



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS - CCT
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

MAVE RICK DE OLIVEIRA ALVES

TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO DE
SCHWARZSCHILD

CAMPINA GRANDE - PB
2021

MAVE RICK DE OLIVEIRA ALVES

TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

CAMPINA GRANDE - PB
2021

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

A474t Alves, Mave Rick de Oliveira.
Termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild
[manuscrito] / Mave Rick de Oliveira Alves. - 2021.
31 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e
Tecnologia, 2021.

"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva ,
Departamento de Física - CCT."

1. Buraco negro. 2. Termodinâmica. 3. Schwarzschild. I.
Título

21. ed. CDD 536.7

MAVE RICK DE OLIVEIRA ALVES

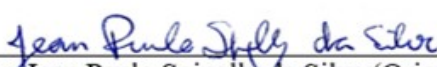
TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

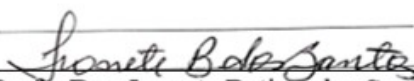
Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação
em Licenciatura Plena em Física da
Universidade Estadual da Paraíba, em
cumprimento à exigência para obtenção
do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo
Spinelly da Silva

Aprovado em 26 de maio de 2021.

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)


Profª. Dra. Ivonete Batista dos Santos
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)


Profª. Ma. Deusalete Câmara Vilar Neta
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

AGRADECIMENTOS

A Deus, santíssimo Pai e Criador deste vasto mundo que estudamos através da física.

Aos meus pais que me proporcionaram apoio em todos os setores de minha vida. Ao meu irmão que me garantiu boas risadas nesses últimos anos.

À minha companheira Thaís Diniz, cujo amor único e amizade sem fim foram suporte e inspiração para a conclusão desta etapa de natureza acadêmica e cuja importância em vida não se pode mensurar.

Ao meu amigo Léo, cuja amizade não pode ser descrita.

A minha amiga Wanessa, pela amizade tão sincera ao longo desses anos.

Ao meu amigo Daniel, cujas palavras de refrigério e orações foram indispensáveis para me motivar e guiar nos caminhos de Cristo.

A Santiago, meu professor de física dos anos no ensino médio, que me mostrou como essa disciplina poderia ser bela, além de ser a minha inspiração primordial na escolha dessa carreira.

Ao meu orientador, Jean Spinelly, pela [muita] paciência e ensinamentos passados nesses mais de 3 anos de muito trabalho desde a primeira iniciação científica (onde eu ainda nem tinha começado a estudar integrais), pela amizade construída e conselhos fornecidos. À professora Deusalete Vilar por cada conhecimento e ensinamento compartilhado dentro e fora do espaço acadêmico e uma amizade ímpar na vida. À professora Ivonete Batista que me apresentou ao meu orientador. A partir disso esse trabalho pode ser concluído.

Aos amigos e colegas da universidade: Erinaldo, Marcária, Jairo, José Carlos, Gubio e Felipe, por todos os bons momentos que me ajudaram no curso.

TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

Mave Rick de Oliveira Alves ¹

RESUMO

No ano de 1916, logo após a publicação da Teoria da Relatividade Geral (TRG), Karl Schwarzschild (1916) resolveu as equações de campo para o caso mais simples, que é o de uma distribuição de massa esfericamente simétrica e estática e, assim, determinou a métrica do espaço-tempo exterior ao corpo, no vácuo. Essa solução é de grande importância para relatividade geral, pois, além de fundamentar os seus três testes clássicos: o deslocamento das linhas espectrais pela presença do campo gravitacional; o desvio de um feixe de luz ao passar próximo de uma estrela e a precessão do periélio dos planetas, ele prevê a existência de buracos negros. De fato, essa solução, assim como qualquer solução do tipo buraco negro é caracterizada pela existência de um horizonte de eventos, que é uma fronteira teórica ao redor da distribuição a partir da qual nada, nem mesmo a luz, pode sair. Conseqüentemente, se o raio do corpo for menor do que o horizonte de eventos, a referida solução descreverá o espaço-tempo de um buraco negro. Este trabalho tem como o objetivo, utilizar a métrica e as características do buraco negro de Schwarzschild para determinar quantidades que nos informam sobre a termodinâmica desse buraco negro como a temperatura e a entropia.

PALAVRAS-CHAVE: Buraco Negro. Termodinâmica. Schwarzschild.

¹Graduando em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

SCHWARZSCHILD BLACK HOLE THERMODYNAMICS

Mave Rick de Oliveira Alves ¹

ABSTRACT

In 1916, right after the publication of the General Theory of Relativity (GRT), Karl Schwarzschild (1916) solved the field equations for the simplest case, which is a spherically symmetrical and static mass distribution and, thus, determined the metric of space-time outside the body, in a vacuum. This solution is of great importance for general relativity, because, in addition to fundamentalizing its three classic tests: the displacement of spectral lines by the presence of the gravitational field; the deviation of a beam of light when passing near a star and the precession of the perihelion of the planets, it predicts the existence of black holes. In fact, this solution, like any black hole solution, is characterized by the existence of an event horizon, which is a theoretical boundary around the distribution from which nothing, not even light, can come out. Consequently, if the body's radius stops smaller than the event horizon, the solution app will describe the space-time of a black hole. This work aims to use a metric and the characteristics of Schwarzschild's black hole to determine the quantities that inform us about the thermodynamics of this black hole such as temperature and an entropy.

KEYWORDS: Black Hole. Thermodynamics. Schwarzschild.

¹Undergraduate Degree in Physics from the State University of Paraíba

Conteúdo

1	Introdução	7
2	Buracos Negros	9
2.1	Formação e Tipos de Buracos Negros	11
2.2	Detecção e a primeira imagem	13
3	Buraco Negro de Schwarzschild	14
3.1	Uma breve história de Karl Schwarzschild	14
3.2	Equações de Campo de Einstein	15
3.3	A métrica de Schwarzschild	16
3.4	Singularidade e Horizonte de eventos	19
4	Termodinâmica	21
4.1	Variáveis termodinâmicas	21
4.2	Cálculo das Variáveis Termodinâmicas	24
4.2.1	Temperatura	25
4.2.2	Entropia	26
5	Considerações Finais	27
6	Referências	28

1 Introdução

Durante boa parte da nossa história, a propriedade que os objetos têm de caírem, quando soltos de uma certa altura a partir do solo, e o movimento dos corpos celestes eram considerados naturais, sem que houvesse a necessidade de um agente causador. Foi apenas no século XVII que Isaac Newton formulou uma teoria capaz de explicar a causa desses movimentos e descrevê-los com exatidão. Em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada em 1687, Newton descreveu a gravitação universal como uma força fundamental de atração que age entre todos os objetos por causa de suas massas, isto é, a quantidade de matéria de que são constituídos. Segundo ele, é a gravitação que faz com que os planetas permaneçam em suas órbitas e que os objetos, sobre a Terra, sejam atraídos em sua direção (HALLIDAY, 2002).

