



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS - CCT
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA**

ERINALDO EMILIANO DA SILVA

**O MÉTODO DE BOGOMOL'NYI APLICADO AOS DEFEITOS TOPOLÓGICOS DO
TIPO KINK E VORTICES**

**CAMPINA GRANDE – PB
2021**

ERINALDO EMILIANO DA SILVA

**O MÉTODO DE BOGOMOL'NYI APLICADO AOS DEFEITOS TOPOLÓGICOS DO
TIPO KINK E VÓRTICES**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação em
Licenciatura Plena em Física da
Universidade Estadual da Paraíba, em
cumprimento à exigência para obtenção
do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alex da Silva.

**CAMPINA GRANDE – PB
2021**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586m Silva, Erinaldo Emiliano da.
O método de Bogomol'nyi aplicado aos defeitos topológicos do tipo kink e vórtices [manuscrito] / Erinaldo Emiliano da Silva. - 2021.
60 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.
"Orientação : Prof. Dr. Alex da Silva, Departamento de Física - CCT."
1. Defeitos topológicos. 2. Mecanismo de Bogomol'nyi. 3. Vórtice. 4. Simetria - Física. I. Título

21. ed. CDD 530.1

ERINALDO EMILIANO DA SILVA

O MÉTODO DE BOGOMOL'NYI APLICADO AOS DEFEITOS TOPOLÓGICOS DO
TIPO KINK E VÓRTICES

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação em
Licenciatura Plena em Física da
Universidade Estadual da Paraíba, em
cumprimento à exigência para obtenção
do grau de Licenciado em Física.

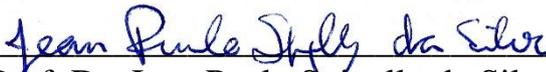
Orientador: Prof. Dr. Alex da Silva.

Aprovada em: 25/05/2021.

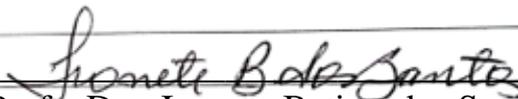
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Alex da Silva (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dra. Ivonete Batista dos Santos
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiro a Deus por ter me mantido na trilha certa durante este projeto de pesquisa com saúde e forças para chegar até o final.

Sou grato ao meu pai Elias Emiliano de Lima Silva e à minha mãe Maria Gomes Silva pelo apoio que sempre me deram durante toda a minha vida.

Agradeço aos meus irmãos Erivaldo, Erivan, Eliane, Adriano e Adriana que sempre estiveram ao meu lado durante o meu percurso acadêmico.

Agradeço à minha namorada Francyllen Oliveira que sempre me apoiou, não só apenas durante o meu percurso acadêmico, mas em diversas decisões na vida.

Deixo um agradecimento especial ao meu orientador Dr. Alex da Silva pelo incentivo e pela dedicação do seu escasso tempo ao meu projeto de pesquisa.

Também quero agradecer à Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), pelos serviços prestados à comunidade acadêmica em geral. A todos os professores do curso de Licenciatura Plena em Física pela elevada qualidade do ensino oferecido.

Aos funcionários da UEPB, em especial dona Damiana, Everaldo e Dona Rosária, pela presteza e atendimento quando nos foi necessário.

Aos colegas de classe Mave Rick, Marcaria Macielli e Felipe pelos momentos de amizade e apoio.

Aos amigos que conheci na moradia universitária, Maxciel, Rafael, Samuel, Bruno pelo companheirismo em diversas situações da vida.

Agradeço à Pró-Reitoria de Assistência Estudantil (Proest) pelo apoio por meio de programas de assistência estudantil, sendo de extrema importância para minha estadia e permanência no curso.

“A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo.”

Albert Einstein.

RESUMO

Este trabalho trata de forma sucinta o estudo de defeitos topológicos em sistemas planares relativísticos (conhecido como vórtices), onde o mesmo apresenta peculiaridades bastante interessantes em diversas áreas da física. Discutimos inicialmente alguns conceitos relativos à topologia geral, o estudo da origem da relatividade restrita desenvolvida por Einstein partindo da incoerência das transformações de Galileu, o formalismo lagrangeano para determinar as equações de movimentos que governam os fenômenos. Além disso, realizamos o estudo do mecanismo de Bogomol'nyi, ferramenta matemática que permite obter as equações BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) que minimizam a energia do sistema. Foram encontradas soluções para os modelos Maxwell-Higgs e Chern-Simons-Higgs no que diz respeito às soluções tipo vórtices, nos possibilitando chegar a uma energia finita e que, de fato, gera um círculo de vácuo degenerado no plano (energia mínima degenerada), como previsto na literatura. Por outro lado, quando o espaço dos vórtices é imerso no espaço quadridimensional ocorre o surgimento das cordas. Como a parede de domínio (*kink*), cordas não apresentam energia finita, mas encontramos energia finita e localizada por unidade de comprimento.

Palavras Chaves: Defeitos Topológicos; Quebra Espontânea de Simetria; Mecanismo de Bogomol'nyi; Vórtices.

ABSTRACT

This work deals briefly with the study of topological flaws in relativistic planar systems (known as vortices), where it presents very interesting peculiarities in several areas of physics. Initially, we discussed some concepts related to general topology, the study of the origin of special relativity developed by Einstein starting from the incoherence of Galileo's transformations, the Lagrangian formalism to determine the equations of movements that govern the phenomena. Besides, the study of Bogomol'nyi's mechanism, a mathematical tool that allows obtaining the BPS equations (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) that minimize the energy of the system, was carried out. Solutions were found for the Maxwell-Higgs and Chern-Simons-Higgs models with regard to vortex-type solutions, enabling us to arrive at a finite energy that, in fact, generates a degenerated vacuum circle in the plane (minimum degenerated energy), as predicted in the literature. On the other hand, when the space of the vortices is immersed in the four-dimensional space, the appearance of the strings occurs. Like the domain wall (kink), strings do not have finite energy, but we find finite and localized energy per unit length.

Keywords: Topological flaws; Symmetry spontaneous break; Bogomol'nyi's mechanism; Vortices.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Representação da coleção de subconjuntos de W , bem como algumas propriedades.....	12
Figura 2 - Esquemática das transformações de Galileu.....	17
Figura 3 - Esquemática das transformações de Lorentz considerando uma explosão luminosa em dois referenciais inerciais.....	19
Figura 4 - Representação da propagação com velocidade constante da solução do Kink dinâmico em função do tempo.....	39
Figura 5 - Representação da solução do sistema $\phi(x)$, para $\lambda = a = 1$ e $x_0 = 0$	49
Figura 6 - Representação da densidade de energia do sistema para $\lambda = a = 1$ e $x_0 = 0$	50

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	12
2.1 ESTRUTURA TOPOLÓGICA	12
2.1.1 Espaços Topológicos e Grupos Topológicos	12
2.1.2 Função Contínua e Continuidade	13
2.1.3 Homeomorfismo	15
2.2 A TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA	17
2.2.1 Transformações de Galileu	17
2.2.2 Transformações de Lorentz e Consequências da Relatividade Restrita.....	18
2.3 TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS	22
2.3.1 Formalismo Lagrangeano no estudo de Teoria de Campos	22
2.4 QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA	26
2.4.1 Quebra Espontânea de Simetria Contínua Global de Gauge	26
2.4.2 Quebra Espontânea de Simetria Contínua Local de Gauge - Mecanismo de Higgs	28
2.5 O MÉTODO DE BOGOMOL'NYI.....	31
2.6 CARGA TOPOLÓGICA.....	34
3 DEFEITO TIPO KINK	36
4 VÓRTICES EM SISTEMAS PLANARES AUTO-DUAIS EM TEORIAS DE GAUGE	41
4.1 Modelo de Maxwell-Higgs Abeliano	41
4.2 Modelo Chern-Simons-Higgs Abeliano	45
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES	49
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	51
7 REFERÊNCIAS	53
8 APÊNDICE	55
8.1 APÊNDICE A – CÁLCULO DO TENSOR ENERGIA-MOMENTO.....	55
8.2 APÊNDICE B – CÁLCULO DO TENSOR INTENSIDADE DO CAMPO DE GAUGE	58

1 INTRODUÇÃO

O estudo de defeitos topológicos em sistemas planares (conhecido como vórtices) apresenta peculiaridades bastante interessantes em diversas áreas da física; indo da cosmologia à matéria condensada, no que diz respeito à transição de fase e supercondutores do tipo II. A mudança de fase da matéria provocada pelo superaquecimento pode alterar as suas propriedades originais, porém, num estado de mais baixa temperatura algumas propriedades podem permanecer idênticas as originais. À medida que o universo foi esfriando ocorreram mudanças de fases, e como consequência, quebra espontânea de simetria, dando origem aos defeitos topológicos e o surgimento de novas partículas (GOMES, A., 2006).

Segundo Yoichiro Nambu, citado por Lustosa, F. B. (2011, p. 12); “Se a minha visão estiver correta, o Universo pode ter uma espécie de estrutura de domínios. Em uma parte do Universo você pode ter uma direção preferencial para o eixo; na outra parte, a direção pode ser diferente.”

Quando um material supercondutor tipo II é submetido a um campo magnético externo suficientemente pequeno (Campo Crítico H_{c1}) acontece à expulsão total do campo, se o campo externo for aumentado até certo valor maior que o valor crítico, tal campo externo atravessa este supercondutor em uma forma de tubo de fluxo magnético (Vórtices) e a supercondutividade estará presente em toda região, exceto no interior desses tubos de fluxo magnéticos. A supercondutividade será destruída quando o campo externo atingir um segundo valor crítico superior (H_{c2}) (CAMACHO, W. Y. C., 2011).

De acordo com Miller, C. (2012, p. 5)

Em teorias de campos, defeitos são soluções clássicas das equações de movimento caracterizadas em uma região do espaço em que a ordem do sistema (válida em regiões distintas) é alterada ou quebrada. Desta forma, defeitos podem ser vistos como um conjunto de soluções das equações de movimento que conectam os estados de vácuo (mínimos do potencial) do campo em questão.

Esses fenômenos aparecem em diversos tipos de sistemas físicos que são descritos por potenciais que apresentam características específicas e são caracterizados pela presença de uma carga topológica conservada. Além disso, o sistema tem que apresentar mais de um estado de vácuo.

Miller, C. (2012, p.5,6), ressalta ainda que esses defeitos podem ser classificados como topológicos e não topológicos de acordo com a conexão dos estados de mínima energia da teoria (vácuo). Sendo classificado como topológico aqueles defeitos que conectam estados de menor energia a outros estados de menor energia. Já o não topológico são aqueles defeitos que conectam um estado de mínima energia a si mesmo.

Dada essa definição, podemos entender o conceito de defeitos topológicos como sendo soluções estáveis de equações de movimento e ocorre quando há uma quebra espontânea de simetria em uma determinada região do espaço.

Gomes, A. (2006, p. 1) aponta que “A origem dos defeitos topológicos é explicada de forma natural pela quebra espontânea de simetria descrita em vários modelos e teorias utilizadas na construção do modelo padrão das interações fundamentais (forças eletrofracas e fortes).” Existem três tipos diferentes de defeitos topológicos que são os monopólos magnéticos, paredes de domínios e os vórtices. Daremos uma ênfase maior nos dois últimos cujas soluções topológicas são chamadas kinks e vórtices, e que ocorre em (1+1)-D e (1+2)-D, respectivamente.

