UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CLAUDIANA MARIA DAS DORES SILVA

EXISTÊNCIA DE AUTOVALORES E AUTOVETORES EM DIMENSÃO FINITA: UMA PROVA ALTERNATIVA AO USO DA TEORIA DE MATRIZES

CAMPINA GRANDE - PB
2020

CLAUDIANA MARIA DAS DORES SILVA

EXISTÊNCIA DE AUTOVALORES E AUTOVETORES EM DIMENSÃO FINITA: UMA PROVA ALTERNATIVA AO USO DA TEORIA DE MATRIZES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Análise

Orientadora: Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho

CAMPINA GRANDE - PB
2020

S586e Silva, Claudiana Maria das Dores.

Existência de autovalores e autovetores em dimensão finita [manuscrito] : uma prova alternativa ao uso da Teoria de matrizes / Claudiana Maria Das Dores Silva. - 2020.

52 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.

"Orientação : Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Autovalores. 2. Teorema de Weierstrass. 3. Operadores lineares. 4. Autovetores. I. Título

21. ed. CDD 512.943 4

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

CLAUDIANA MARIA DAS DORES SILVA

EXISTÊNCIA DE AUTOVALORES E AUTOVETORES EM DIMENSÃO FINITA: UMA PROVA ALTERNATIVA AO USO DA TEORIA DE MATRIZES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho

Aprovado em: 18 / 12 / 20.

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho(Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB - Campus VII)

Aos meus pais, Tereza Maria de Jesus e José João Filho, por todo o amor, apoio e incentivo, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais, Tereza Maria de Jesus e José João Filho, pelo dom da vida e por me educarem para a mesma. Sem eles, nada disso seria possível.

Agradeço a meus irmãos, em especial a Cícero José da Silva, por ser meu melhor amigo desde que nasci e por todo o apoio nessa jornada. Agradeço, também, a todos os demais familiares, em especial, a minha avó, Valdeci Maria do Socorro, por sempre me incentivar a ir em busca de meus objetivos.

Agradeço a minha orientadora, Emanuela Régia de Sousa Coelho, por ser, sobretudo, uma grande amiga. Agradeço pela confiança em mim depositada e por todo suporte que me foi dado ao longo dos últimos anos na minha vida acadêmica e pessoal. Agradeço, também, pelo grandioso incentivo e apoio na construção deste trabalho.

Agradeço aos professores Aldo Trajano Louredo e Arlandson Matheus Silva Oliveira, por aceitarem o convite de participarem da banca e pelas valiosas contribuições a este trabalho.

Agradeço a todos que conheci ao longo do curso, em especial, destaco dois grandes amigos que estiveram comigo desde o primeiro semestre: Maria Cristina Neves de Carvalho e Iriedson Souto Maior de Moraes Vilar; tais amizades levarei para o resto da vida. A todos os demais, agradeço pelos momentos compartilhados e pelas amizades construídas.

Agradeço a todos os professores que passaram pela minha vida, não citarei nomes para não correr o risco do esquecimento. A vocês, meu muito obrigado!

Agradeço a todos que fazem parte da UEPB, por me permitirem realizar este grande sonho de minha vida.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo realizar um estudo sobre autovalores e autovetores em espaços de dimensão finita, mais especificamente, apresentar uma demonstração diferente da clássica acerca da existência dos mesmos. Para o desenvolvimento do trabalho, propomos uma abordagem didática do artigo intitulado "A Direct Proof of the Existence of Eigenvalues and Eigenvectores by Weierstrass's Theorem" de Jean Van Schaftingen e, para isso, utilizamos alguns conceitos e resultados da Álgebra Linear e Análise em Espaços Métricos, tais como: Espaços Vetoriais e Espaços Vetoriais Normados, Teoria de Operadores Lineares, Compacidade, Continuidade, entre outros.

Palavras Chave: Autovalores e Autovetores. Teorema de Weierstrass. Operadores Lineares.

ABSTRACT

The present work has as its purpose to realize a study on eigenvalues and eigenvectors in finite dimension spaces, more specifically, to presents a different demonstration from the classical one about itsexistence. For the work development , we propose a didactic approach to the entitled article “A Direct Proof of the Existence of Eigenvalues and Eigenvectors by Weierstrass's Theorem” by Jean Van Schaftingen and, and thereunto, we used some concepts and results from Linear Algebra and Analysis in Metric Spaces, such as: Vector Spaces and Normed Vector Spaces, Linear Operators Theory, Compactness, Continuity, among others.

Keywords: Eigenvalues and Eigenvectors. Weierstrass's Theorem. Linear Operators.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste em apresentar um resultado comumente introduzido em cursos introdutórios de Álgebra Linear: a existência de autovalores e autovetores para operadores lineares em dimensão finita. Entretanto, a abordagem escolhida para a prova desse resultado não é a apresentada habitualmente nos cursos de Matemática e áreas afins. O direcionamento escolhido é o feito no artigo "A Direct Proof of the Existence of Eigenvalues and Eigenvectores by Weierstrass's Theorem" de Jean Van Schaftingen, Schaftingen (2013). Sendo assim, este trabalho consiste em fazer uma apresentação didática do artigo de Schaftingen, na tentativa de deixá-lo acessível a qualquer estudante de graduação e objetivando que este texto seja o mais autossuficiente possível.

É sabido que os autovalores são frequentemente tratados no contexto da álgebra linear através da teoria das matrizes. No entanto, historicamente, eles surgiram no estudo de formas quadráticas e equações diferenciais.

