



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - CCT
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

JOSÉ CARLOS DE MÉLO SILVA

**UM ESTUDO DA TEORIA MOND APLICADO ÀS
ANOMALIAS NA ROTAÇÃO DE GALÁXIAS ESPIRAIS**

CAMPINA GRANDE - PB
2020

JOSÉ CARLOS DE MÉLO SILVA

UM ESTUDO DA TEORIA MOND APLICADO ÀS ANOMALIAS NA
ROTAÇÃO DE GALÁXIAS ESPIRAIS

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação
em Licenciatura Plena em Física da
Universidade Estadual da Paraíba, em
cumprimento à exigência para obtenção
do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo
Spinelly da Silva

CAMPINA GRANDE - PB
2020

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586e Silva, José Carlos de Melo.
Um estudo da Teoria MOND aplicado às anomalias na rotação de galáxias espirais [manuscrito] / Jose Carlos de Melo Silva. - 2020.
25 p. : il. colorido.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2020.
"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva, Coordenação do Curso de Física - CCT."
1. Teoria Newtoniana Modificada. 2. Teoria MOND. 3. Matéria escura. 4. Galáxias. I. Título
21. ed. CDD 530

JOSÉ CARLOS DE MÉLO SILVA

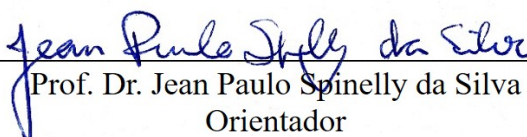
UM ESTUDO DA TEORIA MOND APLICADO ÀS
ANOMALIAS NA ROTAÇÃO DE GALÁXIAS ESPIRAIS

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação
em Licenciatura Plena em Física da
Universidade Estadual da Paraíba, em
cumprimento à exigência para obtenção
do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo
Spinelly da Silva

Aprovado em 04 de dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Orientador



Prof. Dr. Alex da Silva
Examinador



Prof. Dra. Morgana Lígia de Farias Freire
Examinadora

Dedico este trabalho à minha esposa Natália, pessoa que me inspira, me anima e que deposita em mim excelsa credibilidade. Pessoa esta que me ajuda a crescer, a prosseguir e que me faz sempre querer fazer o melhor de mim.

UM ESTUDO DA TEORIA MOND APLICADO ÀS ANOMALIAS NA ROTAÇÃO DE GALÁXIAS ESPIRAIS

José Carlos de Mélo Silva ¹

RESUMO

A teoria MOND é uma proposta que visa fazer uma alteração na segunda lei de Newton com o intuito de explicar anomalias observadas na rotação de galáxias há décadas. Tais anomalias não podem ser explicadas com a mecânica newtoniana convencional. Em virtude disso, surgiram, ao longo dos anos, algumas teorias para explicar estes fenômenos, dentre as quais se destaca a Teoria da Matéria Escura. A Teoria MOND, ao contrário da Matéria Escura, sugere que tais anomalias na rotação de galáxias trata-se apenas de mais um limite da física clássica, tal como a relatividade e a mecânica quântica. Sendo assim, Mordehai Milgrom, autor da teoria, faz uma alteração na segunda lei de Newton, adicionando um fator que corrige o problema. Optamos por fazer um estudo da Teoria MOND e aplicar esta teoria em algumas galáxias espirais e, ao comparar com os dados observacionais, percebemos que a MOND se adequa melhor que a Teoria Newtoniana para explicar as anomalias na rotação de galáxias.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria Newtoniana Modificada. Teoria MOND. Matéria Escura. Galáxias.

¹Graduando em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

A MOND THEORY STUDY APPLIED TO ANOMALIES IN ROTATION SPIRAL GALAXIES

José Carlos de Mélo Silva¹

ABSTRACT

The MOND theory is a proposal that aims to make a change in Newton's second law to explain anomalies observed in the rotation of galaxies for decades. Such anomalies cannot be explained with conventional Newtonian mechanics. As a result, some theories have emerged over the years to explain these phenomena, among which the Dark Matter Theory stands out. The MOND Theory, unlike Dark Matter, suggests that such anomalies in galaxy rotation are just one more limit of classical physics, such as relativity and quantum mechanics. Thus, Mordehai Milgrom, author of the theory, makes a change to Newton's second law by adding a correction factor that corrects the problem. We chose to do a study of MOND Theory and apply this theory to some spiral galaxies and by comparing it with observational data we find that MOND fits better than Newtonian Theory to explain galaxy rotation anomalies.

KEYWORDS: Modified Newtonian Theory. MOND Theory. Dark Matter. Galaxies.

¹Undergraduate Degree in Physics from the State University of Paraíba

Conteúdo

1	Introdução	7
2	Teoria MOND	8
3	Aplicação da Teoria MOND às galáxias espirais	11
3.1	Força gerada por uma esfera uniforme	13
3.2	Determinação da velocidade de rotação	15
4	Comparação dos resultados com os dados observacionais	18
5	Considerações Finais	21
	Referências	22

1 Introdução

No decorrer da história da ciência nós podemos perceber que existiram diversos personagens, com mentes formidáveis, que contribuíram para o desenvolvimento da sociedade. A ciência, então, conseguiu fornecer meios que viabilizaram a compreensão do mundo em nossa volta e o desenvolvimento de tecnologias que facilitaram a vida dos seres humanos. Esta mesma ciência, ao longo do tempo, englobou diversas teorias que apresentavam modelos de explicação dos fenômenos naturais que foram sendo estudados. Tais modelos acabavam sofrendo alterações ou sendo integralmente descartados. Isto ocorria quando uma teoria era apresentada por um cientista ou por um grupo de estudos de dois ou mais deles e, conseqüentemente, a teoria falhava em explicar problemas que não haviam sido previstos.