Os vórtices estão constantemente presente em muitos fenômenos que ocorrem no dia a dia, como furacões e redemoinhos; fazendo com que esse conceito esteja presente no imaginário humano. Acreditava-se que os planetas vagavam pelo espaço por meio de linhas de vórtices gigantes, remontando às noções de cosmologia de Descartes (GUIMARÃES, T. V.M., 2015). Essas soluções apresentam configurações de campo com energia localizada e finita, como por exemplo, os sólitons torvelinhos, que surgem a partir da quebra espontânea de simetria das teorias de gauge do grupo $U(1)$.

Como evidencia Silva, A. (1996, p.12) “soluções topológicas são soluções das equações de movimento para as quais é possível introduzir uma corrente conservada, cuja carga é diferente de zero”.

Neste trabalho nosso propósito é estudar alguns defeitos topológicos em sistemas bi e tridimensional, bem como fazer uma introdução conceitual de soluções do tipo kink e do tipo vórtices em teorias de gauge planares. Para isso, é necessário observar essas soluções por meio do mecanismo de Bogomol'nyi, onde as mesmas são obtidas para o mecanismo de Higgs com e sem o termo Chern-Simons (CS), além do termo de Maxwell.

No entanto, antes de tudo, introduziremos alguns conceitos relativos à topologia geral, uma vez que é necessário fundamentar o entendimento qualitativo do espaço ao qual está ocorrendo esses fenômenos. Além disso, o estudo da origem da relatividade restrita desenvolvida por Einstein partindo da incoerência das transformações de Galileu e buscando

princípios de relatividade válidos não somente para a mecânica e a eletrodinâmica clássica, mas também todos os fenômenos da natureza. Para o estudo de teoria de campos é necessário entender o formalismo lagrangeano para determinar às equações de movimentos que governam os fenômenos.

Iremos realizar uma pequena revisão sobre o fenômeno da quebra espontânea de simetria, utilizando um modelo de campo escalar real e um campo escalar complexo. Quando esse fenômeno ocorre aparecem os bósons de Goldstone (sem massa) que podem ser eliminados quando a teoria apresentar simetria de gauge local, surgindo uma redefinição do campo que gauge e conseqüentemente o aparecimento de massa para esse respectivo campo.

Apresentaremos também, o mecanismo de Bogomol'nyi, que permite obter as equações BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) que minimizam a energia do sistema. Esse mecanismo será utilizado tanto para encontrar as equações BPS que minimizam a energia do sistema no defeito tipo Kink com potencial ϕ^4 , que ligam estados assintóticos de mínimos de energia (vácuo), como para encontrar soluções de vórtices BPS estacionárias em modelos abelianos acoplados ao campo de Higgs.

Nosso objetivo é estudar como se dá a formulação de teorias clássicas de campos utilizando o formalismo lagrangeano que seja compatível com a teoria da relatividade, bem como aplicar o método de Bogomol'nyi nos sistemas do tipo Kink e do tipo Vórtices, o qual nos fornece uma maneira de escrever a energia para configurações de campos estáticas de forma quadrática, fechada e mínima.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 ESTRUTURA TOPOLÓGICA

2.1.1 Espaços Topológicos e Grupos Topológicos

Em diversas áreas, o conhecimento é construído com o tempo por meio da contribuição de diversos estudiosos e para o estudo da topologia geral não foi diferente. O conceito de espaço topológico surgiu a partir da necessidade de se estudar alguns conceitos já conhecidos da reta real e dos espaços euclidianos, bem como a continuidade de funções contínuas aplicadas nesses espaços (NACIB GURGEL, 2011).

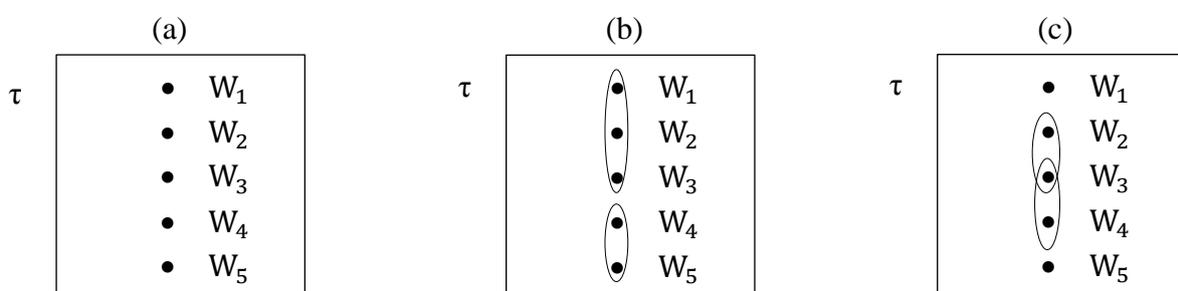
Nacib Gurgel (2011, p. 2) afirma que para um par (E, τ) , onde E um conjunto e τ uma coleção de subconjuntos de E , ser um espaço topológico é necessário que o mesmo satisfaça as seguintes condições:

- i. $\{ \}$ e $E \in \tau$ (conjunto vazio e todo conjunto E pertencem a τ)
- ii. A união de qualquer subcoleção de τ (finita ou infinita) é um elemento de τ
- iii. A interseção de qualquer subcoleção finita de τ pertence a τ .

A topologia pode ser classificada em três tipos, que são eles: topologia discreta, topologia caótica e topologia do complemento finito. Essa classificação se dar por meio de diversas características. Chamamos de topologia discreta aquela em que todos os subconjuntos de E são abertos, ou seja, todo subconjunto V contido em E temos V pertencente a τ . Chamamos de topologia caótica, a topologia em que somente $\{ \}$ e o próprio E pertencem a τ . Já a topologia do complemento finito é aquela em que todos os subconjuntos V contidos em E tais que, o complemento relativo de V em E ($E \setminus V$) ou é vazio ou é finito (NACIB GURGEL, 2011).

Vamos considerar o conjunto W composto por cinco elementos, $W = \{W_1, W_2, W_3, W_4, W_5\}$. Existem várias maneiras de topologias no conjunto W .

Figura 1. Representação da coleção de subconjuntos de W , bem como algumas propriedades.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

A Figura 1 mostra as condições necessárias para que o par (W, τ) seja classificado como um espaço topológico. A Figura 1.(a) apresenta na coleção o conjunto vazio e o conjunto W ($\tau = \{\{\}, W\}$), satisfazendo assim, a condição (i) das propriedades acima. A figura 1.(b) relaciona-se com a condição (ii), onde a união de qualquer subcoleção de τ pertence τ , ou seja, $\tau = \{\{\}, \{W_1, W_2, W_3\}, \{W_4, W_5\}, W\}$. Já a figura 1.(c) exemplifica a condição (iii), ou seja, $\tau = \{\{\}, \{W_2, W_3\}, \{W_3\}, \{W_3, W_4\}\}$. Portanto, o par (W, τ) é um espaço topológico.

O conceito de grupo topológico será de extrema importância para a continuação do entendimento do espaço o qual os fenômenos estão ocorrendo. De acordo HOFF DA SILVA, J.M. (2005, p. 14), “um grupo topológico é um grupo cujos elementos são membros de um espaço topológico em cuja topologia a operação do grupo é contínua”. Ou seja, é um grupo onde o conjunto subjacente apresenta uma topologia que coexiste com o produto no grupo, no sentido em que:

- ❖ o produto $p : G \times G \rightarrow G$, $p(g, h) = gh$, é uma aplicação contínua. Considerando $G \times G$ com a topologia produto e
- ❖ a aplicação $inv : G \rightarrow G$, $inv(g) = g^{-1}$, é contínua (um homeomorfismo).

2.1.2 Função Contínua e Continuidade

Flemming e Gonçalves (2007, p. 106) afirmam que uma função f é contínua num ponto b se as seguintes condições forem satisfeitas:

- a. f é definida no ponto b , ou seja, o ponto b tem que pertencer ao domínio de f ($b \in D(f)$);
- b. $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ existe;
- c. $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$.

Para um melhor entendimento vamos a alguns exemplos:

Considere as seguintes funções e verifique se elas são contínuas no ponto atribuído.

$$\diamond f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2}, & \text{se } x \neq -2 \\ 4, & \text{se } x = -2 \end{cases}; \text{ em } x = -2.$$

Vamos observar se as condições mencionadas acima serão satisfeitas; se sim, $f(x)$ é contínua.

Primeira condição:

$$-2 \in D(f), \text{ pois } f(-2) = 4.$$

Segunda condição:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = -4.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ existe.

Terceira condição:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &\neq f(-2) \\ -4 &\neq 4. \end{aligned}$$

Logo, $f(x)$ não é contínua no ponto $x = -2$.

$$\diamond f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4}, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \end{cases}; \text{ em } x = 2$$

Vamos proceder da mesma forma do item anterior. Portanto, primeira condição:

$$2 \in D(f), \text{ pois } f(2) = 3.$$

Segunda condição:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2^3}{x^2-2^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = 3.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe.

Terceira condição:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$3 = 3.$$

Logo, $f(x)$ é contínua no ponto $x = 2$.

Propriedades das Funções Contínuas

Proposição – Se as funções h e j são contínuas em um ponto b , logo:

- $h + j$ é contínua em b .
- $h - j$ é contínua em b .
- $h \cdot j$ é contínua em b .
- h/j é contínua em b , desde que $j(b) \neq 0$.

Proposição – Sejam h e j funções tais que $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = d$ e j é contínua em d . Logo:

$$\lim_{x \rightarrow c} (j \circ h) = j(d), \text{ ou seja; } \lim_{x \rightarrow c} j[h(x)] = j[\lim_{x \rightarrow c} h(x)] = j(d).$$

Proposição – Sejam h é contínua em c e j é contínua em $h(c)$, então a função composta $j \circ h$ é contínua no ponto c .

2.1.3 Homeomorfismo

Em topologia, um dos problemas mais comuns é provar que dois espaços são homeomorfos. Para isso, faz-se necessário a construção de um homeomorfismo entre os espaços ou uma função contínua cuja inversa seja contínua também. Além disso, no ponto de vista topológico, espaços topológicos homeomorfos são iguais, ou seja, quando dizemos que “ X é homeomorfo a Y ” estamos estabelecendo uma relação de equivalência em qualquer conjunto de um determinado espaço topológico (NACIB GURGEL, 2011).

Mas afinal, o que é um homeomorfismo? Nacib Gurgel (2011, p. 11) define que “um homeomorfismo de um espaço topológico X sobre um espaço topológico Y é uma aplicação contínua e biunívoca de X sobre Y , cuja inversa também é contínua.” Ou seja,

$$f : X \rightarrow Y$$

e

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

são contínuas.

Exemplo: seja, B é um subespaço de Y , então a função chamada de inclusão $f : B \hookrightarrow Y$ é contínua.

Demonstração. Dado um aberto V em X , temos que $f^{-1}(V) = V \cap B$, onde $V \cap B$ é aberto em B por definição de subespaço.