Segundo Hawkins (1975) (apud Prieto (2016)), o primeiro a se deparar com os autovalores foi o filósofo, matemático e físico francês Jean le Rond d'Alembert (1717 - 1783), em 1743, enquanto desenvolvia um estudo sobre várias massas ligadas umas às outras por meio de molas. Ele reduziu um sistema de equações diferenciais que descrevia o problema estudado por meio de algumas transformações de variáveis e chegou a apenas uma equação:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \lambda u = 0, \tag{1.1}$$

em que u é uma soma envolvendo o produto das velocidades e posições de cada massa e λ um escalar. A partir daí, D'Alembert utilizou esse novo método de buscar soluções para sistemas com duas e três massas e, com argumentações intrínsecas aos conceitos físicos do problema, concluiu que o escalar λ só poderia ser um número real. Ainda em meados de 1743, D'Alembert, fazendo uso de um trabalho desenvolvido por Leonhard Paul Euler (1707 - 1783), provou que as soluções gerais da equação 1.1 são da forma:

$$u = ge^{-\lambda t},$$

sendo g um escalar, em que λ está associado com a estabilidade do sistema massa-mola. Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), estendeu o método para estudar a solução de um problema com n de massas; e equações polinomiais foram surgindo mas, naquele momento, nada sabia-se sobre a estrutura de suas raízes.

Como esperado, muitos matemáticos e estudiosos se dedicaram ao assunto e agregaram conhecimentos ao conceito relacionado aos escalares em questão. Afinal, nas perspectivas daquela época, tratava-se de algo novo. Ainda, vale a ressalva de que, nestes estudos, surgiram várias aplicações destes escalares. E, por isso, o interesse dos matemáticos foi aguçado. Afinal, tratava-se de algo importante para a matemática e demais ciências que fazem uso da mesma.

A partir do século XIX, o problema dos escalares começa a tomar a forma que conhecemos atualmente. Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857), em 1815, desenvolveu a Teoria dos Determinantes e em 1839, concebeu o termo "Raiz Característica", para o que agora é chamado de autovalor; tal termo sobrevive na denominação do polinômio característico. E, meados do ano 1855, esses resultados divulgados por Cauchy tornam-se 'matemática básica' dentre os matemáticos da época. O primeiro a usar a palavra alemã Eigen (que significa *próprio*), já no século XX, foi o matemático alemão David Hilbert (1862 - 1943). E o termo *valor próprio* (ou autovalor) é o mais utilizado até os dias atuais.

Atualmente, autovalores e autovetores são apresentados a estudantes de graduação das mais diversas áreas no contexto de cursos de Álgebra Linear com foco em matrizes, uma vez que as transformações lineares em um espaços vetoriais de dimensão finita podem ser representadas fazendo uso através do conhecido Teorema de Representação Matricial. A prova tradicional da existência de autovalores consiste em usar a equivalência de que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor se, e somente se, λ é raiz do polinômio gerado a partir do determinante da matriz associada a $(T - \lambda I)$. E, pelo Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.), tal polinômio sempre possui raiz em $\mathbb{C}$ e, portanto, o operador sempre possui autovalor.

Nossa proposta fundamenta-se em 'fugir' dessa abordagem clássica através de matrizes e determinantes e provar a existência de autovalores para operadores lineares em espaços complexos de dimensão finita, usando uma abordagem alternativa, através de uma aplicação do Teorema de Weierstrass, que não requer qualquer conhecimento prévio de matrizes e determinantes. Vale a ressalva que tal abordagem não é a única prova isenta dessa teoria. Em seu artigo Schaftingen (2013), cita uma série de provas do mesmo resultado utilizando outras ferramentas que não são inerentes a teoria de matrizes e determinantes. Ademais, vale ressaltar que outra característica interessante desta prova é que um autovalor produz, simultaneamente, um autovetor; enquanto na abordagem usual, o autovetor é consequência da existência de um autovalor.

O trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 será voltado ao desenvolvimento de resultados e conceitos imprescindíveis da Álgebra Linear e da Topologia dos Espaços Métricos que serão utilizados para o bom entendimento do capítulo seguinte. Já no Capítulo 3, apresentamos a prova feita por Schaftingen, através do uso do Teorema de Weierstrass.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados que são necessários para o bom entendimento do objeto principal desta monografia, a fim de tornar esse texto autossuficiente. Inicialmente, introduzimos alguns conceitos e resultados inerentes a Álgebra Linear - área principal do trabalho - e, em seguida, alguns tópicos da Topologia de Espaços Métricos.

Para esta primeira parte, sempre que possível, iremos exibir as justificativas dos resultados introduzidos. Quando isso não for possível - pela prova requerer muitos resultados que fogem ao escopo do trabalho - indicaremos referências em que possam ser encontradas.

2.1 Tópicos em Álgebra Linear

A Álgebra Linear é entendida como o Estudo dos Espaços Vetoriais e das Transformações Lineares entre eles. Nosso resultado principal encontra-se nessa área e, por isso, vamos apresentar, aqui, alguns resultados oriundos dela que são preliminares ao Teorema que apresentamos no próximo Capítulo. Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em Calliolli, Domingues e Costa (1990), Coelho e Lourenco (2013), Lima (2018) ou Louredo (2015) e estas referências são recomendadas para uma leitura aprofundada dos temas abordados.

2.1.1 Espaços Vetoriais

Em toda esta seção $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais ou dos complexos, isto é, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. (Para mais detalhes sobre Corpos, indicamos Vieira (2013) e Domingues (2003))

Definição 2.1 (Espaço Vetorial) *Um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ (ou um $\mathbb{K}$- Espaço Vetorial) é um conjunto não vazio V no qual estão definidas duas operações: a adição, que a cada par de elementos $u, v \in V$ faz corresponder um novo elemento $u+v \in V$, chamado soma de u e v, e a multiplicação por um elemento de $\mathbb{K}$, que a cada $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in V$ faz corresponder um novo elemento $\alpha \cdot v$, ou αv, chamado de produto de α por v. Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $u, v, w \in V$, as condições abaixo:*

i) comutatividade da soma: $u + v = v + u$*;*

ii) associatividade da soma e do produto por escalar: $(u + v) + w = u + (v + w)$ *e* $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$*;*

iii) vetor neutro aditivo: existe um vetor $0 \in V$*, chamado de vetor nulo, ou vetor zero, tal que* $v + 0 = 0 + v = v$ *para todo* $v \in V$*;*

iv) inverso aditivo: para cada vetor $v \in V$ *existe um vetor* $-v \in V$*, chamado o inverso aditivo, ou simétrico de* v*, tal que* $-v + v = v + (-v) = 0$*;*

v) distributividade: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ *e* $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$*;*

vi) multiplicação por 1: $1 \cdot v = v$*.*

As propriedades $(i) - (vi)$ *são ditas Axiomas de Espaço Vetorial. Os elementos* $v \in V$ *são chamados de vetores e os elementos* $\alpha \in \mathbb{K}$ *são ditos escalares.*

Observação 2.1 Todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo.