A interação gravitacional ocorre mesmo quando os corpos estão afastados por uma certa distância. Logo, para justificarmos este aspecto, dizemos que um determinado corpo massivo cria um campo gravitacional vetorial, \vec{g} , no espaço ao seu redor e que, quando colocamos um segundo corpo nessa região, eles interagem através do campo gravitacional existente. Naturalmente, como \vec{g} , é conservativo, podemos escrevê-lo como $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$, onde Φ é uma função escalar solução da equação de Poisson (SYMOM, 1996; MARION, 2003).

Embora seja bastante precisa para a maioria dos propósitos práticos, a formulação Newtoniana apresenta alguns problemas que só foram sanados com o advento da teoria da relatividade geral (TRG), proposta por Einstein em 1915. Por exemplo, a teoria de Newton assume que alterações na força gravitacional são transmitidas instantaneamente quando a posição dos corpos gravitantes muda, contradizendo o fato que existe uma velocidade limite a que podem ser transmitidos os sinais (velocidade da luz no vácuo). Além do mais, nessa formulação há um pressuposto que o espaço e tempo são absolutos, o que está em desacordo com a teoria da relatividade restrita (TRR) de Einstein.

O campo gravitacional possui a propriedade básica de que todas as partículas inseridas

nele se movem da mesma maneira, independentemente de sua massa ou carga, desde que as condições iniciais sejam as mesmas. Tal propriedade nos permite estabelecer que, localmente, as características do movimento de uma partícula num referencial não-inercial são as mesmas de um corpo que se movimenta num sistema inercial sob a ação de um campo gravitacional. Assim, localmente, um sistema de referência não-inercial equivale a um campo gravitacional. Isto é o que denominamos Princípio da equivalência. Assim, entendendo que esse aspecto também é válido para partículas com velocidades relativísticas, Einstein propôs a chamada teoria da relatividade geral (TRG), na qual a gravitação é vista como um desvio na métrica do espaço-tempo plano (métrica de Minkowski).

Formalmente, na relatividade geral, toda informação geométrica do espaço-tempo está contida em um objeto matemático chamado de tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, o qual é solução das equações de campo de Einstein (LANDAU e LIFCHITZ, 1974; BERGMANN, 1975; CARMELI, 1982; D' INVERNO, 1998; FERRARO, 2007).

No ano de 1916, logo após a publicação da TRG, Karl Schwarzschild (1916) resolveu as equações de campo para o caso mais simples, o de uma distribuição de massa esfericamente simétrica e estática e, assim, determinou a métrica do espaço-tempo exterior ao corpo, ou seja, no vácuo. Essa solução é de grande importância para relatividade geral, pois, além de fundamentar os seus três testes clássicos: o deslocamento das linhas espectrais pela presença do campo gravitacional; o desvio de um feixe de luz ao passar próximo de uma estrela e a precessão do periélio dos planetas, prevê a existência de buracos negros. De fato, a solução de Schwarzschild, assim como qualquer solução do tipo buraco negro (NORDSTRÖM (1916); REISSNER (1916); KERR, 1963), é caracterizada pela existência de um horizonte de eventos, que é uma fronteira teórica ao redor da distribuição a partir da qual nada, nem mesmo a luz, pode sair. Conseqüentemente, se o raio do corpo for menor do que o horizonte de eventos, a referida solução descreverá o espaço-tempo de um buraco negro (WEINBERG, 1972; LANDAU e LIFCHITZ, 1974; CARMELI, 1982;

CARROLL, 1997).

Algumas décadas depois, Jacob D. Bekenstein (1972) sugeriu que a área do horizonte de eventos de um buraco negro fosse a medida da entropia desse corpo celeste. Contudo, James A. Bardeen, Brandon Carter e Hawking (1973) mostraram que, se um buraco negro tivesse entropia, deveria, então, possuir também temperatura e, conseqüentemente, pelas Leis da Termodinâmica, deveria irradiar, o que contradizia o próprio conceito desse objeto cósmico. No ano seguinte Hawking (1974) conseguiu assegurar a sugestão de Bekenstein (1972), ao apresentar a ideia de que os buracos negros poderiam criar e emitir partículas, tais como neutrinos ou fótons, em uma temperatura T_H , em graus Kelvin (K), conhecida como temperatura Hawking. Essa ideia da emissão de partículas por parte de um buraco negro, hoje denominada radiação Hawking, ainda foi completada por Hawking (1975), em um trabalho no qual deduziu a fórmula para a entropia de um buraco negro esfericamente simétrico, conhecida como a fórmula de Bekenstein-Hawking. Essa equação expressa claramente que a entropia por unidade massa é proporcional à massa do buraco negro, confirmando o que Hawking havia proposto em 1974, ou seja, que um buraco negro poderia irradiar.

A nossa proposta é analisar a termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild. Particularmente, pretendemos calcular a temperatura Hawking e a entropia.

Neste trabalho, utilizaremos o sistema natural de unidades, no qual $\hbar = c = G = k_B = 1$.

2 Buracos Negros

Ao longo de toda a história, a física tenta solucionar as mais variadas situações da natureza, sejam elas terrenas ou até mesmo espaciais. O Cosmos sempre foi motivo de grande admiração desde a antiguidade com as observações dos mais diversos cientistas.

Quando o conceito de gravidade então surgiu, as observações tomaram uma nova forma e questionamentos foram realizados: “será que existe uma velocidade a qual arremessamos

um pedra para ela não retornar?”. Hoje, sabemos que existe a chamada *velocidade de escape* que diz que existe uma velocidade que independe da massa de um corpo onde o mesmo caminha para o infinito (RESNICK, HALLIDAY; 2016). Isso levou o inglês John Michell em 1778 acreditar no fato de existirem corpos celestes tão densos que suas velocidades de escape fossem mais altas que a velocidade da luz, fazendo com que não fossem vistos a longa distância. Alguns anos mais tarde, Pierre Laplace nomeia esses corpos de Estrelas Escuras em uma obra intitulada *Exposição do sistema do mundo* (CASTINEIROAS, CRISPINO, MARTAS E VANZELLA; 2006).

John Michell, que postula que “uma estrela com massa suficientemente compacta poderia ter um campo gravitacional tão forte que a luz não poderia escapar. Qualquer luz emitida pela superfície da estrela seria puxada de volta por uma atração gravitacional, obedecendo a teoria newtoniana, antes que conseguisse se afastar”. Michell ainda afirma há um grande número de estrelas nessa situação, mesmo que não fosse possível vê-las, pois, sua luz não atingiria os olhos humanos. Quando Ole Roemer, um astrônomo dinamarquês, descobre que a luz se propaga em velocidade finita, implica em uma nova teoria para a ideia de Michell. Foi apenas em 1915 que Karl Schwarzschild um mês após a publicação da Teoria da Relatividade Geral de Einstein, encontra a primeira solução exata para as equações de campo de Einstein, solução esta que prevê um objeto de características únicas (será abordado com mais detalhes essa solução e suas implicações na seção 3).

