



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

**LARISSA FERNANDA TAVARES DOS SANTOS**

**DEFEITO TOPOLÓGICO TIPO KINK EM TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS**

**CAMPINA GRANDE  
2020**

LARISSA FERNANDA TAVARES DOS SANTOS

**DEFEITO TOPOLÓGICO TIPO KINK EM TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Graduada em Física.

**Área de concentração:** Defeitos Topológicos.

**Orientador:** Prof. Dr. Alex da Silva.

**CAMPINA GRANDE  
2020**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S237d Santos, Larissa Fernanda Tavares dos.  
Defeito topológico tipo Kink em Teoria Clássica de Campos [manuscrito] / Larissa Fernanda Tavares dos Santos. - 2020.  
48 p. : il. colorido.  
Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.  
"Orientação : Prof. Dr. Alex da Silva, Coordenação do Curso de Física - CCT."  
1. Defeito topológico. 2. Quebra Espontânea de Simetria.  
3. Teoria clássica de campos. 4. Formalismo Lagrangeano. I.  
Título

21. ed. CDD 514

LARISSA FERNANDA TAVARES DOS SANTOS

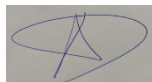
DEFEITO TOPOLÓGICO TIPO KINK EM TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Graduada em Física.

Área de concentração: Defeitos Topológicos.

Aprovada em: 09 de Dezembro de 2020.

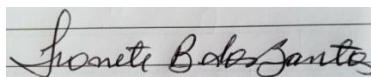
**BANCA EXAMINADORA**



Prof. Dr. Alex da Silva (Orientador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dra. Morgana Ligia de Farias Freire  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Profa. Dra. Ivonete Batista dos Santos  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

A Deus, por ter me sustentado durante as dificuldades enfrentadas, DEDICO.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, dono de todo conhecimento, por me permitir ser capaz.

Aos meus pais, por todo o apoio que sempre me deram em todos os aspectos e por serem grandes incentivadores nos estudos durante toda minha vida.

Ao meu orientador Alex da Silva, pela oportunidade em todos os projetos de pesquisa, pelos conhecimentos que me proporcionou e sua disposição em ajudar e orientar.

Aos professores do Curso de Licenciatura em Física da UEPB, em especial, Ruth, Aline Simões e Deusalete. E professores de outros departamentos, como Paula Castro e Castor.

Ao CNPq, pelo patrocínio dos projetos de pesquisa que participei, incluindo a pesquisa relacionada a este trabalho.

Aos meus amigos, que contribuíram para minha formação, em especial, Joseane, Elizandra, Bruna e João Batista (Pafutes).

Ao meu companheiro Luís por me apoiar e está do meu lado durante todos os momentos.

Por fim, aquelas pessoas que participaram dessa jornada e contribuíram de forma direta e indireta, e em especial, aquelas que torceram contra esse fim de uma etapa da realização de um sonho, elas foram fundamentais para que durante essa caminhada eu pudesse dar o melhor de mim.

## RESUMO

Este trabalho trata de forma abreviada sobre o estudo de defeito topológico tipo kink. Esses defeitos surgem a partir de uma teoria clássica do campo escalar real. É sabido que o campo escalar real é um dos mais simples encontrados na natureza, sua dinâmica e interações são governadas a partir de uma teoria de campos relativística. Para mostrar de forma clara o estudo desse defeito topológico, inicialmente será abordada a construção da teoria clássica de campos no formalismo lagrangeano. Mostraremos também o fenômeno da quebra espontânea de simetria, fenômeno esse que gera massa para as partículas elementares. Será abordado também o método de Bogomol'nyi, método esse que possibilita escrever a energia da configuração de campo numa forma quadrática, fechada e mínima. E por fim discutiremos como obter o defeito topológico tipo kink e suas aplicações em física de partículas, principalmente, em física da matéria condensada, nos fenômenos de transição de fase, ferromagnetismo, superfluidez e supercondutividade.

**Palavras-Chave:** Defeito Topológico. Quebra Espontânea de Simetria. Método de Bogomol'nyi.

## ABSTRACT

This work deals in an abbreviated form on the study of kink type topological defect. These defects arise from a classical theory of the real scalar field. It is known that the real scalar field is one of the simplest found in nature, its dynamics and interactions are governed from a theory of relativistic fields. In order to clearly show the study of this topological defect, the construction of the classical field theory in Lagrangian formalisms will initially be addressed. We will also show the phenomenon of spontaneous symmetry breaking, a phenomenon that generates mass for elementary particles. The Bogomol'nyi method will also be addressed, a method that makes it possible to write the energy of the field configuration in a quadratic, closed and minimal form. Finally, we will discuss how to obtain the kink-type topological defect and its applications in particle physics, mainly in condensed matter physics, in phase transition phenomena, ferromagnetism, superfluidity and superconductivity.

**Keywords:** Topological defect. Spontaneous Symmetry Breaking. Bogomol'nyi method.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Gráficos da variação do pontencial da teoria $\phi^4$ .....	21
Figura 2 – Quebra de simetria na teoria $\phi^4$ .....	22
Figura 3 – Potencial com estado de vácuo degenerado .....	23
Figura 4 – Potencial .....	35
Figura 5 – Defeito topológico tipo Kink.....	37
Figura 6 – Defeito topológico tipo Antikink .....	37
Figura 7 – Largura do defeito .....	38
Figura 8 – Kink de baixa energia.....	39
Figura 9 – Kink de alta energia.....	40

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	9
2	O FORMALISMO LAGRANGEANO PARA UMA TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS CLÁSSICOS.....	11
2.1	Teoria de Campos no Formalismo de Klein-Gordon.....	13
2.2	O campo Escalar Real.....	15
2.3	O campo Escalar Complexo.....	18
3.	O FENÔMENO DA QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA.....	20
3.1	A Quebra Espontânea de Simetria para o Campo Escalar Real.....	20
3.2	A Quebra Espontânea de Simetria para o Campo Escalar Complexo.....	22
3.3	A Quebra Espontânea de Simetria e o Mecanismo de Higgs.....	24
4.	DEFEITOS TOPOLÓGICOS EM TEORIA DE CAMPOS.....	27
4.1	Defeito Topológico tipo Vórtices.....	27
4.2	Carga Topológica .....	30
5	DEFEITO TOPOLÓGICO TIPO KINK E APLICAÇÕES .....	32
5.1	O método Usual .....	32
5.2	O método de Bogomol'nyi.....	33
5.3	Aplicação .....	35
5.4	Energia do Kink .....	38
6.	METODOLOGIA .....	41
7.	RESULTADOS E DISCUSSÕES .....	42
8.	CONCLUSÃO .....	43
	REFERÊNCIAS .....	45

## 1. INTRODUÇÃO

Campo escalar real é o mais simples encontrado na natureza, sua dinâmica e interações são governadas a partir de uma teoria de campos relativística (GOMES, 2002). Um fato na teoria do campo escalar real para o desenvolvimento de uma física de partícula e campos, é no que diz respeito a exibição do fenômeno da quebra espontânea de simetria (COLEMAN, 1985). Esse fenômeno é de grande relevância na física pois o mesmo faz surgir massa para as partículas elementares e unifica as interações, descrevendo a presença de estrutura topológica do universo (VILENKI, 1994).

Os defeitos topológicos que será estudado nesse trabalho, são soluções clássicas das equações de movimento para o campo escalar real, que apresentam um comportamento não trivial (ALMEIDA, 2004) e surgem em modelos que suportam o fenômeno da quebra espontânea de simetria. Essas soluções topológicas são soluções de configurações de campos clássicos estáticos para as equações de movimento (INÁCIO, 2003). O comportamento dessas soluções topológicas, estão associadas a maneira como os campos vão para o infinito, ou seja, a sua forma assintótica, elas aparecem em alguns sistemas físicos que são descritos por potenciais que apresentam certas características específicas tais como, a presença de uma carga conservada. Para garantir que essas soluções possuam energia finita e exibam o fenômeno da quebra espontânea de simetria, deve-se exigir que esses potenciais possuam mais de um mínimo e que sejam limitados inferiormente. Essas duas condições sobre o potencial – ser limitado inferiormente e possuir mais de um mínimo – faz com que as equações de movimento para o campo escalar real seja necessariamente não-linear (SILVA, 1996). A presença de estrutura topológica em teorias de campos é garantida a partir da imersão de uma corrente topológica conservada, que não é a corrente de Noether (Peter, 2006), pois sua forma depende das dimensões do espaço-tempo do modelo estudado (BAZEIA, 2004).

Diferentes tipos de defeitos topológicos surgem, de acordo com o tipo de simetria que o potencial apresenta. Por exemplo, a quebra espontânea de simetria discreta gera defeito tipo *kink* em  $(1+1)D$  e o defeito tipo *domain wall* (parede de domínio) em  $(3+1)D$ . Quando se tem uma simetria contínua há o surgimento de defeitos conhecidos por *vórtices* num espaço de  $(2+1)D$  e esse defeito tipo *vórtices* em  $(3+1)D$  geram as *cordas*.