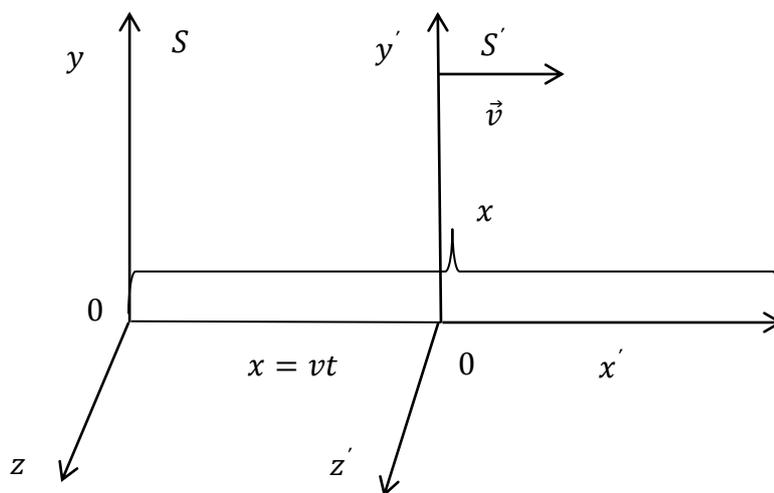
2.2 A TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

Até meados dos anos 1890, sabia-se que as leis da mecânica são invariantes sob as transformações da Galileu, ou seja, toda a física conhecida até então era governada por essas transformações. Porém, essas transformações não eram válidas para o estudo do eletromagnetismo, gerando discórdia entre os diversos estudiosos da época (JACKSON, DAVID JOHN, 1925; p. 388).

2.2.1 Transformações de Galileu

Considere dois sistemas de referência S e S' , com coordenadas (x, y, z, t) e (x', y', z', t') , respectivamente, e com velocidade uniforme relativa \vec{v} .

Figura 2. Esquematização das transformações de Galileu.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

De acordo com a esquematização acima podemos perceber que as coordenadas espaciais e temporal estão relacionadas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Vale ressaltar que a equação (2.2.1) só será válida se, no instante $t = 0$, as origens dos dois sistemas coincidirem.

Segundo Jackson, David John (1925, p. 390), Einstein propôs algumas possibilidades para tentar explicar o fato da incoerência entre as teorias do eletromagnetismo e às transformações de Galileu:

“A primeira suposição era que as equações de Maxwell estavam incorretas. A teoria do eletromagnetismo seria invariante nas transformações de Galileu. Já a segunda suposição é que relatividade de Galileu aplicava-se à mecânica clássica, mas o eletromagnetismo tinha um sistema privilegiado de referência, um sistema onde o éter luminífero estaria em repouso. Por último, ele supôs que existia um princípio de relatividade não só para a mecânica clássica como também para o eletromagnetismo, mas este princípio não era a relatividade de Galileu. Isto implicaria a necessidade de modificação das leis da mecânica.”

Avaliando as possibilidades a disposição, Einstein percebeu que era muito pouco provável que a primeira afirmação fosse verdadeira, uma vez que Hertz havia comprovado experimentalmente a teoria de Maxwell. A segunda alternativa era a mais aceita pelos estudiosos da época, mas perdeu força com as experiências sem êxito realizadas por Michelson-Morley e Fizeau a respeito da existência do éter. Logo, a única suposição que resta a ser avaliada é a terceira, Einstein buscou princípios de relatividade válidos não somente para a mecânica e a eletrodinâmica clássica, mas também todos os fenômenos da natureza. Ele e Poincaré mostraram que as equações de Maxwell eram invariantes às transformações elaboradas por Lorentz (JACKSON, DAVID JOHN, 1925; p. 390).

2.2.2 Transformações de Lorentz e Consequências da Relatividade Restrita

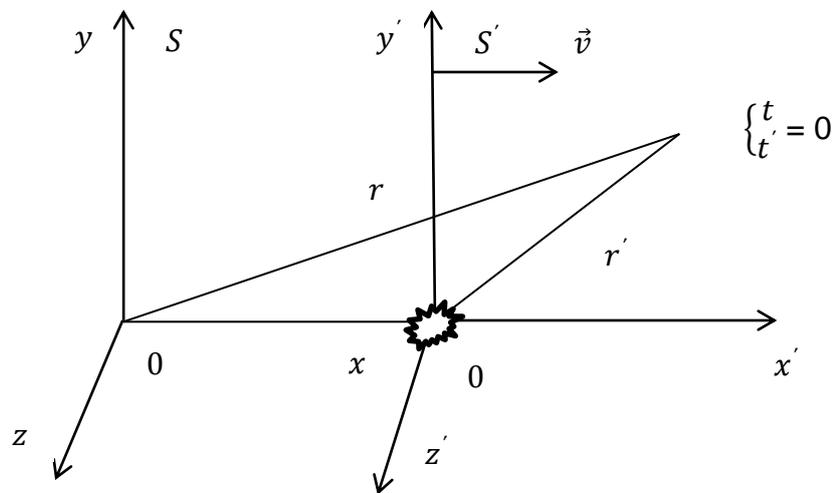
A teoria da relatividade é fundamentada em dois princípios básicos: a existência de um conjunto infinito de sistemas de referência euclidianos, equivalente, que se movimentam com velocidades relativas constante em trajetória retilíneas, uns em relação aos outros, na qual os fenômenos ocorrem de maneira idêntica (referenciais inerciais). O segundo postulado leva em consideração a constância da velocidade da luz.

Transformação de Lorentz coordenadas simples

Considere dois sistemas de referência S e S' , com coordenadas (x, y, z, t) e (x', y', z', t') , respectivamente, e com eixos coordenados dos dois sistemas paralelos e orientados de modo que S' move-se na direção positiva de x com velocidade uniforme

relativa \vec{v} . Além disso, considere um pulso produzido por uma fonte luminosa (em $t = t' = 0$) em repouso em relação ao sistema S . De acordo com o segundo postulando de Einstein implica os dois observadores verem uma esfera de radiação eletromagnética expandindo-se com velocidade c (velocidade da luz) (JACKSON, DAVID JOHN, 1925; p. 397).

Figura 3. Esquemática das transformações de Lorentz considerando uma explosão luminosa em dois referenciais inerciais.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Para o sistema S , temos;

$$\begin{aligned}
 r &= ct \\
 r^2 &= (ct)^2 \\
 x^2 + y^2 + z^2 &= c^2t^2 \\
 c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

A métrica, ou norma, é um caso especial do elemento diferencial geral de comprimento definido por:

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{2.2.3}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor-métrico.

De maneira análoga para S' ,

$$\begin{aligned}
 r' &= ct' \\
 r'^2 &= (ct')^2 \\
 x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \\
 c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

De acordo com a hipótese de o espaço-tempo ser uniforme e que apresente propriedades que varie de forma proporcional em todas as direções nos dois referencias inerciais, a razão entre os dois sistemas de coordenadas, no instante t , é linear. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)}{c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)} &= \lambda^2 \\
 \Rightarrow c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) &= \lambda^2 [c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)],
 \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

onde λ é um possível reajuste da escala entre os sistemas de coordenadas.

Partindo ainda da Figura 3 podemos observar que os referencias inerciais S e S' admitem uma simetria completa entre eles. Ou seja, podemos encontrar as coordenadas referentes à S para obter as coordenadas em S' . Portanto,

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{2.2.6}$$

e

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Substituindo a equação (2.2.6) referente à direção x' na equação (2.2.7) referente à x , obtemos:

$$\begin{aligned} z &= \gamma[(\gamma(z - vt) + vt')], \\ z &= \gamma^2 z - \gamma^2 vt + \gamma vt', \\ \gamma vt' &= z - \gamma^2 z + \gamma^2 vt. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Onde $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$ e $\beta = \frac{v}{c}$. Fazendo uma manipulação matemática, a Equação (2.2.8) fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \gamma vt' &= z - \frac{1}{1-\beta^2} z + \frac{1}{1-\beta^2} vt, \\ t' &= \frac{-z\beta^2}{\gamma v(1-\beta^2)} + \frac{1}{\gamma(1-\beta^2)} t, \\ t' &= \gamma \frac{-zv}{c^2} + \gamma t, \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{vz}{c^2} \right). \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

A Equação (2.2.9) é chamada transformação de Lorentz.

2.3 TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

Nesse capítulo iremos fazer uma discussão no que diz respeito à construção e formulação de teorias clássicas de campos utilizando o formalismo lagrangeano e que apresentem compatibilidade com os princípios da teoria da relatividade restrita, uma vez que a natureza é relativística. Para exemplificar uma teoria de campo relativística usaremos uma densidade lagrangeana para um campo escalar φ e encontrando a equação de Klein-Gordon a partir das equações de movimento.

2.3.1 Formalismo Lagrangeano no estudo de Teoria de Campos

Usualmente, campo pode ser definido com sendo um agente que possui infinitos graus de liberdade (quantidade mínima de números reais necessários para determinar completamente o estado físico de um dado sistema), tendo valor definido em cada ponto do espaço e tempo. Os campos são utilizados, normalmente, para descrever sistemas contínuos (MELO, T., 2014; p. 5).

Na formulação lagrangeana da mecânica clássica, um sistema de N partículas (graus de liberdade) é descrito por $3N$ coordenadas cartesianas ou por qualquer conjunto de $3N$ coordenadas generalizadas q_i e $3N$ velocidades generalizadas \dot{q}_i . Para a formulação da teoria de campos é utilizado o campo φ (ao invés das coordenadas generalizadas q_i) definido em todo espaço e tempo e as derivadas desses respectivos campos $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ (ao invés das velocidades generalizadas \dot{q}_i).

Isso implica na existência de uma densidade lagrangeana que surge a partir de um sistema de infinitos graus de liberdade e que é representada pela função \mathcal{L} , onde a mesma apresenta uma dependência funcional da seguinte forma:

$$\mathcal{L}(\vec{x}, t) = \mathcal{L}\left[\varphi(\vec{x}, t), \frac{\partial\varphi(\vec{x}, t)}{\partial t}, \vec{\nabla}\varphi, t\right]. \quad (2.3.1)$$

A integral de \mathcal{L} sobre todo o espaço resulta na lagrangeana do sistema L ,

$$L = \int \mathcal{L} d^3x. \quad (2.3.2)$$

Já a integral de L no tempo é a ação S ,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (2.3.3)$$

As equações de movimento podem ser determinadas a partir do princípio de mínima ação (princípio variacional de Hamilton), o qual afirma que a ação da dinâmica de sistema é mínima entre os instantes t_1 e t_2 (MELO, T., 2014; p. 5). Portanto, substituindo a equação (4.2) na equação (4.3) e fazendo com que a ação seja mínima, temos

$$\begin{aligned} \delta S &= 0. \\ \Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int \mathcal{L}(\varphi(\vec{x}, t), \frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial t}, \vec{\nabla} \varphi, t) d^3 x &= 0 \\ \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3 x \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial t)} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \varphi} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \right\} \delta \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

A Equação (2.3.4) resulta na equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial t)} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \varphi} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.3.5)$$

A Equação (2.3.5) relaciona-se apenas com um único campo, podendo generalizar para N campos φ_ν ($\nu = 1, \dots, N$).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_\nu / \partial t)} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \varphi_\nu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu} = 0. \quad (2.3.6)$$

Sabemos ainda que a natureza é relativística, logo a teoria de campos deve ser construída em consonância com a teoria da relatividade restrita. Portanto, a Equação (2.3.6) pode ser escrita utilizando os escalares de Lorentz, assim temos:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \varphi_\nu / \partial x^0)} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \varphi_\nu / \partial x^1)} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \varphi_\nu / \partial x^2)} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \varphi_\nu / \partial x^3)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu} = 0. \quad (2.3.7)$$

Considerando a notação relativística covariante onde $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Generalizando, a Equação (2.3.7) pode ser reescrita como:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu} = 0, \quad (2.3.8)$$

onde $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\mu = 0,1,2,3$.