A Física, então, não é exceção em relação a tais acontecimentos, e, portanto, se enquadra em diversos casos como este. Por exemplo, a mecânica clássica, que é uma teoria da Física fundamentada nas Leis de Newton, apresenta algumas limitações. De fato, as leis dessa teoria não são válidas quando aplicada à problemas que envolvem velocidades extremamente grandes (velocidades próximas a da luz) e também se mostram falhas ao serem utilizadas para explicar fenômenos envolvendo espaços muito pequenos (de escalas atômicas). Na tentativa de resolver tais limitações, surgiram a Teoria da Relatividade Restrita e a Mecânica Quântica.

Além dessas, a Mecânica de Newton possui mais uma limitação: falha em explicar o comportamento da curva de rotação de galáxias. Então, no intuito de sanar essa dificuldade, o físico israelense Mordehai Milgrom (1981) propôs a Teoria da Dinâmica de Newton Modificada (MOND), na qual a segunda lei de Newton deve ser reescrita nas situações em que os corpos se movem com acelerações inferiores a uma aceleração crítica $a_0 \approx 10^{-8} \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$.

Nosso trabalho consiste em fazer uma análise da teoria MOND, onde testaremos a validade da teoria em algumas galáxias espirais. Para tanto, escolheremos a modificação

da segunda lei e, conseqüentemente, determinaremos a equação da velocidade, de modo que o resultado se adapte da melhor maneira às galáxias espirais. Feito isto, trataremos um gráfico da velocidade em função do raio galáctico e iremos comparar a curva de rotação da teoria com a dos dados observacionais.

2 Teoria MOND

Em 1933, ao observar uma galáxia, o astrofísico suíço Fritz Zwicky constatou que ela possuía mais massa do que se podia ver (STRAUMANN; ZÜRICH, 2012). Mas, foi em 1978 que o estudo da problemática ganhou mais força, quando Vera Rubin (1928-2019) observou que a velocidade da matéria nos arredores de galáxias se moviam com velocidade maior do que como era previsto pela Mecânica Newtoniana (BERTONE; HOOPER, 2016). Segundo a teoria, o comportamento da curva que representa a velocidade de rotação das galáxias em relação ao raio galáctico deveria apresentar um aumento progressivo na medida em que se distancia do centro da galáxia para a extremidade do disco e em certo ponto a velocidade deveria ir diminuindo. Segundo os dados observacionais a velocidade não diminui, mas permanece quase constante.

Atualmente, a teoria mais forte para explicar a anomalia da velocidade de rotação das galáxias é a proposta por Zwicky, que considera a existência de uma matéria não bariônica e de características ainda desconhecidas. O que se sabe é que ela não interage com a luz, mas percebe-se a sua existência devido aos campos gravitacionais gerados pela sua massa, o que explica o fato da velocidade da matéria nos arredores das galáxias ser superior àquela prevista pela dinâmica de Newton. Esta matéria ficou conhecida como matéria escura.

Já a Teoria MOND, conforme afirmamos, baseia-se numa modificação da segunda lei de Newton quando as acelerações envolvidas são muito baixas. Essa teoria desafia o conceito de matéria escura e, como veremos, oferece uma explicação para o problema da curva de rotação das galáxias.

Velten (2008) pontua formidavelmente algumas observações que fortalecem a ideia de que a MOND se sustenta como uma teoria válida para explicar a referida anomalia de galáxias. Ele explica que, para cada caso particular da natureza, existem modelos teóricos específicos que procuram explicar os fatos por trás deles. No caso particular das estruturas subatômicas, por exemplo, criamos modelos quânticos de teorias para tentar compreender os fenômenos. Já com estruturas que se movem com velocidades próximas a da luz, usamos a teoria da relatividade de Einstein. Como as galáxias se movem com velocidades consideravelmente altas, subtende-se que a relatividade sozinha possa explicar o movimento de rotação das galáxias. Entretanto, Velten (2008) afirma:

“A relatividade geral, que é a teoria padrão para a gravitação, não consegue explicar, sozinha, a velocidade com que crescem as aglomerações primordiais de matéria que resultam nas galáxias e aglomerados de galáxias que observamos hoje. Esta questão é resolvida quando admitimos a existência de matéria escura [...].”

Além disso, ele ainda demonstra o fator de Lorentz que representa o grau relativístico para uma galáxia do aglomerado de GOMA: ” *Para uma típica galáxia neste aglomerado com velocidade $v \approx 7000 \text{ km/s}$, o fator de Lorentz $\lambda = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ é da ordem de $\lambda \approx 0,9997$. Assim, a correção relativística é de apenas 0,03%.*”

Para explicar, então, a velocidade de rotação de galáxias que não se enquadraria na relatividade geral nem na restrita sem o auxílio da matéria escura, supõe-se a existência de um ponto crítico de baixas acelerações. Acredita-se que quando tratamos de sistemas que se movem com pequenas acelerações da ordem de grandeza de um a_0 , tal que $a_0 \approx 10^{-8} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$, é preciso fazer uma alteração na segunda lei de Newton, de modo que na equação seja inserido um fator $\mu(x)$.