Em maio de 1919 a relatividade geral de Albert Einstein foi provada com a observação do desvio quase imperceptível da luz solar. Um fato interessante se a massa do Sol fosse concentrada numa região com pouco maior do de 3 km de raio, o efeito desse desvio seria muito mais perceptível, levando a conclusão da existência de uma região extremamente compacta onde nenhum raio de luz conseguiria escapar classicamente. Em 1969 John Wheeler nomeia essa região de **Buraco Negro** (CASTINEIROAS, CRISPINO, MARTAS E VANZELLA; 2006).

2.1 Formação e Tipos de Buracos Negros

De propriedades peculiares e de intensos questionamentos, hoje é verificado que os buracos negros são criados naturalmente pelo cosmos. Porém, dependendo da maneira como são formados, os buracos negros são classificados como estelares, supermassivos ou gravitacionais e primordiais. A seguir, faremos uma abordagem sobre cada um deles.

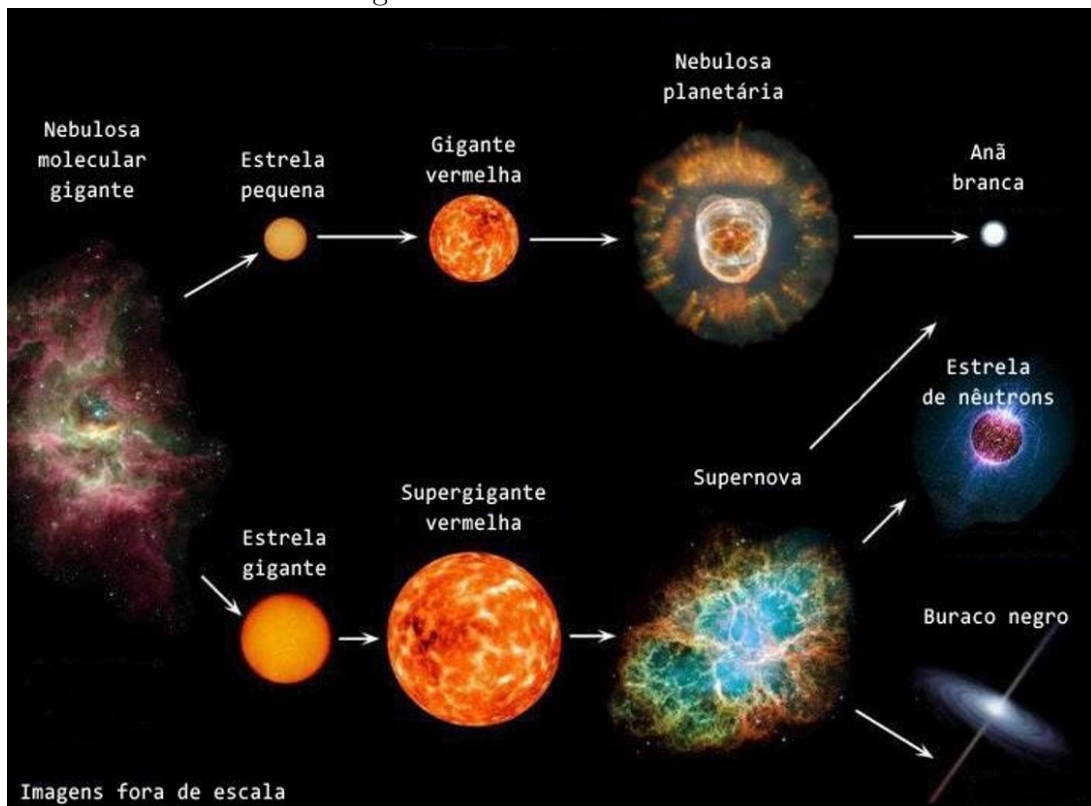
- **Buracos Negros Supermassivos ou Gravitacionais**

Em 1938, os físicos Hans Bethe e Charles Critchfield perceberam que as estrelas são gigantescas fornalhas, onde os núcleos atômicos se fundem, originando elementos mais pesados e liberando enormes quantidades de energia, onde uma boa parte na forma de fótons.

As estrelas possuem um ciclo de vida com processos bem definidos e com estágios finais diferentes, dependendo de sua massa solar. Os buracos negros são resultantes de um tipo de estrelas denominadas Super Gigantes. De maneira geral, em apenas algumas centenas de milhões de anos, esses corpos consomem todo o seu combustível (hidrogênio) até aumentarem de tamanho até se tornarem as chamadas Gigantes Vermelhas, e entram no chamado colapso gravitacional (CARROLL, 2004) que é um desequilíbrio entre a força hidrostática produzidas pelas reações nucleares de seu interior e a força gravitacional produzida por sua massividade. Com o passar do tempo, a força gravitacional a matéria da estrela para o centro, mantendo-a em equilíbrio por até bilhões de anos. Quando a estrela está próximo de sua morte, ela passa a ser rica em ferro e outros elementos pesados que são estáveis devido a queima total de combustível, e como consequência as reações de fusão não são mais suficientes para gerar a pressão capaz de evitar que ela colapse, explodindo e se transformando em supernovas, um aglomerado de energia em meio ao espaço. Devido a intensidade elevada da própria força gravitacional, a supernova se compactaria em uma região do espaço de com alta densidade, como mostrado na figura 1. Dependendo da massa do núcleo de ferro (resultante da queima do combustível)

ocorrerá o surgimento de um objeto diferente: até 10 massas solares há a formação de Anãs Brancas com cerca de 1,4 massa solar; com 10 a 25 massas solares, há a formação de Estrelas de Nêutrons de até 3 massas solares (CARROIL; OASTILE 2007). Em 1939, Julius Oppenheimer e Hartland Snyder concluíram que Buracos Negros entre 5 e 13 massas solares seriam formados a partir do núcleo de ferro de até 25 massas solares. Tal fato exemplifica ainda mais a alta massividade desses objetos. (CASTINEIRAS, CRISPINO, MARTAS E VANZELLA; 2006).

Figura 1: Ciclo de vida estelar



Fonte: <https://hypescience.com/wp-content/uploads/2012/08/ciclo-de-vida-estelar2.jpg>

- **Buracos Negros Supermassivos ou Gravitacionais**

Encontrados no centro de galáxias, possuem massas que variam de milhões a bilhões de massas solares. Podem ter sido originados do colapso gravitacional de imensas nuvens de gás ou de aglomerados de milhões de estrelas no centro das galáxias, que se formaram quando o universo era mais jovem e bem mais denso.