Para exemplificar o estudo de uma teoria de campo relativística consideremos a seguinte densidade lagrangiana para o campo escalar real ϕ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2. \quad (2.3.9)$$

Observe que a Equação (2.3.9) é válida para todos os referenciais inerciais e podemos encontrar as equações de movimento para esse campo utilizando a equação de Euler-Lagrange relativística. Logo, temos que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi)} = \partial^\alpha \phi \quad (2.3.10)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi. \quad (2.3.11)$$

Substituindo as Equações (2.3.10) e (2.3.11) na equação de Euler-Lagrange, resulta em:

$$\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + m^2 \phi = 0, \quad (2.3.12)$$

que é conhecida como equação de Klein-Gordon.

Note que no lugar da letra m poderia ser utilizada qualquer outra letra. Porém, o termo quadrático no campo é chamado termo de massa, isso explica a utilização da respectiva letra. Note ainda que o campo ϕ apresenta apenas um mínimo $\phi_{min} = 0$, fazendo com que o sistema não apresente quebra espontânea de simetria.

A Equação (2.3.12) descreve mésons escalares, que são partículas eletricamente neutras, de massa m , de spin nulo e ainda têm probabilidades de serem as suas próprias antipartículas (ALDROVANDI; PEREIRA, 2008, p. 109).

2.4 QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA

O estudo do fenômeno de quebra espontânea de simetria é muito importante para compreendermos diversas teorias, pois, serve como ponto de partida para a compreensão de diversos acontecimentos posteriores ao mesmo. Este fenômeno surge quando um determinado sistema dinâmico possui uma simetria, porém o seu estado fundamental (estado de menor energia) não é invariante quando submetido a esta simetria (SILVA, A.,1996).

Para tentar tornar mais concreto a compreensão sobre o conceito, vamos exemplificar com uma situação cotidiana. Considere as seguintes situações:

- Uma turma de amigos, composta por cinco integrantes, vai a um restaurante jantar e todos se integram a uma única mesa disposta de forma fechada. O garçom coloca sobre a mesa cinco pratos, cinco garfos, cinco facas e cinco copos. Uma vez distribuídos os kits para o grupo de amigos, o primeiro dos integrantes a escolher seu kit tem a possibilidade de escolher o que está localizado na sua esquerda ou o que está localizado a sua direita. Uma vez escolhida a simetria será quebrada e os demais terão que pegar o kit no mesmo sentido do primeiro escolhido, pois, se caso isso não for feito, um dos integrantes ficará com dois kits enquanto outro ficará sem nenhum. A única forma de igualar a quantidade de kits é o integrante que ficou com os dois kits passar para o outro que não recebeu nenhum.
- A roleta dos jogos de azar, por exemplo, uma vez rodada o sistema apresenta uma simetria completa, porém, a roleta vai perdendo energia até parar em uma casa. Houve uma quebra de simetria através da variação da energia, levando a mesma para um estado de menor energia (estado de vácuo) (HOFF DA SILVA, J.M., 2005).

A partir desse evento podemos identificar e estudar alguns fenômenos, bem como o aparecimento e o desaparecimento dos bósons de Goldstone com a quebra de simetria contínua global e local, respectivamente.

2.4.1 Quebra Espontânea de Simetria Contínua Global de Gauge

Vamos considerar a seguinte densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \bar{\varphi} - \frac{1}{2} \lambda^2 (|\varphi|^2 - a^2)^2, \quad (2.4.1)$$

no qual o primeiro termo representa a parte cinética e o segundo termo é o potencial que desejamos investigar, $|\varphi|^2$ é uma função polinomial do tipo $(\varphi\bar{\varphi})$, λ é uma constante de auto-interação e a é dada por:

$$a^2 = -\frac{\mu^2}{4\lambda^2}. \quad (2.4.2)$$

A lagrangeana representada pela Equação (2.4.1) é invariante sob a transformação de gauge global:

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \exp(i\Lambda)\varphi, \quad (2.4.3)$$

onde Λ é uma constante arbitrária.

Vamos minimizar o potencial, encontrando assim, o estado de menor energia (estado fundamental):

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0.$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \lambda^2(\varphi\bar{\varphi} - a^2)\bar{\varphi} = 0. \quad (2.4.4)$$

Substituindo a Equação (2.4.2) na Equação (2.4.4) temos que:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \lambda^2 \left(\varphi\bar{\varphi} - \left(-\frac{\mu^2}{4\lambda^2} \right) \right) \bar{\varphi} = \lambda^2(\varphi\bar{\varphi})\bar{\varphi} + \frac{\mu^2}{4}\bar{\varphi}. \quad (2.4.5)$$

Para $\mu^2 > 0$, $\varphi = \bar{\varphi} = 0$, logo, não há quebra de simetria. Porém, para $\mu^2 < 0$, $\varphi = 0$ e $|\varphi| = a$. Nesse último caso, a quebra espontânea de simetria é possível.

Agora vamos realizar uma decomposição do campo escalar complexo em dois campos reais dado por

$$\varphi = a + \frac{\phi + i\chi}{\sqrt{2}}, \quad (2.4.6)$$

e

$$\bar{\varphi} = a + \frac{\phi - i\chi}{\sqrt{2}}.$$

Substituindo a Equação (2.4.6) na Equação (2.4.1) e fazendo as operações, temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - 2\lambda^2 a^2 \phi^2 - \sqrt{2}\lambda^2 a \phi(\phi^2 - \chi^2) - \frac{\lambda^2}{4}(\phi^2 - \chi^2)^2 \quad (2.4.7)$$

Se minimizarmos o potencial da Equação (2.4.7), vamos observar a existência de termo associado ao campo ϕ , esse termo está associado à massa referente ao respectivo campo que adquire massa dada por $m_\phi^2 = 4\lambda^2 a^2$. Além disso, surgiu um campo χ , o qual não possui massa é nomeado como bóson de Goldstone. Portanto, a teoria não é mais invariante mediante a transformação de gauge global. Esse fenômeno nos mostra o surgimento de bósons escalares sem massa na teoria, uma vez que a simetria contínua global for quebrada espontaneamente (SILVA, A.,1996).

2.4.2 Quebra Espontânea de Simetria Contínua Local de Gauge - Mecanismo de Higgs

O mecanismo de Higgs é um processo que gera massa para os campos de gauge de forma espontânea. Para exemplificar este processo considere a seguinte densidade lagrangeana para um campo complexo φ , acoplado a um campo vetorial A_μ (campo de gauge):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{D_\mu \varphi} D^\mu \varphi - \mu^2 \overline{\varphi} \varphi - \lambda(\overline{\varphi} \varphi)^2. \quad (2.4.8)$$

Onde $D_\mu = (\partial_\mu + ieA_\mu)$ é a derivada covariante (relaciona-se com a energia cinética do sistema para o campo A_μ) e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor intensidade do campo de gauge. Observe que, a Equação (2.4.8) é invariante frente às transformações de gauge local:

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\Lambda(x)} \varphi \quad (2.4.9)$$

$$\overline{\varphi} \rightarrow \overline{\varphi'} = e^{-i\Lambda(x)} \overline{\varphi} \quad (2.4.10)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) \quad (2.4.11)$$

Consideremos o caso onde $\lambda > 0$ e $\mu^2 < 0$, situação onde a teoria apresenta quebra espontânea de simetria de gauge. Vamos estudar o comportamento desta teoria na vizinhança de um estado de vácuo, logo, consideremos

$$\varphi_0 = a = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}}. \quad (2.4.12)$$

Portanto,

$$\varphi(x) = a + \frac{\phi + i\chi}{\sqrt{2}}, \quad (2.4.13)$$

e

$$\bar{\varphi}(x) = a + \frac{\phi - i\chi}{\sqrt{2}}. \quad (2.4.14)$$

Substituindo as Equações (2.4.14) e (2.4.13) na Equação (2.4.8), obtemos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{e^2a^2}{2}A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - 4\lambda^2\phi^2 - eaA_\mu\partial^\mu\chi + \dots \quad (2.4.15)$$

O segundo termo da Equação (2.4.15) apresenta o campo vetorial A_μ que descreve a propagação do campo de gauge elevado ao quadrado, indicando que o mesmo é massivo. O campo escalar ϕ também é massivo, porém o campo χ aparece sem massa. Podemos eliminar o campo χ da teoria fazendo uma redefinição no campo de gauge. Portanto, sabemos que:

$$\frac{e^2a^2}{2}A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - eaA_\mu\partial^\mu\chi = \frac{e^2a^2}{2}\left[A_\mu - \frac{1}{ea}\partial_\mu\chi\right]^2. \quad (2.4.16)$$

Definindo um novo campo para que possamos eliminar o campo de Goldstone:

$$B_\mu = A_\mu - \frac{1}{ea}\partial_\mu\chi, \quad (2.4.17)$$

substituindo a Equação (2.4.17) na Equação (2.4.16), obtemos:

$$\frac{e^2 a^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - e a A_\mu \partial^\mu \chi = \frac{e^2 a^2}{2} B_\mu B^\mu. \quad (2.4.18)$$

Além disso, o tensor intensidade do campo de gauge pode ser reescrito como sendo:

$$M_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (2.4.19)$$

Substituindo as Equações (2.4.19) e (2.4.18) em (2.4.15) resulta em:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} + \frac{e^2 a^2}{2} B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - 4\lambda^2 \phi^2 + \dots \quad (2.4.20)$$

e o campo de Goldstone χ foi eliminado da teoria.

Inicialmente, começamos com um campo complexo φ que apresentava dois graus de liberdade e um campo vetorial A_μ que também apresentava dois graus de liberdade, totalizando quatro graus de liberdade. O resultado final é uma teoria que apresenta um campo escalar real ϕ e um campo vetorial B_μ , com um grau de liberdade e três graus de liberdade, respectivamente. Portanto, o número de graus de liberdade é preservado (SILVA; A, 1996).

2.5 O MÉTODO DE BOGOMOL'NYI

O mecanismo de Bogomol'nyi é uma ferramenta matemática de extrema importância quando se trata em levar a energia de um sistema para seu estado fundamental ou de menor energia, fornecendo uma maneira de escrever a energia para configurações de campos estáticas numa forma quadrática, fechada e mínima. A partir dela encontraremos equações diferenciais em primeira ordem que é solução das equações de movimentos em segunda ordem, veremos a seguir. (HOFF DA SILVA, J.M., 2005).

Vamos considerar a seguinte densidade lagrangeana que descreve um campo escalar real:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (2.5.1)$$

A equação de movimento da Equação (2.5.1) pode ser encontrada por meio da aplicação da equação de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0,$$

logo, a equação de movimento é:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (2.5.2)$$

Já que estamos levando em consideração um sistema que apresenta configuração estática e que estamos inseridos no espaço de (1+1)-D considerando assinatura métrica (1,-1,-1,-1), as variações temporais são nulas e com isso a Equação (2.5.2) resulta:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (2.5.3)$$

Note que a Equação (2.5.3) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem e não linear. Portanto, sabemos que encontrar soluções dessas equações nem sempre é simples, por isso, torna-se necessário a aplicação do método de Bogomol'nyi o qual nos fornece uma maneira de escrever a energia para configurações de campos estáticas numa forma quadrática,

fechada e mínima. A partir daí encontraremos equações diferenciais em primeira ordem que é solução das equações de movimentos em segunda ordem, veremos a seguir.