É preciso enfatizar que as soluções das equações de movimento que representam defeitos do tipo parede de domínio e cordas não possuem energia finita, mas são soluções com energia finita, por unidade de área. Ao contrário das soluções tipo paredes de domínio, o estudo dos sólitons (ondas viajantes que interagem fortemente, não mudam de forma e conservam energia) tipo kink possui bastante interesse na física, por apresentar propriedade topológica que produz soluções estáveis com energia finita. Esses sólitons tipo kink são soluções das equações de movimento que surgem de uma teoria de campo escalar real não-linear. O estudo de soluções não-lineares tipo sólitons, tem proporcionado nos últimos anos um grande avanço na ciência. Evidentemente isto está relacionado ao fato de que a maioria dos fenômenos físicos, químicos (EPSTEIN, 1998) e processos biológicos (BRITTON, 1986) e (MURRAY, 1993) surgem de sistemas não-lineares. O problema dos sistemas não-lineares são encontrar suas soluções pois são bastantes complicadas. Vários métodos tem sido desenvolvidos com o propósito de encontrar esse tipo de solução. Nesse trabalho, farar-se-á uso de um método bastante conhecido e muito útil na obtenção desse tipo de solução conhecido como método de Bogomol'nyi. Esse método foi desenvolvido na década de 70 com o propósito de encontrar soluções para equações de movimento de segunda ordem, a partir das equações de primeira ordem para uma configuração de campos estática. O objetivo principal desse método consiste em escrever a energia da configuração de campo estático numa forma fechada, quadrática e mínima.

Portanto nosso desafio é mostrar que é possível obter essas soluções solitônicas tipo defeito para os sistemas não-lineares, gerada a partir de uma teoria do campo escalar real, utilizando o método de Bogomol'nyi.

Ao longo deste trabalho, utilizamos o sistema natural de unidades com  $\hbar=c=1$ , onde  $\hbar=h/2\pi$ , sendo  $h$  a constante de Planck e  $c$  a velocidade da luz no vácuo. A métrica utilizada é (+ - - -).

## 2. O FORMALISMO LAGRANGEANO PARA UMA TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS CLÁSSICOS

Partículas são indivisíveis sendo assim as menores divisões de matéria de um composto elementar, podem ser localizadas em diversos pontos finitos do espaço em qualquer dimensão. Sendo assim, para estudarmos a variação de movimento de uma partícula em um sistema mecânico, em que ela é livre para realizar infinitos movimentos em seu ponto de localização, podemos analisá-la através do formalismo lagrangeano que nos dar a possibilidade de estudar movimentos com velocidades elevadas, uma vez não esteja numa posição específica no espaço.

A mecânica Lagrangeana é fundamentada em um formalismo mais simples e geral, se comparado a outros. Isso faz com que ela seja capaz de descrever alguns fenômenos de baixas velocidades como também fenômenos de velocidades relativísticas, o que vai diferir cada caso, será a função Lagrangeana a ser utilizada para cada caso específico.

Em geral um campo pode ser compreendido como uma entidade que possui inúmeras fases de autonomia, tendo um valor específico para cada posição no espaço e tempo. Sendo que a equação de Euler-Lagrange chega a possuir algumas propriedades de simetria, podendo se torna variante de acordo com alguns grupos de transformações das coordenadas de campos, e ainda haver uma determinada quantidade conservativa dado a partir do teorema de Noether que afirma “*Para cada simetria da ação, existe uma equação de continuidade para um conjunto de correntes próprias*” (BERTIN, 2015). De modo que se sua invariância seja dependente das translações de espaço e tempo, sua energia e o momento se tornam quantidades conservativas. Diante disso, podemos obter o tensor de energia-momento que é utilizado para analisar a energia da configuração do campo em consideração.

Em análise de teoria de campos a situação tende a ser equivalente, e se faz necessário demonstrar como uma teoria de campos pode ser formulada em uma linguagem da mecânica lagrangeana, a qual será nosso ponto de partida para os estudos que se seguem na investigação de defeitos topológicos (MELO, 2012).

Seja um campo  $\varphi(x, t)$  onde pode ser entendido como uma entidade que possui infinitos graus de liberdade. Sabendo que a dinâmica de um sistema contínuo descrito por um campo é regida por uma função  $\mathcal{L}$  denominada densidade lagrangeana. Em

que  $\mathcal{L}$  pode depender, no caso reduzido de uma dimensão espacial, do próprio campo  $\varphi$ , da coordenada  $x$ , do tempo  $t$ , e das derivadas espaciais e temporais,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}, x, t\right) \quad (2.1)$$

Em que se integrarmos a função  $\mathcal{L}$  sobre todo o espaço, resulta em uma nova função em  $L$ , assim chamada de lagrangeana do sistema.

$$L = \int dx \mathcal{L}. \quad (2.2)$$

Para encontrarmos as equações de movimento para o campo, usamos o princípio variacional de Hamilton, o qual afirma que a quantidade denominada ação  $S$ , dada por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (2.3)$$

Logo, a Equação (2.3) é uma função estacionária em relação a trajetória descrita pelo sistema, ou ainda,

$$\delta S = 0. \quad (2.4)$$

Substituindo a Equação (2.3) nessa variação teremos:

$$S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \mathcal{L}\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}, x, t\right) = 0. \quad (2.5)$$

Integrando a função acima por partes, estabelecendo que as variações de campos se anulem nos extremos dos intervalos espaciais e temporais teremos então;

$$\delta\varphi(x, t_1) = \delta\varphi(x, t_2) = \delta\varphi(x_1, t) = \delta\varphi(x_2, t) = 0 \quad (2.6)$$

temos ainda,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\varphi}{\partial t})} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\varphi}{\partial x})} \right) \right\} \delta\varphi = 0. \quad (2.7)$$

Ainda pela arbitrariedade de  $\delta\varphi$ , implica que essa equação só é satisfeita se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.8)$$

A Equação (2.8) é conhecida como a equação de Euler-Lagrange para o campo  $\varphi(x, t)$ , obtida apenas para o campo no caso de uma dimensão espacial. Podendo ser generalizado para um sistema de N campos  $\varphi_a$ , onde  $a = (1, \dots, N)$  assumindo assim três dimensões espaciais da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \varphi_a}{\partial t} \right)} \right) + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} = 0. \quad (2.9)$$

Fazendo  $x^0 = t$  na equação (2.9) podemos reescrevê-la em uma notação relativisticamente covariante, resultando assim

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} = 0, \quad (2.10)$$

válida em todos os sistemas de referenciais inerciais.

## 2.1. Teoria de Campos no Formalismo de Klein-Gordon

Teoria de campo relativística é possível ainda analisar a variação de movimento, a partir de outras equações que descrevem movimento de uma partícula, conhecida como equações de Klein-Gordon. A densidade lagrangeana de Klein-Gordon que descreve a dinâmica do campo escalar real  $\phi$  pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (2.11)$$

A maneira como a lagrangeana da Equação (2.11) está escrita é conhecida como forma covariante e é um escalar de Lorentz, sendo assim ela é válida em todos

os referencias inerciais. O primeiro termo de  $\mathcal{L}$  é chamado de termo cinético, e análogo à energia cinética da mecânica de partículas usual. O segundo termo é o potencial  $V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2$  que identifica o modelo a ser estudado.

A equação de movimento para o campo  $\phi$ , possui a seguinte forma, a partir da Equação (2.10) temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \left[ \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \delta_\nu^\mu \partial_\lambda \phi + \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \partial_\lambda \phi \delta_\nu^\mu \right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \quad (2.12)$$

e,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \quad (2.13)$$

Substituindo as Equações (2.12) e (2.13) na Equação (2.10), teremos:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad (2.14)$$

A Equação (2.14) é denominada equação de movimento de Klein-Gordon possuindo uma grande importância para teoria de campos.

A partir dessa expressão, podemos calcular a massa do campo, avaliando no ponto  $\phi_0$  que minimiza o potencial como sendo:

$$massa = \left. \frac{d^2 V(\phi)}{dx^2} \right|_{\phi=\phi_0} \quad (2.15)$$

Sendo o potencial de Klein-Gordon

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2. \quad (2.16)$$

Que derivando produz:



$$\frac{dV(\phi)}{dx} = m^2 \phi. \quad (2.17)$$

Derivando novamente observamos que

$$\frac{d^2V(\phi)}{dx^2} = m^2. \quad (2.18)$$

Então identificando,

$$massa = m^2. \quad (2.19)$$

A teoria quântica de campos afirma que a equação de Klein-Gordon descreve mésons escalares, que são partículas de massa  $m^2$  sem spin.

## 2.2. O campo Escalar Real

O campo escalar real é o mais simples encontrado na natureza possuindo uma simetria discreta. Para estudar sua dinâmica partiremos também da densidade lagrangeana  $\mathcal{L}$  em que o campo escalar real, é uma função  $\phi = \phi(x^\mu)$  com suas derivadas  $\partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$ , com uma ação dada por:

$$S = \int d^{D+1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.20)$$

onde  $D$  é a dimensão do espaço.