- **Buracos Negros Primordiais**

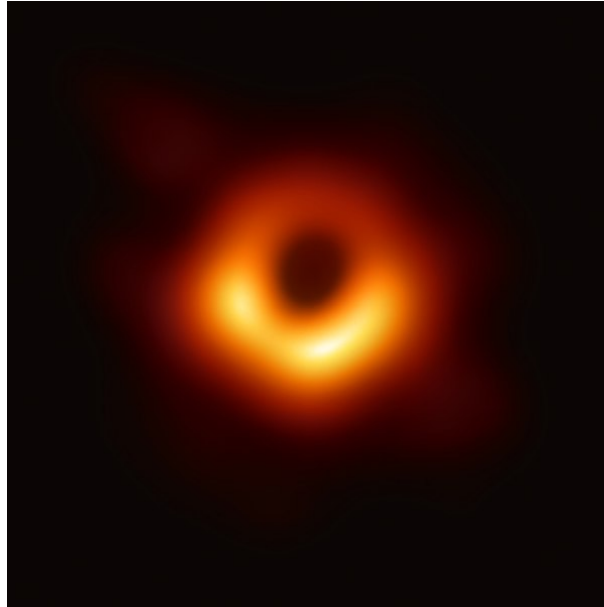
São buracos negros podem ter se formado nos primórdios do universo quando, devido a um ambiente favorável com pressões e temperaturas extremamente altas, flutuações na densidade da matéria teriam dando origem a regiões de densidades extremas, onde esses buracos negros poderiam ter se formado. É possível que devido à expansão do universo essas regiões tenham se dispersado, mas algumas podem ter se mantido estáveis dando origem a buracos negros que durem até hoje. Esse tipo de buraco negro poderia ter qualquer massa. Assim, podem ter surgido o que os pesquisadores chamam de mini buracos negros, que teriam tamanhos micrométricos. Também se considera a possibilidade da formação de buracos negros primordiais maiores, que através de sua evaporação (esse assunto será explicitado na seção 4) poderiam também dar origem a mini buracos negros.

2.2 Detecção e a primeira imagem

No ano de 2016, a colaboração do LIGO (em inglês, Scientific Collaboration ou LSC) anunciou a primeira detecção de ondas gravitacionais, feito que também representou a primeira observação de um choque de buracos negros (ABBOTT, et al. 2016). Em 10 de abril de 2019, a primeira imagem direta de um buraco negro e sua vizinhança foi publicada, após observações feitas pelo Event Horizon Telescope em 2017 do buraco negro supermassivo no centro galáctico de Messier 87 (The Astrophysical Journal Letters, 2019, vários autores).

Em 10 de abril de 2019, o mundo recebe a notícia que de que os astrônomos obtiveram, pela primeira vez, a imagem de um buraco negro, através de entrevistas coletivas dadas em Washington, Bruxelas, Santiago, Xangai, Taipé e Tóquio. A colaboração científica internacional EHT(Event Horizon Telescope) ou Telescópio Horizonte de Eventos, foi iniciada em 2009 contando com 347 astrônomos, físicos, matemáticos e engenheiros de 60 instituições de 20 países. A imagem foi captada por meio de um telescópio virtual do tamanho da Terra, que é formado por 8 radiotelescópios.

Figura 2: Buraco Negro da galáxia M87



Fonte: <https://www.eso.org/public/images/eso1907a/>

A imagem (2) mostrou movimento de uma nuvem de gás de alta energia passando pelo o disco de acreção do buraco negro supermassivo, cuja massa é equivalente à de 6,5 bilhões de sóis no centro da galáxia M87(Messier 87) localizada a 53,5 milhões anos luz de distância na constelação de Virgem. (MATSUURA, 2020).

3 Buraco Negro de Schwarzschild

Nas subseções a seguir, traremos breves informações sobre Karl Schwarzschild, sua vida e motivações, além de apresentar as equações de campo de Einstein que serão de grande importância na dedução da métrica de Schwarzschild e suas implicações para a previsão teórica do buraco negro.

3.1 Uma breve história de Karl Schwarzschild

Nascido em uma família judaica em 9 de outubro de 1873 na Alemanha, mais precisamente em Frankfurt, Karl Schwarzschild foi um estudante talentoso para matemática e as ciências naturais. Antes dos 17 anos publica seus primeiros trabalhos na área da mecânica celeste. Com uma formação em astronomia interrompida para ser da

artilharia do exército alemão. Somente em 1896 ele consegue seu doutorado sob algumas teorias de Poincaré aplicando-as na origem do sistema solar. Os mistérios do Universo sempre foram fascinantes para esse físico. Com o passar dos anos se torna professor de astronomia até ter sua carreira interrompida pela Primeira Guerra Mundial. Mesmo sendo dispensado, decide se unir fileiras militares, trabalhando ativamente primeiro como oficial de meteorologia e, posteriormente, de artilharia (ALBERTO, 2016).

Documentos indicam que no verão de 1915, mesmo na frente militar, desenvolve trabalhos sobre uma distribuição esférica e homogênea de matéria. No mesmo ano, Einstein publica seus trabalhos sobre relatividade geral. Em 1916, Schwarzschild publica sobre sua solução para as equações de campo de Einstein, que corresponderia ao campo gravitacional de uma massa puntual. O próprio Albert reconhece e cita os estudos de Karl como válidos. Schwarzschild veio a sucumbir à doença de pele pênfigo, uma doença autoimune caracterizada pela produção de bolhas dolorosas. Na época, não havia tratamento para a doença. Assim, Schwarzschild foi liberado do serviço militar e internado em casa, em março de 1916. Morreu dois meses depois, em 11 de maio de 1916, ao 42 anos. Seu corpo foi sepultado no Stadtfriedhof de Göttingen (ALBERTO, 2016).

3.2 Equações de Campo de Einstein

Nesta seção, deduziremos a chamada solução de Schwarzschild e discutiremos algumas de suas características. Antes, porém, apresentaremos as equações de campo de Einstein.

Conforme argumentamos na introdução, diferentemente da teoria newtoniana da gravitação, a qual utiliza apenas o potencial $\Phi(\vec{r})$ para descrever o campo gravitacional, a TRG faz essa descrição assumindo a existência de dez potenciais, os quais são identificados com as dez componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ do espaço curvo riemaniano. Assim, deve haver dez equações diferenciais parciais para a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ que, em um certo limite, tende para a Equação de Poisson

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) , \quad (1)$$

em que $\rho(\vec{r})$ é a densidade de massa que gera o campo.

Uma vez que a equação de Poisson é uma equação diferencial de segunda ordem, as equações de campo da Relatividade Geral devem conter derivadas de segunda ordem do tensor métrico. Por outro lado, como a componente 00 do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ é proporcional a densidade de massa ρ , este tensor deve assumir o papel de fonte nessas equações. Levando isso em conta e com o intuito de assegurar a conservação da energia, isto é, $\nabla_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = 0$, Einstein chegou à conclusão que as equações de campo da TRG são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} . \quad (2)$$

Nessas equações, o tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, e o escalar de Ricci, R , são definidos por

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \quad (3)$$

e

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} , \quad (4)$$

onde

$$\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \right), \quad (5)$$

são os símbolos de Christoffel (FERRARO, 2007).

A constante k é obtida quando impomos que, no limite de campo fraco, as equações da TRG devem concordar com as da teoria clássica. Especificamente, as equações geodésicas e de Einstein devem recair na segunda lei de Newton e na equação de Poisson, respectivamente. Seguindo este procedimento, encontraremos $k = 8\pi$.

3.3 A métrica de Schwarzschild

Nesta seção, resolveremos as equações de Einstein e obteremos a métrica que descreve a região exterior a um corpo de massa M , esfericamente simétrico e estático. Naturalmente, com o intuito de simplificar as soluções dessas equações, partiremos de um elemento de linha condizente com a simetria da distribuição de massa, isto é, com simetria esférica.