Para determinarmos a energia do sistema (configuração estática) vamos utilizar a seguinte equação:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [T_{00}] dx, \quad (2.5.4)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento. Já que estamos considerando uma configuração estática, logo:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \partial_{\mu}\phi\partial^{\nu}\phi - g_{\mu\nu}(\mathcal{L}) \\ T_{00} &= \partial_0\phi\partial^0\phi - g_{00}(\mathcal{L}) = -\mathcal{L}. \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Substituindo a Equação (2.5.1) na Equação (2.5.5), produz:

$$\begin{aligned} T_{00} &= -\left[\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - V(\phi)\right] \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_0\phi\partial^0\phi + \partial_1\phi\partial^1\phi + \partial_2\phi\partial^2\phi) + V(\phi) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + V(\phi). \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

A Equação (2.5.6) é chamada de densidade de energia mínima no vácuo e é uma energia finita.

Por sua vez, vamos substituir a Equação (2.5.6) na Equação (2.5.4), essa substituição nos fornece a seguinte expressão:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + V(\phi)\right] dx. \quad (2.5.7)$$

Aplicando o método de Bogomol'nyi na Equação (2.5.7), obtemos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + V(\phi) = \frac{1}{2}\left[\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)}\right]^2 dx \mp \sqrt{2V(\phi)}\left(\frac{d\phi}{dx}\right). \quad (2.5.8)$$

Substituindo a Equação (2.5.8) na Equação (2.5.7) nos leva a:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} \right]^2 dx \mp \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2V(\phi)} (d\phi). \quad (2.5.9)$$

Observe da Equação (2.5.9) que a energia será mínima quando o termo quadrático for nulo. Portanto,

$$\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} = 0. \quad (2.5.10)$$

Assim,

$$E_{min} = \mp \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2V(\phi)} d\phi. \quad (2.5.11)$$

A energia descrita na Equação (2.5.11) acima é chamada de energia de Bogomol'nyi, que é finita.

Agora vamos demonstrar que a equação em primeira ordem equação (2.5.10) resolve a equação diferencial em segunda ordem de movimento, Equação (2.5.6):

$$\frac{d\phi}{dx} = \mp \sqrt{2V(\phi)}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = \mp \frac{d}{dx} \left(\sqrt{2V(\phi)} \right)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \mp \frac{1}{2} (2V(\phi))^{-\frac{1}{2}} \left(2 \frac{dV(\phi)}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} \right)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \mp \frac{1}{\sqrt{2V(\phi)}} \frac{dV(\phi)}{d\phi} \left(\mp \sqrt{2V(\phi)} \right)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV(\phi)}{d\phi}.$$

Portanto, chegamos ao resultado que queríamos demonstrar.

Portanto, ao minimizar a energia chegamos a uma equação de movimento equivalente à equação original, porém de primeira ordem. O método de Bogomol'nyi permite escrever a energia do sistema estático de forma simples, quadrática, fechada e mínima (SILVA, 1996).

2.6 CARGA TOPOLÓGICA

Inicialmente foi mencionado que os defeitos topológicos suportam quebras espontânea de simetria, mas para que isso aconteça é necessário que características específicas de potenciais e a presença de uma carga topológica seja conservada. Nesse capítulo, iremos mostrar justamente a conservação dessa respectiva carga topológica.

No espaço de (1+1)-D a corrente topológica J_T^μ para um campo escalar real pode ser definida da seguinte forma:

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (2.6.1)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é o pseudo tensor de Levi-Civita (apresenta o número de índices igual ao número de dimensões), $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$ e $\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$. A corrente topológica descrita na Equação (2.6.1) obedece à equação da continuidade,

$$\partial_\mu J_T^\mu = 0, \quad (2.6.2)$$

pois,

$$\partial_\mu J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0,$$

tendo em vista que $\epsilon^{\mu\nu}$ é totalmente anti-simétrico (SILVA; A., 1996).

A carga Q_T correspondente a corrente J^μ ao longo do eixo x é dada por:

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx J^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$Q_T = \phi(+\infty) - \phi(-\infty) = 0. \quad (2.6.3)$$

Na equação (2.6.3) o resultado é zero uma vez que estamos considerando que a configuração apresenta um único mínimo, situação a qual $\phi(+\infty) = \phi(-\infty)$.

Porém, o que nos interessa é encontrar soluções que possibilitem a presença de $Q_T \neq 0$, ou seja soluções que apresentem $\phi(+\infty) \neq \phi(-\infty)$ e isso só será possível se o potencial tiver mais de um mínimo. Isto porque, se o potencial tiver um único mínimo teremos necessariamente $\phi(+\infty) = \phi(-\infty)$, igual o valor que minimiza o potencial (SILVA, 1996).

3 DEFEITO TIPO KINK

O defeito tipo Kink, se origina a partir de uma simetria discreta ($\phi \rightarrow -\phi$) e possui energia finita. Suas soluções são estáveis e conectam duas regiões do espaço onde apresentam mínimos distintos, por isso, são chamadas topológicas. Quando as soluções topológicas são obtidas num espaço-tempo de (1+1)-D, são chamadas de soluções tipo kink (MILLER, C.,2012).

Então, vamos considerar a seguinte densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2. \quad (3.1)$$

O segundo termo da Equação (3.1) representa o potencial não negativo e é conhecido como modelo ϕ^4 . Os pontos mínimos de energia são encontrados minimizando o potencial, logo:

$$\begin{aligned} \frac{dV(\phi)}{d\phi} &= 0 \\ \lambda^2 (\phi^2 - a^2)(2\phi) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Observe que a Equação (3.2) será satisfeita quando, $\phi^2 - a^2 = 0$. Ou seja, $\phi = \pm a$. A equação de movimento para a densidade lagrangeana da Equação (3.1) é:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0 \\ \partial_\nu \partial^\nu \phi + 2\lambda^2 (\phi^2 - a^2)\phi &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Considerando que o sistema apresenta (1+1)-D e considerando um sistema que apresenta configuração estática, temos:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 2\lambda^2 (\phi^2 - a^2)\phi. \quad (3.4)$$

Vamos usar o mecanismo de Bogomol'nyi descrito na Equação (2.5.10) para encontrarmos o valor de $\phi(x)$, portanto:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dx} &= \mp \sqrt{\lambda^2(\phi^2 - a^2)^2} \\ \frac{d\phi}{dx} &= \mp \lambda(\phi^2 - a^2) \\ \frac{d\phi}{(\phi^2 - a^2)} &= \mp \lambda dx.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Resolvendo a equação diferencial representado pela Equação (3.5) pelo método de separação de variáveis, temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{d\phi}{(\phi^2 - a^2)} &= \mp \int \lambda dx \\ \phi(x) &= \pm a \operatorname{tgh}(a\lambda(x + x_0)).\end{aligned}\tag{3.6}$$

A Equação (3.6) é chamada solução tipo kink em que a solução positiva é chamada kink e a solução negativa anti-kink. Vamos encontrar agora a energia mínima de Bogomol'nyi para essa configuração, representado pela equação a seguir:

$$E_{\min} = \mp \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right) dx.\tag{3.7}$$

Considerando $\phi(x) = \pm a \operatorname{tgh}(a\lambda(x + x_0))$ para $x_0 = 0$, então temos:

$$\begin{aligned}E_{\min} &= \mp \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\pm a^2 \operatorname{tgh}^2(a\lambda x) - a^2)[\pm \lambda a^2 \operatorname{sech}^2(\lambda a x)] \\ E_{\min} &= \mp \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 a^4 \operatorname{sech}^4(a\lambda x) dx \\ E_{\min} &= \frac{4}{3} \lambda a^3 = \frac{4}{3} (\lambda a) a^2.\end{aligned}\tag{3.8}$$

A energia representada na Equação (3.8) é finita tanto para o kink quanto para o antikink.

Além disso, λa é inversamente proporcional a largura do defeito l , logo:

$$l \sim \frac{1}{\lambda a}$$

e

$$E \sim \frac{a^2}{l}.$$

Portanto, a energia do sistema está diretamente relacionada com a largura do defeito. Um kink “estreito” possui alta energia, já o kink “largo” apresenta baixa energia. Além disso, quando o kink é inserido no espaço de (3+1)-D, acontece o surgimento do defeito chamado parede de domínio (*domain wall*). Nessa situação, o defeito não apresenta mais energia finita. Porém, se pegarmos por unidade de área a energia permanece finita. Esta energia por unidade de área é chamada de tensão superficial da parede (MELO, T., 2014; p. 24).

DINÂMICA DO KINK

A Equação (3.6) descreve soluções para sistemas com configurações estáticas. Para obter soluções dinâmicas é necessário fazer uma mudança de referencial, uma vez que estamos inseridos no espaço relativístico. Dessa maneira, iremos observar o *kink* propagar com uma velocidade diferente de zero e regidos por conexão com as transformações de Lorentz:

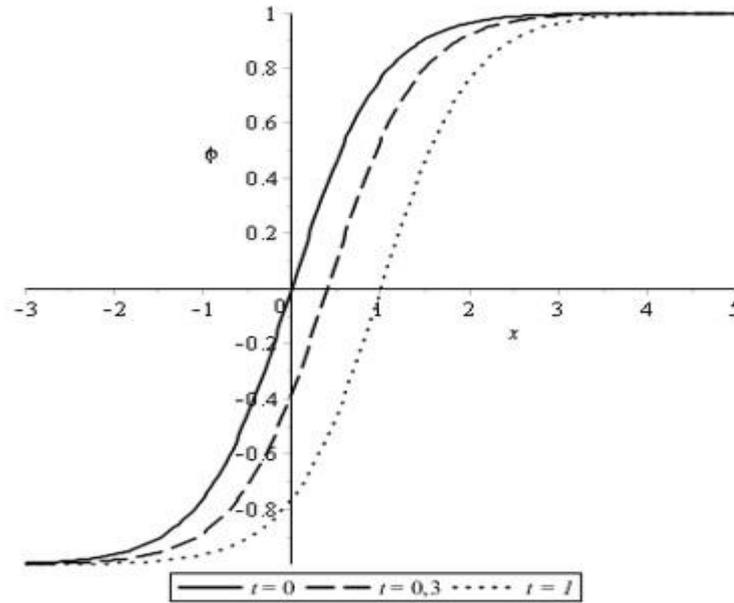
$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \quad (3.9)$$

onde $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ é o fator de Lorentz. Portanto, a solução dinâmica para o *kink* (e para o *antikink*) é dada pela seguinte equação:

$$\phi'_{\pm}(x, t) = \pm a \tanh[\lambda a \gamma(x - vt)]. \quad (3.10)$$

O *kink* dinâmico dado na Equação (3.10) se propaga como pacotes de ondas, com energia localizada no espaço. A solução do *kink* se propaga com velocidade constante sem mudar sua forma, ou seja, é uma onda solitária (LEMOS, 2007).