Observe que a integração será executada em todo espaço-tempo. Partiremos do princípio do estudo da equação de mínima ação, cuja equação é dada por:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}. \quad (2.21)$$

Podemos usar o Teorema de Noether, para que assim possamos fazer uma transformação infinitesimal nas coordenadas de campo, do tipo  $x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}$  e obter uma quantidade conservada, já que o campo é invariante por translação devido homogeneidade do espaço-tempo. Essa quantidade é chamada de Tensor energia-momento.

E pode possuir a seguinte forma:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \partial^{\nu}\phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.22)$$

Teremos então que  $\partial_{\nu} T^{\mu\nu} = 0$ . Logo poderemos afirmar que o Tensor energia momento é simétrico independente da variação de seu coeficiente, ou seja  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ .

Logo, a densidade lagrangeana para este modelo é descrita na Equação (2.20), onde  $\frac{m^2}{2}\phi^2$  é igual o pontencial  $V(\phi)$  do modelo a ser estudado. Substituindo  $V(\phi)$  no lugar de  $\frac{m^2}{2}\phi^2$ , teremos a seguinte equação:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu}\phi \partial^{\mu}\phi - V(\phi) \quad (2.23)$$

onde  $V(\phi)$  é a função energia potencial do campo escalar  $\phi$ . A densidade lagrangeana acima é uma invariante de Lorentz, quadrática em suas derivadas e real.

Utilizando a Equação (2.21) e o modelo usual dado pela Equação (2.23), obtemos a equação do movimento do sistema:

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu}\phi + V_{\phi} = 0. \quad (2.24)$$

Em que:  $V_{\phi} = \frac{dV}{d\phi}$ .

O Tensor energia-momento para o sistema a partir das Equações (2.22), e (2.24) é dada por:

$$T^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\phi \partial^{\nu}\phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.25)$$

Sendo  $T^{00}$  uma componente de densidade de energia da solução, temos então:

$$T^{00} = \rho = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi). \quad (2.26)$$

Em que cada termo da Equação (2.26) descreve uma contribuição para densidade de energia:

$$\rho_C = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \quad \rho_G = \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \quad \text{e} \quad \rho_P = V(\phi). \quad (2.27)$$

Que são classificadas como densidades de energia cinética, gradiente e potencial. Por outro lado, as componentes arbitrárias  $T^{0i}$  representa o fluxo de energia que percorre na direção  $i$ , e  $T^{i0}$  é a densidade de momento na componente  $i$ . Em que ambas correspondem ao mesmo valor, ou seja:

$$T^{0i} = T^{i0} = - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}. \quad (2.28)$$

Agora as outras componentes  $T^{ij}$ , descreve o fluxo da densidade de momento  $i$  em direção a componente  $j$ . Note que igualando as componentes  $i = j$  temos a pressão:

$$T^{ii} = \rho^i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \quad (2.29)$$

que é a direção normal em.

Já no caso de  $i \neq j$  teremos um deslocamento de tensão em planos diferentes, mantendo assim seu volume constante, podendo ser escrita:

$$\mathbf{T}^{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}. \quad (2.30)$$

Escrevendo então a conservação do tensor energia-momento,  $\partial_\nu \mathbf{T}^{\mu\nu} = 0$ , em componentes teremos:

$$\partial_0 \mathbf{T}^{\mu 0} \partial_i \mathbf{T}^{\mu i} = 0. \quad (2.31)$$

E com isso, obtemos um conjunto D+1 equações de continuidade, identificando assim  $\mathbf{T}^{\mu 0}$  como densidade e  $\mathbf{T}^{\mu i}$  como fluxo. Em três dimensões espaciais teremos então:

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \oint_S d^2x \hat{n} \cdot \vec{j} \quad (2.32)$$

onde  $\hat{n}$  é o vetor normal a superfície S que determina o volume V. Integrando a Equação (2.32), obteremos uma quantidade conservada sendo  $Q \equiv \int d^3x \mathbf{T}^{\mu 0}$ . Observe que quando  $\nu = 0$  identificamos uma quantidade conservada, que nada mais é do que a energia do sistema, e assim teremos uma conservação de momento tal qual  $\mu = j$ , com  $j$  variando entre 1, 2 e 3.

### 2.3. O campo Escalar Complexo

Diferentemente do campo escalar real, o campo escalar complexo possui uma simetria contínua de gauge(calibre) global. Para ver isso melhor considere a densidade lagrangeana abaixo, que descreve a dinâmica do campo escalar complexo como sendo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - V(|\varphi|) \quad (2.33)$$

onde  $V(|\varphi|)$  é o potencial que identifica a teoria sendo uma função polinomial em  $|\varphi|^2 = (\bar{\varphi}\varphi)$ .

Vamos escolher  $V(|\varphi|)$  como sendo:

$$V(|\varphi|) = \frac{1}{2}\lambda^2(|\varphi|^2 - a^2)^2. \quad (2.34)$$

Podemos notar que essa teoria é invariante, frente a transformação de gauge global  $U(1)$ ,  $\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\Lambda}\varphi$ , onde  $\Lambda$  é uma constante arbitrária. O estado fundamental minimizando o potencial, logo:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2\lambda^2(\bar{\varphi}\varphi - a^2)\bar{\varphi} = 2\lambda^2(\bar{\varphi}\varphi)\bar{\varphi} - \frac{\mu^2}{4}\bar{\varphi}. \quad (2.35)$$

Note que  $\mu^2 > 0$ , o mínimo do potencial vai para,  $\bar{\varphi} = \varphi = 0$ , não ocorrendo o fenômeno da quebra espontânea de simetria (QES). Agora se  $\mu^2 < 0$  existe um ponto de máximo em que  $\varphi = 0$  e um ponto de mínimo em que  $\bar{\varphi} = a$ . Sendo assim, o estado de mais baixa energia (vácuo) torna-se infinitamente degenerado.

### 3. O FENÔMENO DA QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA

O fenômeno de Quebra Espontânea de Simetria teve início por volta 1960, quando Nambu (NAMBU, 1960) e Goldstone (GOLDSTONE, 1961) perceberam a importância deste fenômeno na física. Higgs em 1964 (Higgs, 1964) mostrou que as consequências da quebra espontânea de simetria em teorias de gauge é totalmente diferente das teorias que não apresentam simetria de gauge. A seguir mostraremos alguns exemplos da quebra espontânea de simetria.

#### 3.1. A Quebra Espontânea de Simetria para o Campo Escalar Real

Observe que para configurações de campos estáticos podemos escrever a energia do sistema, a partir da Hamiltoniana, como sendo:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}. \quad (3.1)$$

Considerando a teoria do campo escalar real dada pela Equação (2.23), está conjunto a Equação (3.1) podemos escrever a densidade de energia  $\varepsilon$ , do sistema como sendo:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + V(\phi), \quad (3.2)$$

onde a Equação (3.2) está escrita num espaço de (1+1)D. Se pararmos para analisar, notamos que  $\phi$  é constante quando  $\phi_0$  está em seu estado mais baixo de energia. Vamos considerar o potencial  $V(\phi)$  do modelo  $\phi^4$ , que possui uma simetria discreta  $\phi = -\phi$ , que nesse caso possui a seguinte forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2, \quad (3.3)$$

onde  $\lambda$  é uma constante de acoplamento, e:

$$a^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda^2}, \quad (3.4)$$

que identifica o setor de vácuo da teoria.

Note que a Equação (3.3) pode ainda ser escrita como:

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{2} \phi^4 + \frac{\mu^2}{2\lambda^2} \quad (3.5)$$

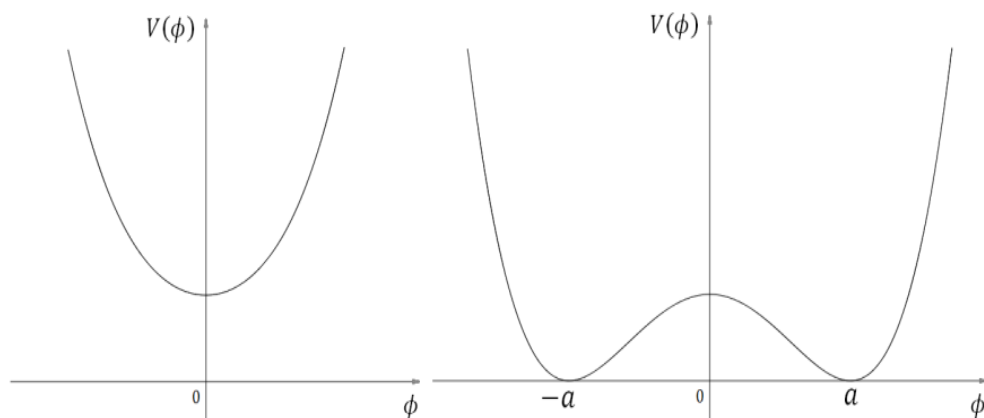
onde desprezamos o termo constante, que não possui nenhuma contribuição significativa para teoria. Para o caso livre a constante de acoplamento  $\lambda = 0$ . Agora se  $\mu^2 > 0$ , o estado de vácuo é  $\phi_0 = 0$ . Então, para este caso não teremos uma QES, e a massa do campo  $\phi$  é calculada de modo semelhante ao campo de Klein-Gordon, logo  $m = \mu$ .