De fato, se $\mathbb{K}$ é um corpo, então as duas operações internas em $\mathbb{K}$ podem ser vistas como a soma de vetores e a multiplicação por escalares.

Exemplo 2.1 De maneira mais geral a considerada acima, para cada $n \geq 1$, o conjunto

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times ... \times \mathbb{K}}_{n \text{ vezes}} = \{(a_1, ..., a_n) : \ a_i \in \mathbb{K}, \ \forall i = 1, ..., n\}$$

tem estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ bastante natural com as operações:

- $(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n), \quad \forall (a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{K}^n.$
- $\alpha \cdot (a_1, ..., a_n) = (\alpha a_1, ..., \alpha a_n), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$.

De fato, as propriedades de comutatividade da soma (i), associatividade da soma e do produto por escalar (ii), distributividade (v) e multiplicação por 1 (vi), seguem do fato dessas propriedades serem verificadas coordenada a coordenada em $\mathbb{K}$. O elemento $(0, ..., 0) \in \mathbb{K}^n$ é o neutro aditivo, pois

$$(a_1, ..., a_n) + (0, ..., 0) = (a_1 + 0, ..., a_n + 0) = (a_1, ..., a_n),$$

para todo $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$. E, se $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$, então $-(a_1, ..., a_n) = (-a_1, ..., -a_n) \in \mathbb{K}^n$ é seu inverso, pois

$$-(a_1, ..., a_n) + (a_1, ..., a_n) = (-a_1 + a_1, ..., -a_n + a_n) = (a_1 - a_1, ..., a_n - a_n) = 0.$$

Com isso, $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Exemplo 2.2 Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{F}(X,\mathbb{K}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} :\ \text{f é uma função}\}$. O conjunto $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ munido das operações de Adição e Multiplicação por escalar dadas, respectivamente, por

$$\begin{array}{rccl} f+g: & X & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccl} \alpha\cdot f: & X & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & (\alpha\cdot f)(x) = \alpha\cdot f(x) \end{array}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, chamado de Espaço de Funções.

De fato, sejam $f, g, h \in \mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

i) $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x), \quad \forall x \in X.$

ii) Para a associatividade da soma,

$$\begin{aligned} [(f+g)+h](x) &= (f+g)(x)+h(x) \\ &= (f(x)+g(x))+h(x) \\ &= f(x)+(g+h)(x) \\ &= [f+(g+h)](x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Para a associatividade do produto escalar,

$$[\alpha(\beta f)](x) = \alpha(\beta f)(x) = \alpha(\beta f(x)) = (\alpha\beta)f(x) = [(\alpha\beta)f](x), \quad x \in X.$$

iii) Seja 0 a função identicamente nula, isto é,

$$\begin{array}{rcl} 0: & X & \longrightarrow \mathbb{K} \\ & x & \mapsto 0(x) = 0, \end{array}$$

então

$$(f+0)(x) = f(x)+0(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

iv) Dada a função f, a função $-f$ é definida por $(-f)(x) = -f(x), \quad \forall x \in X.$

Assim,

$$[f+(-f)](x) = f(x)+(-f(x)) = 0 = 0(x), \quad \forall x \in X.$$

v) Para a distributividade na soma de escalares,

$$\begin{aligned} [(\alpha+\beta)f](x) = (\alpha+\beta)f(x) &= \alpha f(x)+\beta f(x) \\ &= (\alpha f)(x)+(\beta f)(x) \\ &= [\alpha f+\beta f](x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

vi) Agora, para a distributividade da soma de funções em relação a um escalar, tem-se

$$\begin{aligned}[\alpha(f+g)](x)=\alpha(f+g)(x) &= \alpha(f)(x)+\alpha(g)(x)\\ &= (\alpha f)(x)+(\alpha g)(x)\\ &= (\alpha f+\alpha g)(x), \quad \forall x\in X.\end{aligned}$$

v) Por fim,

$$(1f)(x)=1f(x)=f(x), \quad \forall x\in X.$$

Como todas as propriedades foram satisfeitas, segue o resultado.

Definição 2.2 (Subespaço Vetorial) *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um subespaço vetorial de V é um subconjunto não vazio $W\subset V$, tal que:*

i) $0\in W$

ii) $u+v\in W, \quad \forall u,v\in W$;

iii) $\alpha u\in W, \forall\alpha\in\mathbb{K}$ *e* $\forall u\in W$.

Em suma, ii) significa que a adição de V, restrita a W, é uma adição em W. O significado de iii) é que está definida a multiplicação de $\mathbb{K}\times W$ em W. Ainda, da Definição acima e dos axiomas de Espaço Vetorial, segue que o subespaço $W\subset V$ é, ele próprio, um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Exemplo 2.3 Seja $n\in\mathbb{N}$ e $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ o conjunto formado por todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}$ de grau menor ou igual a n,mais o polinômio nulo, ou seja,

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{K})=\left\{p(x)=a_0+a_1x+...+a_mx^m=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i, \quad a_i\in\mathbb{K} \text{ e } 0\le m\le n\right\}.$$

$\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ munido das operações soma e multiplicação por escalar na forma

- Soma: Se $p(x)=a_0+a_1x+...+a_{m_1}x^{m_1}=\sum_{i=0}^{m_1}a_ix^i$ e $q(x)=a_0+b_1x+...+b_{m_2}x^{m_2}=\sum_{i=0}^{m_2}b_ix^i$, com $0\le m_1\le m_2\le n$, então

  $$(p+q)(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+...+(a_{m_1}+b_{m_1})x^{m_1}+b_{m_1+1}x^{m_1+1}+\cdots+b_{m_2}x^{m_2};$$

- Multiplicação por escalar: Se $p(x)=a_0+a_1x+...+a_mx^m=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$, $0\le m\le n$ e $\lambda\in\mathbb{K}$, então $\lambda\cdot p(x)=(\lambda a_0)+(\lambda a_1)x+...+(\lambda a_m)x^m=\sum_{i=0}^{m}\lambda a_ix^i$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$.

