'(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) < L\delta = L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$, em que a primeira desigualdade decorre da definição de função lipschitziana. Logo, f é uniformemente contínua.

Observação 2.46. Sejam E e E' Espaços Métricos, com métricas d e d', respectivamente.

1. Dada uma função $g : F \times E \to E'$, em que F é um conjunto, dizemos que g é lipschitziana na segunda variável se existe $L \geq 0$ tal que

   $$d'(g(t, x), g(t, y)) \leq L d(x, y)$$

   para quaisquer $t \in F$ e $x,\ y \in E$. L é a constante de Lipschitz da função.

2. Analogamente, dada uma função $g : F \times Z \times E \to E'$, em que F e Z são conjuntos, dizemos que g é lipschitziana na terceira variável se existe $L \geq 0$ tal que

$$d'(g(t, a, x), g(t, a, y)) \leq Ld(x, y)$$

para quaisquer $t \in F$, $a \in Z$ e x, $y \in E$. L é a constante de Lipschitz da função.

2.8 Espaços Métricos Completos

Definição 2.47. Dizemos que um Espaço Métrico E é completo se toda sequência de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for convergente.

Proposição 2.48. *Seja E um Espaço Métrico Completo. Se $F \subset E$ é fechado, então F será um espaço métrico completo.*

Demonstração:

De fato, tome uma sequência de Cauchy em F. Como $F \subset E$, tal sequência também será de Cauchy em E. Como E é completo, então a sequência de Cauchy converge, e converge para um ponto limite de F. Como F é fechado, ou seja, possui todos os seus pontos limites, então $F \subset E$ é completo.

∎

Exemplo 2.49. Os espaços $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}$ com as métricas usuais são completos.

Definição 2.50. Diremos que um subconjunto A de um Espaço Métrico E é limitado se existe um número M tal que

$$d(a_1, a_2) \leq M, \forall a_1, a_2 \in A.$$

Se X é um conjunto e E um Espaço Métrico, uma função $f : X \to E$ é dita limitada se sua imagem $f(X)$ é um subconjunto limitado de E.

Definição 2.51. Dados um Espaço Topológico X e um Espaço Métrico Y com uma distância d, indicamos por $\mathcal{C}_b(X, Y)$ o conjunto de todas as aplicações contínuas e limitadas de X em Y, ou seja,

$$\mathcal{C}_b(X, Y) = \{f : X \to Y : f \text{ é contínua e limitada}\}.$$

Em $\mathcal{C}_b(X, Y)$ definimos a métrica do supremo como sendo

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)), f, g \in \mathcal{C}_b(X, Y).$$

O fato de d ser uma métrica em $\mathcal{C}_b(X, Y)$ segue do fato de Y ser um Espaço Métrico e das propriedades do supremo. O que nos é interessante é o seguinte:

Proposição 2.52. *Dados um Espaço Topológico X e um Espaço Métrico Y. Se Y é um espaço métrico completo, então $\mathcal{C}_b(X,Y)$ também o é.*

Demonstração:

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_b(X,Y)$ uma sequência de Cauchy, então, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que se $n, m \geq n_0$ tem-se $d(f_n, f_m) \leq \varepsilon$. Como $d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n, f_m) \leq \varepsilon$, segue que para todo $x \in X$ a sequência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy e, como Y é completo, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um elemento de Y, que indicamos por $f(x)$.

Como $d(f_n, f_m) \leq \varepsilon$ para $n, m \geq n_0$ segue então que $d(f, f_n) \leq \varepsilon$ para $n \geq n_0$, donde segue que a aplicação f é limitada e que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f.

Resta provar que f é contínua. Seja $x_0 \in X$ e consideremos uma vizinhança $B(f(x_0), \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$ de $f(x_0)$ em Y.

Ainda, da convergência de f_n a f, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica em $d(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{3}$. Como f_n é contínua, em particular, é contínua em x_0, existe uma vizinhança V de x_0 de modo que $d(f_n(x), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in V$.

Logo, se $x \in V$, temos

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0)) \\ &\leq d(f, f_n) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n, f) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{C}_b(X,Y)$ é um espaço métrico completo.

■

Exemplo 2.53. Vejamos a seguir mais exemplos de espaços métricos completos.

1. $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$, com a métrica do supremo, são espaços métricos completos.

   Do Teorema de Weirstrass, toda função real contínua definida num intervalo da forma $[a,b]$ é limitada e como $\mathbb{R}$ é completo, pela Proposição 2.52, $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ é completo. Raciocínio análogo para $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$

2. Seja $B[x,r] \subset \mathbb{C}$ a bola fechada de centro em x e raio r, então $\mathcal{C}([a,b], B[x,r])$ é um espaço métrico completo.

   Como $\mathbb{C}$ é completo, e $B[x,r]$ é um conjunto fechado contido em $\mathbb{C}$, da Proposição 2.48, segue $B[x,r]$ é completo. Portanto, pela Proposição 2.52 segue que $\mathcal{C}([a,b], B[x,r])$ é um espaço métrico completo.

3 O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E APLICAÇÕES

Neste capítulo, inicialmente, enunciamos e demonstramos o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Este teorema é um dos resultados fundamentais na teoria de Espaços Métricos e garante a existência e unicidade de pontos fixos para certas aplicações.

Em seguida, aplicamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach para garantir a existência e unicidade de soluções para determinadas equações diferenciais ordinárias, equações integrais e equações lineares em espaços de Banach. Para isso, utilizamos, principalmente, o livro Aplicações da Topologia à Análise (2011), de Chaim Samuel Honig.

3.1 O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Definição 3.1 (Ponto fixo)**.** Um ponto fixo de uma aplicação $T : X \to X$ é um $x \in X$ que é levado em si mesmo por T, ou seja, x é mantido fixo. Em símbolos, $T(x) = x$, ou apenas

$$Tx = x.$$

Exemplo 3.2. Considere uma aplicação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tem-se

1. se $Tx = x^3$, então T tem 3 pontos fixos, sendo eles $1, 0$ e -1.

2. se $Tx = x$, então T tem infinitos pontos fixos.

3. se $Tx = \frac{x}{3} - \frac{1}{x}$, então T não possui pontos fixos.

   De fato, caso contrário, teríamos

$$x = Tx = \frac{x}{3} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 3}{3x}$$

   e, portanto,

$$3x^2 = x^2 - 3.$$

   Logo

$$x^2 = -\frac{3}{2},$$

   que não é possível para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

   Com este exemplo, concluímos também que nem toda aplicação possui ponto fixo.

Definição 3.3 (Contração)**.** Sejam X e Y Espaços Métricos não vazios e indiquemos por d suas distâncias. Dizemos que uma aplicação $T : X \to Y$ é uma contração se existe uma constante real c, com $0 \leq c < 1$, tal que para quaisquer x_1, x_2 temos

$$d(Tx_1, Tx_2) \leq cd(x_1, x_2).$$

Quando $Y = X$, dizemos que T é uma contração de X.

Observação 3.4.

1. Uma contração é uniformemente contínua. Para verificarmos tal fato, basta tomarmos $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ e teremos
$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(Tx_1, Tx_2) < \varepsilon.$$

2. Para $T : X \to X$, T^n, $n \in \mathbb{N}$, denotará a n-ésima iterada de T. Por exemplo, $T^2 x_1 = T(Tx_1)$, para todo $x_1 \in X$.

Teorema 3.5 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja X um espaço métrico completo e $T : X \to X$ uma contração. Então:*

1. *existe um, e só um, ponto fixo de T, ou seja, existe um, e somente um, $\bar{x} \in X$ tal que $T\bar{x} = \bar{x}$;*

2. *qualquer que seja $x_1 \in X$, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $x_{n+1} = T^n x_1$ converge a $\bar{x}$;*

3. *para todo n, temos*
$$d(x_n, \bar{x}) \le c^{n-1} \frac{d(x_1, x_2)}{1 - c},$$
em que c é uma constante de contração de T e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência definida no item 2.

Demonstração:
Existência: Seja $x_1 \in X$ qualquer e $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Vamos demonstrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Para $n > 1$, temos

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \le cd(x_{n-1}, x_n).$$

Fazendo indução sobre n, concluímos que

$$d(x_n, x_{n+1}) \le c^{n-1} d(x_1, x_2),$$

para todo inteiro positivo n. De fato, para $n = 2$ temos

$$d(x_2, x_3) = d(Tx_1, Tx_2) \le cd(x_1, x_2).$$

Agora suponha que o resultado é válido para n, ou seja, $d(x_n, x_{n+1}) \le c^{n-1} d(x_1, x_2)$.