Para exibir a QES, vamos considerar  $\mu^2 < 0$ . Então minimizando o potencial teremos o estado de mais baixa energia como sendo,

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 2\lambda^2(\phi^2 - a^2)\phi = 0, \quad (3.6)$$

Nesse caso o sistema apresenta dois estados de mínima energia representado por  $\phi = \pm a$ , e um ponto máximo que se encontra em  $\phi = 0$ , ver os gráficos da Figura

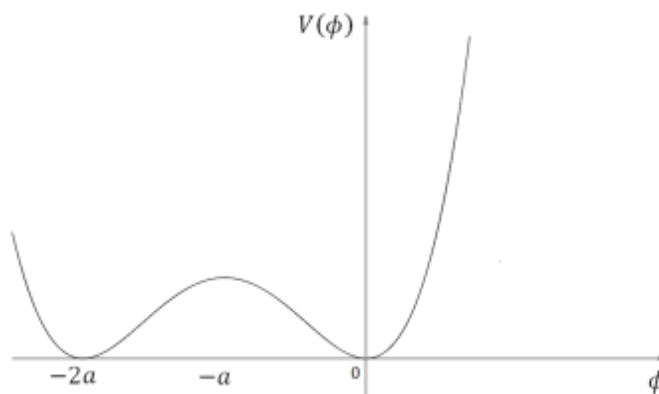
**Figura 1** – Gráficos da variação do potencial da teoria  $\phi^4$ .



Fonte: MELO, 2014, p. 14.

A esquerda temos  $\mu^2 > 0$ , com apenas um mínimo. Já a direita com  $\mu^2 < 0$  temos dois estados de vácuo nos pontos de  $\pm a$ . E a partir do instante que escolhermos o estado de vácuo para teoria, observamos que a simetria  $\phi \rightarrow -\phi$  foi espontaneamente quebrada.

**Figura 2** – Quebra de simetria na teoria  $\phi^4$ .



Fonte: MELO, 2014, p. 14.

Para ver isso melhor, vamos escolher o estado de vácuo do sistema  $\phi_0 = a$ . Se fizermos um deslocamento no campo, como sendo  $\phi' = \phi - a$ , podemos escrever o potencial como sendo:

$$V(\phi') = \frac{1}{2}\lambda^2[(\phi' - a)^2 - a^2]^2 = \frac{1}{2}\lambda^4\phi'^4 + 2\lambda^2 a\phi'^3 + 2\lambda^2 a^2\phi'^2. \quad (3.7)$$

Da expressão acima Equação (3.7) para o potencial  $V(\phi')$ , vemos que o novo campo  $\phi'$ , apresenta uma massa positiva dada por  $m^2 = 4\lambda^2 a^2$ . Percebemos então, que após o processo de quebra de espontânea de simetria representado pelo segundo termo, obtemos um campo escalar real massivo. Esse campo massivo descreve bósons escalares que são, partículas neutras de spin zero. Bósons escalares não massivos são chamados de bósons de Goldstone, que não existe na natureza.

### 3.2. A Quebra Espontânea de Simetria para o Campo Escalar Complexo

Já vimos que para o campo escalar complexo a densidade lagrangeana é dada por



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - V(|\varphi|) \quad (3.8)$$

onde  $\bar{\varphi}$  é complexo conjugado de  $\varphi$  e  $V(|\varphi|)$  é uma função polinomial em  $|\varphi| = \bar{\varphi}\varphi$ . Sendo  $V(|\varphi|)$  dado por:

$$V(|\varphi|) = \frac{1}{2} \lambda^2 (|\varphi|^2 - a^2)^2. \quad (3.9)$$

Com isso a densidade lagrangeana produz:

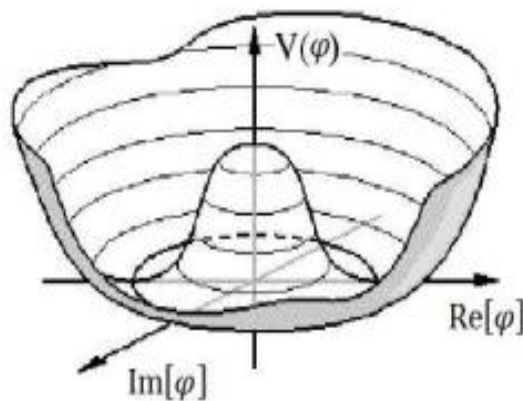
$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} \lambda^2 (|\varphi|^2 - a^2)^2. \quad (3.10)$$

Que é invariante frente a uma transformação de gauge global do grupo  $U(1)$ ,  $\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\Lambda} \varphi$ . Onde  $\Lambda$  é uma constante arbitrária. Novamente o estado fundamental é obtido minimizando o potencial:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \lambda^2 (\bar{\varphi}\varphi - a^2) \bar{\varphi} = \lambda^2 (\bar{\varphi}\varphi) \bar{\varphi} - \frac{\mu^2}{2} \bar{\varphi}. \quad (3.11)$$

Então, quando  $\mu^2 > 0$ , o mínimo do potencial ocorre quando  $\bar{\varphi} = \varphi = 0$ , não ocorrendo QES. Agora se  $\mu^2 < 0$ , existe um ponto local de máximo para  $\varphi = 0$  havendo vários pontos de mínimos no círculo  $|\varphi| = a$ . Tendo assim um círculo de estado de mais baixa energia degenerado como mostra a Figura 3.

**Figura 3** – Potencial com estado de vácuo degenerado.



Fonte: MELO, 2014, p. 14.

Vamos analisar a física presente nesse sistema nas vizinhanças de um estado de vácuo, se  $\varphi_0 = a$  e  $\Lambda = 0$ . Podemos escrever  $\varphi$  ainda como:

$$\varphi = a + \frac{\phi + i\chi}{\sqrt{2}}. \quad (3.12)$$

Se  $\varphi_0 = \chi_0 = 0$  e substituindo a Equação (3.5) na Equação (3.3), teremos então:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - 2\lambda^2 a^2 \phi^2 - \sqrt{2}\lambda^2 a \phi(\phi^2 + \chi^2) - \frac{\mu^4}{4}(\phi^2 + \chi^2)^2. \quad (3.13)$$

Observando a Equação (3.13) percebemos que o campo  $\phi$  possui uma massa dada por  $m_\phi^2 = 4\lambda^2 a^2$  e o campo  $\chi$ , não possui massa, podendo representar os bósons de Goldstone. Com isso, a lagrangeana descrita acima na Equação (3.13) não é mais invariante frente a uma transformação de gauge global U(1), devido ter ocorrido uma QES. Com isso, foi obtido um caso particular de um resultado geral: que consiste na quebra espontânea em uma simetria contínua surgindo bósons escalares sem massa. Resultando assim no Teorema de Goldstone (GOLDSTONE, 1961).

### 3.3. A Quebra Espontânea de Simetria e o Mecanismo de Higgs

O mecanismo de Higgs é um processo que gera espontaneamente massa para os campos de gauge. Mostraremos como acontece a QES a partir de uma densidade de lagrangeana que acopla o campo complexo  $\varphi$ , minimamente com um campo vetorial  $A_\mu$ , chamado de campo de gauge.

Para ver isso melhor, considere o campo vetorial de gauge  $A_\mu$ , cuja dinâmica é governada a partir da seguinte densidade de lagrangeana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{D_\mu \varphi} D^\mu \varphi - \mu \overline{\varphi} \varphi - \lambda(\overline{\varphi} \varphi)^2 \quad (3.14)$$

onde  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  é a derivada covariante e  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor intensidade do campo de gauge. Observe que a Equação (3.8) é invariante frente as transformações de gauge local:

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\Lambda(x)}\varphi \quad (3.15)$$

$$\bar{\varphi} \rightarrow \bar{\varphi}' = e^{i\Lambda(x)}\bar{\varphi} \quad (3.16)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x). \quad (3.17)$$

Vamos estudar o caso específico em que há uma QES, isto é  $\lambda > 0$  e  $\mu^2 < 0$ . Já vimos anteriormente que essa teoria apresenta círculos de estados fundamentais infinitamente degenerados. Com isso vamos analisar o comportamento dessa teoria na vizinhança de um estado de vácuo específico.

$$\varphi_0 = a = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \quad (3.18)$$

$$\varphi(x) = a + \frac{\phi + i\chi}{\sqrt{2}}. \quad (3.19)$$

Substituindo a Equação (3.18) na Equação (3.14) temos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{e^2a^2}{4}A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - 4\lambda^2\phi^2 - eaA_\mu\partial^\mu\chi + \dots \quad (3.20)$$