Definição 2.3 (Combinação Linear) *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $v_1, ..., v_n \in V$ e $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$. Então, o vetor*

$$v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$$

é um elemento de V ao qual é chamado combinação linear de $v_1, ..., v_n$.

Proposição 2.1 *Fixados os vetores $v_1, ..., v_n \in V$, o conjunto W de todos os vetores de V, que são combinação linear destes, o qual é denotado por*

$$W = [v_1, ..., v_n] = \{v \in V : \ v = a_1v_1 + ... + a_nv_n : \ a_i \in \mathbb{K}, \ 1 \leq i \leq n\},$$

é um subespaço de V e W é chamado subespaço gerado por $v_1, ..., v_n$.

Prova. Com efeito,
i) $0 \in W$, pois

$$0 = 0v_1 + ... + 0v_n.$$

ii) Sejam $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$ e $w = b_1v_1 + ... + b_nv_n \in W$. Então, pelas propriedades de associatividade e comutatividade em V, pode-se escrever:

$$v + w = (a_1v_1 + ... + a_nv_n) + (b_1v_1 + ... + b_nv_n) = (a_1 + b_1)v_1 + ... + (a_n + b_n)v_n \in W.$$

iii) Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n \in W$. Então,

$$\alpha v = \alpha(a_1v_1 + ... + a_nv_n) = \alpha(a_1v_1) + ... + \alpha(a_nv_n) = (\alpha a_1)v_1 + ... + (\alpha a_n)v_n \in W.$$

Segue, portanto, que $W = [v_1, ..., v_n]$ é um subespaço de V.

■

Definição 2.4 (Dependência e Independência Linear) *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$. Diz-se que o conjunto $\mathcal{A}$ é linearmente independente (LI) ou que os vetores $v_1, \cdots, v_n$ são LI's, caso a equação*

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0 \tag{2.1}$$

admita apenas a solução trivial, isto é,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Se $a_i \neq 0$, para algum $i = 1, \cdots, n$, de modo que a equação (2.1) seja satisfeita, diz-se que $\mathcal{A}$ é linearmente dependente (LD) ou que os vetores $v_1, \cdots, v_n$ são LD's.

Definição 2.5 (Base) *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\} \subset$*

V é uma base para V se $\mathcal{B}$ é LI e $\mathcal{B}$ gera V.

Observação 2.2 Nas condições da Definição acima, do fato de $\mathcal{B}$ gerar V, todo elemento de V se escreve como combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$ e pode-se concluir que tal combinação é única.

De fato, se $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ e $v = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$, com $a_i, b_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, \cdots, n$, são duas combinações lineares de elementos de $\mathcal{B}$ para $v \in V$, então

$$0 = v - v = (a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n$$

e, como $\mathcal{B}$ é LI, segue que $a_i - b_i = 0$, ou seja, $a_i = b_i$, para todo $i = 1, \cdots, n$.

Exemplo 2.4 Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{p(x) = ax^2+bx+c : \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos polinômios de grau menor igual a 2 com coeficientes reais, mais o polinômio nulo. O conjunto $\beta = \{1, x, x^2\}$ é uma base para $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. De fato, sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com

$$a.1 + b.x + c.x^2 = 0 = 0 + 0x + 0x^2$$

da igualdade de polinômios, segue que $a = 0$, $b = 0$ e $c = 0$, o que significa que $\beta = \{1, x, x^2\}$ é LI.

Por um lado, pela Proposição 2.1, obtém-se que $[1, x, x^2] \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Por outro lado, se $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, então $p(x) = c.1 + b.x + c.x^2 \in [1, x, x^2]$, o que implica $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \subset [1, x, x^2]$. Isto é,

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = [1, x, x^2].$$

Como $\beta = \{1, x, x^2\}$ é LI e é um conjunto gerador para $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, segue que $\beta = \{1, x, x^2\}$ é uma base para $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Observação 2.3 *Duas bases quaisquer de um Espaço Vetorial têm o mesmo número de vetores.*

Tendo em vista a observação acima, é bem colocada a Definição abaixo:

Definição 2.6 (Dimensão) *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se V possui uma base com n vetores, então V tem dimensão n e denota-se $\dim V = n$.*

Quando um espaço vetorial V admite uma base finita, dizemos que V é um espaço vetorial de dimensão finita. Se V tem uma base com infinitos vetores, então a dimensão de V é infinita e denota-se $\dim V = \infty$.

Exemplo 2.5 Sejam $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 : n \in \mathbb{N} \text{ e } a_i \in \mathbb{R}, \ \forall i = 1, \cdots, n\}$ e $\beta = \{1, x, x^2, x^3, \cdots\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Então β é uma base infinita de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (isto é, $\dim \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \infty$), a qual é chamada de base canônica de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Por outro lado,$\beta = \{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$ é a base canônica de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{a_m x^m + ... + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \cdots, m$ e $0 \leq m \leq n\}$ e $\beta = \{1, x, x^2, x^3, ...\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. E, portanto, $dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

As justificativas, de ambos os casos, são análogas ao feito no Exemplo 2.4.

2.1.2 Operadores Lineares

Definição 2.7 (Transformações Lineares) *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $T : V \longrightarrow W$ que associa a cada vetor $v \in V$ um vetor $T(v) \in W$ é uma transformação linear se satisfaz as seguintes condições:*

$$T(u + v) = T(u) + T(v) \quad e \quad T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$$

para quaisquer $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Quando $V = W$, T é dito Operador Linear em V.