Figura 4. Representação da propagação com velocidade constante da solução do Kink dinâmico em função do tempo.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Vamos encontrar a energia de Bogomol'nyi do sistema, logo:

$$E'_{\min} = \mp \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2V(\phi')} \frac{d\phi'}{dx} \right) dx \quad (3.11)$$

Considerando $\phi'_{\pm}(x, t) = \pm a \tanh[\lambda a \gamma(x - vt)]$, então temos:

$$E'_{\min} = \mp \int_{-\infty}^{\infty} \lambda [\pm a^2 \tanh^2(\lambda a \gamma(x - vt)) - a^2] [\pm \lambda a^2 \operatorname{sech}^2(\lambda a \gamma(x - vt))].$$

$$E'_{\min} = \gamma E = \frac{E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.12)$$

Comparando a energia do *kink* estático e a energia do *kink* dinâmico observa-se que esta onda solitária se comporta como uma partícula relativística (LEMOS, 2007, p.341).

Em teorias que apresentam diversos campos escalares os *kinks* podem interagir entre si por colisões. Esses *kinks* descritos na Equação (3.10) não preservam sua forma depois das colisões, no caso da colisão de um *kink* e de um *anti-kink* acontece a aniquilação dos mesmos (MELO, T., 2014; p. 24).

Ondas solitárias que se recompõem após colisões entre si chamadas de sólitons.

4 VÓRTICES EM SISTEMAS PLANARES AUTO-DUAIS EM TEORIAS DE GAUGE

4.1 Modelo de Maxwell-Higgs Abeliano

O modelo abeliano de Higgs admite soluções clássicas tipo vórtices, comportando-se como cordas de Nambu no limite do acoplamento forte. Portanto, o estudo desses objetos tem se tornado de extrema importância tanto no espaço bidimensional, quanto no espaço tridimensional, uma vez que, está inserido em diversos contextos físicos (SILVA, A., 1996).

Podemos introduzir uma corrente do tipo:

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda, \quad (4.1.1)$$

onde A_λ é o campo de gauge.

Considere a densidade lagrangeana a seguir:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + |D_\mu \varphi|^2 - \frac{\lambda^2}{2} (|\varphi|^2 - v^2)^2. \quad (4.1.2)$$

A Equação (4.1.2) define o modelo de Maxwell-Higgs, nela, é acrescido o termo de Maxwell acrescido no termo de Higgs, o qual descreve a dinâmica do campo de gauge A_μ . Agora, vamos encontrar as equações de movimento de Euler-Lagrange para o sistema:

$$\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = 0. \quad (4.1.3)$$

Resolvendo a Equação (4.1.3), temos:

$$\partial_\beta (\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta) - 2e^2 A_\alpha |\varphi|^2 = 0.$$

Mas, sabemos que $(\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta) = F^{\beta\alpha}$, e $\partial_\beta F^{\beta\alpha} = J^\alpha$. Portanto,

$$J^\alpha = 2e^2 A_\alpha |\varphi|^2. \quad (4.1.4)$$

A Equação (4.1.4) é a equação para o campo de gauge A_μ . Considerando as configurações sejam estáticas, teremos:

$$J^0 = 2e^2 A_0 |\varphi|^2.$$

Já para o campo complexo φ , a equação de movimento resulta:

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

$$D_\mu D^\mu \varphi = \lambda^2 (\varphi \bar{\varphi} - v^2) \varphi.$$

Considerando as configurações dos campos estáticas, a mesma pode ser escrita da seguinte forma:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - |D_\mu \varphi|^2 + \frac{\lambda^2}{2} (|\varphi|^2 - v^2) \right] d^2 r. \quad (4.1.5)$$

Como as soluções são rotacionalmente simétricas, vamos utilizar o seguinte ansatz:

$$\begin{cases} \varphi(r, \theta) = v g(r) e^{-in\theta} \\ A_r = 0. \quad A(r, \theta) = -\frac{1}{er} [a(r) - n] \end{cases} \quad (4.1.6)$$

O parâmetro v foi introduzido para assegurar a quebra espontânea de simetria, e controlar as dimensões dos campos. Portanto, $\dim(v) = \dim(e) = \frac{1}{2}$, onde g , a são adimensionais (SILVA, A., 1996). Além disso, através do ansatz, da Equação (4.1.6) podemos escrever a seguinte expressão para o campo magnético:

$$B(r) = -\frac{a'}{er} v^4. \quad \left(a' = \frac{da}{dr} \right) \quad (4.1.7)$$

Vamos usar também a seguinte relação para expressar a energia da Equação (4.1.5) em termos do campo magnético e do campo φ :

$$\begin{cases} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2B^2 \\ |D_\mu \varphi|^2 = -|D_i \varphi|^2 = -\partial_i \bar{\varphi} \partial_i \varphi - ie \bar{\varphi} A_k \partial_k \varphi + ie \varphi A_k \partial_k \bar{\varphi} - e^2 A_k^2 |\varphi|^2 \end{cases} \quad (4.1.8)$$

Substituindo as Equações (4.1.6) e (4.1.7) na Equação (4.1.8), temos:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2 \frac{a'^2}{e^2 r^2} v^8 \quad (4.1.9)$$

$$-|D_i\varphi|^2 = -v^2 g'^2 - v^2 \frac{a^2 g^2}{r^2}. \quad (4.1.10)$$

$$\frac{\lambda^2}{2} (|\varphi|^2 - v^2) = \frac{\lambda^2}{2} v^4 (g^2 - 1)^2. \quad (4.1.11)$$

Reescrevendo a equação da energia utilizando as Equações (4.1.9), (4.1.10) e (4.1.11), chegamos a seguinte expressão:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{a'^2}{2e^2 r^2} v^8 + v^2 g'^2 + v^2 \frac{a^2 g^2}{r^2} + \frac{\lambda^2}{2} v^4 (g^2 - 1)^2 \right] d^2 r$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{a'^2}{2e^2 r^2} v^8 + v^2 (g'^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2}) + \frac{\lambda^2}{2} v^4 (g^2 - 1)^2 \right] d^2 r. \quad (4.1.12)$$

Aplicando o método de Bogomol'nyi para escrever a energia da Equação (4.1.12), numa forma quadrática, fechada e mínima obtemos:

$$\frac{a'^2}{2e^2 r^2} v^8 + \frac{\lambda^2}{2} v^4 (g^2 - 1)^2 = \frac{1}{2} v^4 \left[\frac{a'}{er} v^2 \mp \lambda (g^2 - 1) \right]^2 \pm \frac{a'}{er} \lambda v^2 g^2 \mp \frac{a'}{er} \lambda v^2. \quad (4.1.13)$$

Já o outro termo da equação da energia, Equação (4.1.12) fica da seguinte forma:

$$\left(g'^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2} \right) = \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \pm \frac{a(g^2)'}{r}. \quad (4.1.14)$$

Substituindo as Equações (4.1.13) e (4.1.14) na equação da energia, Equação (4.1.12), encontramos:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} v^4 \left[\frac{a'}{er} v^2 \mp \lambda (g^2 - 1) \right]^2 + v^2 \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \pm v^2 \frac{a(g^2)'}{r} \pm \frac{a'}{er} \lambda v^2 g^2 \mp \frac{a'}{er} \lambda v^2 \right\} d^2 r. \quad (4.1.15)$$

Para que o método de Bogomol'nyi seja válido, vamos considerar a seguinte condição:

$$e = \lambda.$$

Portanto,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} v^4 \left[\frac{a'}{er} v^2 \mp e(g^2 - 1) \right]^2 + v^2 \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \pm v^2 \frac{a(g^2)'}{r} \pm \frac{a'}{2r} v^2 g^2 \mp \frac{a'}{2r} v^2 \right\} d^2 r. \quad (4.1.16)$$

De posse da Equação (4.1.16), vamos estudar as condições de contorno, uma vez que as soluções desse sistema devem apresentar energia total finita e localizada e as condições que garantem isso, são as seguintes;

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0^{\pm} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1 \end{cases} \quad (4.1.17)$$

Além disso, é necessário que, na origem o campo de Higgs $\varphi(r)$ deve ser unívoco e a componente angular do campo potencial não deve divergir (MILLER, C., 2012), portanto, é necessário satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} a(r) = n \\ \lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0 \end{cases} \quad (4.1.18)$$

Usando as condições estabelecidas nas Equações (4.1.17) e (4.1.18), chegamos a seguinte equação para determinação da energia:

$$E = \mp v^2 \int_{-\infty}^{\infty} dr^2 \frac{a'}{r} + \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r \left\{ \frac{1}{2} v^4 \left[\frac{a'}{er} v^2 \mp e(g^2 - 1) \right]^2 + \left[g' \mp \frac{ag}{r} \right]^2 \right\}. \quad (4.1.19)$$

Observe que para a Equação (4.1.19) seja mínima, o termo quadrático deve ir à zero. Portanto,

$$\frac{a'}{er} = \pm \frac{e}{v^2} (g^2 - 1). \quad (4.1.20)$$

$$g' = \pm \frac{ag}{r}. \quad (4.1.21)$$

Resultando na seguinte expressão:

$$E_{BPS} = \mp v^2 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a'}{r} r dr = \mp v^2 2\pi [a(\infty) - a(0)] = \pm 2\pi |n| v^2. \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.1.22)$$

A Equação (4.1.22) mostra que a energia mínima do sistema é quantizada (finita), onde o número inteiro n (vorticidade) é chamado número de voltas. Podemos perceber que a energia é proporcional a esse número inteiro de revoluções que a fase do campo complexo realiza. Além disso, existe um círculo vácuo degenerado no plano dos complexos φ .

Por outro lado, quando o espaço dos vórtices é imersos no espaço quadridimensional ocorre o surgimento das cordas. Como a parede de domínio, cordas não apresentam energia finita, mas encontramos energia finita e localizada por unidade de comprimento (SILVA, 1996).

4.2 Modelo Chern-Simons-Higgs Abeliano

O modelo CSH (Chern-Simons-Higgs) ocorre no espaço-tempo de Minkowski em (1+2)-D e é definido pela seguinte densidade lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} + |D_\mu \varphi|^2 - V(|\varphi|^2), \quad (4.2.1)$$

onde $\frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho}$ é conhecido como o termo de Chern-Simons e κ é uma constante de acoplamento que tem dimensão de massa. Vale ressaltar que $\epsilon^{012} = 1$. O primeiro termo é o responsável por governar o campo de gauge A_μ .