Observe que o segundo termo da Equação (3.20) é proporcional a  $A_\mu^2$ , então isso significa que o campo vetorial  $A_\mu$  que descreve a propagação do campo de gauge contém massa. Sendo  $\phi$  o campo escalar também é massivo, entretanto o campo  $\chi$  não contém massa como mostra na equação. Sendo assim, podemos então eliminar o campo  $\chi$  da teoria redefinindo o campo de gauge, ou seja:

$$\frac{e^2a^2}{4}A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - eaA_\mu\partial^\mu\chi = \frac{e^2a^2}{4}\left[A_\mu - \frac{1}{ea}\partial^\mu\chi\right]^2. \quad (3.21)$$

Assim podemos então definir um novo campo como sendo:

$$B_\mu = A_\mu - \frac{1}{ea} \partial^\mu \chi. \quad (3.22)$$

E ainda podemos reescrever a Equação (3.14) da seguinte forma:

$$\frac{e^2 a^2}{4} A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - ea A_\mu \partial^\mu \chi = \frac{e^2 a^2}{2} B_\mu B^\mu. \quad (3.23)$$

Logo, o tensor de intensidade do campo de gauge produz:

$$M_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (3.24)$$

Substituindo as Equações (3.16) e (3.17) na Equação (3.13):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} + \frac{e^2 a^2}{2} B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - 4\lambda^2 \phi^2 + \dots \quad (3.25)$$

E com isso observamos que o campo que representava o bóson de Goldstone foi eliminado da teoria.

Um resultado importante nessa teoria é que durante esse processo, os números de graus de liberdade são preservados, ou seja, os campos originais  $B_\mu$  e  $\phi$  possuem o mesmo número de degraos de liberdade que  $A_\mu$  e  $\phi$  (SILVA, 1996). Por fim, deduzimos então que a QES de gauge, resulta na verdade não na presença de um bóson de Goldstone, mas sim em seu desaparecimento, concedendo assim um campo de gauge massivo.

## 4. DEFEITOS TOPOLÓGICOS EM TEORIA DE CAMPOS

Defeitos topológicos podem ser entendido como uma região de transição entre dois possíveis estados de um sistema que possua o mesmo valor de energia mínima. Podemos imaginar o exemplo de uma borboleta que possua duas cores, conseguindo assim associar para cada cor um possível estado, e em meio a essas duas cores haverá um ponto homogêneo em que essas cores irão se misturar, o qual chamaremos de região de conflito, que na verdade não seria possível explicar qual cor possa estar ali, assim nessa faixa de transição terá um custo energético, e este custo é justamente chamado de defeito topológico.

Durante as últimas décadas os defeitos topológicos foram objetos importantíssimos de estudos, porque abrange diversas áreas da física. Defeitos topológicos podem ser encontrados em cosmologia, onde surgiram na fase de universo primordial (KIBBLE, 1976), em matéria condensada (WALGRAEF, 1997) para especificar interfases em materiais, citando exemplos como espumas e crescimentos de grãos, etc. Esses defeitos também podem ser usados para explicações de fenômenos de transições de fases em vários outros tipos de sistemas, como por exemplo transições polimórficas nos sólidos, a ebulição dos líquidos e a aparição de ferromagnetismo e ferroeletricidade.

Em teorias de campos defeitos topológicos são soluções das equações de movimento para as quais é possível introduzir uma corrente conservada, cuja carga topológica é diferente de zero. Essa corrente conservada não é a de Noether e sim uma que depende das propriedades assintótica dos campos, ou seja, da topologia do espaço. A carga gerada por essa corrente, conhecida como carga topológica tem valor não nulo e depende das propriedades topológicas das configurações dos campos.

### 4.1. Defeito Topológico tipo Vórtices

Nas últimas décadas, o estudo dos vórtices tem chamado a atenção dos físicos da matéria condensada, e de partículas elementares. Isto se deve ao fato de que em 1957 Abrikosov (ABRIKOSOV, 1957) mostrou a possibilidade da existência de soluções localizadas do tipo vórtices, para teoria macroscópica da supercondutividade

na presença de um campo magnético externo (SILVA, 1996). Seguindo este trabalho pioneiro, a existência desses defeitos topológicos tem sido verificado experimentalmente, e muitos de suas propriedades foram investigadas.

Podemos caracterizar os vórtices por uma densidade de energia localizada, uma correspondente de massa finita e uma carga topológica.

O estudo dos vórtices é realizado a partir de uma teoria de campos clássica, onde também nesse caso a topologia é introduzida no sistema via a presença de uma corrente conservada do tipo:

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda, \quad (4.1)$$

onde  $A_\lambda$  é o campo de gauge.

Para identificar os vórtices, vamos considerar a seguinte densidade lagrangeana para o modelo do campo de Higgs

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \overline{D_\mu \varphi} D^\mu \varphi - \frac{1}{4} \lambda^2 (|\varphi|^2 - a^2)^2. \quad (4.2)$$

A Equação (4.2) apresenta invariância de gauge local de um campo escalar  $\varphi$  compartilhado com o campo de gauge  $A_\mu$ . Logo, as equações de movimento para o campo de gauge será:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = J_\mu = -ie(\overline{\varphi} \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \overline{\varphi}) + e^2 A_\mu |\varphi|^2, \quad (4.3)$$

e para o campo  $\varphi$

$$D_\mu D^\mu \varphi = -\lambda^2 \varphi (|\varphi|^2 - a^2). \quad (4.4)$$

Note que para os vórtices o fluxo do campo magnético  $B = F_{12}$  pode ser escrito como:

$$\Phi = \int B da = \oint_c A_i(x) dx^i. \quad (4.5)$$

Ainda podemos escrever o campo de Higgs na forma polar como sendo  $\varphi = |\varphi|e^{i\chi}$ , ainda o substituir na Equação (4.2), então escrevemos  $A_\mu$ :

$$A_\mu = \frac{1}{e^2} \frac{J_\mu}{|\varphi|^2} - \frac{1}{e} \partial_\mu \chi. \quad (4.6)$$

Fazendo  $J_\mu$  ao longo do contorno de  $C$ , e substituindo na Equação (4.6) em termos das componentes, obtemos:

$$\Phi = \int dx dy F_{12} = \oint_c dx^i A_i = -\frac{1}{e} \oint_c dx^i \partial_i \chi. \quad (4.7)$$

Exigindo que  $\varphi$  tenha um único valor sobre a fase, isso implica que  $\chi$  varie entre  $2\pi n$  ( $n$ = número inteiro) para cada volta completa em volta da superfície fechada. Podemos ainda escrever:

$$\Phi = -\frac{1}{e} [\chi(2\pi) - \chi(0)] = \frac{2\pi}{e} n \quad n = (0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots). \quad (4.8)$$

A Equação (4.8) acima nos mostra que o fluxo magnético ele será quantizado. Na verdade, esse fluxo magnético que foi quantizado é justamente a carga topológica dos vórtices. O ponto de vácuo relacionado a essa teoria é dada a partir da condição:

$$|\varphi| = a.$$

Assim observamos que existe um círculo de vácuo degenerado no plano complexo  $\varphi$  parametrizado pela fase  $\chi$ . Suponhamos que o círculo  $C$  está no plano cartesiano de  $(x,y)$ , e sua fase em  $\chi(x,y) = \chi(\theta)$  se movendo em torno do círculo  $C$ . Portanto a fase polar  $\chi(\theta)$  nos proporciona um mapeamento de um círculo no plano cartesiano  $(x,y)$ , para um círculo no espaço interno do campo complexo  $\varphi$ . Sendo  $n$  o número inteiro, representando o número de voltas que a fase do campo complexo  $\varphi$  realiza, correspondendo a uma única volta de  $2\pi$ , no plano cartesiano.

## 4.2. Carga Topológica

A Carga Topológica surge a partir da topologia do sistema em que é possível introduzir uma corrente conservada  $J^\mu$  para uma teoria de campo escalar clássica. Essa carga topológica não possui natureza elétrica e sim é gerada a partir da introdução da topologia no sistema. Vale salientar que a topologia é introduzida no sistema a partir de uma corrente topológica conservada  $J^\mu$ , que não tem nada a ver com a corrente de Nothers. Essa corrente no espaço relativístico de  $(1 + 1)$  D é construída como sendo:

$$J^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (4.9)$$

onde  $\epsilon^{\mu\nu}$  é o símbolo de Levi-Civita, o qual tem o número de índices igual ao número de dimensões do espaço em que a teoria está sendo estudada. Nesse caso específico,  $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$  e  $\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$ .

Observe que a corrente  $J^\mu$  obedece a equação de continuidade:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (4.10)$$

pois,

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0 \quad (4.11)$$

tendo em vista que  $\epsilon^{\mu\nu}$  anti-simétrico e  $\partial_\mu \partial_\nu$  é simétrico (INÁCIO, 2003).