Observação 2.4 As condições da definição acima são equivalentes a:

$$T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } u, v \in V. \tag{2.2}$$

De fato, se T é linear, tem-se

$$T(\alpha u + v) = T(\alpha u) + T(v) = \alpha T(u) + T(v), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } u, v \in V.$$

Reciprocamente, se T satisfaz (2.2), então

$$T(0) = T(1 \cdot 0 + 0) = T(0) + T(0),$$

donde $T(0) = 0$. Daí, se $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ em (2.2), segue que

$$T(\alpha u) = T(\alpha u + 0) = \alpha T(u) + T(0) = \alpha T(u) \text{ e } T(u + v) = T(1 \cdot u + v) = T(u) + T(v).$$

Exemplo 2.6 Considere $C([a, b]; \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ é contínua}\}$. Então, $C([a, b], \mathbb{R})$ é subespaço vetorial de $\mathcal{F}([a, b]; \mathbb{R})$, pois, dos resultados do Cálculo, a soma e o produto por escalar de funções contínuas é, ainda, uma função contínua. Logo, $C([a, b]; \mathbb{R})$ é, ele próprio, um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

A aplicação

$$\begin{array}{rccl} T: & C([a, b]; \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & T(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx \end{array}$$

é uma transformação linear, uma vez que se $f, g \in C([a, b]; \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então, pelas propriedades da integral

$$T(\alpha f + g) = \int_a^b (\alpha f + g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \alpha T(f) + T(g).$$

Existem alguns Operadores Lineares importantes e, por isso, recebem nomenclaturas especiais. Entre eles, estão o Operador Identidade, o Operador Nulo e o Operador Oposto, apresentados a seguir:

Exemplo 2.7 (Operador Nulo) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. A função $0 : V \longrightarrow V$ definida por $0(v) = 0$, para todo $v \in V$, é um operador linear chamado de Operador Nulo. De fato, sejam $u, v \in V$,

$$0(\alpha u + v) = 0 = \alpha 0 + 0 = \alpha 0(u) + 0(v), \quad \forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Exemplo 2.8 (Operador Oposto) Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. A função $-T : V \longrightarrow V$ definida por $(-T)(v) = -T(v)$, para todo $v \in V$, é uma transformação linear (chamada de Operador Oposto), pois, se $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então

$$(-T)(\alpha u + v) = -T(\alpha u + v) = -(\alpha T(u) + T(v)) = \alpha(-T)(u) + (-T)(v).$$

Exemplo 2.9 (Operador Identidade) Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $I : V \longrightarrow V$, definido por $I(v) = v$ para todo $v \in V$. I é um operador linear, chamado de Operador Identidade. Com efeito,

$$I(\alpha u + v) = \alpha u + v = \alpha I(u) + I(v), \forall u, v \in V, \alpha \in \mathbb{K}.$$

Observação 2.5 Quanto as propriedades intrínsecas ao conceito de Transformações Lineares, se $T : V \longrightarrow W$ é um operador linear e $u, v \in V$, tem-se:

P_1) $T(0_V) = 0_W$.

De fato,

$$T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V)$$

logo,

$$0_W = T(0_V) - T(0_V) = (T(0_V) + T(0_V)) - T(0_V) = T(0_V).$$

P_2) $T(-v) = -T(v)$, para todo $v \in V$.

Pela linearidade e do item anterior,

$$0_W = T(0_V) = T(v - v) = T(v) + T(-v),$$

logo, $-T(v) = T(-v)$.

P_3) $T(u - v) = T(u) - T(v)$, para todo $u, v \in V$.

Usando a linearidade do operador linear T e o item anterior, obtém-se

$$T(u - v) = T(u + (-v)) = T(u) + T(-v) = T(u) - T(v).$$

Definição 2.8 (Núcleo e Imagem) *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Indica-se por $Ker(T)$, e denomina-se núcleo de T, o seguinte subconjunto de V*

$$Ker(T) = \{v \in V;\ T(v) = 0_W\}.$$

O núcleo de T também é denotado por $\mathcal{N}(T)$ ou $Nuc(T)$.

A imagem de T é o subconjunto $\mathcal{I}m(T) \subset W$, formado por todos os vetores $w = T(v) \in W$ que são imagens de elementos de V pela transformação T, ou seja,

$$\mathcal{I}m(T) = \{T(v);\ v \in V\}.$$

Proposição 2.2 *Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Então:*

i) $Ker(T)$ é um subespaço vetorial de V;

ii) $\mathcal{I}m(T)$ é um subespaço vetorial de W.

Prova. i) Deve-se mostrar que $Ker(T)$ satisfaz as condições de subespaço vetorial. Primeiro, por T ser transformação linear, sabe-se, pela Observação 2.5, que

$$T(0_V) = 0_W,$$

logo, 0_V (elemento neutro de V) está no núcleo.

Agora, tomando $v_1, v_2 \in Ker(T)$, tem-se $T(v_1) = 0_W$ e $T(v_2) = 0_W$, assim,

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0_W + 0_W = 0_W.$$

Isto é, $v_1 + v_2 \in Ker(T)$. Por sua vez, seja $v \in Ker(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Por se tratar de uma transformação linear, tem-se

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha \cdot 0_W = 0_W,$$

uma vez que $v \in Ker(T)$. Logo, $\alpha v \in Ker(T)$.

Dessa forma, conclui-se que $Ker(T)$ é um subespaço vetorial de V.

ii) Para o item (ii), por ser uma transformação linear, o núcleo de T tem, pelo menos, o elemento neutro de V, isto é,

$$T(0_V) = 0_W.$$

Assim, existe pelo menos um elemento de V que é levado no elemento neutro de W pela transformação T. Logo, $0_W \in \mathcal{I}m(T)$.

Agora, sejam $w_1, w_2 \in Im(T)$. Dessa forma, existem $v_1, v_2 \in V$ tais que

$$T(v_1) = w_1 \text{ e } T(v_2) = w_2.$$

Por T ser uma transformação linear, tem-se

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2.$$

Logo, $w_1 + w_2 \in \mathcal{I}m(T)$.