Então, para $n+1$, segue

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(Tx_n, Tx_{n+1}) \\ &\leq cd(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq c[c^{n-1}d(x_1, x_2)] \text{ (hipótese de indução)} \\ &= c^{(n+1)-1}d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Portanto, a sentença é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então para $1 \leq n < m$, usando a desigualdade triangular e a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq c^{n-1}d(x_1, x_2) + \cdots + c^{m-2}d(x_1, x_2) \\ &= c^{n-1}d(x_1, x_2)(1 + c + \cdots + c^{m-n-1}) \\ &= c^{n-1}d(x_1, x_2)\frac{1 - c^{m-n-1}}{1-c} \\ &\leq c^{n-1}\frac{d(x_1, x_2)}{1-c}. \end{aligned}$$

Como $c^n \to 0$ quando $n \to \infty$, pois $0 \leq c < 1$, então x_m e x_n estão tão próximos quanto se queira, e, portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Sendo X completo, existe $\bar{x} \in X$ tal que $x_n \to \bar{x}$.

Vamos provar que $T\bar{x} = \bar{x}$. Para todo inteiro positivo n, temos

$$d(T\bar{x}, x_{n+1}) = d(T\bar{x}, Tx_n) \leq cd(\bar{x}, x_n),$$

logo $d(T\bar{x}, x_{n+1}) \leq cd(\bar{x}, x_n)$ e, como $d(\bar{x}, x_n) \to 0$, então $d(T\bar{x}, x_n) \to 0$, ou seja, $x_n \to T\bar{x}$. Pelo Corolário 2.39, temos então $T\bar{x} = \bar{x}$.

Unicidade: Sejam $\bar{x},\ \bar{y} \in X$, $\bar{x} \neq \bar{y}$ com $T\bar{x} = \bar{x}$ e $T\bar{y} = \bar{y}$. Então

$$0 < d(\bar{x}, \bar{y}) = d(T\bar{x}, T\bar{y}) \leq cd(\bar{x}, \bar{y})$$

e, portanto, $c \geq 1$, o que contradiz a hipótese. Com isso, concluímos a prova do item 1.

Quanto ao item 2, para $x_1 \in X$, observemos inicialmente que

$$x_{n+1} = Tx_n = T(T(T\cdots(Tx_1))) = T^n x_1.$$

Assim, da demonstração de existência, resulta que toda sequência da forma $T^n x_1,\ x_1 \in X$, converge a um ponto fixo, logo a $\bar{x}$, pela unicidade do ponto fixo.

Para provar o item 3, observamos que do item 1 resulta, para $1 \le n \le m$, que

$$d(x_n, \bar{x}) \le d(x_n, x_m) + d(x_m, \bar{x}) \le c^{n-1}\frac{d(x_1, x_2)}{1-c} + d(x_m, \bar{x})$$

e, como $d(x_m, \bar{x}) \to 0$, segue a afirmação 3.

■

Corolário 3.6. *Seja $T : X \to X$ tal que para algum m, a iterada T^m é uma contração. Então T tem um, e somente um, ponto fixo e, para todo $x_1 \in X$, a sequência $(T^n x_1)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ao ponto fixo.*

Demonstração:

Seja $\bar{x}$ o único ponto fixo de T^m, ou seja $T^m\bar{x} = \bar{x}$ provemos que $\bar{x}$ é o ponto fixo de T. Como $T(T^n x) = T^n(Tx)$, para todo $x \in X$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$T\bar{x} = T(T^m\bar{x}) = T^m(T\bar{x}).$$

Chame $y = T\bar{x}$, logo, $y = T^m y$, ou seja, y é ponto fixo de T^m. Como T^m tem somente um ponto fixo, então $y = \bar{x}$ e, portanto, $T\bar{x} = \bar{x}$.

Por outro lado, por indução, segue que todo ponto fixo de T é ponto fixo de T^m. De fato, seja $\bar{x}$ ponto fixo de T, então $T\bar{x} = \bar{x}$, supondo que $T^n\bar{x} = \bar{x}$, temos $T^{n+1}\bar{x} = T(T^n\bar{x}) = T\bar{x} = \bar{x}$. Assim, como $\bar{x}$ é o único ponto fixo de T^m então também é o único ponto fixo de T.

Agora devemos provar que $(T^n x_1)$ converge ao ponto fixo $\forall n \in \mathbb{N}$. Se n é múltiplo de m, então $n = km,\ k \in \mathbb{N}$, e temos $T^{km}x_1 = (T^m)^k x_1 \to \bar{x}$ pelo item 2 do Teorema 3.5. Ademais, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $n = mk + r$, com $k,\ r \in \mathbb{Z}$ e $0 \le r \le m - 1$, assim

$$T^{km+r}x_1 = T^{km}(T^r x_1) \to \bar{x}$$

pela mesma razão.

■

Teorema 3.7. *Seja X um espaço métrico completo e A um Espaço Topológico. Para todo $\lambda \in A$, seja $T_\lambda : X \to X$ tal que*

1. *$(T_\lambda)_{\lambda\in A}$ é uma família de contrações localmente uniforme, isto é, para todo $\lambda_0 \in A$ existem uma vizinhança A_0 de λ_0 e uma constante $c_{A_0} < 1$ tais que*

$$d(T_\lambda x, T_\lambda y) \le c_{A_0} d(x, y),\ \ x,\ y \in X,\ \ \lambda \in A_0.$$

2. *A função $f_x : A \to X$, em que $f_x(\lambda) = T_\lambda x$ é contínua para todo $x \in X$.*

Então, se para cada $\lambda \in A$*,* x_λ *denota o ponto fixo de* T_λ*, a aplicação* $g : A \to X$*, em que,* $g(\lambda) = x_\lambda$ *é contínua.*

Demonstração:

Sejam $\lambda_0 \in A$ e A_0 como na condição 1, temos

$$\begin{aligned} d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) &= d(T_\lambda x_\lambda, T_{\lambda_0} x_{\lambda_0}) \\ &\leq d(T_\lambda x_\lambda, T_\lambda x_{\lambda_0}) + d(T_\lambda x_{\lambda_0}, T_{\lambda_0} x_{\lambda_0}) \\ &\leq c_{A_0} d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) + d(T_\lambda x_{\lambda_0}, T_{\lambda_0} x_{\lambda_0}), \end{aligned}$$

logo,

$$d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) \leq \frac{1}{1 - c_{A_0}} d(T_\lambda x_{\lambda_0}, T_{\lambda_0} x_{\lambda_0}).$$

Pela condição 2, como f_x é contínua, então, da Proposição 2.30, se $\lambda \to \lambda_0$ temos $f_{x_{\lambda_0}}(\lambda) \to f_{x_{\lambda_0}}(\lambda_0)$, ou seja, $T_\lambda x_{\lambda_0} \to T_{\lambda_0} x_{\lambda_0}$. Portanto, $d(T_\lambda x_{\lambda_0}, T_{\lambda_0} x_{\lambda_0})$ tende a zero e, consequentemente, $d(x_\lambda, x_{\lambda_0})$ tende a zero, ou seja, $x_\lambda \to x_{\lambda_0}$ quando $\lambda \to \lambda_0$. Com isso, concluímos que g é contínua.

■

Observação 3.8. Quando $A_0 = A$, dizemos que $(T_\lambda)_{\lambda \in A}$ é uma família uniforme de contrações, ou ainda, que a aplicação $T : A \times X \to X$ em que $T(\lambda, x) = T_\lambda(x)$ é uma contração uniforme.

Exemplo 3.9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo a condição de Lipschitz

$$|f(t) - f(s)| \leq L|t - s|$$

para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$ com $0 \leq L < 1$. Então existe um, e somente um, $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{t}) = \bar{t}$ e, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos $f^n(t) \to \bar{t}$ quando $n \to \infty$.

De fato, como $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo, então f é uma contração. Assim, pelo item (1) Teorema 3.5, f tem um, e somente um, ponto fixo. Ademais, do item (2) do Teorema 3.5, $f^n(t)$ tende ao ponto fixo.

Exemplo 3.10. Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado, $f : F \to F$ satisfazendo a condição de Lipschitz

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

para qualquer $x, y \in F$, com $0 \leq L < 1$. Então existe um, e somente um, $\bar{x} \in F$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

De fato, $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ sendo completo, um fechado $F \subset \mathbb{R}^n$ será um espaço métrico completo, pela Proposição 2.48 e, portanto, do Teorema 3.5, temos o resultado.

Exemplo 3.11. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua, lipschitziana na segunda variável, com constante $0 \leq L < 1$ em qualquer faixa $[a,b] \times \mathbb{R}$. Então existe uma, e somente uma, função $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y(t) = f(t, y(t))$ e y é contínua.

Seja, para $t \in \mathbb{R}$, $T_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T_t(s) = f(t,s)$. Então

$$|T_t(s) - T_t(s')| = |f(t,s) - f(t,s')| \leq L|s - s'|,$$

para todo $s, s' \in \mathbb{R}$, para t em uma vizinhança de t_0 fixado, com um L sendo a constante de Lipschitz, $L < 1$. Portanto, a condição 1 do Teorema 3.7 está satisfeita.

A condição 2 do Teorema 3.7 também está satisfeita por f ser contínua. Logo, para cada $t \in \mathbb{R}$ existe um único ponto fixo, $y(t)$, e a aplicação $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(t) = y(t)$ é contínua.