Este tipo de conservação precede a dinâmica, se tratando de algo ainda mais fundamental (ALDROVANDI e PEREIRA, 2008). Da Equação (4.10), podemos calcular carga topológica conservada  $Q_T$ , dada por:

$$\begin{aligned} Q_T &= \int_{-\infty}^{\infty} dx J^0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \end{aligned}$$

$$Q_T = \phi(+\infty) - \phi(-\infty). \quad (4.12)$$

Note que,

$$\frac{dQ_T}{dt} = \dot{\phi}|_{+\infty} - \dot{\phi}|_{-\infty} = 0. \quad (4.13)$$

A carga  $Q_T$  só depende das propriedades assintóticas do campo  $\phi$ , e só terá valor diferente de zero quando  $\phi(+\infty)$  for diferente de  $\phi(-\infty)$ . Portanto, isso só vai ocorrer quando o potencial apresentar mais de um mínimo. Naturalmente, para soluções constantes  $Q_T$  é nula pois  $\phi(+\infty) = \phi(-\infty)$ . Então soluções constantes que minimizam a energia e que, portanto, identificam ainda o setor de carga topológica nula.

Por outro lado, é interessante procurar soluções que não sejam constantes, e que possibilitem a presença da carga topológica diferente de zero. Mas para que soluções desse tipo possuam energia finita é necessário que o campo tenha um comportamento assintótico, ou seja que ele nos leve aos mínimos do potencial. Assim só teremos  $\phi(+\infty)$  diferente de  $\phi(-\infty)$  se o potencial possuir mais de um mínimo. Isto porque se o potencial possuir um único mínimo necessariamente teremos  $\phi(+\infty) = \phi(-\infty)$ , igual ao valor que minimiza o potencial (SILVA, 1996).

## 5. DEFEITO TOPOLÓGICO TIPO KINK E APLICAÇÕES

Os defeitos topológicos do tipo kink são de grande interesse na física, por apresentarem propriedades topológicas que produzem soluções estáveis com energia finita. Os modelos de campos escalares que identificam os defeitos do tipo kink, são aqueles que apresentam o fenômeno da quebra espontânea de simetria, e surgem num espaço-tempo relativístico de  $(1+1)D$ . Já foi afirmado que para existência de soluções topológicas  $\phi(x)$  é preciso que o potencial apresente mais de um mínimo e seja limitado inferiormente (OLIVEIRA, 2009). Os campos para os quais estudamos os defeitos topológicos tipo kink possuem uma simetria discreta ( $\phi \rightarrow -\phi$ ), tendo energia finita, e suas soluções são estáveis.

### 5.1. O método Usual

O método usual consiste na verdade, em encontrar soluções para as equações de movimento, em que as mesmas demonstrem a presença de defeitos topológicos. Partindo das equações anteriores para o campo escalar real  $\phi$ , temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi).$$

Para essa teoria a equação de movimento pode ser descrita ainda por:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (5.1)$$

ou em termos de suas componentes:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (5.2)$$

onde, neste caso, está sendo considerado apenas uma dimensão espacial. Mas o que nos interessa é encontrar soluções para a equação de movimento acima. Note que, para configurações constantes temos:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (5.3)$$

de modo que neste caso, o que queremos são os pontos de mínimos do potencial, para interpretar essas soluções constantes que minimizam o potencial como soluções do vácuo. Para isso, o potencial precisa ser limitado inferiormente. Para ver isso melhor, vamos considerar o potencial  $V(\phi)$  como uma função não negativa do campo escalar real  $\phi$ . Nosso interesse volta-se apenas para os casos que o potencial  $V(\phi)$  é uma função polinomial.

Para o caso de configuração estática a equação de movimento Equação (5.2) produz:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (5.4)$$

Então nosso desafio é encontrar soluções das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e não-lineares. Logo, a não-linearidade é necessário, pois não tem possibilidades de escrever potenciais limitados inferiormente, ou seja, que apresentam mais de um mínimo, podendo tornar a equação de movimento linear.

## 5.2. O método de Bogomol'nyi

O método de Bogomol'nyi (BOGOMOL'NYI, 1976), é utilizado para escrever a energia da configuração estática do sistema numa forma quadrática, fechada e mínima (SILVA, 1996). Na verdade, esse método consiste em encontrar soluções para equação de segunda ordem a partir de uma equação de primeira ordem, que surge a partir do processo da minimização da energia (INÁCIO, 2003; Apud, De MELO, 2012). Entretanto, este mesmo método, nos proporcionará registrar a energia para uma configuração de campo estática, sendo assim escrita numa forma quadrática fechada e mínima (SILVA, 1996). Para ver isso melhor, considere a dinâmica do campo escalar real  $\phi$  descrito pela seguinte densidade Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (5.5)$$

A equação de movimento a partir da densidade lagrangeana da Equação (5.5) é:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (5.6)$$

Em termos de suas componentes a Equação (5.6) possui a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (5.7)$$

Então para configurações de campos estáticas em que  $\phi = \phi(x)$ , a Equação (5.7) produz:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (5.8)$$

Observe que a não linearidade será introduzida nessa teoria a partir da forma do potencial.

Agora a energia para essa configuração estática de campo produz:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (5.9)$$

O que Bogomol'nyi fez foi reescrever a energia do sistema da seguinte maneira:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \mp \sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right] dx, \quad (5.10)$$

que é uma forma quadrática e fechada.

Sabemos que o primeiro termo na integral da Equação (5.10) não pode ser negativo, então a energia mínima conhecida como energia de Bogomol'nyi  $E_b$  será dada por:

$$E_b = \mp \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right] dx. \quad (5.11)$$

Desde que a condição dada pela Equação seguinte seja satisfeita:

$$\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} = 0. \quad (5.12)$$

A equação (5.12) é uma equação de primeira ordem, cuja solução também é solução da equação de movimento em segunda ordem (5.4). Para ver isso melhor, podemos derivar a Equação (5.12) em função de  $x$ , aplicando novamente a regra da cadeia, e utilizando a Equação (5.12) novamente obteremos a equação de movimento Equação (5.8).

### 5.3. Aplicação

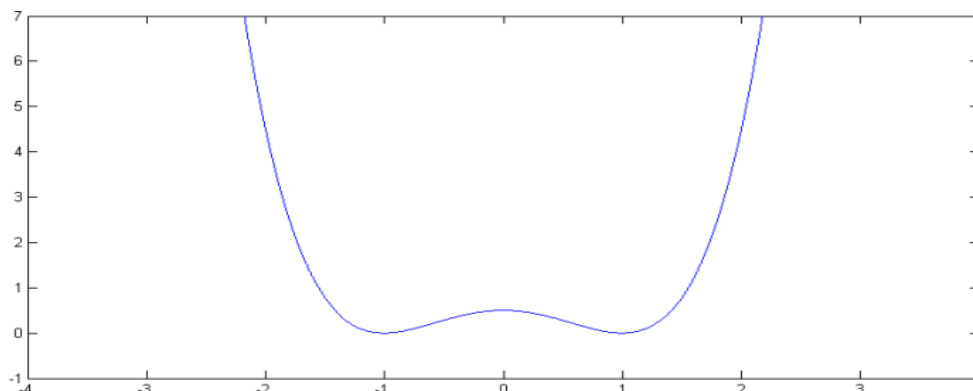
Considere o potencial descrito na Equação (5.3):

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2 \quad (5.13)$$

onde  $\lambda$  e  $a$  são parâmetros reais positivos. Este potencial é não negativo e seus mínimos ocorrem em  $\phi^2 = a^2$ , além disso, ele possui simetria discreta de reflexão  $V(\phi) = V(-\phi)$ .

O gráfico de  $V(\phi)$ , para o caso de  $a = \lambda = 1$ , está mostrado na Figura 4.

**Figura 4 – Potencial**



**Fonte:** Elaborada pela autora, 2019.

A lagrangeana que descreve a teoria que exhibe soluções tipo kink é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2. \quad (5.14)$$

Substituindo  $V(\phi)$  na Equação (5.6) obtemos a equação de movimento para  $\phi$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + 2\lambda^2 \phi (\phi^2 - a^2) = 0. \quad (5.15)$$

Para configurações de campos estáticos, a equação de movimento produz:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 2\lambda^2 \phi (\phi^2 - a^2). \quad (5.16)$$