As formas funcionais para a função $\mu(x)$ são discutidas em vários trabalhos (PERES, 2009). As mais usuais na literatura são:

$$\mu(x) = \frac{x}{1+x}, \quad (1)$$

$$\mu(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (2)$$

$$\mu(x) = \frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{1+4x}+1}, \quad (3)$$

e

$$\mu(x) = 1 - e^{-x}. \quad (4)$$

A Equação (1), a qual foi proposta por Milgrom (1983), é a forma mais simples e tem sido a mais utilizada. Já a equação 4, não é mais utilizada, apenas tem importância histórica (PERES, 2009). A Figura 1 apresenta o comportamento das formas usuais da função $\mu(x)$ encontradas na literatura. Na análise desses comportamentos, vemos que as funções $\mu(x)$ são dominadas pelos limites $\mu(x) \cong x$ para $x \ll 1$ e $\mu(x) \cong 1$ para $x \gg 1$.

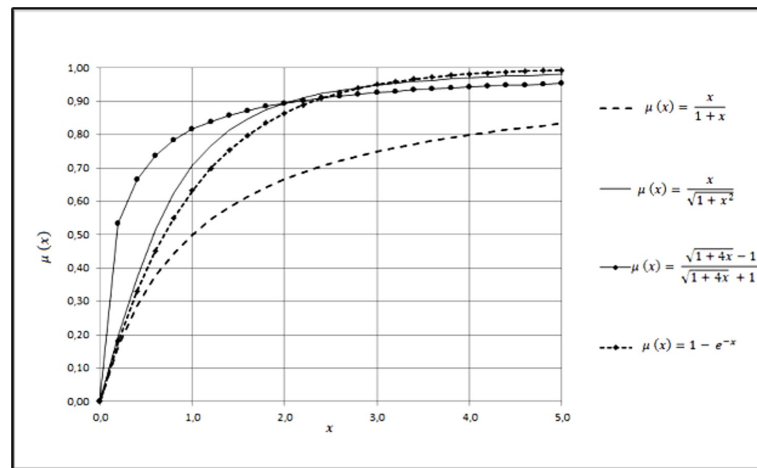


Figura 1: Formas da função $\mu(x)$ da Teoria MOND

Diante desses comportamentos e da necessidade de que a modificação, a ser feita na segunda lei de Newton, deva ser relevante nas situações em os corpos possuem acelerações da ordem de a_0 , a teoria MOND propõe que essa lei precisa ser reescrita por:

$$\vec{F} = m\mu(x)\vec{a}, \quad (5)$$

onde $x \equiv a/a_0$. Naturalmente, no caso em que $x \gg 1$, a MOND retorna à teoria clássica. Por outro lado, para qualquer forma de $\mu(x)$, na situação em que $x \ll 1$ a equação acima torna-se:

$$\vec{F} = m\frac{a}{a_0}\vec{a}. \quad (6)$$

3 Aplicação da Teoria MOND às galáxias espirais

Galáxias são aglomerados de estrelas, poeira e gás e com proporções extraordinariamente grandes girando em torno de um centro galáctico, que, segundo o LCO (2020), podem ter o valor do diâmetro medido entre 1000 parsecs e 100.000 parsecs. Portanto, podemos classificar as galáxias entre anãs, com até 10⁷ estrelas, e em gigantes, com 10¹² (LCO, 2020). Além disso, há outra classificação conhecida e que foi criada por Edwin Hubble, em que classificamos as galáxias entre: elípticas, espirais, espirais barradas e irregulares.

Galáxias espirais (ou galáxias espiraladas) são do tipo *S* e se caracterizam por serem galáxias de disco (juntamente com as espirais barradas) (NetNature 2020). Possuem braços em formato de espirais e componentes esferoidais como núcleo, halo e bojo [Ver fig. 2]. Segundo Nazzeha e Mohammed (2019), na galáxia NGC 3198, podemos observar

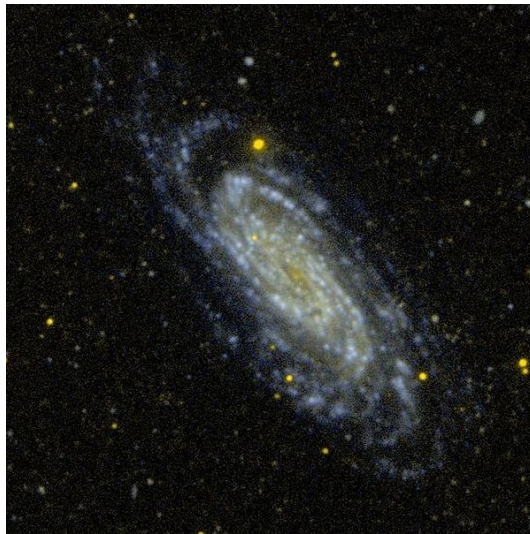


Figura 2: NGC 3198. Imagem: wikisky.com

comportamentos distintos em sua densidade, mais precisamente, em duas regiões distintas. A primeira região se estende desde o centro galáctico até uma distância R , e a segunda região vai desde R até a borda da galáxia. Arbitramos então que a densidade da primeira região seja ρ_1 e a da segunda seja ρ_2 . Ainda analisando Nazzeha e Mohammed (2019),

podemos perceber que na segunda encontramos uma densidade mais rarefeita, verificando que $\rho_1 > \rho_2$. Desse modo, na interface entre essas duas regiões da galáxia NGC 3198, em aproximadamente 4 kpc, que é o valor de R , começa a ocorrer o fenômeno em que a velocidade de rotação dos objetos permanece quase invariável. Esses aspectos podem ser vistos nas figuras 3 e 4.