Dizer que há uma simetria esférica a ser analisada, significa que a distância entre dois pontos deve ser a mesma para todos os pontos que estão localizados na distância r do centro da matéria que produz o campo, que no nosso caso, é de caráter gravitacional. Sendo assim, considerando que o centro da distribuição de simetria esférica coincide com a origem do referencial, essa distância, em coordenadas esféricas, $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$, deve ser dada por:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) , \quad (6)$$

onde os novos termos adicionados a equação são funções arbitrárias das coordenadas r e t . Neste caso, as componentes covariantes e contravariantes do tensor métrico são, respectivamente,

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag} (e^\nu, e^\lambda, r^2, r^2\sin^2\theta) \quad \text{e} \quad g^{\alpha\beta} = \text{diag} (e^{-\nu}, e^{-\lambda}, 1/r^2, 1/r^2\sin^2\theta) . \quad (7)$$

Levando isso em conta e assumindo que, na região exterior, o tensor energia-momento é nulo, as componentes 00, 01 e 11 das equações de Einstein nos levam à:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 , \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} = 0 \quad (9)$$

e

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 , \quad (10)$$

onde a “linha” e o “ponto” representam derivadas com respeito a r e t , respectivamente.

Subtraindo a Equação (9) da Equação (8), chegamos à:

$$\nu' + \lambda' = 0 . \quad (11)$$

Logo, temos:

$$\nu + \lambda = f(x^0) . \quad (12)$$

Podemos, agora, efetuar uma transformação de coordenadas de maneira que o elemento de linha não mude de forma. Essa transformação é feita da seguinte forma: $x^0 = h(x'^0)$ e $x^k = x'^k$ (CARMELLI, 1982). Conseqüentemente,

$$g'_{00} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^0} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^0} g_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \right)^2 g_{00} = \dot{h}^2 g_{00} . \quad (13)$$

Logo, escolhendo $h(x'^0)$ de modo que:

$$\dot{h} = e^{-f(x^0)/2} , \quad (14)$$

obtemos:

$$g'_{00} = e^{-f(x^0)} g_{00} . \quad (15)$$

Para que o elemento de linha ds não se altere, devemos tomar $f(x^0) = 0$. Então, usando este resultado na equação (12) encontramos:

$$\nu + \lambda = 0 . \quad (16)$$

Além de estabelecer uma relação simples entre ν e λ , esta escolha nos permite afirmar que a soma $\nu + \lambda$ depende apenas de r . Por outro lado, a Equação (9) garante que λ é função apenas de r . Então, diante disso, concluímos que ν e λ dependem unicamente da coordenada r . Isso mostra que a dependência temporal da métrica, de uma distribuição esfericamente simétrica, pode ser eliminada por meio de uma transformação de coordenadas apropriada, que é o conhecido *Teorema de Birkhoff*.

Uma vez que $\lambda = \lambda(r)$, segue da equação (8) que

$$\frac{d}{dr} (re^{-\lambda}) - 1 = 0 . \quad (17)$$

Assim, integrando esta equação e utilizando (16), chegamos à:

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_H}{r} , \quad (18)$$

em que r_H é uma constante de integração.

Para determinarmos a constante acima devemos lembrar que, para grandes distâncias da distribuição esférica, isto é, na situação em que o campo gravitacional gerado por tal configuração é fraco, a componente temporal do tensor métrico é dada por $g_{00} \approx 1 + 2\Phi$, onde $\Phi = -M/r$ é o potencial newtoniano produzido pela massa M . De fato, comparando esta condição com a equação (18), concluímos que a constante r_H , a qual possui dimensão de comprimento e é denominada raio de Schwarzschild, é dada por $r_H = 2M$. Sendo assim, temos que a métrica exterior a uma distribuição esfericamente simétrica de massa M é:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (19)$$

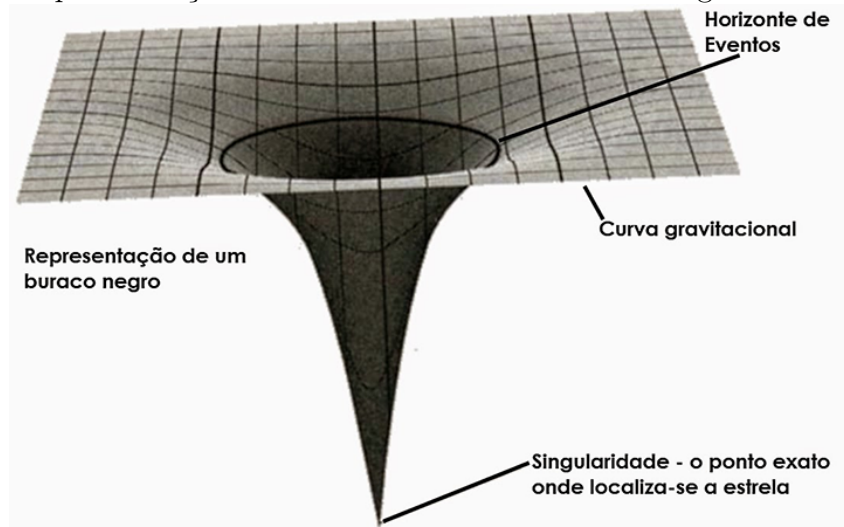
a qual é conhecida como a *solução de Schwarzschild*.

3.4 Singularidade e Horizonte de eventos

Todo buraco negro possui uma “fronteira”, ou seja seus limites. Na década de 50, essa fronteira foi denominada de **horizonte de eventos** pelo físico anglo-americano de origem austríaca Wolfgang Rindler. Imagine que da mesma forma que marinheiros não podem ver o que se passa além do horizonte do mar, se houver astronautas externos ao buraco negro, então eles não podem observar o que se passa dentro dele. Isso acontece pelo motivo de que raios de luz emitidos a partir do interior do buraco negro são inevitavelmente “engolidos” para as regiões cada vez mais internas, mesmo que tenham sido direcionados inicialmente para a parte externa do objeto cósmico. O mesmo tende a acontecer em estruturas providas de massa, que são comprimidas de maneira indefinida no centro do buraco negro, em uma região conhecida como **singularidade**, de volume e densidade de energia altíssima (CASTINEIROAS, CRISPINO, MARTAS E VANZELLA; 2006). A figura 3 traz uma esquematização sobre singularidade e horizonte de eventos.

Isso mostra que a presença de uma massa irá deformar o espaço-tempo de tal maneira que os todos caminhos percorridos pelas partículas irão se inclinar em direção à massa. Quando essas partículas se encontram no horizonte de eventos de um buraco negro, devido

Figura 3: Esquemática do Horizonte de Eventos e da Singularidade de um BN



Fonte: <https://hypescience.com/wp-content/uploads/2012/08/ciclo-de-vida-estelar2.jpg>

a alta ação gravitacional e distorção do espaço tempos, essas partículas são “engolidas” pelo buraco negro (CARROLL, 2004).