Exemplo 3.12. Existe uma e só uma função contínua e limitada $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, tal que

$$y(t) = \operatorname{sen} t + \int_0^t e^{-s^2} y(se^t) ds, t \in [0, \infty).$$

De fato, consideremos o conjunto de todas as funções contínuas e limitadas de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,\infty)} |f(t)|.$$

Tal conjunto é denotado por

$$E = \mathcal{C}_b([0, \infty), \mathbb{R})$$

e $(E, \|.\|_\infty)$ é completo. Para $u \in E$, definimos $Tu : E \to E$ dada por

$$(Tu)(t) = \operatorname{sen} t + \int_0^t e^{-s^2} u(se^t) ds, \qquad t \in [0, \infty).$$

Devemos mostrar agora que Tu é uma contração. Dados $u, v \in E$, e $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
|(Tu)(t) - (Tv)(t)| &= \left| \operatorname{sen} t + \int_0^t e^{-s^2} u(se^t) ds - \operatorname{sen} t - \int_0^t e^{-s^2} v(se^t) ds \right| \\
&= \left| \int_0^t e^{-s^2} [u(se^t) - v(se^t)] ds \right| \\
&\leq \int_0^t e^{-s^2} |u(se^t) - v(se^t)| ds \\
&\leq \int_0^t e^{-s^2} \sup_{\tau \in [0,\infty)} |u(\tau) - v(\tau)| ds \\
&\leq \|u - v\|_\infty \int_0^\infty e^{-s^2} ds \\
&= \|u - v\|_\infty \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$|(Tu)(t) - (Tv)(t)| \leq \|u - v\|_\infty \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Logo,

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |(Tu)(t) - (Tv)(t)| \leq \|u - v\|_\infty \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

e segue

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \|u - v\|_\infty.$$

Portanto, como $0 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} < 1$, T é uma contração e, pelo Teorema 3.5, temos o resultado.

A partir de agora, utilizamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach para garantir a existência e unicidade de solução para diferentes tipos de equações diferenciais e equações integrais. Para tanto, o método utilizado se resume em associar a solução de uma equação diferencial, ou integral, a um operador $T : E \to E$, sendo E um espaço métrico completo, e mostrar que tal operar é uma contração. Sendo T uma contração, pelo Teorema do ponto Fixo de Banach, tem uma única solução, que é a solução da equação em questão.

3.2 Equações Diferenciais Ordinárias

Vamos utilizar agora o Teorema do Ponto Fixo de Banach para demonstrar um importante teorema válido para equações diferenciais.

Definição 3.13. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{C})$. Dizemos que a função continuamente diferenciável

$$u : [c, d] \to \mathbb{C}$$

é uma solução da equação diferencial

$$y' = f(t, y)$$

se para todo $t \in [c, d]$, temos $(t, u(t)) \in \Omega$ e $u'(t) = f(t, u(t))$.

Proposição 3.14. *Seja* $(t_0, y_0) \in \Omega$. *Uma condição necessária e suficiente para que* $u : [c, d] \to \mathbb{C}$ *contínua, com* $(t, u(t)) \in \Omega$ *para todo* $t \in [c, d]$, *seja uma solução da equação diferencial* $y' = f(t, y)$, *satisfazendo* $u(t_0) = y_0$, *é que* u *seja uma solução contínua da equação integral*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Demonstração:

Se f e u são contínuas, a função $g : [c, d] \to \mathbb{C}$ em que $g(t) = f(t, u(t)) = u'(t)$ também o é, pois suas funções coordenadas são contínuas. Agora, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(t, y(s))ds,$$

logo,

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

e o resultado é válido.

■

Teorema 3.15 (Existência de Cauchy para Equações Diferenciais). *Sejam* $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ *e* f *definida em* $[t_0 - a, t_0 + a] \times B[y_0, b] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$*, a valores em* $\mathbb{C}$ *contínua e lipschitziana na segunda variável, isto é, existe uma constante real* $L \geq 0$ *tal que*

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2| \tag{3.1}$$

para todo $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ *e* $z_1,\ z_2 \in B[y_0, b]$*. Então, existe* a^* *com* $0 < a^* \leq a$ *tal que a equação diferencial*

$$y' = f(t, y)$$

tem uma, e somente uma, solução u *definida em* $[t_0 - a^*, t_0 + a^*]$ *e satisfazendo* $y(t_0) = y_0$.

Demonstração:

Como f é uma função contínua definida em um conjunto compacto, então existe M tal que $|f(t, y)| \leq M$, para $(t, y) \in [t_0 - a^*, t_0 + a^*] \times B[y_0, b]$. Se $M = 0$, então $f(t, y) = y' = 0$ e como $y(t_0) = y_0$, teremos $y = y_0$ e segue a afirmação. Agora, tomemos

$$a^* = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Para simplificar a notação, vamos supor que já temos $a \leq \frac{b}{M}$, isto é, que $a^* = a$. Temos que $E = \mathcal{C}_b([t_0 - a, t_0 + a], B[y_0, b])$ munido da distância

$$d(u, v) = \|u - v\|_\infty = \sup_{t \in [t_0 - a, t_0 + a]} \{|u(t) - v(t)|\}$$

é um espaço métrico completo. Seja $u \in E$ e definamos $Tu : E \to E$ por

$$(Tu)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds.$$

Como f é contínua na segunda variável, então Tu também é contínua. Logo, para todo t com $|t - t_0| \leq a$, temos

$$\begin{aligned}
|(Tu)(t) - y_0| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, u(s))|ds \\
&\leq M \int_{t_0}^{t} ds \\
&= M|t - t_0| \\
&\leq Ma \leq b.
\end{aligned}$$

Logo, $Tu(t) \in B[y_0, b]$ e, portanto, $Tu \in E$. Dados $u, v \in E$, como f é lipschitziana na segunda variável, temos

$$
\begin{aligned}
|(Tu)(t) - (Tv)(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, u(s)) - f(s, v(s))] ds \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} |u(s) - v(s)| ds \\
&\leq L \|u - v\|_\infty \, |t - t_0|. \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Além disso, existe m tal que T^m é uma contração, pois para $u, v \in E$, temos

$$
|(T^m u)(t) - (T^m v)(t)| \leq \frac{L^m |t - t_0|^m}{m!} \|u - v\|_\infty. \qquad (3.3)
$$

De fato, usando indução, de (3.1) e (3.2) segue

$$
\begin{aligned}
|(T^2 u)(t) - (T^2 v)(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, Tu(s)) - f(s, Tv(s))] ds \right| \\
&\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |Tu(s) - Tv(s)| ds \right| \\
&\leq L^2 \|u - v\|_\infty \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0| ds \right| \\
&= L^2 \|u - v\|_\infty \frac{|t - t_0|^2}{2!} \\
&= \frac{L^2 |t - t_0|^2}{2!} \|u - v\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Agora, supomos que $|(T^m u)(t) - (T^m v)(t)| \leq \dfrac{L^m |t - t_0|^m}{m!} \|u - v\|_\infty$. Então, para $m + 1$, temos

$$
\begin{aligned}
|(T^{m+1} u)(t) - (T^{m+1} v)(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, (Tu^m)(s)) - f(s, (T^m v)(s))] ds \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, (Tu^m)(s)) - f(s, (T^m v)(s))| ds \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} |(T^m u)(s) - (T^m v)(s)| ds \\
&\leq \frac{L^{m+1}}{m!} \|u - v\|_\infty \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^m ds \\
&= \frac{L^{m+1}}{m!} \|u - v\|_\infty \frac{|t - t_0|^{m+1}}{m + 1} \\
&= \frac{L^{m+1} |t - t_0|^{m+1}}{(m + 1)!} \|u - v\|_\infty
\end{aligned}
$$

donde resulta (3.3). Como, $|t - t_0| \leq a$, segue

$$\|T^m u - T^m v\|_\infty \leq \frac{L^m a^m}{m!} \|u - v\|_\infty.$$

Ademais, $\frac{L^m a^m}{m!} \to 0$ quando $m \to \infty$. Logo, existe m_0 tal que se $m > m_0$ temos $\frac{L^m a^m}{m!} < 1$. Portanto, T^m é uma contração e, pelo Corolário 3.6, T terá um, e somente um, ponto fixo e segue o resultado.

∎

3.3 Equações Integrais

Agora vamos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para justificar a unicidade de solução da Equação Integral de Fredholm de segunda espécie e da Equação Integral de Volterra. Também demonstramos a dependência contínua destas equações integrais.