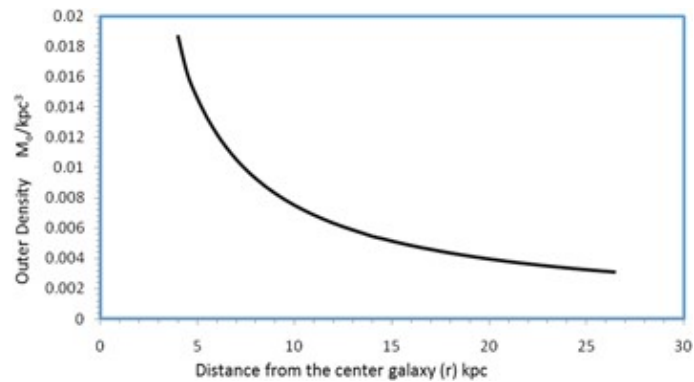


Figura 3: Comportamento da densidade da galáxia NGC 3198 como função da distância ao centro. Imagem: Nazzeha e Mohammed (2019)

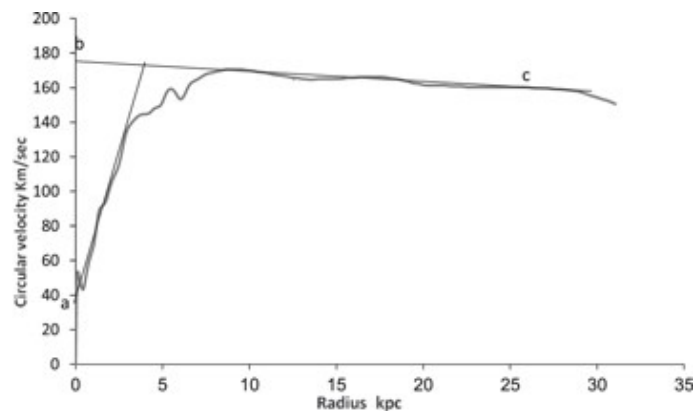


Figura 4: Comportamento da velocidade da galáxia NGC 3198 como função da distância ao centro. Imagem: Nazzeha e Mohammed (2019)

Nesta seção, utilizaremos a Teoria MOND para determinar a velocidade de rotação das galáxias. Basicamente, nossa tarefa será considerar um elemento que compõe a galáxia (uma estrela, por exemplo) como sendo uma partícula que está sujeito ao campo gravitacional, gerado pela galáxia, e encontrar a sua velocidade à partir da Teoria MOND¹.

¹Uma vez que as galáxias espirais possuem acelerações muito baixas, comparadas com a_0 ,

Para tanto, com o intuito de simplificar os cálculos, faremos uma aproximação onde assumiremos que toda a massa da galáxia, M , está contida numa esfera de raio R , isto é, que $\rho_1 = 3M/4\pi R^3$ e $\rho_2 = 0$. Além disso, admitiremos que a órbita da partícula é uma circunferência. Antes, porém, determinaremos a força gerada por uma distribuição esférica de densidade uniforme e raio R sobre uma partícula, quando essa se encontra na região interior ou exterior à esfera.

3.1 Força gerada por uma esfera uniforme

De acordo com a Teoria Newtoniana da Gravitação, a força gravitacional gerada por um corpo extenso sobre a partícula de massa m , localizada na posição \vec{r} , é

$$\vec{F}(\vec{r}) = -Gm \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' , \quad (7)$$

onde dv' é o elemento de volume na posição definida pelo vetor \vec{r}' de uma origem (arbitrária) até um ponto dentro da distribuição de massa [Ver fig. 5]

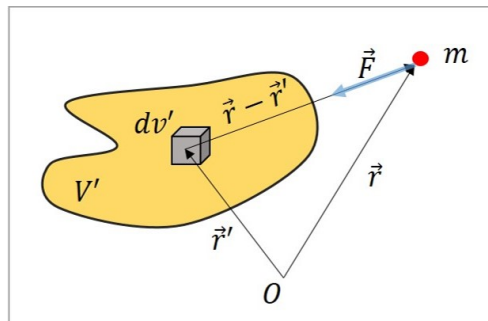


Figura 5: Força gravitacional infinitesimal, $d\vec{F}$, sobre uma partícula de massa m produzida pelo elemento de volume dv' .

No caso de uma esfera de massa M e raio R , com a massa distribuída uniformemente, devido a simetria, para efetuarmos a integração admitiremos que a origem está no centro da esfera e utilizaremos o sistema de coordenadas esféricas. Além do mais, por simplicidade, assumiremos que a partícula se encontra sobre o eixo z , a uma distância r da origem. [Ver fig. 6].

representaremos a Teoria MOND pela equação (6)