Utilizando a equação de Euler-Lagrange, vamos encontrar as equações de movimento para a densidade lagrangeana representada pela Equação (4.2.1), logo, temos:

$$\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = 0,$$

que resulta em:

$$D_\mu D^\mu \varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (4.2.2)$$

e para o campo escalar complexo φ :

$$\partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0,$$

que resulta na equação:

$$\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda} = -J^\mu, \quad (4.2.3)$$

para o campo de gauge A_μ . Considerando que estamos trabalhando com configurações estáticas, as componentes espaciais das Equações (4.2.2) e (4.2.3) são:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \varphi + e^2 \varphi A^2_0 = \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad (4.2.4)$$

para o potencial vetor \mathbf{A} , onde $\mathbf{D} = (\nabla + ie\mathbf{A})$. Já a equação vetorial para φ fica da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} k(\hat{y}E_x - \hat{x}E_y) &= ie[\bar{\varphi}(\mathbf{D}\varphi) - (\overline{\mathbf{D}\varphi})\varphi] \\ (\hat{y}E_x - \hat{x}E_y) &= \frac{ie}{k}[\bar{\varphi}(\mathbf{D}\varphi) - (\overline{\mathbf{D}\varphi})\varphi], \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Vamos aplicar o método de Bogomol'nyi para escrever a energia para configuração de campos estáticos com o objetivo de encontrar as soluções das equações de movimento em segunda ordem. Portanto,

$$E = \int [T_{00}] dv. \quad (4.2.6)$$

Ressaltando que os campos são estáticos, a energia representada na Equação (4.2.6) resulta em:

$$E = \int [|\mathbf{D}\varphi|^2 + e^2|\varphi|^2 A_0^2 + V(|\varphi|^2)] dv, \quad (4.2.7)$$

uma vez que o termo de Chern-Simons não contribui para a energia do sistema via o tensor energia momento, e sim por meio da lei de Gauss. Isso acontece pelo fato deste termo ser topológico; não depende da métrica do espaço (SILVA, 1996). A solução da energia descrita na Equação (4.2.7) não é tão simples, por isso, usaremos a seguinte identidade:

$$|\mathbf{D}\varphi|^2 = |(D_i \pm \varepsilon_{ij} i D_j)\varphi|^2 \pm eB|\varphi|^2 \mp \varepsilon^{ij} \partial_i J_j. \quad (4.2.8)$$

Considerando que o r seja muito grande, o último termo da Equação (4.2.8) pode ser desconsiderado (MILLER, C., 2012). Vamos fazer com que essa mesma equação fique com uma dependência em relação à A_0 , logo, a equação fica da seguinte forma:

$$|\mathbf{D}\varphi|^2 = |(D_i \pm \varepsilon_{ij} i D_j)\varphi|^2 \pm 2 \frac{e^3}{k} A_0 |\varphi|^4. \quad (4.2.9)$$

A dependência acrescida na Equação (4.2.9) pode ser absorvida pelo segundo termo da Equação (4.2.7), resultando em:

$$e^2|\varphi|^2 A_0^2 = \left| i e A_0 \varphi \pm i \frac{e^2}{k} (|\varphi|^2 - a^2) \varphi \right|^2 - \frac{e^4}{k^2} |\varphi|^2 (|\varphi|^2 - a^2)^2 \mp 2 \frac{e^3}{k} (|\varphi|^2 - a^2) A_0 |\varphi|^2. \quad (4.2.10)$$

Substituindo as Equações (4.2.9) e (4.2.10) na equação de energia descrita pela Equação (4.2.7), resulta em:

$$E = \int \left[\left| e A_0 \varphi \pm \frac{e^2}{k} (|\varphi|^2 - a^2) \varphi \right|^2 + |(D_i \pm \varepsilon_{ij} i D_j)\varphi|^2 + V(|\varphi|^2) - \frac{e^4}{k^2} |\varphi|^2 (|\varphi|^2 - a^2)^2 \pm e a^2 B \right] dv. \quad (4.2.11)$$

Para que a Equação (4.2.11) seja mínima, é necessário que todos os termos quadráticos sejam zero. Portanto, se faz necessário usar as seguintes expressões para saturar a energia:

$$\left\{ \begin{array}{l} |(D_i \pm \varepsilon_{ij} i D_j)\varphi|^2 = 0, \\ A_0 = \mp \frac{e}{k} (|\varphi|^2 - a^2), \\ V(|\varphi|^2) = \frac{e^4}{k^2} |\varphi|^2 (|\varphi|^2 - a^2)^2. \end{array} \right. \quad (4.2.12)$$

Fazendo uso das relações da Equação (4.2.12), na equação da energia, Equação (4.2.11), temos:

$$\begin{aligned} E &= \pm e a^2 \int B dv, \\ \Rightarrow E &= \pm e a^2 \Phi. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

onde Φ é o fluxo magnético e é igual a $2\pi n$ e e e a são constantes. Portanto, a Equação (4.2.13) resulta em:

$$E = \pm e a^2 2\pi n. \quad (4.2.14)$$

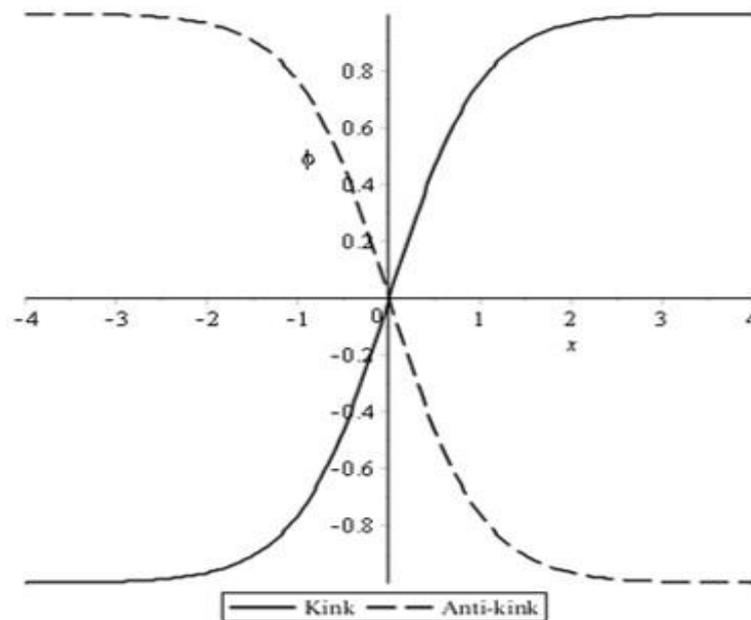
Note que a Equação (4.2.14) mostra novamente que a energia mínima do sistema é quantizada (finita), onde o número inteiro n (vorticidade) é chamado número de voltas. Podemos perceber que a energia é proporcional a esse número inteiro de revoluções que a fase do campo complexo realiza.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesse capítulo são apresentadas análises sobre o comportamento de soluções clássicas de diversos defeitos topológicos, sejam eles em (1+1)-D ou (1+2)-D, defeito tipo Kink e Vórtices, respectivamente. Além disso, a praticidade da implantação do método de solução de Bogomol'nyi, possibilitando o fornecimento de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem que saturam a energia mínima do sistema.

Na Equação (2.5.11) é representada a energia de mínima de Bogomol'nyi para o sistema de (1+1)-D, onde a mesma é finita e localizada em uma pequena região do espaço próxima a origem. As soluções das equações de movimento que representam as paredes de domínio não possuem energia finita, porém, a solução por unidade de área possui.

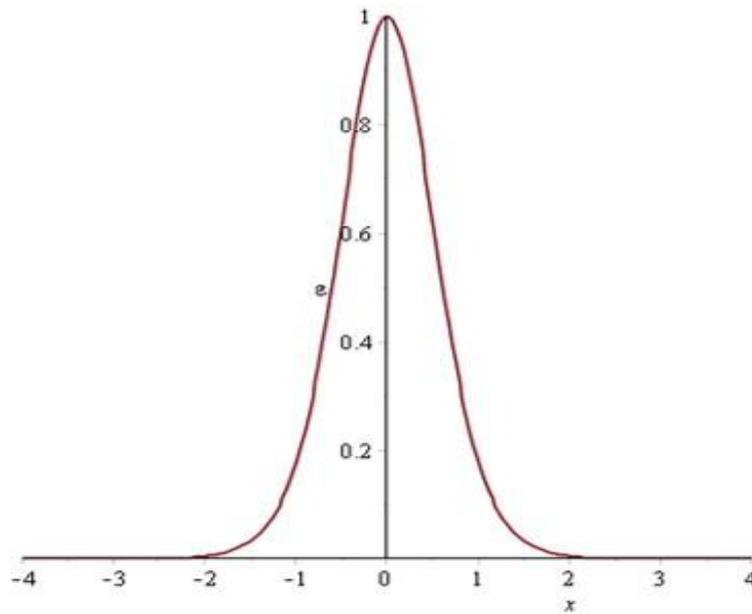
Figura 5. Representação da solução do sistema $\phi(x)$, para $\lambda = a = 1$ e $x_0 = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

A Figura 5 representa o comportamento do campo $\phi(x)$ para a solução tipo kink (representada pela linha contínua) e antikink (representada pela linha tracejada). O gráfico foi plotado no Maple utilizando a Equação (3.6), onde a tangente hiperbólica varia de -1 a 1.

Figura 6. Representação da densidade de energia do sistema para $\lambda = a = 1$ e $x_0 = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Já a Figura 6, representa a densidade de energia e pode ser encontrada por meio da seguinte equação:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) = \lambda^2 a^2 \operatorname{sech}^4[a\lambda(x + x_0)].$$

O gráfico da Figura 6, tem o comportamento de um pico que apresenta máximo em 1 em torno da origem, confirmando assim, a existência de uma energia localizada em uma pequena região do espaço.

No capítulo 4, fazendo uma revisão bibliográfica mostramos a existência de soluções clássicas tipo vórtices em (1+2)-D utilizando diversos modelos utilizando o mecanismo de Bogomol'nyi sempre que possível, pois, esse método faz uma relação entre a energia mínima do sistema com a vorticidade dessas soluções. Os modelos utilizados para encontrar soluções tipo vórtices (Modelo Maxwell-Higgs e o Modelo Chern-Simons-Higgs) possibilitaram chegar a uma energia finita e que, de fato, gera um círculo de vácuo degenerado no plano (energia mínima degenerada).

Por outro lado, quando o espaço dos vórtices é imerso no espaço quadridimensional ocorre o surgimento das cordas. Como a parede de domínio, cordas não apresentam energia finita, mas encontramos energia finita e localizada por unidade de comprimento.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo estudar alguns defeitos topológicos em sistema planares relativístico, introduzindo uma densidade lagrangeana que apresenta simetria $U(1)$ local, abeliana. Este estudo possibilitou a capacidade de compreender e diferenciar o que é um defeito topológico e não topológico, bem como aplicar o fenômeno de quebra espontânea de simetria para assim, encontrar as soluções para os modelos Maxwell-Higgs e Chern-Simons-Higgs.

Além disso, trabalhamos com o mecanismo de Bogomol'nyi, facilitando a saturação da energia do sistema, fornecendo soluções das equações de movimento em segunda ordem a partir das equações de movimento em primeira ordem. Portanto, ao minimizar a energia chegamos a uma equação de movimento equivalente a equação original, porém de primeira ordem. O método de Bogomol'nyi permite escrever a energia do sistema estático de forma simples, quadrática, fechada e mínima.

Os defeitos topológicos suportam quebra espontânea de simetria, mas para que isso aconteça é necessário que características específicas de potenciais e a presença de uma carga topológica conservada.

A princípio, revisamos também o estudo dos defeitos em $(1+1)$ -D, chamado de defeitos tipo kink. Eles foram de extrema importância para dar continuidade ao entendimento para os modelos utilizados para nossos interesses de estudo. A energia via método de Bogomol'nyi para esse defeito apresentou energia finita e localizada. Portanto, a energia desse sistema está diretamente relacionada com a largura do defeito. Um kink “estrito” possui alta energia, já o kink “largo” apresenta baixa energia. Além disso, quando o kink é inserido no espaço de $(3+1)$ -D, acontece o surgimento do defeito chamado parede de domínio (*domain wall*). Nessa situação, o defeito não apresenta mais energia finita. Porém, se pegarmos por unidade de área a energia permanece finita. Esta energia por unidade de área é chamada de tensão superficial da parede.