A equação de movimento acima é não-linear, que será resolvida usando o método de Bogomol'nyi, ou seja, a equação de primeira ordem Equação (5.12), é solução da Equação (5.7):

$$\frac{d\phi}{dx} \pm \lambda (\phi^2 - a^2) = 0 \quad (5.17)$$

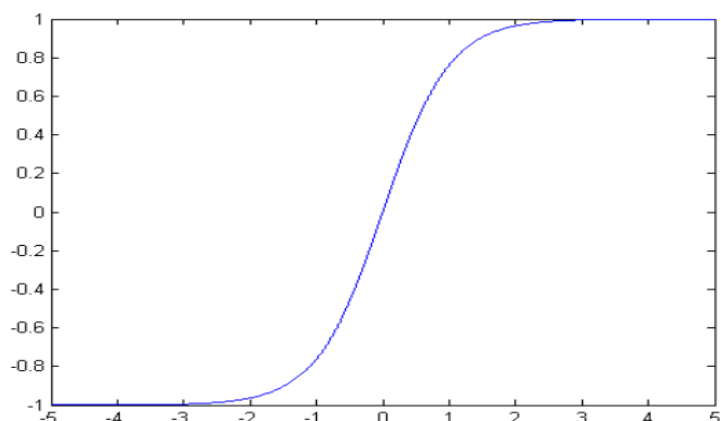
integrando resulta:

$$\int \frac{d\phi}{\phi^2 - a^2} = \pm \int \lambda dx \quad (5.18)$$

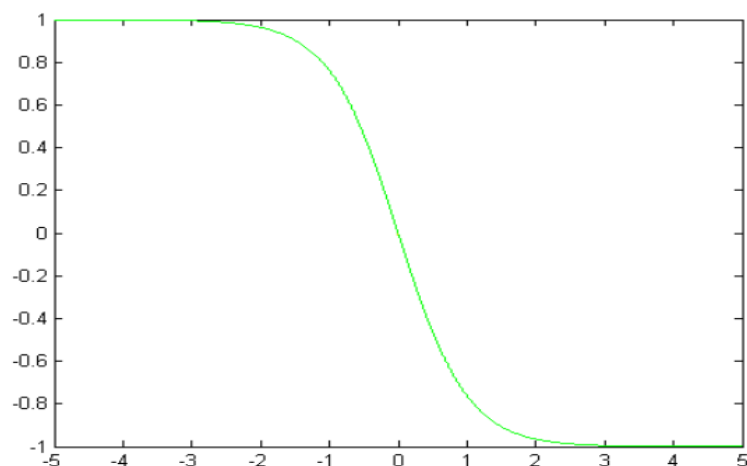
que produz:

$$\phi_\pm(x) = \pm a \tanh \lambda a (x - x_0). \quad (5.19)$$

Note que o resultado da Equação (5.19) representa as duas soluções topológicas do tipo kink. A solução positiva é chamada *kink*, e a negativa é chamada *antikink*. Em inglês, a palavra *kink* significa “dobra”. Isso se deve à forma do gráfico da solução, mostrado na Figura 5 para o *kink* e Figura 6 para o *antikink*, também quando  $a = \lambda = 1$ .

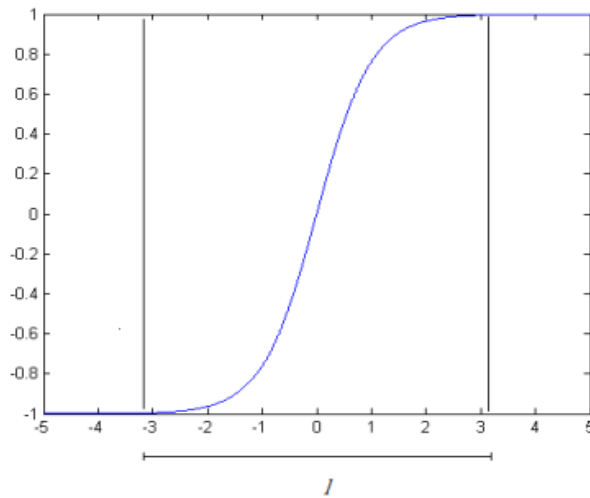
**Figura 5 – Defeito Topológico tipo Kink.**

Fonte: Elaborada pela autora, 2019.

**Figura 6 – Defeito Topológico Antikink.**

Fonte: Elaborada pela autora, 2019.

Veja que, assintoticamente, os campos tendem para os mínimos do potencial, ou seja,  $a = \pm 1$ . Observamos que o kink é um defeito topológico que conecta os dois estados de vácuo da teoria. Pela Equação (2.8), vemos que a amplitude de  $\phi(x)$  é o parâmetro  $a$ , e que o coeficiente da variável independente ( $\lambda a$ ) dentro do argumento da função  $\tanh$  determina a chamada largura do defeito  $l$ , representado na Figura 7:

**Figura 6** – Largura do defeito.

Fonte: Elaborada pela autora, 2019.

observe que  $l$  é inversamente proporcional a  $\lambda a$ ,

$$l \sim \frac{1}{\lambda a}. \quad (5.20)$$

#### 5.4. Energia do Kink

Mostraremos a seguir que o defeito topológico tipo kink possui energia finita, e isso faz com que os físicos possuam grande interesse nesse tipo de solução. Assim a energia do *kink* pode ser calculada, a partir da Equação (5.5):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx \quad (5.21)$$

e da solução  $\phi_{\pm}(x) = \pm a \tanh \lambda a(x + x_0)$ . Se substituirmos a solução apresentada pela Equação (5.15) na Equação (5.17) produz:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (\lambda a^2 \operatorname{sech}^2 \lambda a(x - x_0))^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 [a^2 (\tanh^2 \lambda a(x - x_0) - 1)^2] \right] dx$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 a^4 \operatorname{sech}^4 \lambda a(x - x_0)$$



$$E = \frac{4}{3} \lambda a^3. \quad (5.22)$$

O que mostra claramente que a energia do defeito é finita tanto para o *kink*, quanto para o *antikink*. Note que, se escrevermos a energia (5.22) como:

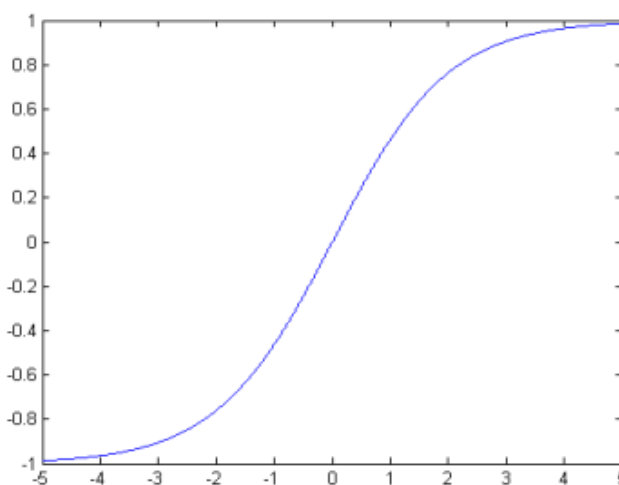
$$E = \frac{4}{3} (\lambda a) a^2 \quad (5.23)$$

observamos que  $\lambda a$  é inversamente proporcional a  $l$ , assim:

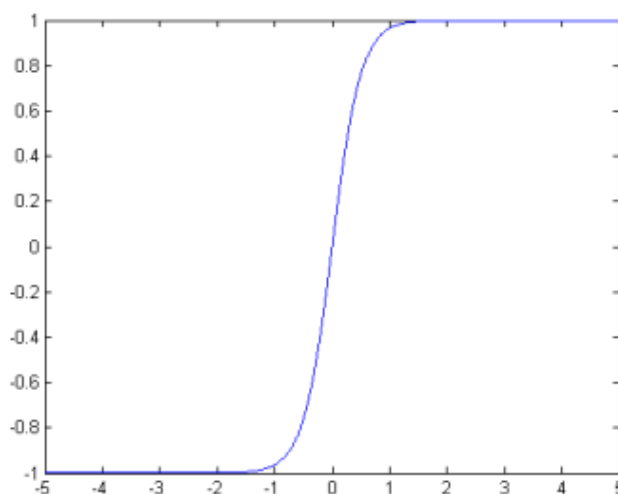
$$E \sim \frac{a^2}{l}, \quad (5.24)$$

ou seja, quanto menor a largura do defeito, maior a energia do mesmo, e quanto maior a largura, menor a energia. Outro fator de grande relevância também observar na energia do kink, é que ela é proporcional ao quadrado da amplitude, fazendo com que quanto maior o quadrado da amplitude, mais energético o defeito tipo Kink (De MELO, 2014). Os gráficos das Figuras 8 e 9, mostram o comportamento das diferentes energias dos kinks.

**Figura 7 – Kink de baixa energia.**



**Fonte:** Elaborada pela autora, 2019.

**Figura 8** – Kink de alta energia.

**Fonte:** Elaborada pela autora, 2019.

Quando introduzimos o defeito topológico tipo kink, gerado num espaço-tempo relativístico de (1+1)D no espaço-tempo de (1+3)D, geramos o defeito topológico conhecido como, parede de domínio. Nesse caso, a energia do defeito é infinita, mas por unidade de área temos ainda energia finita nos defeitos tipo paredes de domínio. Esta energia por unidade de área é chamada tensão superficial da parede, que é exatamente a energia do *kink*. Existem aplicações das soluções tipo *kink* em física da matéria condensada, onde esse tipo de solução pode representar um estado de spin, e é importante que se possa medir a largura do defeito, para se conhecer sua energia.

## 6. METODOLOGIA

Com a finalidade de atingir os objetivos mencionados, fizemos o uso de uma metodologia descritiva onde foi realizado revisões bibliográficas de artigos, livros, dissertação de mestrado, tese de doutorado e diversos textos especializados que abordaram os conceitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Nestas revisões, foi feito um estudo minucioso sobre alguns temas, tais como soluções de equações diferenciais parciais, defeitos topológicos, modelos de campos escalares reais e campos escalares complexos, modelos de potenciais e sistemas topológicos.