Por sua vez, supondo que $w \in \mathcal{I}m(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então existe um $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Como T é transformação linear, tem-se

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha w.$$

Portanto, $\alpha w \in \mathcal{I}m(T)$.

Por satisfazer todas as condições da definição de subespaço vetorial, $\mathcal{I}m(T)$ é um subespaço vetorial de W.

■

Teorema 2.1 *Um operador linear $T : V \longrightarrow W$ é injetivo se, e somente se, seu núcleo $Ker(T)$ contém apenas o vetor nulo.*

Prova. Supondo T injetivo, seja $v \in Ker(T)$. Então $T(v) = 0_W$. Mas $T(0_V) = 0_W$, conforme P_1 na Observação 2.5. Logo, $T(v) = T(0_V)$. Usando a hipótese nesta última relação, conclui-se que $v = 0_V$. Então, se T é injetivo, o núcleo de T se resume ao vetor nulo de V.

Reciprocamente, supondo $Ker(T) = \{0_V\}$. Sejam $u, v \in V$, com $T(u) = T(v)$. Então,

$$T(u - v) = T(u) - T(v) = 0_W$$

ou seja,

$$u - v \in Ker(T) = \{0_V\}$$

que é equivalente dizer

$$u - v = 0_V$$

logo,

$$u = v.$$

o que mostra que T é injetivo.

Teorema 2.2 *Se $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear e* $\dim V = \dim W$, *então, T é sobrejetora se, e somente se, T é injetora.*

Prova. A prova encontra-se em Louredo (2015), página 79.

■

2.1.3 O Espaço dos Operadores Lineares

A prova do Teorema principal deste trabalho baseia-se na minimização de uma função, construída a partir de um operador linear. Para tal, fez-se necessário o uso de algumas "operações"sobre Operadores Lineares, tais como inversibilidade, composição entre outras; logo, esta seção é de suma importância na construção do próximo capítulo. Vale ressaltar que enfatizaremos os resultados para operadores, entretanto, a maior parte destes são válidos para transformações lineares.

Seja $\mathcal{L}(V)$ o conjunto de todos os operadores lineares do $\mathbb{K}$- espaço vetorial V. Em $\mathcal{L}(V)$ pode-se introduzir a operação de soma como segue:

Dados $T, U : V \longrightarrow V$ define-se a soma $T + U$, de T com U, da seguinte maneira:

$$T + U : V \longrightarrow V \quad \text{com} \quad (T + U)(v) = T(v) + U(v), \quad \forall v \in V.$$

A aplicação $T + U \in \mathcal{L}(V)$ pois, para $v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, tem-se

$$\begin{aligned} (T + U)(v + w) &= T(\alpha v + w) + U(\alpha v + w)r \\ &= T(\alpha v) + T(w) + U(\alpha v) + U(w) \\ &= \alpha T(v) + \alpha U(v) + T(w) + U(w) \\ &= \alpha(T + U)(v) + (T + U)(w). \end{aligned}$$

Ainda, para essa adição valem as seguintes propriedades:

Proposição 2.3 *Em $\mathcal{L}(V)$ são válidas:*

i) Associatividade: $S + (T + U) = (S + T) + U, \quad \forall S, T, U \in \mathcal{L}(V)$;

ii) Comutatividade: $T + U = U + T, \quad \forall T, U \in \mathcal{L}(V)$;

iii) Existência de Elemento Neutro: O operador nulo $0 : V \longrightarrow V$ *é tal que*

$$T + 0 = T, \quad \forall T \in \mathcal{L}(V);$$

iv) Existência do Oposto: Todo operador $T \in \mathcal{L}(V)$ possui o operador oposto (ou Simétrico) $-T \in \mathcal{L}(V)$, isto é,

$$(-T) \in \mathcal{L}(V) \quad e \quad T + (-T) = 0.$$

Prova. i) Sejam $S, T, U \in \mathcal{L}(V)$ e $v \in V$,

$$\begin{aligned} [S + (T+U)(v)] &= S(v) + [(T+U)(v)] \\ &= S(v) + T(v) + U(v) \\ &= [(S+T)(v)] + U(v) \\ &= [(S+T)+U](v). \end{aligned}$$

E a associatividade segue.
ii) Se $T, U \in \mathcal{L}(V)$ e $v \in V$,

$$(T+U)(v) = T(v) + U(v) = U(v) + T(v) = (U+T)(v).$$

A segunda igualdade segue do fato de valer a comutatividade da soma em V, o que significa que $T + U = U + T$.
iii) Que o elemento neutro é o Operador Nulo se prova do seguinte modo: Para $v \in V$ e $T \in \mathcal{L}(V)$,

$$(T+0)(v) = T(v) + 0(v) = T(v) + 0 = T(v).$$

iv) Por último, recorde que, se $T \in \mathcal{L}(V)$, então $(-T)$ é aplicação dada por $(-T)(v) = -T(v), \quad v \in V$. Assim, para $v \in V$,

$$(T + (-T))(v) = T(v) + (-T)(v) = T(v) + (-T(v)) = 0 = 0(v)$$

o que mostra que, de fato, $T + (-T) = 0$.

∎

Em $\mathcal{L}(V)$ pode-se introduzir, também, a operação de produto de um escalar por um operador linear da seguinte forma:

Dados $T \in \mathcal{L}(v)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, definimos o produto αT, de T por α, como sendo

$$\begin{array}{rccl} \alpha T: & V & \longrightarrow & V \\ & v & \mapsto & (\alpha T)(v) = \alpha T(v) \end{array}.$$

A aplicação αT, assim definida, é também um operador linear, pois, se $v_1, v_2 \in V$ e $\beta \in \mathbb{K}$, tem-se:

$$\alpha T(\beta v_1 + v_2) \;=\; \alpha T(\beta v_1 + v_2)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha(\beta T(v_1) + T(v_2)) \\ &= \beta(\alpha T)(v_1) + (\alpha T)(v_2) \end{aligned}$$

na qual foi usado o fato de que T é um operador linear, que V é espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}$ é um corpo.

Assim, αT continua sendo um operador linear de V e, portanto, $\alpha T \in \mathcal{L}(V)$.