Comparando a energia do *kink* estático e a energia do *kink* dinâmico observa-se que esta onda solitária se comporta como uma partícula relativística. Em teorias que apresentam diversos campos escalares os *kinks* podem interagir entre si por colisões. Esses *kinks* não preservam sua forma depois das colisões, no caso da colisão de um *kink* e de um *anti-kink* acontece a aniquilação dos mesmos.

A energia mínima do sistema tipo vórtices é quantizada (finita), onde o número inteiro n (vorticidade) é chamado número de voltas. Podemos perceber que tanto a energia quanto o

fluxo magnético é proporcional ao número inteiro de revoluções que a fase do campo complexo realiza. Podemos perceber isso no aparecimento de 2π na sua equação para energia. Além disso, existe um círculo de vácuo degenerado no plano dos complexos φ .

Por outro lado, quando o espaço dos vórtices é imerso no espaço quadridimensional ocorre o surgimento das cordas. Como a parede de domínio, cordas não apresentam energia finita, mas encontramos energia finita e localizada por unidade de comprimento.

Este trabalho foi realizado apenas com os modelos M.H (Maxwell-Higgs) e C.S.H (Chern-Simons-Higgs). Por isso, torna interessante dar continuidade a este estudo com observações utilizando outros modelos mais complexos, como por exemplo, o modelo de Chern-Simons-Maxwell-Higgs.

7 REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Nacib André Gurgel e. **Convergência em Espaços Topológicos: redes e filtros** / Nacib André Gurgel e Albuquerque. – João Pessoa, 2011. Monografia (Graduação) – UFPB/CCEN. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/55>>

ALDROVANDRI, R.; PEREIRA, J. G. **Notes for a Course on Classical Fields**. Instituto de Física Teórica Universidade Estadual Paulista, 2008. Disponível em: <<https://professores.ift.unesp.br/jg.pereira/ClassiFields.pdf>>

CAMACHO, Wilmer Yecid Córdoba. **Configurações de Vórtices em Supercondutores Multibandas Artificialmente Engenhariaados**. 2014.88 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, Recife, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/17488>>

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo – A - Funções Limite Derivação Integração** - 6ª Ed. Pearson Universidades. 2007.

GUIMARÃES, T. M. **Busca por Soluções do Tipo Vórtice em um Modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs**. 2015. 80 f. Dissertação de Mestrado em Física – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

HOFF DA SILVA, Julio Marny. **Soluções Tipo Vórtex em Teorias de Gauge Chern-Simons-Maxwell-Higgs**. 2005. v, 90 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Física Teórica, 2005. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/138351>>

JACKSON, John David. **Classical Electrodynamics/ John David Jackson** – 3 ed.

LEMO, N. A. **Mecânica Analítica**. 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

LUSTOSA, F. B. **Paredes de Domínio Geradas por Kinks Continuamente Deformáveis em Várias Dimensões**. 2011. 56 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Física)-Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/32120>>

MELO, T. R. N. B. **Defeitos Topológicos em Teorias Clássicas de Campos e suas Aplicações**, 2014. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso de Curso (Graduação em Física) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014. Disponível: ≤ <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/4194>>

PEREIRA, Carlisson Miller Cantanhede. **Vórtices em teorias de Campo com Violação da Invariância de Lorentz**. Carlisson Miller Cantanhede Pereira – 2012 87 p. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Física Universidade Federal do Maranhão.

SANTOS NETO, Álvaro Gomes dos. **Defeitos Topológicos em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação**. 2006. 86 f. Dissertação (Mestrado em Física)-Instituto de Física,

Universidade de Brasília, Brasília, 2006. Disponível em:
<<https://repositorio.unb.br/handle/10482/2109>>

SILVA, Alex da. **Vórtices em Sistemas Planares**. João Pessoa, 1996. 58 P. Dissertação de Mestrado em Física – Centro de Ciências Exatas e da Natureza - Universidade Federal da Paraíba.

SILVA, Greyson Januário Coelho. **Simetrias de Gauge, Teorias de Campos Efetivas e Curvas em Três Dimensões**. 2018. 99f. Dissertação (Mestrado em Física) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2018.

8 APÊNDICE

8.1 APÊNDICE A – CÁLCULO DO TENSOR ENERGIA-MOMENTO

Neste capítulo iremos mostrar como foi obtido o tensor energia-momento de um sistema a partir de uma densidade lagrangeana. Em teorias de campos a ação pode ser usada para determinar as equações de Euler-Lagrange por meio da variação em função dos campos ou a determinação do tensor energia-momento via variação em função da métrica do espaço.

Portanto, a ação para uma teoria de campo, pode ser escrita como:

$$S = \int d^n x \sqrt{g} \mathcal{L}_{campo}, \quad (8.1.1)$$

onde n é o número de dimensões do espaço e $d^n x \sqrt{g}$ é o elemento de volume do espaço-tempo. Podemos escrevendo a equação (8.1.1) em função da métrica do espaço, logo:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^n x \sqrt{g} \delta g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad (8.1.2)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a métrica no espaço de Minkowski. Considerando agora que a métrica do espaço $g^{\mu\nu}$ seja constante, logo temos que:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \int d^n x \sqrt{g} T_{\mu\nu}. \quad (8.1.3)$$

A equação (8.1.3) é a forma de calcular o tensor energia-momento para qualquer sistema. Vamos calcular o tensor energia-momento para o sistema descrito pela densidade lagrangeana de um campo escalar real ϕ e para o sistema de Maxwell-Higgs.

Primeiramente vamos calcular para o campo escalar real ϕ . Considere a seguinte densidade lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (8.1.4)$$

Escrevendo a Equação (8.1.4) em termo da métrica, temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi). \quad (8.1.5)$$

Esse sistema apresenta (1+1)-D, portanto, a ação tem a seguinte forma:

$$S = \int d^2x \sqrt{g} \mathcal{L}. \quad (8.1.6)$$

Variando a Equação (8.1.6) em função da métrica do espaço $g^{\mu\nu}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left[\int d^2x \sqrt{g} \mathcal{L} \right] \\ \Rightarrow \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= \int d^2x \left[\left(\frac{\delta \sqrt{g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \mathcal{L} + \sqrt{g} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \right], \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

onde

$$\frac{\delta \sqrt{g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -g_{\mu\nu} \sqrt{g}.$$

Logo, a Equação (8.1.7) resulta em:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int d^2x \sqrt{g} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right]. \quad (8.1.8)$$

Comparando as Equações (8.1.8) e (8.1.3), observamos que:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (8.1.9)$$

Para encontrar o tensor energia-momento vamos variar a densidade lagrangeana (8.1.5) em função da métrica, logo:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\gamma\beta}} &= \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta g^{\gamma\beta}} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\ \Rightarrow \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\gamma\beta}} &= \frac{1}{2} \left(\delta_\gamma^\mu \delta_\beta^\nu + \delta_\beta^\mu \delta_\gamma^\nu \right) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\gamma\beta}} = \partial_\gamma \phi \partial^\beta \phi. \quad (8.1.10)$$

Substituindo a Equação (8.1.10) na Equação (8.1.9), obtemos a seguinte expressão:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial^\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (8.1.11)$$

A Equação (8.1.11) é a forma explícita do tensor energia-momento para o sistema de um campo escalar real ϕ .

Agora vamos fazer o mesmo procedimento para calcular o tensor energia-momento para o sistema de Maxwell-Higgs. Considere a seguinte densidade lagrangeana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \overline{D_\mu \phi} D^\mu \phi - V(|\phi|^2). \quad (8.1.12)$$

Escrevendo em termo da métrica a Equação (8.1.12), obtemos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\lambda} F_{\alpha\lambda} F_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \overline{D_\mu \phi} D_\nu \phi - V. \quad (8.1.13)$$

Variando a densidade lagrangeana representada pela Equação (8.1.13) em função da métrica, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\gamma\beta}} &= -\frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta g^{\gamma\beta}} [g^{\mu\alpha} g^{\nu\lambda}] F_{\alpha\lambda} F_{\mu\nu} + \frac{\delta}{\delta g^{\gamma\beta}} [g^{\mu\nu}] \overline{D_\mu \phi} D_\nu \phi \\ \Rightarrow \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\gamma\beta}} &= -\frac{1}{4} \left[(\delta_\gamma^\mu \delta_\beta^\alpha + \delta_\beta^\mu \delta_\gamma^\alpha) g^{\nu\lambda} + g^{\mu\alpha} (\delta_\gamma^\nu \delta_\beta^\lambda + \delta_\beta^\nu \delta_\gamma^\lambda) \right] F_{\alpha\lambda} F_{\mu\nu} + \\ &\quad \left[\delta_\gamma^\mu \delta_\beta^\nu + \delta_\beta^\mu \delta_\gamma^\nu \right] \overline{D_\mu \phi} D_\nu \phi \\ \Rightarrow \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\gamma\beta}} &= F_{\gamma\nu} F_\beta^\nu + 2 \overline{D_\gamma \phi} D_\beta \phi. \end{aligned} \quad (8.1.14)$$

Substituindo a equação (8.1.14) na Equação (8.1.9), temos:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda} F_\nu^\lambda + 2 \overline{D_\mu \phi} D_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (8.1.15)$$

A Equação (8.1.19) é a forma explícita do tensor energia-momento para o sistema de Maxwell-Higgs.

8.2 APÊNDICE B – CÁLCULO DO TENSOR INTENSIDADE DO CAMPO DE GAUGE

Se o divergente do campo magnético \vec{B} é igual a zero, podemos reescrever esse campo como sendo o rotacional de outro campo, logo

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (8.2.1)$$

Vamos observar o comportamento do campo elétrico \vec{E} . Substituindo a Equação (8.2.1) na lei de Faraday, temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (8.2.2)$$

Observando a Equação (8.2.2), temos que $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}'$, mas $\vec{E}' = -\vec{\nabla} \phi$. Logo:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (8.2.3)$$

A Equação (8.2.3) calcula o campo elétrico em cada componente.

$$\begin{cases} E_x = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 \\ E_y = \partial_0 A_2 - \partial_2 A_0 \\ E_z = \partial_0 A_3 - \partial_3 A_0 \end{cases}$$

Vamos encontrar os valores para o campo \vec{B} , para isso vamos calcular o rotacional do campo \vec{A} , então:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \partial_j A_k$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \hat{e}_1(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) + \hat{e}_2(\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) + \hat{e}_3(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1). \quad (8.2.4)$$

Da Equação (8.2.4), podemos retirar as componentes do campo magnético \vec{B} , logo:

$$\begin{cases} \vec{B}_x = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \\ \vec{B}_y = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \\ \vec{B}_z = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \end{cases}$$

Além disso, sabemos que o tensor intensidade do campo é $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Representando matricialmente, temos:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (8.2.5)$$

Para determinar a energia do campo eletromagnético, temos:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= F_{00} F^{00} + F_{01} F^{01} + F_{02} F^{02} + F_{03} F^{03} + F_{10} F^{10} + F_{11} F^{11} + F_{12} F^{12} + F_{13} F^{13} \\ &\quad + F_{21} F^{21} + F_{22} F^{22} + F_{23} F^{23} + F_{31} F^{31} + F_{32} F^{32} + F_{33} F^{33}. \end{aligned}$$

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + E_x^2 + B_z^2 + B_y^2 + E_y^2 + B_z^2 + B_x^2 + E_z^2 + B_y^2 + B_x^2.$$

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2E^2 + 2B^2$$