Teorema 3.16. *Consideremos a equação integral linear (de Fredholm de segunda espécie)*

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s) y(s) ds$$

em que $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ *é contínua. Então, para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tal que* $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, *em que* $M \geq \|K\|_\infty$, *dada* $f \in \mathcal{C}_b([a,b],\mathbb{C})$ *existe uma, e só uma,* $u \in \mathcal{C}_b([a,b],\mathbb{C})$ *que é solução da equação integral.*

Demonstração:

Sabemos que $E = \mathcal{C}_b([a,b],\mathbb{C})$ é um espaço métrico completo e seja

$$\begin{aligned} T : E &\to E \\ x &\mapsto Tx \end{aligned}$$

em que

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s) x(s) ds, \qquad t \in [a,b].$$

Um ponto fixo de T é, evidentemente, solução do nosso problema e reciprocamente. É, então, suficiente demonstrar que, para

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)},$$

T é uma contração. Para isso, consideremos $u, v \in E$, então

$$(Tu)(t) - (Tv)(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)[u(s) - v(s)] ds$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
|(Tu)(t) - (Tv)(t)| &= \left|\lambda \int_a^b K(t,s)[u(s) - v(s)]ds\right| \\
&\leq |\lambda| \int_a^b |K(t,s)[u(s) - v(s)]|ds \\
&\leq |\lambda| \ \|K\|_\infty \ \|u - v\|_\infty (b - a) \\
&\leq |\lambda| M \|u - v\|_\infty (b - a) \\
&= c\|u - v\|_\infty
\end{aligned}
$$

em que $c = |\lambda| M(b - a)$. Logo,

$$\|Tu - Tv\|_\infty < c\|u - v\|_\infty.$$

Como consideramos $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, então $c < 1$. Portanto, T é uma contração e, pelo Teorema 3.5 terá um, e somente um, ponto fixo.

■

Teorema 3.17. *Sejam $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ contínua, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ contínua e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que*

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)},$$

com $M \geq \|K\|$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\tilde{K} \in \mathcal{C}_b([a,b]\times[a,b],\mathbb{C})$, $\tilde{f} \in \mathcal{C}_b([a,b],\mathbb{C})$, satisfazem $\|\tilde{K}\| \leq M$, $\|\tilde{K} - K\| \leq \delta$, $\|\tilde{f} - f\| \leq \delta$ e, se $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$ satisfaz

$$|\tilde{\lambda}| < \frac{1}{M(b-a)}$$

e $|\tilde{\lambda} - \lambda| \leq \delta$, então, se u é a solução de

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)y(s)ds,$$

e $\tilde{u}$ é a solução de

$$y(t) = \tilde{f}(t) + \tilde{\lambda} \int_a^b \tilde{K}(t,s)y(s)ds,$$

temos $\|\tilde{u} - u\| \leq \varepsilon$.

Demonstração:

Vamos usar o Teorema 3.7. Lembremos da demonstração do Teorema 3.16 que a constante de contração de

$$T = T_{f,\lambda,K} : \mathcal{C}_b([a,b],\mathbb{C}) \to \mathcal{C}_b([a,b],\mathbb{C})$$

definida por

$$(T_{f,\lambda,K}v)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)v(s)ds, \qquad \forall t \in [a,b]$$

é $c = |\lambda|(b-a)\|K\| < 1$. Fixados, então, λ e K, existe c tal que, para $\tilde{\lambda}$ suficientemente próximo de λ e $\tilde{K}$ suficientemente próximo de K, o mesmo c serve como constante de contração de $\tilde{T}$. Logo, a condição 1 do Teorema 3.7 está satisfeita. Também a condição 2 está satisfeita e segue a afirmação.

■

Teorema 3.18. *Sejam $f \in \mathcal{C}_b([a,b],\mathbb{C})$ e $K \in \mathcal{C}_b([a,b]\times[a,b]\times\mathbb{C},\mathbb{C})$, com K lipschitziana na terceira variável. Então a equação integral de Volterra*

$$y(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s,y(s))ds \qquad t \in [a,b]$$

tem uma, e somente uma, solução $u \in \mathcal{C}_b([a,b],\mathbb{C})$.

Demonstração:

Seja $L \geq 0$ tal que

$$|K(t,s,z_1) - K(t,s,z_2)| \leq L|z_1 - z_2|$$

para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $(t,s) \in [a,b]\times[a,b]$. No espaço métrico completo $E = \mathcal{C}_b([a,b],\mathbb{C})$, consideramos $T : E \to E$ definida por

$$(Tx)(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s,x(s))ds.$$

Vamos demonstrar que existe $n \geq 1$ tal que T^n é uma contração e aplicar o Corolário 3.6. Para isso, provemos que, dados $u,\ v \in E$, e $t \in [a,b]$, temos

$$|(T^n u)(t) - (T^n v)(t)| \leq \frac{L^n(t-a)^n}{n!}\|u-v\|.$$

A demonstração é feita por meio de indução. Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned}
|(Tu)(t) - (Tv)(t)| &= \left|\int_a^t [K(t,s,u(s)) - K(t,s,v(s)]ds\right| \\
&\leq \int_a^t |K(t,s,u(s)) - K(t,s,v(s)|ds \\
&\leq \int_a^t L|u(s) - v(s)|ds \\
&\leq L(t-a)\|u-v\|.
\end{aligned}$$

Agora, admitindo verdade para n, ou seja,

$$|(T^n u)(t) - (T^n v)(t)| \leq \frac{L^n(t-a)^n}{n!}\|u-v\|, \tag{3.4}$$

então, para $n+1$, temos

$$\begin{aligned}
|(T^{n+1}u)(t) - (T^{n+1}v)(t)| &= |T(T^n u)(t) - T(T^n v)(t)| \\
&= \left|\int_a^t [K(t,s,(T^n u)(s)) - K(t,s,(T^n v)(s)]ds\right| \\
&\leq \int_a^t |K(t,s,(T^n u)(s)) - K(t,s,(T^n v)(s)|ds \\
&\leq \int_a^t L|(T^n u)(s) - (T^n v)(s)|ds.
\end{aligned}$$

De (3.4) segue então

$$\begin{aligned}
|(T^{n+1}u)(t) - (T^{n+1}v)(t)| &\leq \int_a^t L\frac{L^n(s-a)^n}{n!}\|u-v\|ds \\
&= \frac{L^{n+1}(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}\|u-v\|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|(T^n u)(t) - (T^n v)(t)| \leq \frac{L^n(t-a)^n}{n!}\|u-v\|$$

e, como $\frac{L^n(t-a)^n}{n!} \to 0$ quando $n \to \infty$, existe n_0 tal que se $n > n_0$, tem-se $\frac{L^n(t-a)^n}{n!} < 1$. Logo, T^n é uma contração. Com isso, T tem um, e somente um ponto fixo, pelo Teorema 3.5.

■

Provaremos agora a dependência contínua da solução em relação a f e K da equação integral do Teorema 3.18. Para isso, mostraremos que se f é próxima de $\tilde{f}$ e K é próxima de $\tilde{K}$, então as soluções respectivas são próximas.

Proposição 3.19. *Sejam $f \in \mathcal{C}_b([a,b],\mathbb{C})$ e $K \in \mathcal{C}_b([a,b]\times[a,b]\times\mathbb{C},\mathbb{C})$, com K lipschitziana na terceira variável e u solução de*

$$y(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s,y(s))ds \qquad t \in [a,b].$$

Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que, se $\tilde{f} \in \mathcal{C}_b([a,b],\mathbb{C})$ e $\tilde{K} \in \mathcal{C}_b([a,b]\times[a,b]\times\mathbb{C},\mathbb{C})$, com $\tilde{K}$ lipschitziana na terceira variável, satisfazem

$$\|\tilde{f} - f\| \leq \delta \ \ e \ |K(t,s,v) - \tilde{K}(t,s,v)| < \delta$$

para $(t,s,v) \in [a,b]\times[a,b]\times B[0,c]$, então se $\tilde{u}$ é solução de

$$y(t) = \tilde{f}(t) + \int_a^t \tilde{K}(t,s,y(s))ds \tag{3.5}$$

temos $\|\tilde{u} - u\| < \varepsilon$.