Uma outra forma de observar esse fenômeno é da seguinte maneira: para um observador distante da região, os relógios que estão perto de um buraco negro parecem ter os ponteiros se movimentando mais lentamente do que os que estão mais distantes do mesmo. Devido a esse efeito, conhecido como dilatação do tempo gravitacional, um objeto que cai em um buraco negro parece diminuir à medida que se aproxima do horizonte de eventos, levando um tempo infinito para alcançá-lo (CARROLL, 2004).

Então, conhecida a métrica que descreve o comportamento do sistema que estamos propostos a analisar, iremos analisar as características do chamado Buraco Negro, que resumidamente é um objeto de raios menores do que $2M$. Com isso vamos considerar, em nossa métrica já vista, $\theta = 0$ e $\phi = 0$:

$$ds^2 = 0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \Rightarrow \frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (20)$$

Se imaginarmos cones de luz, a expressão acima nos mostra que à medida que nos aproximamos no raio $r = 2M$, os cones se fechariam, assim o raio de luz nunca chegaria em r . Numa análise mais geral, dizemos que se g_{00} for nulo em $r = 2M$ é uma **singularidade** na simetria analisada (CARROLL, 1997).

Por causa da estrutura do espaço-tempo de Schwarzschild, qualquer partícula (até mesmo a luz), que se encontre dentro da região em que $r < r_H$ cairá inevitavelmente na singularidade física, ou seja, quando $r = 0$. Se temos um observador que se encontre na região $r > r_H$, esta região, dentro desse raio, é dito como sendo negra, porque nada, nem mesmo a luz pode ir através do raio de Schwarzschild. Assim também temos a superfície, definida pelo raio r_H , chamada **horizonte de eventos**, uma vez que os acontecimentos estão por trás dela.¹

4 Termodinâmica

O estudo de uma termodinâmica relacionada com os objetos desse trabalho eclodiu quando Stephen Hawking teoriza que buracos negros emitem um tipo de radiação, teoria essa que deixou grande parte dos cientistas de sua época surpresos. Porém, o primeiro indício de que pode haver uma ligação entre os buracos negros e a termodinâmica veio em 1970, com a descoberta matemática que a área da superfície do horizonte de eventos, o limite de um buraco negro, tem a propriedade de sempre aumentar quando matéria adicional ou radiação cai no buraco negro. Além disso, se dois buracos negros colidem e se fundem para formar um único buraco negro, a área do horizonte de eventos em torno do buraco negro resultante é maior do que a soma das áreas do evento horizontes ao redor do buraco negro original.

4.1 Variáveis termodinâmicas

A ligação entre as propriedades de buracos negros e as leis da termodinâmica foi acrescentada por James M. Bardeen, Brandon Carter e Hawking (1973). A primeira lei da termodinâmica estabelece que uma pequena mudança na entropia de um sistema é sempre acompanhada de uma variação proporcional na energia do sistema, onde a temperatura do sistema é um fator de proporcionalidade. Foi Bekenstein (1973) o primeiro a notar

¹O horizonte de eventos do buraco negro da galáxia M87 fotografado em 2019 é de 20 bilhões km. Levando isso em consideração, o tamanho angular do horizonte de eventos é de apenas 16 milionésimos de 1", mostrando ser um objeto realmente compacto. (MATSUURA, 2020.)

que o buraco negro “trabalha” com uma lei similar no que diz respeito a variação de sua massa para uma variação da área do horizonte de eventos, que seria análogo a entropia. Nesse caso, o fator de proporcionalidade é a chamada Gravidade de Superfície, denotada por κ , que nada mais é do que uma medida da força do campo gravitacional no horizonte de eventos. A semelhança é reforçada pelo fato de a gravidade de superfície ser a mesma em todos os pontos do horizonte de eventos, da mesma maneira que a temperatura seja a mesma em todos os lugares em um corpo em equilíbrio térmico. As características da massa M , área A e o momento angular J de um buraco negro estão relacionadas pela expressão:²

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} \kappa \delta A + \Omega \delta J . \quad (21)$$

É interessante notar que a Equação (21) se assemelha com a primeira lei da termodinâmica, que relaciona as quantidades de energia E e entropia S , além das variáveis que estão interagindo entre si, em equilíbrio térmico³:

$$dE = TdS - pdV . \quad (22)$$

Olhando pelo lado da relatividade geral clássica, a analogia relatada é extremamente coerente. Cada lei da termodinâmica possui uma lei correspondente na mecânica de um buraco negro. Um sistema que atinge o equilíbrio térmico em um estado estacionário corresponde a um buraco negro em estado estacionário. Para a lei zero é a gravidade de superfície no horizonte de eventos. Para a segunda lei, a área do horizonte de eventos nunca diminui semelhante a entropia dos processos irreversíveis.

A afirmação usual da terceira lei é que é impossível atingir $T = 0$ em qualquer processo físico, ou que a entropia deve ir a zero quando a temperatura vai a zero. Para buracos negros, isso não funciona; acontece que $\kappa = 0$ corresponde a buracos negros extremos, que não têm necessariamente uma área de desaparecimento. Mas a terceira lei da termodinâmica também não funciona, no sentido de que existem sistemas físicos comuns

²No caso do buraco negro Schwarzschild, tema deste trabalho, a expressão se reduz a $\delta M = \frac{1}{8\pi} \kappa \delta A$, devido ser uma métrica de caráter estacionária.

³Na Equação (22), o termo pdV pode ser entendido como apenas um termo de trabalho.

que a violam; a terceira lei se aplica a algumas situações, mas não é verdadeiramente fundamental. Com isso, temos: $E \rightarrow M$, $T \rightarrow \alpha\kappa$ $S \rightarrow A/8\pi\alpha$.

Stephen Hawking revolucionou a ideia sobre termodinâmica de buracos negros quando começou a pesquisar que buracos negros poderiam se comportar de acordo com a mecânica quântica, emitindo partículas a uma taxa constante. Em seu artigo, Hawking afirma que:

“[...] O que finalmente me convenceu foi que um processo físico real era que as partículas que saíam tinham um espectro que era precisamente térmico: o buraco negro cria e emite partículas e radiação como se ele fosse um corpo quente normal com uma temperatura que é proporcional à superfície gravidade e inversamente proporcional para a massa.” (Hawking, 1975).

Hawking também mostrou que os campos quânticos em um buraco negro permitem que partículas sejam emitidas irradiando a uma temperatura:

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} . \quad (23)$$

Através disso podemos interpretar a entropia real de um buraco negro como sendo $A/4$. Bekeinstein propôs uma lei generalizada como sendo

$$\delta \left(S + \frac{A}{4} \right) \geq 0 . \quad (24)$$

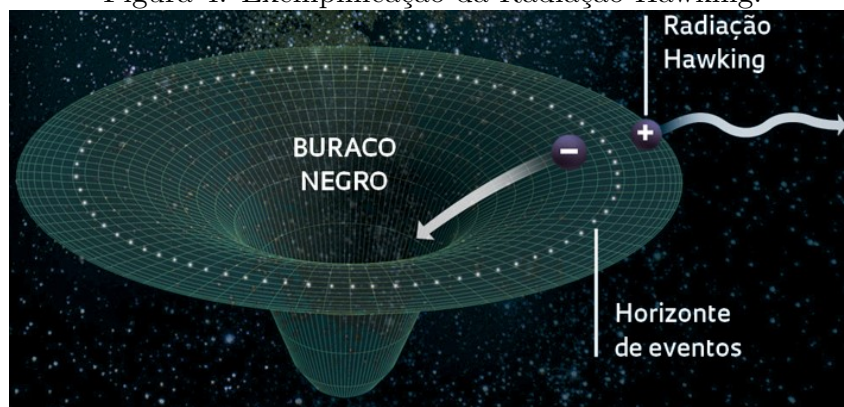
Essa lei generalizada pode ser comprovada se associarmos a entropia de um sistema com logaritmo do número de estados quânticos possíveis.