Foi realizado também estudo sobre o método de deformação, através de leituras bibliográficas com o intuito de obter um melhor desempenho da nossa pesquisa.

E finalizamos com a união de conceitos de campos e métodos de deformação, que nos possibilitou encontrar soluções de formas mais simples, com o uso de teorias já vistas e foi finalizado com a aplicação que era o objetivo desse trabalho.

## 7. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Tendo obtido a energia da configuração de campo estática (ver Equação (5.5)) a partir do tensor energia momento para a teoria de campo em consideração, foi utilizado o método de Bogomol'nyi para escrevê-la numa forma quadrática, fechada e mínima (ver Equação (5.6)). O método também nos possibilitou obter a equação diferencial de primeira ordem (ver Equação (5.12)), que nos permitiu resolver de forma simples a equação de movimento em segunda ordem não linear (ver Equação (5.8)), para configuração de campo estático. Foi mostrado também que a não linearidade na teoria é muito importante pelo fato de que, além dela ser responsável pelo aparecimento de novos fenômenos físicos na natureza que é o caso dos defeitos topológicos, ela também garante que o potencial que especifica a teoria seja limitado inferiormente, e que apresente mais de um mínimo (ver Equação (3.3)). Vale salientar que tudo isso foi feito, sem conhecermos explicitamente a forma do potencial que especifica a teoria em consideração, como foi abordado. Quando foi introduzido explicitamente o potencial na teoria, foi possível integrar a equação em primeira ordem obtida através do método de Bogomol'nyi, e encontramos explicitamente a solução tipo sóliton (ver Equação (5.15)) que identifica o defeito topológico conhecido como kink. A presença da topologia no sistema foi possível através da introdução de uma corrente conservada que não era a corrente de Noethers mas garantiu a conservação da carga topológica. Mostrou-se também que a carga topológica, só depende das propriedades assintóticas do campo  $\phi$ , ver equação (ver Equação (4.12)), e que ela, só tinha valor diferente de zero quando  $\phi(-\infty)$  fosse diferente de  $\phi(+\infty)$ . Portanto, observou-se que isso só ocorreu quando o potencial apresentava mais de um mínimo. Isto porque, se o potencial possui-se um único mínimo necessariamente teríamos  $\phi(+\infty) = \phi(-\infty)$ , que é o caso de soluções constantes. Assim soluções constantes que minimizam a energia e que, portanto, identificam o setor de vácuo, identificam ainda o setor de carga topológica nula.

## 8. CONCLUSÃO

No decorrer deste trabalho foi estudado o defeito topológico tipo kink, gerado a partir de sistemas relativísticos descrito num espaço de  $(1+1)D$ . O enfoque adotado foi direcionado para a obtenção de defeito topológico gerado a partir de uma densidade lagrangeana que apresentava uma simetria discreta.

Abordou-se também que, o defeito topológico tipo kink nada mais é do que, as soluções clássicas das equações de movimento para o campo escalar real, que apresentam um comportamento não trivial, que aparecem em modelos que suportam o fenômeno da quebra espontânea de simetria. As soluções topológicas mostradas são soluções de configurações de campos clássicos estáticos para as equações de movimento. Ainda foi visto que, o comportamento dessas soluções topológicas, estão associadas a maneira como os campos vão para o infinito ou seja a sua forma assintótica, e mais, elas aparecem em alguns sistemas físicos que são descritos por potenciais que apresentam certas características específicas tais como, a presença de uma carga topológica conservada. Ficou claro nesse trabalho que, para garantir que essas soluções possuam energia finita e exibam o fenômeno da quebra espontânea de simetria, deve-se exigir que esses potenciais possuam mais de um mínimo e que sejam limitados inferiormente. Essas duas condições sobre o potencial – ser limitado inferiormente e possuir mais de um mínimo – faz com que as equações de movimento para o campo escalar real seja necessariamente não-linear.

Por toda pesquisa, utilizamos o método de Bogomol'nyi para investigar a energia da configuração de campos estáticos. Como foi visto, este método possibilitou encontrar as equações de primeira ordem não lineares, conhecidas como as equações de Bogomol'nyi, que são soluções das equações de movimento não lineares em segunda ordem. A solução da equação de Bogomol'nyi em primeira ordem nos possibilitou identificar o defeito topológico tipo kink, que representa o sóliton desse sistema não linear. Mostramos em detalhes que os kinks surgem de uma teoria de campo escalar real, que possui uma simetria discreta e também escolhendo um potencial específico, que possua mais de um mínimo, ou na linguagem de teorias de campos que possua mais de um setor de vácuo.

É sabido que o estudo de defeitos topológicos na natureza, apresenta uma grande variedade de aplicações em diversas áreas da física atual, em particular

podemos destacar o defeito tipo *kink*, por suas importantes características como foi visto. Calculamos a sua energia, constatando que ela é finita, proporcional ao quadrado da amplitude do campo e inversamente proporcional à largura do defeito.

Outra importante aplicação dessas soluções tipo *kink* é que elas também podem ser aplicadas nas teorias dos sólitons. Esses sólitons nada mais são do que ondas solitárias que conservam sua energia e identidades durante os choques.

Tudo isso foi possível utilizando o método de Bogomol'nyi, que nos proporcionou escrever a energia do sistema em consideração, numa forma fechada, quadrática e mínima.

## REFERÊNCIAS

- ABRIKOSOV, A. A. **The magnetic properties of superconducting alloys**. Journal of Physics and Chemistry of Solids, v. 2, Issue 3, p. 181-256, 1957.
- ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. **Notes for a Course on Classical Fields**. Instituto de Física Teórica Universidade Estadual Paulista, 2008.
- ALMEIDA, C. A. G. **Deformação de Defeitos em Modelos de Campos Escalares**. Tese (Doutorado em Física) – Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2004.
- ARAUJO, T. R.; ZLATEV S. I. **Correções Quânticas à Massa do Kink Deformado**. *Scientia Plena*, São Cristovão, v. 5, n. 11, 2009.
- BAZEIA, D, DAS, A., LOSANO, L e SILVA, A., **Annal. of Phys.** **323**, 1150 (2008).
- BERTIN, Mário. **Teoria clássica do campo** (2015). Universidade de São Paulo.
- BOGOLMOL'NYI. E.B., Sovietic, J. Nucl. **Phys.** **24**, 449 (1976).
- BRITTON, N. F., Reaction – **Diffusion Equations and Their applications to Biology** (Academic, New York, 1986).
- COLEMAN, S. **Aspects of Symmetry** (Cambridge Univ. Press, cambridge, 1985).
- EPSTEIN, I. R. e POJMAN, J. A., **Am Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics** (Oxford, New York, 1998).
- GOLDSTONE, J.; SALAM, A.; WEINBERG, S. Nuovo Cimento. **Physical Review Letters**. V. 127, n. 965, p. 65-69, 1961.
- GOMES, M. **Teoria Quântica dos Campos** (Edusp, São Paulo, 2002).
- HIGGS, P. W. **Phys. Lett.** 13, 154, (1964).
- INÁCIO, A. S. **Defeitos Topológicos em Modelos de Campos Escalares**. 2003. 74f. Dissertação (mestrado em Física) - Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2003.
- KIBBLE, T. W. B. **Topology of Cosmic Domains and Strings**. Journal of Physics A: Mathematical and General, v. 9, n. 8, 1976.
- MELO, Téssio Rogério de. N.B. **Defeito Topológico Tipo Kink Via Deformação** (2012), Relatório Final do PIBIC (Departamento de Física) da Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2012.
- MELO, Téssio Rogério de. N.B, **Defeitos Topológicos em Teoria Clássica de Campos e Suas Aplicações**. (2014), Trabalho de Conclusão do Curso

(Departamento de Física) da Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

MURRAY, J. D. **Mathematical Biology, second, correct edition** (Springer, Berlin, 1993).

NAMBU, Y. **Phys. Rev. Lett.** 4, 380, 1960.

OLIVEIRA, Simone Vicente de. **Uma Abordagem sobre a Teoria do Campo Escala Real** (2009). Dissertação (Mestrado em Física) da Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2009.

PETER, R. Emmy Noether and Hermann Weyl. **Extended manuscript of a talk presented at the Hermann Weyl conference in Bielefeld**, 2006.

SILVA, A. **Vórtices em Sistemas Planares**. 1996. 58f. Dissertação (Mestrado em Física) - Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 1996.

SOUSA, Igor Andrade. **Defeitos Topológicos em Teoria de Campos com Dinâmica Generalizada** (2018). Dissertação (Mestrado em Física) da universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2018.

VILENKIN, A. and SHELLARD, E. P. S., **Cosmic string and other topological defects** (Cambridge University Press). 1994.

WALGRAEF, D. **Spatio-Temporal Pattern Formation: With Examples from Physics**. Chemistry and Materials Science, Springer, 1997.