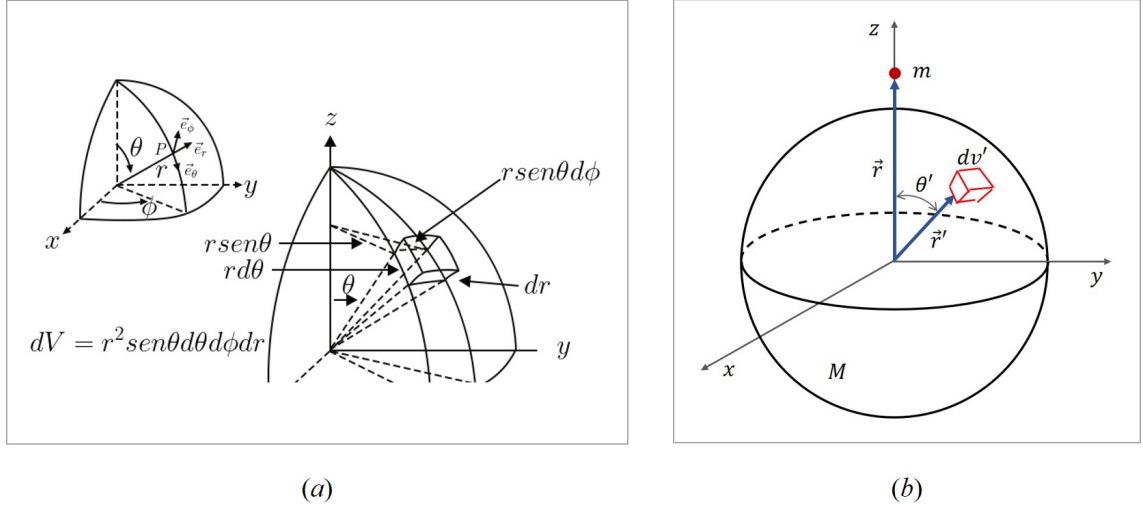


Figura 6: (a) Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , vetores unitários $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi) = (\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ e elemento de volume. (b) Uso de coordenadas esférica para determinar a força, gerada por uma esfera de massa M , sobre um partícula de massa m localizada ao longo do eixo z .

Fazendo isso, segue que:

$$\vec{r} = r\hat{z}, \quad \vec{r}' = r' \underbrace{(\text{sen}\theta' \cos\phi' \hat{x} + \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' \hat{y} + \cos\theta' \hat{z})}_{\hat{r}'} \quad \text{e} \quad dv' = r'^2 \text{sen}\theta' dr' d\theta' d\phi'. \quad (8)$$

Logo, substituindo as equações acima em (7) e usando o fato que a densidade é uniforme ($\rho = 3M/4\pi R^3$), obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) = & \frac{3GmM}{4\pi R^3} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{r'^3 \text{sen}^2\theta' \cos\phi'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta')^{3/2}} dr' d\theta' d\phi' \hat{x} \right. \\ & + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{r'^3 \text{sen}^2\theta' \text{sen}\phi'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta')^{3/2}} dr' d\theta' d\phi' \hat{y} \\ & \left. - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{r'^2 (r - r' \cos\theta') \text{sen}\theta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta')^{3/2}} dr' d\theta' d\phi' \hat{z} \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) = & -\frac{3GmM}{2R^3} \left\{ r \int_0^R r'^2 \left[\int_0^\pi \frac{\text{sen}\theta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta')^{3/2}} d\theta' \right] dr' \right. \\ & \left. - \int_0^R r'^3 \left[\int_0^\pi \frac{\cos\theta' \text{sen}\theta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta')^{3/2}} d\theta' \right] dr' \right\} \hat{z}, \quad (10) \end{aligned}$$

pois as duas primeiras integrais que aparecem em (9) são nulas.

Como sabemos:

$$\int_0^\pi \frac{\text{sen}\theta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta')^{3/2}} d\theta' = \begin{cases} 2/r(r^2 - r'^2), & r > r' \\ 2/r'(r'^2 - r^2), & r < r' \end{cases} \quad (11)$$

e

$$\int_0^\pi \frac{\cos\theta'\text{sen}\theta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta')^{3/2}} d\theta' = \begin{cases} 2r'/r^2(r^2 - r'^2), & r > r' \\ 2r/r'^2(r'^2 - r^2), & r < r' \end{cases} \quad (12)$$

Logo, substituindo estas relações em (10) e, em seguida, integrando o resultado na variável r' , vemos que no exterior da esfera ($r > R > r'$) a força sobre a partícula é:

$$\vec{F}_{ext}(\vec{r}) = -\frac{GmM}{r^2}\hat{z} \Rightarrow \vec{F}_{ext}(\vec{r}) = -GmM\frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (13)$$

No interior ($r < R$), vamos separar a esfera em duas regiões: $r < r'$ e $r > r'$. Isto significa que dividiremos a integral da variável r' da equação (10), que vai de 0 até R , em dois intervalos: $(0, r)$ e (r, R) . Fazendo isso, utilizando (11) e (12), e realizando a integração na variável r' , vemos que, estando a partícula no interior, a força sobre ela é:

$$\vec{F}_{int}(\vec{r}) = -\frac{GmMr}{R^3}\hat{z} \Rightarrow \vec{F}_{int}(\vec{r}) = -\frac{GmM}{R^3}\vec{r}. \quad (14)$$

3.2 Determinação da velocidade de rotação

De acordo com os resultados obtidos na seção anterior, a força sobre uma partícula de massa m , que se encontra na região interior ($r < R$) ou exterior ($r > R$) da esfera, é dada por (13) ou (14).

Uma vez que essa força é central, o momento angular da partícula, com relação ao eixo que passa pelo centro de força (origem), é constante. Esse aspecto garante que a partícula nunca poderá adquirir qualquer componente de velocidade fora do plano em que ela se move inicialmente. Dito de outra forma, como a força que atua sobre a partícula se dirige para origem, o seu movimento acontecerá sempre num plano. Como consequência, é mais conveniente utilizarmos a coordenadas polares r e θ para descrevermos o movimento².