Demonstração:

Seja $E = \mathcal{C}_b([a,b],\mathbb{C})$ e $T : E \to E$ tal que para $x \in E$ tem-se

$$(Tx)(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s,x(s))ds. \tag{3.6}$$

Ponhamos $u_n = T^n\tilde{u}$, $\tilde{u}$ solução de (3.5). Então, sendo $u_1 = T\tilde{u}$, de (3.5) e (3.6), segue

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}(t) - u_1(t)| &= \left|\tilde{f}(t) + \int_a^t \tilde{K}(t,s,\tilde{u}(s))ds - [f(t) + \int_a^t K(t,s,\tilde{u}(s))ds]\right| \\
&= \left|\tilde{f}(t) - f(t) + \int_a^t \tilde{K}(t,s,\tilde{u}(s))ds - \int_a^t K(t,s,\tilde{u}(s))]ds\right| \\
&\le |\tilde{f}(t) - f(t)| + \left|\int_a^t [\tilde{K}(t,s,\tilde{u}(s)) + K(t,s,\tilde{u}(s))]ds\right| \\
&\le |\tilde{f}(t) - f(t)| + \int_a^t |\tilde{K}(t,s,\tilde{u}(s)) - K(t,s,\tilde{u}(s))|ds.
\end{aligned}$$

Como u é ponto fixo de T, então $T^n\tilde{u} \to u$. Assim, existe c tal que

$$(t,s,u_n(s)) \in [a,b] \times [a,b] \times B[0,c], \forall s \in [a,b],\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja

$$\|\tilde{K} - K\|_c = \sup_{t,s\in[a,b],v\in B[0,c]} |\tilde{K}(t,s,v) - K(t,s,v)|,$$

temos

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}(t) - u_1(t)| &\le |\tilde{f}(t) - f(t)| + \int_a^t |\tilde{K}(t,s,\tilde{u}(s)) - K(t,s,\tilde{u}(s))|ds \\
&\le \|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{K} - K\|_c|t - a|.
\end{aligned}$$

Agora, sendo $u_2 = T^2\tilde{u} = T(T\tilde{u}) = T(u_1)$, segue que

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}(t) - u_2(t)| &\le \|\tilde{f} - f\| + \left|\int_a^t [\tilde{K}(t,s,\tilde{u}(s)) - K(t,s,u_1(s))]ds\right| \\
&\le \|\tilde{f} - f\| + \int_a^t |\tilde{K}(t,s,\tilde{u}(s)) - K(t,s,\tilde{u}(s)) + K(t,s,\tilde{u}(s)) - K(t,s,u_1(s))|ds \\
&\le \|\tilde{f} - f\| + \int_a^t |\tilde{K}(t,s,\tilde{u}(s)) - K(t,s,\tilde{u}(s))|ds + \\
&+ \int_a^t |K(t,s,\tilde{u}(s)) - K(t,s,u_1(s))|ds \\
&\le \|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{K} - K\|_c(t - a) + L\int_a^t |\tilde{u}(t) - u_1(t)|ds. \\
&\le \|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{K} - K\|_c(t - a) + L\int_a^t [\|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{K} - K\|_c(s - a)]ds,
\end{aligned}$$

em que L é a constante de Lipschitz de K. Agora usando o fato de que

$$e^{L(t-a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[L(t-a)]^n}{n!} = 1 + L(t-a) + \frac{[L(t-a)]^2}{2!} + \cdots,$$

temos

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}(t) - u_2(t)| &\leq \|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{K} - K\|_c(t-a) + L\int_a^t [\|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{K} - K\|_c(s-a)]ds \\
&= \|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{K} - K\|_c(t-a) + L\|\tilde{f} - f\|(t-a) + L\|\tilde{K} - K\|_c \frac{(t-a)^2}{2} \\
&= \|\tilde{f} - f\|[1 + L(t-a)] + \frac{\|\tilde{K} - K\|_c}{L}\left[L(t-a) + L^2\frac{(t-a)^2}{2!}\right] \\
&= \|\tilde{f} - f\|[1 + L(t-a)] + \frac{\|\tilde{K} - K\|_c}{L}\left[1 + L(t-a) + L^2\frac{(t-a)^2}{2!} - 1\right] \\
&\leq \|\tilde{f} - f\|e^{L(t-a)} + \frac{\|\tilde{K} - K\|}{L}[e^{L(t-a)} - 1].
\end{aligned}$$

Agora, por indução, provaremos que

$$|\tilde{u}(t) - u_n(t)| \leq \|\tilde{f} - f\|e^{L(t-a)} + \frac{\|\tilde{K} - K\|_c}{L}[e^{L(t-a)} - 1]. \tag{3.7}$$

Para isso, suponha que a desigualdade anterior é verdadeira. Então, para $n+1$, temos $u_{n+1} = T^{n+1}\tilde{u} = T(T^n\tilde{u}) = T(u_n)$ e

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}(t) - u_{n+1}(t)| &\leq \|\tilde{f} - f\| + \left|\int_a^t [\tilde{K}(t,s,\tilde{u}(s)) - K(t,s,u_n(s))]ds\right| \\
&\leq \|\tilde{f} - f\| + \\
&+ \int_a^t |\tilde{K}(t,s,\tilde{u}(s)) - K(t,s,\tilde{u}(s)) + K(t,s,\tilde{u}(s)) - K(t,s,u_n(s))|ds \\
&\leq \|\tilde{f} - f\| + \\
&+ \int_a^t |\tilde{K}(t,s,\tilde{u}(s)) - K(t,s,\tilde{u}(s))|ds + \int_a^t |K(t,s,\tilde{u}(s)) - K(t,s,u_n(s))|ds \\
&\leq \|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{K} - K\|_c(t-a) + L\int_a^t |\tilde{u}(t) - u_n(t)|ds.
\end{aligned}$$

Agora, usando (3.7), segue

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}(t) - u_{n+1}(t)| &\leq \|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{K} - K\|_c(t-a) + \\
&+ L\int_a^t \left[\|\tilde{f} - f\|e^{L(s-a)} + \frac{\|\tilde{K} - K\|_c}{L}[e^{L(s-a)} - 1]\right]ds \\
&= \|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{K} - K\|_c(t-a) + \\
&+ L\|\tilde{f} - f\| \int_a^t [e^{L(s-a)}]ds + \|\tilde{K} - K\|_c \int_a^t [e^{L(s-a)} - 1]ds
\end{aligned}$$

e, assim, tem-se

$$
\begin{aligned}
|\tilde{u}(t) - u_{n+1}(t)| &\leq \|\tilde{f} - f\| + \|\tilde{K} - K\|_c (t-a) + \\
&+ L\|\tilde{f} - f\|\frac{1}{L}[e^{L(t-a)} - 1] + \|\tilde{K} - K\|_c \left[\left(\frac{e^{L(t-a)}}{L} - t\right) - \left(\frac{1}{L} - a\right)\right] \\
&= \|\tilde{f} - f\|(1 + e^{L(t-a)} - 1) + \frac{\|\tilde{K} - K\|_c}{L}[L(t-a) + e^{L(t-a)} - Lt - 1 + La] \\
&= \|\tilde{f} - f\| e^{L(t-a)} + \frac{\|\tilde{K} - K\|_c}{L}[e^{L(t-a)} - 1].
\end{aligned}
$$

Logo, segue (3.7). De $u_n \to u$, segue

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{u} - u\| &\leq \|\tilde{f} - f\| e^{L(t-a)} + \frac{\|\tilde{K} - K\|_c}{L}[e^{L(t-a)} - 1] \\
&\leq \|\tilde{f} - f\| e^{L(b-a)} + \frac{\|\tilde{K} - K\|_c}{L}[e^{L(b-a)} - 1] \\
&< \delta e^{L(b-a)} + \frac{\delta}{L}[e^{L(b-a)} - 1].
\end{aligned}
$$

Fazendo $\delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2e^{L(b-a)}}, \frac{\varepsilon L}{2e^{L(b-a)} - 1}\right\}$, temos

$$
\|\tilde{u} - u\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
$$

e segue o resultado.

■

3.4 Equações Lineares em Espaços de Banach

Se E é um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido da norma $\|\cdot\|$, a aplicação

$$
d(x,y) = \|x - y\|, \text{ para } x, y, \in E
$$

define uma métrica sobre E. Se E é completo com essa métrica, dizemos que $(E, \|\cdot\|)$ é um Espaço de Banach.

Uma aplicação Linear em E é uma aplicação $A : E \to E$ satisfazendo

$$
A(x + \lambda y) = Ax + \lambda Ay, \text{ para } x, y, \in E \text{ e } \lambda \in \mathbb{K}.
$$

O Espaço das Aplicações Lineares e Contínuas de E em E, $L(E)$, é também um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de soma de funções e produto por escalar. Ainda, em $L(E)$ consideramos a norma

$$
\|A\| = \sup\{\|Ax\|; x \in E; \|x\| \leq 1\}, \text{ para } A \in L(E).
$$

Com essa norma, $L(E)$ é um Espaço de Banach.

Mais detalhes sobre espaços de Banach e Operadores Lineares nesses espaços podem ser encontrados em Botelho, Pellegrino e Teixeira (2012) e Kreysig (1989).

Quando E é um Espaço de Banach, dados $A \in L(E)$ e $b \in E$, podemos considerar o problema

$$Ax = b \tag{3.8}$$

em que estamos procurando uma solução $x \in E$. Este problema pode ser transformado através da relação: $Ax = b$ se, e somente se,

$$x = (I - A)x + b \tag{3.9}$$

em que I é a aplicação identidade de E.

Escrevendo, então, $C = I - A$, vem que x é solução de (3.9) se, e somente se, x é um ponto fixo da transformação $f : E \to E$ tal que

$$f(x) = Cx + b. \tag{3.10}$$

Como A e I são contínuas, então $(I - A)x + b$ também é contínua, ou seja, f é uma aplicação contínua, assim temos

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| = \|C(x_1 - x_2)\| \leq \|C\| \; \|x_1 - x_2\|$$

e

$$\|f^m(x_1) - f^m(x_2)\| = \|C^m(x_1 - x_2)\| \leq \|C^m\| \; \|x_1 - x_2\|,$$

então, do Corolário 3.6 e do Teorema 3.7, segue o seguinte resultado:

Teorema 3.20. *Se $A \in L(E)$ é tal que existe $m \geq 1$, com*

$$\|C^m\| = \|(I - A)^m\| < 1,$$

então para todo $b \in E$, a equação (3.8) tem uma e só uma solução x e esta depende continuamente de b.