Em seu livro *A Brief History of Time*, Hawking (1988) nos leva a imaginar um par partícula-antipartícula virtual (o adjetivo virtual indica que essas entidades não podem ser observadas), criado próximo ao horizonte de eventos de um buraco negro, tal que um de seus elementos é absorvido pelo buraco negro (e, portanto, está confinado ao seu interior) enquanto o outro escapa da atração gravitacional e é detectado por um observador distante. O par virtual deve ser composto por um elemento de energia positiva e um de energia negativa, mas é importante salientar que o elemento de energia negativa não necessariamente é uma antipartícula (e vice-versa). Uma vez que os elementos do par são

separados, eles tornam-se partículas e anti-partículas reais, isto é, entidades observáveis, e o elemento que escapa da atração do buraco negro pode ser detectado por um observador distante.

Para que ocorra a “evaporação” do buraco negro, as partículas absorvidas devem possuir energia negativa (vide o argumento de conservação de energia apresentado anteriormente), enquanto as partículas que escapam do buraco negro devem ser de energia positiva (como qualquer partícula real em regiões de baixa gravidade). Como um buraco negro emite partículas sua massa e tamanho diminuem de forma uniforme, isto torna mais fácil a saída de partículas por tunelamento quântico, e assim a emissão continuará a um ritmo cada vez maior até que, eventualmente, o buraco negro irradia-se para fora de sua existência, como mostra a figura 4 (HAWKING, 1975).

Figura 4: Exemplificação da Radiação Hawking.



Fonte: <https://bit.ly/2Sejy8w> (ADAPTADO)

4.2 Cálculo das Variáveis Termodinâmicas

Nesta seção determinaremos a temperatura e entropia do buraco negro de Schwarzschild. Em outras palavras, calcularemos essas quantidades associadas à métrica dada pela Equação (19).

4.2.1 Temperatura

De acordo com Wald (1998), no caso em que a geometria do espaço-tempo é produzida por uma distribuição esfericamente em rotação, a gravidade de superfície é dada por:

$$\kappa^2 = - \frac{1}{2} \nabla_\mu \chi_\nu \nabla^\mu \chi^\nu \Big|_{r=r_H}, \quad (25)$$

ou ainda,

$$\kappa^2 = - \frac{1}{2} g_{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \left(\frac{\partial \chi^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \chi^\rho \right) \left(\frac{\partial \chi^\nu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\sigma}^\nu \chi^\sigma \right) \Big|_{r=r_H}, \quad (26)$$

onde $\chi^\mu = (1, 0, 0, \Omega)$ é o vetor de Killing, sendo $\Omega \equiv - (g_{03}/g_{33})|_{r=r_H}$ a velocidade angular no horizonte de eventos.

Obviamente, como o espaço-tempo de Schwarzschild é gerado por um objeto com simetria esférica e estático, essa velocidade angular é nula. Então, levando isso em conta e usando o fato que, nessa geometria, as conexões de Christoffel não-nulas são

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 = \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{\nu'}{2}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\lambda}, \quad \Gamma_{33}^1 = -\text{sen}^2\theta e^{-\lambda}; \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\text{sen}\theta\cos\theta, \quad \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cotg\theta, \end{aligned} \quad (27)$$

chegamos à:

$$\kappa = \frac{1}{4M}. \quad (28)$$

Finalmente, substituindo o resultado da Equação (28) em (23), encontramos a temperatura do buraco negro de Schwarzschild:

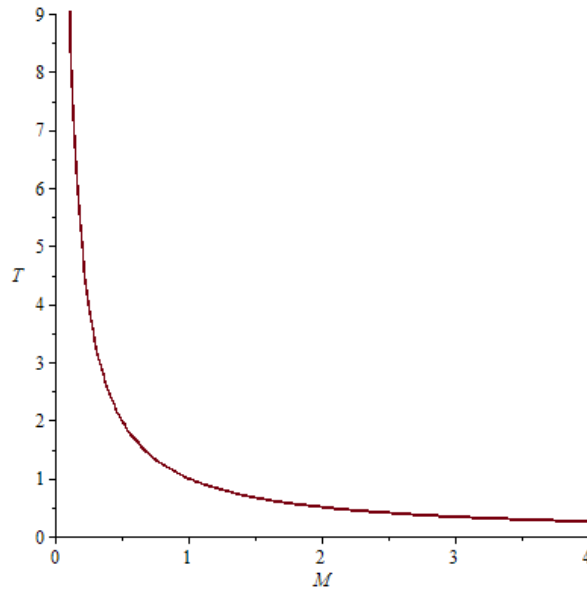
$$T_H = \frac{1}{8\pi M}. \quad (29)$$

A Equação (29) nos permite afirmar que os grandes buracos negros emitem menos radiação do que os pequenos. A partir da equação da temperatura⁴, também podemos concluir que um buraco negro estelar de 1 massa solar tem uma temperatura Hawking de 62 nanokelvins, o que é muito menor do que os 2,7 kelvins da temperatura da radiação

⁴Neste trabalho estamos utilizando o sistema natural de unidades. Porém, se assim não fosse, teríamos encontrado a expressão $T_H = \hbar c^3 / 8\pi G k_B M$, a qual nos permitiria estimar o valor da temperatura para um dado buraco negro.

cósmica de fundo de microondas. Vale salientar que buracos negros de massa estelar ou maior recebem mais massa do fundo cósmico de microondas do que emitem pela radiação Hawking e, portanto, crescerão em vez de encolher, o que é mostrado na figura 5, onde existe uma diminuição da emissão da temperatura a medida que a massa do objeto aumenta com o tempo.

Figura 5: Gráfico da temperatura em função da massa do BN de Schwarzschild.