²Em coordenadas polares, os vetores posição, velocidade e aceleração são dados, respectivamente por $\vec{r} = r\hat{r}$, $v = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ e $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$.

Fazendo isso, temos

$$\vec{F} = -F(r) \hat{r} , \quad (15)$$

onde

$$F(r) = \frac{GmMr}{R^3}, \quad r < R \quad \text{e} \quad F(r) = \frac{GmM}{r^2}, \quad r \geq R , \quad (16)$$

e a segunda lei de Newton modificada [Eq. (6)] toma a forma

$$-F(r) \hat{r} = \frac{m}{a_0} \left[\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right)^2 + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right)^2 \right]^{1/2} \left[\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right) \hat{\theta} \right] . \quad (17)$$

Daí, segue que:

$$-F(r) = \frac{m}{a_0} \left[\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right)^2 + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right)^2 \right]^{1/2} \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \quad (18)$$

e

$$0 = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} . \quad (19)$$

Ao resolvermos as equações acima, encontraremos a órbita descrita pela partícula m . Porém, como vemos, obter a solução desse sistema de equações diferenciais, onde as variáveis r e θ aparecem acopladas, não é uma tarefa simples. Por conta disso, analisaremos, tanto na regiões interior quanto na exterior, apenas a situação particular na qual a órbita é circular ($\dot{r} = \ddot{r} = 0$).

Assumindo, então, esse movimento específico, a equações (18) e (19) tornam-se³

$$\frac{mr^2\dot{\theta}^4}{a_0} = F(r) \quad (20)$$

e

$$\ddot{\theta} = 0 . \quad (21)$$

³O resultado dado por (21) diz que $\dot{\theta}$ (velocidade angular) é constante. Temos então que o movimento além de circular é uniforme.

Como consequência, usando o fato que, em coordenadas polares, o módulo da velocidade da partícula que descreve um movimento circular é $v = r\dot{\theta}$, podemos escrever, a partir da equação (20),

$$v = \left[\frac{a_0 r^2}{m} F(r) \right]^{1/4}. \quad (22)$$

Finalmente, de posse desse resultado e utilizando a equação (16), encontramos:

$$v_{int} = \left(\frac{GMa_0}{R^3} \right)^{1/4} r^{3/4}, \quad r < R \quad \text{e} \quad v_{ext} = (GMa_0)^{1/4}, \quad r \geq R. \quad (23)$$

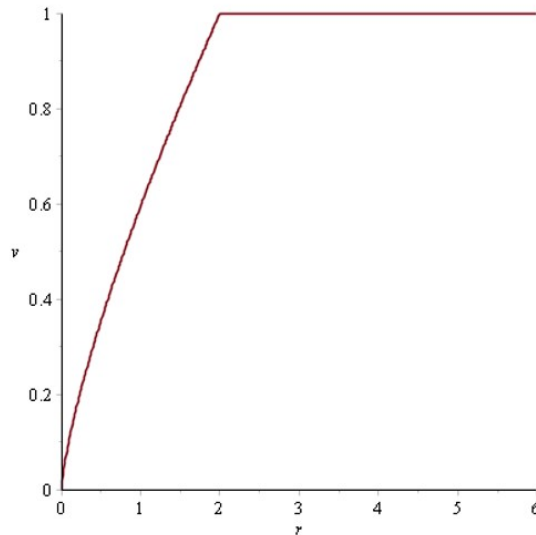


Figura 7: Gráfico da velocidade em função da distância, prevista pela Teoria MOND, onde consideramos $GMa_0 = 1$ e $R = 2$.

Já que na nossa descrição, a partícula de massa m representa um elemento da galáxia, podemos afirmar, conforme a figura 7, que no interior ($r < R$) a sua velocidade da galáxia aumenta com a distância ao centro. Na verdade, tal velocidade cresce proporcionalmente com essa distância elevada a $3/4$. Por outro lado, na região exterior ($r > R$), uma vez que G , M e a_0 são constantes, essa velocidade não depende dessa distância, o que caracteriza, portanto, o comportamento assintótico plano para curva de rotação de galáxias (VELTEN, 2008).

Poderíamos efetuar o cálculo da velocidade de uma órbita circular utilizando a segunda lei de Newton na forma usual. Porém, caso o fizéssemos, obteríamos

$$v_{int}^N = \left(\frac{GM}{R^3}\right)^{1/2} r, \quad r < R \quad \text{e} \quad v_{ext}^N = \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2}, \quad r \geq R. \quad (24)$$

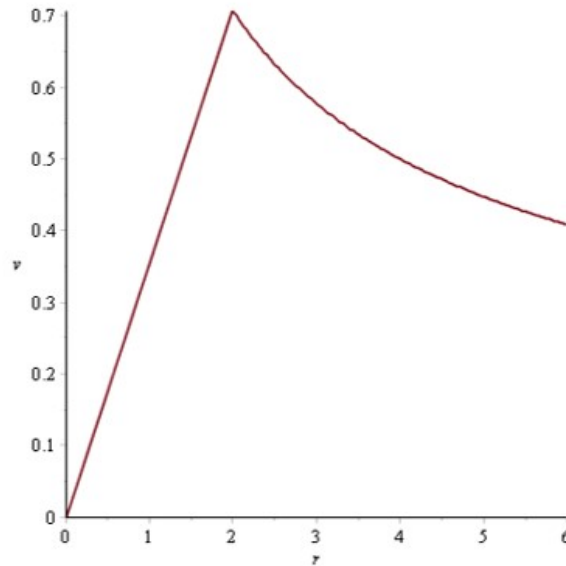


Figura 8: Gráfico da velocidade em função da distância, prevista pela Teoria Newtoniana, onde consideramos $GM_0 = 1$ e $R = 2$.