Na realidade, o problema principal nas aplicações é determinar a norma $\|C\|$ ou $\|C^m\|$. Nos exemplos concretos, poucas vezes se consegue calcular a norma de um operador e, em geral, achamos apenas majorações dessa norma.

Quando E é um espaço de Banach formado por sequências $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e a transformação A de (3.8) é dada da forma

$$b_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m, \;\; n \in \mathbb{N}, \tag{3.11}$$

então, (3.9) toma a forma

$$x_n = \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} x_m + b_n, \ n \in \mathbb{N} \tag{3.12}$$

em que $c_{nm} = \delta_{nm} - a_{nm}(\delta_{nm} = 1$ se $n = m, \delta_{nm} = 0$ se $n \neq m)$.

Definição 3.21. Definimos o espaço de Banach $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$, como sendo o conjunto

$$\ell_p(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}.$$

Dado $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_p(\mathbb{N})$, definimos a norma de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\|x_n\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 3.22. Definimos o espaço de Banach $\ell_\infty(\mathbb{N})$ como sendo o conjunto

$$\ell_\infty(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}.$$

Dado $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_\infty(\mathbb{N})$, definimos a norma de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\|x_n\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Vamos agora considerar o sistema (3.12) nos diferentes espaços de Banach $E = \ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$ e achar majorações para a norma da transformação linear

$$C : x \in \ell_p(\mathbb{N}) \to y = Cx \in \ell_p(\mathbb{N}),$$

em que

$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} x_m. \tag{3.13}$$

Teorema 3.23. *Se os números complexos c_{nm}, $n, m \in \mathbb{N}$ são tais que $sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=1}^{\infty} |c_{nm}| < \infty$, então (3.13) define uma transformação linear contínua de $\ell_\infty(\mathbb{N})$, e temos*

$$\|C\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=1}^{\infty} |c_{nm}|.$$

Demonstração:

Seja $x = (x_n) \in \ell_\infty(\mathbb{N})$, temos

$$|y_n| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} x_m\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |c_{nm}| \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m| = \sum_{m=1}^{\infty} |c_{nm}| \ \|x\|_\infty,$$

donde segue que

$$\begin{aligned}\|y\|_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \\ &\leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=1}^{\infty} |c_{nm}|\right) \|x\|_\infty .\end{aligned}$$

■

Corolário 3.24. *Se os complexos c_{nm}, $n, m \in \mathbb{N}$, são tais que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=1}^{\infty} |c_{nm}| < 1,$$

então, para todo $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$, o sistema (3.12) tem uma, e somente uma solução $x \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ que depende continuamente de b. Partindo de um elemento qualquer de $y \in \ell_\infty(\mathbb{N})$, a sequência $(f^n y)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a solução x.

Teorema 3.25. *Se os números complexos $c_{nm}, n, m \in \mathbb{N}$, são tais que $\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{nm}| < \infty$, então (3.13) define uma equação linear contínua de $\ell_1(\mathbb{N})$, e temos*

$$\|C\| \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{nm}| < \infty$$

Demonstração:

Seja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1(\mathbb{N})$, temos

$$\begin{aligned}\|y\|_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} x_m \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |c_{nm}|\ |x_m| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} |x_m| \sum_{n=1}^{\infty} |c_{nm}| \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} |x_m| sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{nm}| \\ &= \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{nm}| \|x\|_1 .\end{aligned}$$

■

Corolário 3.26. *Se os números complexos c_{nm}, $n, m \in \mathbb{N}$ são tais que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=1}^{\infty} |c_{nm}| < 1,$$

então, para todo $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1(\mathbb{N})$, *o sistema (3.12) tem uma, e somente uma solução* $x \in \ell_1(\mathbb{N})$ *que depende continuamente de* b. *Partindo de um elemento qualquer de* $y \in \ell_1(\mathbb{N})$, *a sequência* $(f^n y)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para a solução* x.

4 O TEOREMA DE BAIRE

Dos teoremas da Topologia Geral, o Teorema de Baire é um dos mais ricos em consequências, não só na própria Topologia, mas, principalmente, na Análise Matemática. Este teorema garante que todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.

Neste capítulo também utilizamos como principal referência o livro Aplicações da Topologia à Análise (2011), de Chaim Samuel Honig. Recomendamos também Gomes (2009) e Munkres (2000). Aqui, vemos, primeiramente, alguns resultados necessários para definir um espaço de Baire. Após isso, enunciamos e demostramos o Teorema de Baire e, por fim, o utilizamos para demonstrar a existência de funções contínuas sem derivada em ponto algum.

4.1 O Teorema de Baire

Definição 4.1. Dizemos que um subconjunto M de um Espaço Topológico X é magro se ele está contido na reunião enumerável de uma sequência de fechados sem interior, isto é, $M \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, em que $int\ F_n = \varnothing$ e F_n é fechado para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 4.2. *Seja (X,τ) um Espaço Topológico. Se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos magros, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ é um conjunto magro.*

Demonstração:

Seja $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ uma união enumerável de conjuntos magros, então cada M_n, $n \in \mathbb{N}$, está contido em uma união enumerável de conjuntos fechados sem interior. Portanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ está contido na união enumerável de uniões enumeráveis de fechados sem interior. Assim, como a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ está contido na união enumerável de fechados sem interior e, portanto, é magro.

■

Proposição 4.3. *Seja (X,τ) um Espaço Topológico e $Y \subset X$ com a topologia induzida τ_y. Se $A \subset Y$ é magro em Y, então A é magro em X.*

Demonstração:

A ideia que utilizamos aqui é que os fechados sem interior de Y estão contidos em seus próprios fechos em X e esses fechos são fechados e não têm interior em X.

Seja A magro em Y, então $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{F_n^y : F_n^y$ fechado em Y e $int\ F_n^y = \varnothing\}$. Portanto,

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\overline{F_n^y} : F_n^y \text{ fechado em } Y \text{ e } int\ F_n^y = \varnothing\},$$

porque, do Teorema 2.14, tem-se $\overline{F_n^y}^y = F_n^y = Y \cap \overline{F_n^y}$ com $\overline{F_n^y}$ sendo o fecho de F_n^y em X e, portanto, fechado em X.

Agora, como $int_y\ F_n^y = \varnothing$, então $int\ F_n^y = \varnothing$, pois $F_n^y \subset Y \subset X$. E também

$$\varnothing = int_y\ F_n^y = (int\ \overline{F_n^y}) \cap Y.$$

Assim,

$$int\ \overline{F_n^y} = \varnothing.$$

Logo,

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\overline{F_n^y} : \overline{F_n^y} \text{ fechado e } int\ \overline{F_n^y} = \varnothing\}.$$

Logo, A é magro em X.

■

Proposição 4.4. *Sendo (X, τ) um Espaço Topológico, as seguintes afirmações são equivalentes:*

EB1) Seja $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de abertos densos em X. Se $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$, então G é denso em X.

EB2) Se $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de fechados sem interior, então $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ também é um conjunto sem interior.

EB3) Todo conjunto aberto não vazio de X é não magro.

EB4) O complementar de um conjunto magro de X é denso em X.

Demonstração:

$EB1 \Leftrightarrow EB2$ $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de fechados sem interior e $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ tem interior vazio se, e somente se, $(X \setminus F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de abertos densos, pela Proposição 2.20, e $X \setminus M$ é denso. Como

$$X \setminus M = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus F_n) = G$$

é denso e $X \setminus F_n$ é aberto para todo $n \in \mathbb{N}$, segue a equivalência.

$EB2 \Rightarrow EB3$ Se M é magro, então $M \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, com F_n fechado e $int\ F_n = \varnothing$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, M está contido em um conjunto que não tem interior e, portanto, M não tem interior. Logo, M não é aberto. Assim, todo conjunto aberto não vazio não é magro.

$EB3 \Rightarrow EB4$ $(\sim EB4 \Rightarrow \sim EB3)$ Seja M um conjunto magro cujo complementar não seja denso em X. Então existe um aberto A tal que $X \setminus M \cap A = \varnothing$, isto é, $A \subset M$, ou ainda, $int\ M \neq \varnothing$. Mas $int\ M \subset M$. Assim, $int\ M$ é magro, aberto e não vazio.

$EB4 \Rightarrow EB1$ ($\sim EB1 \Rightarrow \sim EB4$) Suponha $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos abertos e densos tais que $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ não seja denso. Então

$$X \setminus G = X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus O_n$$

e, com toda razão, $X \setminus G \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus O_n$. Mas, pela Proposição 2.20, $X \setminus O_n$ são conjuntos fechados sem interior, portanto, $X \setminus G$ é magro e seu complementar não é denso.