Dessa forma, ficou definida uma multiplicação de $\mathbb{K} \times \mathcal{L}(V)$ em $\mathcal{L}(v)$. Multiplicação essa que tem as seguintes propriedades:

Proposição 2.4 *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *e* $T, U \in \mathcal{L}(V)$*, então*

i) $(\alpha\beta)T = \alpha(\beta T)$;

ii) $(\alpha + \beta)T = \alpha T + \beta T$;

iii) $\alpha(T + U) = \alpha(T) + \alpha(U)$;

iv) $1T = T$

Prova. Seja $v \in V$,

i) $(\alpha\beta)T = ((\alpha\beta)T)(v) = (\alpha\beta)T(v) = \alpha(\beta T(v)) = \alpha(\beta T)$.

ii) ii) $(\alpha + \beta)T = (\alpha + \beta)T(v) = \alpha T(v) + \beta T(v) = (\alpha T + \beta T)(v)$.

iii) $(\alpha(T + U)(v)) = \alpha(T(v) + U(v)) = \alpha T(v) + \alpha U(v) = (\alpha T + \alpha U)(v)$.

iv) $(1T(v)) = 1 \cdot T(v) = T(v)$.

■

Das Proposições 2.3 e 2.4, $\mathcal{L}(V)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Ainda, em $\mathcal{L}(V)$ pode-se introduzir a operação de composição de operadores lineares como segue:

Dados os operadores lineares $T : V \longrightarrow V$ e $U : V \longrightarrow V$, define-se a aplicação composta de T e U da seguinte maneira

$$\begin{array}{rccl} T \circ U : & V & \longrightarrow & V \\ & v & \mapsto & (T \circ U)(v) = T(U(v)) \end{array}.$$

Ainda, a aplicação definida acima continua sendo um operador linear.

De fato, sejam $T, U \in \mathcal{L}(V)$, tem-se, para $v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} (T \circ U)(\alpha v + w) &= T(U(\alpha v + w)) \\ &= T(\alpha U(v) + U(w)) \\ &= \alpha T(U(v)) + \alpha T(U(w)) \\ &= \alpha(T \circ U)(v) + (T \circ U)(w). \end{aligned}$$

A partir disso, pode-se introduzir a operação de potenciação de operadores lineares como segue:

Se $T \in \mathcal{L}(V)$, definimos a n-ésima potencia de T, T^n, com $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, da seguinte forma:

$$T^n = T \circ T^{n-1}, \text{ se } n > 0 \text{ e } T^0 = I(\text{ Operador Identidade})$$

e, pela Observação acima, T^n é também linear, para todo $n \geq 0$.

Com relação a composição de operadores, tem-se as seguintes propriedades:

Proposição 2.5 *Sejam $U, T, S \in \mathcal{L}(V)$, então*

i) Associatividade: $(T \circ U) \circ S = T \circ (U \circ S)$.

ii) Elemento neutro: $I \circ T = T \circ I = T$.

iii) Distributividade em relação à adição: $T \circ (U + S) = T \circ U + T \circ S$.

Prova. i) Seja $v \in V$

$$\begin{aligned} [(T \circ U) \circ S](v) &= [(T(U)) \circ S](v) \\ &= [(T(U(S)))\,(v)] \\ &= [T \circ [(U \circ S)](v)] \\ &= [T \circ (U \circ S)](v). \end{aligned}$$

ii) Para $v \in V$, por um lado, tem-se

$$I \circ T = (I \circ T)(v) = I(T(v)) = T(v)$$

e, por outro lado,

$$T \circ I = (T \circ I)(v) = T(I(v)) = T(v).$$

iii) De fato, se $v \in V$,

$$\begin{aligned} [T \circ (U + S)](v) &= T[(U + S)(v)] \\ &= T[U(v) + S(v)] \\ &= T(U(v)) + T(S(v)) \\ &= (T \circ U + T \circ S)(v). \end{aligned}$$

■

Um conceito a ser introduzido, também, é o de operadores lineares inversos - ou invertíveis.

Seja $T : V \longrightarrow V$ uma função bijetora. Em particular, para cada $v \in V$, existe um único $u_v \in V$ tal que $T(u_v) = v$. Com isso, pode-se definir uma função $S : V \longrightarrow V$ por $S(v) = u_v$. Ainda,

$$T \circ S = I \quad \text{e} \quad S \circ T = I,$$

em que I é o Operador Identidade como no Exemplo 2.9.

De fato, para $v, u_v \in V$, como acima, tem-se

$$(T \circ S)(v) = T(S(v)) = T(u_v) = v \quad \text{e} \quad (S \circ T)(u_v) = S(T(u_v)) = S(v) = u_v.$$

Chama-se S de função inversa de T e denota-se por $S = T^{-1}$. Ainda, $(T^{-1})^n = T^{-n}$.

Com isto, tem-se o seguinte resultado:

Proposição 2.6 *Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear bijetor. Se T é invertível, então seu inverso $T^{-1} : V \longrightarrow V$ é um operador linear.*

Prova. Sejam $w_1, w_2 \in V$, então existem $u_1, u_2 \in V$ tais que

$$T(u_1) = w_1, \quad T(u_2) = w_2,$$

logo

$$T^{-1}(w_1) = u_1 \text{ e } T^{-1}(w_2) = u_2.$$

Se $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} T^{-1}(\lambda w_1 + w_2) &= T^{-1}(\lambda T(u_1) + T(u_2)) \\ &= T^{-1}(T(\lambda u_1) + T(u_2)) \\ &= T^{-1}(T(\lambda u_1 + u_2)) \\ &= \lambda u_1 + u_2 \\ &= \lambda T^{-1} w_1 + T^{-1} w_2. \end{aligned}$$

o que prova a linearidade do operador inverso.

■

2.1.4 Autovalores e Autovetores de um Operador Linear

Tendo em vista que nosso principal objetivo é provar a existência de autovalores e autovetores, faz-se necessária uma pequena introdução acerca destes conceitos. A seguir, defimos, de forma sucinta, tais objetos e apresentamos algumas de suas características.