De acordo com a figura 8, na região interior a velocidade aumenta linearmente com a distância ao centro. Já no exterior, a velocidade diminui com a distância.

Diante do que expusemos aqui, concluímos que Teoria MOND é mais adequada que a Newtoniana para descrever este tipo de situação, pois, como veremos na próxima seção, suas previsões são as que mais se aproximam dos dados observacionais.

4 Comparação dos resultados com os dados observacionais

Para analisarmos a curva de rotação das galáxias, aplicamos as expressões obtidas para as velocidades, em função da posição r , e comparamos com os dados observacionais.

Na obtenção dos dados observacionais das galáxias apresentadas a seguir, ou seja, dos dados de velocidade e do raio, utilizamos dados de observatórios como também empregamos o uso de um software de digitalização, quando não foi possível a aquisição de dados através destes observatórios.

Para a galáxia NGC 3109, apresentamos os dados de velocidades obtidos segundo a teoria MOND e os dados observacionais graficamente através da Figura 9. A galáxia NGC 3109 trata-se de uma galáxia espiral barrada (SBm) localizada na direção da constelação de Hydra. Esta foi descoberta em 26 de março de 1835 por John Herschel. Esses resultados indicaram que as velocidades de fato dependem do tipo das galáxias. Mesmo sendo uma espiral a galáxia NGC 3109 trata de uma espiral barrada.

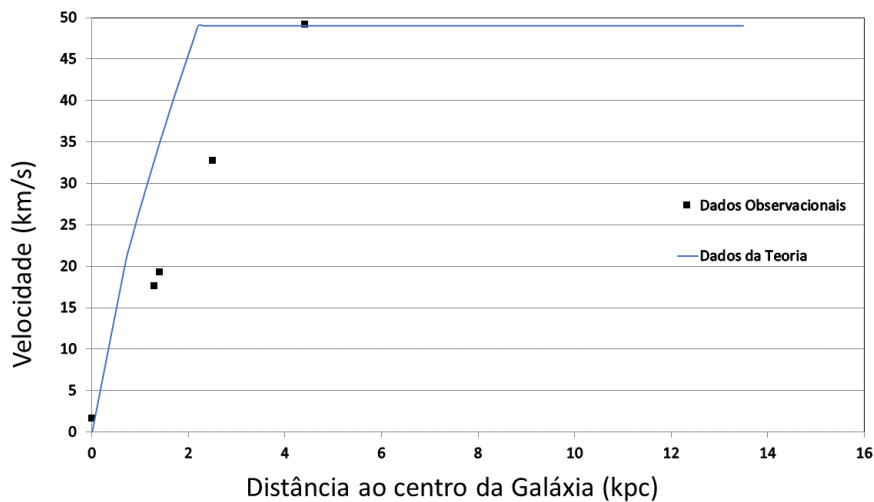


Figura 9: Gráfico de comparação dos dados observacionais com os dados obtidos com a teoria MOND para a Galáxia NGC 3109. Temos a velocidade (km.s^{-1}) em função da distância ao centro (kpc), com $R \cong 2,13$ kpc, $M = 7,35.10^{38}$ kg e $a_0 = 1,2.10^{-10}$ m.s^{-2} .

Para a galáxia NGC 3198, apresentamos os dados de velocidades obtidos segundo a teoria MOND (linha azul) e os dados observacionais (pontilhado) graficamente através da Figura 10. Apesar de nos determos a uma aproximação simplificada da teoria MOND, com uma distribuição circular uniforme de massa, esta apresenta uma melhor descrição qualitativa da curva de rotação com relação à teoria de Newton (VELTEN, 2008). A

galáxia NGC 3198 trata-se de uma galáxia espiral barrada (SBc) localizada na direção da constelação de Ursa Major. Foi descoberta em 15 de Janeiro de 1788 por William Herschel.

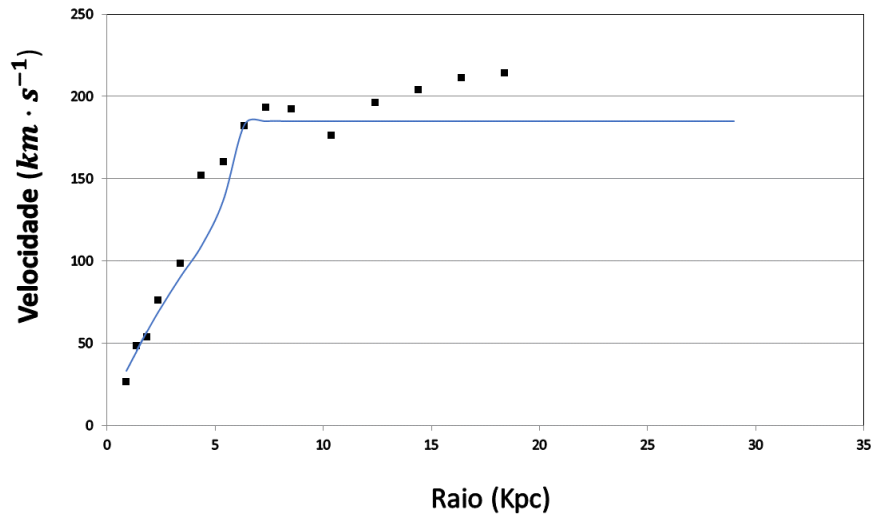


Figura 10: Gráfico de comparação dos dados observacionais com os dados obtidos com a MOND para a Galáxia NCG 3109. Temos a velocidade ($\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$) em função da distância ao centro (kpc), com $R \cong 6,8$ kpc, $M = 4,34\cdot 10^{43}$ kg e $a_0 = 1,2\cdot 10^{-10}$ $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