■

Definição 4.5. Dizemos que (X, τ) é um espaço de Baire se satisfizer $EB1$, $EB2$, $EB3$ ou $EB4$.

Proposição 4.6. *Seja X um espaço de Baire.*

1. *Todo aberto $A \neq \varnothing$ de X, com a topologia induzida, é um espaço de Baire.*

2. *Todo $G_\delta \subset X$ denso, com a topologia induzida, é um espaço de Baire.*

3. *O complementar de um conjunto magro M de X é um espaço de Baire.*

Demonstração:

1. A ideia aqui é transferir a sequência de abertos densos do subespaço para o espaço. Para isso, precisaremos fortemente do fato de que o subespaço é aberto.

   Suponha que exista uma sequência $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos e densos de A com $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ não denso. Então, se definirmos $(O'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $O'_n = O_n \cup (X \setminus \overline{A})$, O'_n são abertos (união de dois abertos). Além disso, provaremos que O'_n são densos em X. Se B é aberto de X,

$$B \cap O'_n = B \cap (O_n \cup (X \setminus \overline{A})) = (B \cap O_n) \cup (B \cap X \setminus \overline{A}).$$

   Se $B \cap O_n = \varnothing$, $B \subset X \setminus O_n$. Além disso, $B \not\subset \overline{A}$, pois, caso contrário, teríamos $B \cap O_n \neq \varnothing$, já que $O_n \subset A \subset \overline{A}$. Então $B \subset X \setminus \overline{A}$. Assim, se $B \neq \varnothing$, então $B \cap O'_n \neq \varnothing$. Agora, se $(B \cap X \setminus \overline{A}) = \varnothing$, então $B \subset \overline{A}$ e, assim, $B \cap O_n \neq \varnothing$ pela densidade de O_n. De qualquer forma, teremos $B \cap O'_n \neq \varnothing$, assim, $(O'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de abertos densos em X, já que B foi tomado arbitrariamente. Mas,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O'_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \cup (X \setminus \overline{A})$$

   não é denso em X, o que contradiz o item $EB1$ da Proposição 4.4.

2. Seja $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$, em que O_n são abertos densos de X e seja $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de abertos densos em G (e, logo, em X). Então, $A_m = G \cap U_m$, em que $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$

é uma sequência de abertos de X, pela definição de topologia induzida. Vamos provar que U_m é denso em X. Se B é um aberto de X, $B \cap A_m = G \cap (B \cap U_m)$. Se $B \cap U_m = \varnothing$, então teríamos $B \cap A_m = G \cap \varnothing = \varnothing$ e A_m não seria denso em X. Logo U_m é denso em X. Além disso, observe que

$$\begin{aligned}\bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m &= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} G \cap U_m \\ &= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n' \in \mathbb{N}} O_{n'} \cap U_m \\ &= \bigcap_{(m,n') \in \mathbb{N}^2} O_{n'} \cap U_m.\end{aligned}$$

Mas, para cada m e para cada n', $O_{n'} \cap U_m$ é um aberto denso. Assim, como X é espaço de Baire, $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m$ é denso em X e, consequentemente, em G. Logo, pelo item $EB1$ da Proposição 4.4, G é um espaço de Baire.

3. Seja M um conjunto magro de X, então, como X é espaço de Baire, tem-se $X \setminus M$ denso, pelo item $EB4$ da Proposição 4.4. Seja G_δ denso, podemos tomar G_δ como $int(X \setminus M)$. Sabemos, pelo item (2) desta Proposição, que tal G_δ é também espaço de Baire, assim, se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for uma sequência de abertos densos em $X \setminus M$, então $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de abertos densos em G_δ. Assim, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap G_\delta$ é denso em G_δ e, logo, denso em $X \setminus M$. Se B for um aberto de $X \setminus M$ tal que $(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) \cap B = \varnothing$, então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap G_\delta \cap B = \varnothing$ e G_δ não seria espaço de Baire. Dessa forma, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é denso em $X \setminus M$. Portanto, do item $EB1$ da Proposição 4.4, $X \setminus M$ é um espaço de Baire.

∎

Definição 4.7. Definimos o diâmetro de um conjunto limitado $A \subset X$ como sendo o número real

$$diam(A) = \sup\{d(x,y) : x,\ y \in A\}.$$

Teorema 4.8 (Teorema de Baire)**.** *Todo espaço métrico completo com a topologia induzida pela métrica é um espaço de Baire.*

Demonstração:

Seja E um espaço métrico completo e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos abertos densos em X. Usaremos o item $EB1$ da Proposição 2.20 para mostrar que E é um espaço de Baire. Para isso, mostraremos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ também é denso em E, ou seja, para qualquer aberto $O \subset E$, tem-se $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap O \neq \varnothing$.

Para tanto, definiremos a sequência de conjuntos abertos não vazios da seguinte forma: fixe O aberto não vazio de E e tome $a_1 = O$. Como $A_1 \subset (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é denso em E, $a_1 \cap A_1$ é não vazio, além disso, da Proposição 2.37, E é regular, assim pela Proposição 2.32, existe

$a_2 \in E$ aberto tal que $\overline{a_2} \subset a_1 \cap A_1$. Dado a_n, construiremos a_{n+1} como o conjunto aberto cujo fecho está contido em $a_n \cap A_n$ pela regularidade de E.

Assim,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{a_n} = O \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{a_{n+1}} \subset O \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap a_n),$$

mas

$$O \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap a_n) \subset O \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = O \cap G.$$

Assim,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{a_n} \subset O \cap G.$$

Desde que essa interseção seja não vazia, nosso resultado está provado. Precisamos mostrar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{a_n} \neq \varnothing$.

Para isso, tomemos uma sequência tal que $lim_{n\to\infty} diam(a_n) = 0$, em que $diam(a_n) = \sup\{d(z,w) : z,\ w \in a_n\}$, e $\overline{a_{n+1}} \subset \overline{a_n}$. Fixado $x_1 \in \overline{O} = \overline{a_1}$, existe uma bola aberta B_1 com centro x_1 e diâmetro d tal que $B_1 \cap O \neq \varnothing$.

Vamos tomar $a_2 = B_1 \cap O = B_1 \cap a_1$. Da mesma forma, fixado $x_2 \in \overline{a_2}$ existe uma bola aberta B_2 com centro x_2 e diâmetro $d/2$ tal que $B_2 \cap a_2 \neq \varnothing$ e tomamos $a_3 = B_2 \cap a_2$. Seguindo este raciocínio, dado o n-ésimo termo da sequência, construímos a_{n+1} da seguinte forma: tome $x_n \in \overline{a_n}$, como a_n é aberto, então existe uma bola B_n de centro x_n tal que $B_n \cap a_n \neq \varnothing$ e $diam(B_n) = \frac{d}{2^n}$. Tomaremos, assim, $a_{n+1} = B_n \cap a_n$. Como cada $x_n \in \overline{a_n}$ e $a_{n+1} \subset a_n$, mostraremos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{a_n} \neq \varnothing$,o que mostra que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Para tanto, mostraremos que é de Cauchy.

Fixado $\varepsilon > 0$, se tomarmos n_0 tal que $n_0 > \frac{\log(d/\varepsilon)}{\log 2}$ então, para $p \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+(p-1)}, x_{n+p}) \\ &= \frac{d}{2^{n+1}} + \frac{d}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{d}{2^{n+p}} \\ &= \frac{d}{2^n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^p}\right) < \frac{d}{2^n}. \end{aligned}$$

Logo, para todo $n > n_0$, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$.

Assim, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, logo é convergente e a interseção dos $\overline{a_n}$ é não vazia. Dessa forma, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap O \neq \varnothing$, para todo aberto $O \subset E$, ou seja, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é denso em E. Portanto, pelo item $EB1$ da Proposição 2.20, E é um espaço de Baire.

■

4.2 Funções contínuas sem derivada

Como aplicação do importante Teorema de Baire, apresentamos um resultado que garante a densidade do conjunto de funções contínuas e periódicas, de período 2π, que não possuem derivada em qualquer ponto da reta, no conjunto de todas as funções contínuas e periódicas, de período 2π; entretanto, atentamos que, como no Capítulo anterior, podemos encontrar na Literatura várias outras aplicações na mesma direção.

De acordo com Aron et al. (2016), a procura por funções contínuas que não possuem derivada em ponto algum - e suas consequências - tem despertado a curiosidade e sendo motivo de pesquisa de muitos matemáticos. Embora alguns exemplos tenham surgido antes, foi Weirstrass (1815 - 1897), em 1872, quem ganhou destaque ao mostrar a existência de funções com essas característica apresentando a seguinte função real

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos\big(b^k \pi x\big)$$

com $0 < a < 1$, $b \in \mathbb{Z}$, ímpar, e $ab > 1 + 3\pi/2$.