Fonte: Própria

4.2.2 Entropia

Como dito na seção anterior, as leis termodinâmicas para um buraco negro possuem analogias com as relações de massa e energia. Assim, a entropia S pode ser determinada pela integral:

$$S = \int \frac{dM}{T_H} \quad (30)$$

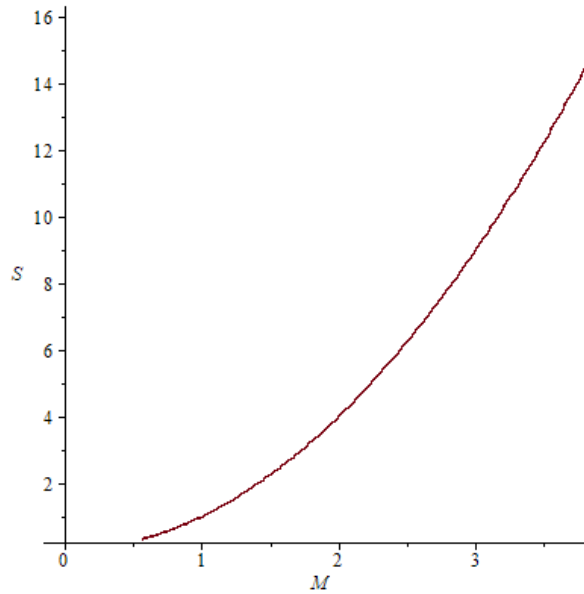
Logo, usando a Equação (29), obtemos:

$$S = \int 8\pi M dM \Rightarrow S = 4\pi M^2, \quad (31)$$

ou ainda,

$$S = 4\pi \left(\frac{r_H}{2}\right)^2 \Rightarrow S = \frac{A}{4}, \quad (32)$$

Figura 6: Entropia do BN de Schwarzschild



Fonte: Própria

onde A é a área da superfície que define o horizonte de eventos. Este resultado mostra que quanto maior o buraco negro, maior será a entropia. Além disso, a expressão acima está de acordo com a relação entre entropia e área, obtida a partir da equivalência entre as leis da termodinâmica e as de um buraco negro.

De fato, é notável pela figura 6 o comportamento da entropia de um buraco negro em acordo com a Equação (32), onde a mesma cresce de maneira exponencialmente onde, a medida que a massa M aumenta, também aumentará a área do horizonte de eventos e como consequência também a entropia, em concordância com a análise realizada na subseção 4.1.

5 Considerações Finais

Neste trabalho, vimos que existem diversas soluções das equações do campo gravitacional de Einstein de difíceis soluções por serem soluções exatas. Mas, uma das soluções mais simples, além de ser uma das primeiras, realizada em 1916 que ocasiona numa interpretação física mais simples é a de Shwarszshild, que considera uma métrica que é obtida através de uma distribuição esfericamente simétrica da matéria. Realizamos todo

o caminho para se obter essa solução com sucesso. Através dessa solução encontramos o Raio de Schwarzschild, onde a partir disso pudemos definir os conceitos de singularidade e horizontes de eventos.

Depois de ter conhecido como buracos negros se formam e os conceitos de singularidade e horizonte de eventos, notamos que tem características que relacionam a termodinâmica clássica com a temperatura de um buraco negro, onde a variação da área do horizonte de eventos e sua massa seria análoga a entropia e a temperatura teria uma analogia com um fator de proporcionalidade juntamente com a gravidade de superfície. Essa ideia persistiu até quando Hawking verificou a possibilidade do fenômeno do tunelamento quântico em um buraco negro, onde partículas passariam pelo buraco negro em pares e após um longo tempo o buraco negro “evaporaria” para o espaço por causa desse efeito. Essa evaporação é a chamada radiação Hawking.

Finalmente, usando a expressão da temperatura, proposta por Hawking, vimos que a temperatura do BN de Schwarzschild é inversamente proporcional a massa, mostrando que quanto menor for o BN, maior será a radiação emitida. Além disso, no cálculo da entropia, verificamos que tal quantidade cresce como quadrado da massa.

6 Referências

ABBOTT, B.P.; et al. **Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger**. Phys. Rev. Lett. 116.06110. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102>. 2016.

ALBERTO, S. **Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild**. Disponível em <https://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0191>. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 38, n^o4, e4201 (2016).

BARDEEN, J., CARTER, B. e HAWKING, S. **Communications in Mathematical Physics**. vol. 31, 1973, p. 161.

BEKENSTEIN, J. D. **Lettere al Nuovo Cimento**. vol. 4, 1973, p. 737.

BERGMANN, P. G. **Introduction to the Theory of the Relativity**. New York: Dover Publicações, 1975.

BERGMANN, T.S. **Buracos Negros**. Disponível em <https://www.if.ufrgs.br/thaisa/buracos-negros/bnschwarzschild>.

CARMELI, M. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**, New York, John Wiley and Sons, 1982.

CARROL, S. M. **Lecture Notes on General Relativity**. Santa Bárbara: University of California, 1997.

CARROLL; OSTLIE. **An introduction to modern astrophysics and cosmology**. 2nd edition, 2007. San Francisco: Pearson, Addison-Wesley, ISBN 0-8053-0402-9.

CASTIÑEIRAS, Jorge; CRISPINO, Luís B.; MATSAS, George E. A.; VANZELLA, Daniel Augusto Turolla. **O retrato do monstrengo**. Gênios da Ciência, São Paulo, n. 11, p. 32-39, 2006.

CRAWFORD, P. **O Significado da Relatividade no Final do Século**. Colóquio Ciência, v. 16, p. 3-26, 1995.

D' INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**. New York: Oxford University Press, 1998.

FERRARO, Rafael. **Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity**. Buenos Aires: Springer Science, 2007.

FRANCHI, REIS e NETO. **Breve História Dos Buracos Negros**. Revista Científica UNILAGO, ISSN 2318-244X, 2013).

HAWKING, S. **Communications in Mathematical Physics**. vol. 43, 1975, p. 199.

HAWKING, S. W. **A Brief History of Time**. 1. ed. Nova Iorque: Bantam Books, 1988.

KERR, R. P. **Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics**. *Phys. Rev. Lett.* New York: American Physical Society, vol. 11, no5, 1963, p. 237.

LANDAU, L. e LIFCHITZ, E. **Teoria de Campo**. São Paulo: HEMUS - Livraria Editora Ltda, 1974.

MARION, J. B. e THORNTON, S. T. **Classical Dynamics: of the particles and systems**, 5.ed. New York: Thomson Brooks/Cole, 2003.

MATSUURA, O.T. **A primeira imagem de um buraco negro** *Cadernos de Astronomia*, vol. 1, nº1, 52-82. Disponível em <https://periodicos.ufes.br/astrofisia/article/view/31781/21244>.

NORDSTRÖM, G. **On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory.** *Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk.*, Amsterdam:vol 26, 1918, p. 1201.

REISSNER, H. **Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einstein'schen Theorie.** *Annalen der Physik.* vol 50, 1916, p. 106.

SCHWARZSCHILD, K. **Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie.** *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen.* Berlin: Akademie der Wissenschaften, voll1, 1916, p. 189-196.

SYMON, Keith R. **Mecânica.** Rio de Janeiro: Campus, 1996.

The Astrophysical Journal Letters,875:L1(17pp), 2019 April 10. **First M87 Event Horizon Telescope Results. I.The Shadow of the Supermassive Black Hole.** Disponível em <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/ab0ec7/pdf>.

WALD, R, M., ed. (1998). **Black Holes and Relativistic Stars.** Chicago: University of Chicago Press. ISBN 0-226-87035-9.

WEINBERG, Steven. **Gravitation and Cosmology.** Inglaterra: John Wiley, 1972.