A relação entre força e aceleração não se trata mais de uma relação linear, como no caso Newtoniano. No entanto, o campo gravitacional pode, ainda, ser obtido a partir do potencial gravitacional (VELTEN, 2008). Deve-se ressaltar que o modelo de galáxia utilizado neste trabalho trata apenas de uma aproximação, que constitui numa configuração esfericamente simétrica (VELTEN, 2008). As galáxias na realidade apresentam morfologias bem distintas, conforme a classificação de Hubble (WHITMORE, 1990; VELTEN, 2008; BINNEY e TREMAINE, 2013). De forma geral, no entanto, apesar da aproximação da configuração utilizada, temos que a teoria MOND apresenta uma melhor descrição para a curva de rotação do que a teoria newtoniana.

5 Considerações Finais

A MOND apresenta uma melhor aproximação que a teoria newtoniana para a problemática estudada. Como um modelo simplificado para o problema da curva de velocidade de rotação das galáxias, essa teoria prevê um comportamento que concorda de forma razoável com os dados observacionais. Já a teoria newtoniana falha principalmente na região exterior a galáxia.

A teoria, embora com diferenças com relação aos dados observacionais, foi testada em vários estudos de diversos sistemas e demonstrou seu sucesso. Contudo, mesmo se postulando a existência da matéria escura, este é um tema aberto.

Portanto, o estudo de acelerações generalizadas por meio da teoria MOND, pela própria natureza da função $\mu(x)$, conduzirá a uma menor massa observada. Por isso, para trabalhos futuros pretende-se conhecer melhor as interações, sem a necessidade de matéria escura, através das determinações das Lagrangeanas, sem uso de aproximações, como foi o caso aqui.

Referências

BERTONE, G.; HOPPER, D.; GRAPA. A History of Dark Matter. Disponível em: arXiv:1605.04909v2 [astro-ph.CO] 24 May 2016. Acesso em 28/05/2019.

BOSMA, A. The Distribution and Kinematics of Neutral Hydrogen in Spiral Galaxies of Various Morphological Types, PhD Dissertation, University of Groningen, The Netherlands, 1978.

DISNEY, M. The Hidden Universe, (New York: Macmillan Publishing company) p.145, 1984.

LCO - Las Cumbres Observatory, Classificação de Galáxias. “Galaxy Classification — Las Cumbres Observatory (lco.global)” Acesso em 24/11/2020.

MILGROM, M. A. Modification of the Newtonian Dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *Astrophysical Journal*, 270, 365, 1983.

MILGROM, M. MOND-A Pedagogical Review, *Acta Physica Polonica*, v. 32, n. 3613, 2001.

NAZZEHA A. D., MOHAMMED K. Z. - Density and Mass Distribution of Spiral Galaxy NGC 3198, *The astrophysical journal*, Vol 870, No 2, 2019.

NETNATURE - Tipos de Galáxias. “TIPOS DE GALÁXIAS. — (wordpress.com)” Acesso em 24/11/2020.

OLIVEIRA, J. D. B. de Limite gravitacional pós-newtoniano da teoria TeVeS de Bekenstein. Dissertação de Mestrado. Pós-graduação em Física, Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.

PERES, C. B. A matéria escura no centro dos aglomerados de galáxias: MOND e neutrinos. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.

RUBIN, V. C. et al. Rotation velocities of 16 Sa galaxies and a comparison of Sa, Sb, and Sc rotation properties, *Astrophysical Journal*, 289 81, 1985.

RUBIN, V. C., THONNARD N., FORD Jr W. K., *ApJ*, 238, 471, 1980.

SAMPAIO, R.V., FRACALOSSO, R.; OLIVEIRA A. M. Análise newtoniana de um sistema mecânico com uma força dependente da velocidade e a existência de condições para a conservação de energia. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 36, n. 1, 1301, 2014.

SAMPAIO, R.V.; FRACALOSSO, R.; OLIVEIRA A. M. Trajetórias limitadas num sistema com uma força dependente da velocidade. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 33, n. 1, 1306, 2011.

SANDERS, R. H. Neutrinos as cluster dark matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 380, p.331-338, 2007.

SANDERS, R. H.; NOORDERMEER, E. Confrontation of MOND with the rotation curves of early-type disc galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 379, p.702-710, 2007.

SANDOVAL, E. Lopez. Static universe: infinite, eternal and self-sustainable. arXiv preprint arXiv:0807, 2008.

STRAUMANN, N. Fritz Zwitcky: An extraordinary Astrophysicist. University of Zürich, 24 de novembro de 2012.

VELTEN, H. E. S. MOND: uma alternativa à mecânica newtoniana. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 30, n. 3, 3314, 2008.

AGRADECIMENTOS

À minha família que me ajudou de todas as maneiras possíveis na trajetória deste curso com insumos para conseguir aquilo que almejei.

À Professora Dra. Morgana Lígia de Farias Freire pela orientação nos trabalhos de iniciação científica que gerou o embasamento para a conclusão desta fase.

Ao Professor Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva por toda orientação, paciência e atenção para a conclusão deste trabalho.