Na direção da aplicação que apresentamos aqui, o próprio Banach mostrou, em 1931, como consequência do Teorema de Baire, que o conjunto de todas as funções reais contínuas que não possuem derivada em ponto algum é residual em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, quando este está munido da topologia da convergência uniforme em compactos. Ademais, os estudos mais recentes desse tema têm sido voltados à linearidade dessas classes de funções. Recomendamos Aron et al. (2016) para uma leitura mais cuidadosa sobre o tema.

Vamos a nossa aplicação:

Teorema 4.9. *O conjunto das funções definidas e contínuas na reta, periódicas e de período 2π, e que não possuem derivada em qualquer ponto da reta é denso no conjunto E de todas as funções periódicas e de período 2π definidas e contínuas na reta.*

Demonstração:

Se $f,\ g \in E$, seja

$$d(f,g) = \|f - g\|_E = \max_{0 \le x \le 2\pi} |f(x) - g(x)|.$$

Que d é uma métrica sobre E, é análogo ao feito anteriormente para funções contínuas, considerando que os elementos de E tem período 2π, logo estão completamente definidas no intervalo $[0, 2\pi]$.

Mostremos, então, que o espaço E com a distância d é um espaço métrico completo. Para isso, tome $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ de Cauchy, logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_E < \varepsilon, \forall n, m > n_0.$$

Como $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ é completo com a métrica do supremo, pelo Exemplo 2.53, e

$$\|f_n - f_m\|_E = \|f_n|_{[0,2\pi]} - f_m|_{[0,2\pi]}\|_\infty < \varepsilon, \forall n, m > n_0,$$

segue que $(f_n|_{[0,2\pi]})_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Portanto, existe $f \in \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ tal que $f_n|_{[0,2\pi]} \to f$. Definindo agora $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \le t \le 2\pi \\ f(t-2k\pi), & \text{se } 2k\pi \le t \le 2(k+1)\pi \\ f(-t-2k\pi), & \text{se } -2(k+1)\pi \le t \le -2k\pi, \end{cases}$$

com $k \in \mathbb{N}$, temos $\tilde{f} \in E$ e $f_n \to f$. Logo E é um espaço métrico completo.

Agora, seja F_n, $n \in \mathbb{N}$, o conjunto das funções f de E tais que exista um ponto $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| \le n,$$

para todo h real positivo.

1. O conjunto F_n é fechado: dada a sequência $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de funções de F_n que converge para a função f em E, devemos provar que $f \in F_n$. Para $h > 0$ real qualquer, seja

$$g_j(t) = \frac{f_j(t+h)-f_j(t)}{h}$$

e

$$g(t) = \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

Como $f_j \in F_n$, existe $t_j \in \mathbb{R}$, $0 \le t_j \le 2\pi$, tal que

$$|g_j(t_j)| \le n, \;\; j = 1,2,\cdots \tag{4.1}$$

Como $(t_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset [0,2\pi]$, do Teorema de Bolzano Weirstrass, existe uma subsequência $(t_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente para um ponto $t_0 \in [0,2\pi]$. Como g é função contínua de t, de $t_{j_k} \to t_0$, segue que $g(t_{j_k}) \to g(t_0)$ e, como as funções f_j convergem uniformemente para f, graças a métrica considerada de E, as funções g_j (h fixo) convergem uniformemente para g, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica em

$$\|g_{j_k} - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } |g(t_{j_{k_0}}) - g(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, para $k > k_0$, usando a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} |g_{j_k}(t_{j_k}) - g(t_0)| &\le |g_{j_k}(t_{j_k}) - g(t_{j_k})| + |g(t_{j_k}) - g(t_0)| \\ &\le \|g_{j_k} - g\|_\infty + |g(t_{j_k}) - g(t_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

segue então que $\lim_{k\to\infty} g_{j_k}(t_{j_k}) = g(t_0)$ e de (4.1) obtemos que $|g(t_0)| \le n$, isto é, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left|\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}\right| \leq n$$

para $h > 0$ real qualquer, logo $f \in F_n$.

2. O interior de F_n é vazio: dada a função $f \in F_n$ e $\varepsilon > 0$, devemos provar que existe uma função $g \in E$ tal que $d(f, g) < \varepsilon$ e $g \notin F_n$, ou seja, nenhuma vizinhança de f está inteiramente contida em F_n. Como f é uniformemente contínua em $[0, 2\pi]$, que é um compacto da reta, existe $\delta > 0$ tal que para $x,\ x' \in [0, 2\pi]$ e $|x - x'| < \delta$, temos $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{4}$. Tomemos um inteiro positivo n_0 tal que

$$\frac{2\pi}{n_0} < \min\left(\delta, \frac{\varepsilon}{n}\right) \tag{4.2}$$

e seja $x_k = \frac{2k\pi}{n_0}$, $k = 0, 1, \cdots, n_0$. Consideremos a função g definida na reta, periódica e de período 2π que em cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \cdots, n_0 - 1$, é tal que $g(x_k) = f(x_k)$, $g(x_k + \frac{\pi}{n_0}) = f(x_k) + \frac{3\varepsilon}{4}$, $g(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$, para $x_k \leq x \leq x_k + \frac{\pi}{n_0}$ a função g é linear assim como para $x_k + \frac{\pi}{n_0} \leq x \leq x_{k+1}$. A função g é contínua em $\mathbb{R}$ e nos pontos $x \in \mathbb{R}$ em que g é derivável, temos $|g'(x)| > n$. Se $x \in [0, 2\pi]$ tomando x_k tal que $0 \leq x - x_k < \frac{2\pi}{n_0}$, de (4.2) vem que

$$|g(x) - f(x)| \leq |g(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| < \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Logo, $d(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Segue, então, que F_n é fechado e *int* $F_n = \varnothing$. Como, do Teorema 4.8, E é um espaço de Baire, da condição $EB2$ da Proposição 4.4, vem que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ tem interior vazio em E. Logo, da Proposição 2.20, $E \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (E \setminus F_n)$ é denso em E.

Agora, se uma função $f_0 \in E$ possui derivada em um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$, então existe o limite

$$\lim_{h \to \infty} \frac{f_0(t_0 + h) + f_0(t_0)}{h}$$

e, consequentemente, $f_0 \in F_{n_0}$, para algum n_0. Logo o conjunto $E \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ está contido no conjunto das funções contínuas da reta, periódicas e de período 2π que não são deriváveis em nenhum ponto de $\mathbb{R}$ e segue o resultado.

■

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho pudemos estudar e usar resultados importantes da Topologia Geral e da topologia dos Espaços Métricos e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach e o Teorema de Baire, Teoremas com consequências essenciais para a Análise Matemática.

Verificamos que utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, válido para espaços métricos completos, para garantir a existência de soluções para determinados tipos de equações, é muito conveniente, pois, além de garantir a existência e unicidade de soluções, através da procura de um ponto fixo em contrações, também nos fornece um método iterativo para encontrar tal solução, como fizemos nas aplicações aqui apresentadas, nas quais sempre partíamos de uma contração $T : E \to E$, sendo E um espaço métrico completo.

Além disso, após definirmos espaços de Baire, vimos que o teorema de Baire dado neste trabalho nos fornece condições suficientes para que um Espaço Métrico seja um espaço de Baire, e isto ocorre desde que o Espaço Métrico seja completo. Com este resultado pudemos provar, nas condições dadas, que funções contínuas sem derivada aproximam todas a funções periódicas e de período 2π definidas e continuas na reta, uma vez que este é um espaço métrico completo e, portanto, um espaço de Baire.

REFERÊNCIAS

ARON, R. M.; GONZÁLEZ, L.B.; PELLEGRINO, D. M.; SEPÚLVEDA, J . B. S. **Lineability: The Search for Linearity in Mathematics** New York: CRC Press, 2016.

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

DOMINGUES, H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. Atual Editora, 1982.

GOMES, J. R. M. **Teorema de Baire**. 2009. Disponível em: `https://www.ime.usp.br/~jgomes/baire.pdf`. Acesso em: 10 de julho de 2021.

HONIG, C. S. **Aplicações da Topologia à Análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

HONIG, C. S. **Aplicações da Topologia à Análise**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

KREYSIG, E. **Introductory Funtional Analysis with Applications.** New York: Wiley Classics Library, 1989.

LIMA, E. L. **Curso de Análise vol. 2**. 1ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral.** 1ª. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A, Editora da Universidade de São Paulo, 1970.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

MUJICA, J. **Notas de Topologia Geral**. Notas de Aula. Campinas: UNICAMP. 2005. Disponível em `https://www.ime.unicamp.br/~rigas/topolmujica/`. Acesso em: 10 de julho de 2021.

MUNKRES, J. R. **Topology**: A First Course. New Jersey: Prentice Hall, 2000.

SILVA, T. M. **O Teorema do Ponto Fixo de Banach para Contrações e Alguma Aplicações**. Monografia da Universidade Federal do Tocantins (UFT). 57 p. Arraias, TO: 2019.

SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.** 1ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1979.