Definição 2.9 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear.*

Um autovalor de T é um escalar λ para o qual existe um vetor não-nulo $v \in V$ tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

Um elemento $v \neq 0$ satisfazendo a expressão acima, é chamado de autovetor de T.

Observação 2.6 Sejam $T : V \longrightarrow V$ um operador linear e $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor de T.

(1) Denota-se por V_λ o subconjunto de V formado por todos os autovetores associados a λ mais o elemento neutro, isto é,

$$V_\lambda = \{v \in V; T(v) = \lambda v\}.$$

Em verdade, V_λ é um subespaço de V, chamado de Autoespaço associado ao autovalor λ.

De fato, por definição $0 \in V_\lambda$. Se $u, v \in V_\lambda$, então

$$T(u + v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u + v)$$

e $u + v \in V_\lambda$. E, se $\alpha \in \mathbb{K}$, então

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \lambda(\alpha v).$$

Portanto, V_λ é subespaço de V.

(2) Segue da definição de Autovalor que

$$\lambda \text{ é autovalor de T } \Longleftrightarrow ker(T - \lambda I) \neq \{0\} \Longleftrightarrow T - \lambda I \text{ não é injetora },$$

em que a última equivalência é uma consequência do Teorema 2.1. Agora,

$$T - \lambda I \text{ não é injetora } \Longleftrightarrow T - \lambda I \text{ não é bijetora } \Longleftrightarrow \text{ não existe } (T - \lambda I)^{-1}.$$

Ou seja, se λ é autovalor, então $T - \lambda I$ não é invertível.

Exemplo 2.10 Seja $T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ um Operador Linear dado por

$$T(x, y) = (-y, x), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{C}^2.$$

Então,

$$T((i, 1)) = (-1, i) = i(i, 1) \text{ e } T((i, -1)) = (1, i) = -i(i, -1),$$

logo, $(i, 1)$ é autovetor associado ao autovalor $\lambda = i$ e $(i, -1)$ é autovetor associado ao autovalor $-i$.

Agora, se $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tem a mesma lei de formação de T, isto é,$T_1(x,y) = (-y,x), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, então, T_1 não possui autovalores.

De fato, sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tais que

$$T_1(x,y) = \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y). \tag{2.3}$$

Logo,

$$(-y,x) = (\lambda x, \lambda y),$$

ou seja, $-y = \lambda x$ e $x = \lambda y$. Daí,

$$x = \lambda y = \lambda(\lambda(-x)) = -\lambda^2 x$$

donde,

$$x(1+\lambda^2) = 0.$$

Portanto, $x = 0$ ou $(1+\lambda^2) = 0$. Como $(1+\lambda^2) = 0$ não possui solução em $\mathbb{R}$, então $x = 0$, mas, nesse caso, $y = 0$. Ou seja, o único vetor que satisfaz 2.3 é o vetor nulo, portanto, T_1 não possui autovalores.

2.2 Tópicos em Espaços Métricos

Neste trabalho faz-se necessário o estudo de alguns conceitos relacionados a Topologia de Espaços Métricos. Tal necessidade se deve ao fato de não utilizarmos a Teoria de Matrizes e Determinantes para provar o resultado de Existência de Autovalores, sendo assim precisamos de argumentos substitutos, os quais, nesse caso, vem da Teoria de Espaços Métricos.

Assim, nesta seção apresentamos os resultados que serão utilizados como embasamento para demonstrações e entendimento de alguns conceitos do Capítulo 2. Para esta parte, nos fundamentamos em Domingues (1982),Kreyszig (1989), Lima (2015) e Munkres (1975) . Todavia, por ser uma seção auxiliar, a maior parte dos Resultados não será provada, mas atentamos que as provas encontram-se nas referências indicadas.

Definição 2.10 (Espaços Métricos) *Seja M um conjunto não vazio. Uma função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo, para $x,y,z \in M$,*

(i) $d(x,x) = 0$

(ii) $d(x,y) > 0$ *se* $x \neq y$

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$ *(simetria)*

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(desigualdade triangular)*

é dita uma métrica sobre M e o par (M, d) é chamado de Espaço Métrico.

Exemplo 2.11 O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais com a aplicação $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

é um espaço métrico.

De fato, se $x, y, z \in \mathbb{R}$, então

i) $d(x, x) = |x - x| = 0$;

ii) Se $x \neq y$, então $d(x, y) = |x - y| > 0$;

iii) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$;

iv) Para a desigualdade triangular, tem-se

$$d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z).$$

Esta métrica é chamada **métrica usual de** $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.12 Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) espaços métricos. Então, $M = M_1 \times M_2$ com a métrica

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2),$$

em que

$$x = (x_1, x_2) \quad \text{e} \quad y = (y_1, y_2) \in M$$

é um espaço métrico.

De fato, sejam $M = M_1 \times M_2$, e $x, y \in M$, tais que

$$x = (x_1, x_2) \quad \text{e} \quad y = (y_1, y_2)$$

daí,

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \geq 0$$

pois, $x_1, y_1 \in M_1$ e $x_2, y_2 \in M_2$, logo

$$d_1(x_1, y_1) \geq 0 \quad \text{e} \quad d_2(x_2, y_2) \geq 0.$$

Ainda, se $d(x, y) = 0$, então

$$0 = d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2).$$

Daí, como os valores do lado direito são sempre não negativos, tem-se

$$d_1(x_1, y_1) = 0 \quad \text{e} \quad d_2(x_2, y_2) = 0.$$

Pela definição de métrica, segue que

$$x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2,$$

ou seja, $x = y$. E, também da definição de métrica para d_1 e d_2, segue que $d(x, x) = 0$, para todo $x \in M$. Ainda,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) \\ &= d_1(y_1,x_1) + d_2(y_2,x_2) \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

Finalmente, se $z \in M$, é tal que $z = (z_1, z_2)$, então

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) \\ &\leq d_1(x_1,z_1) + d_1(z_1,y_1) + d_2(x_2,z_2) + d_2(z_2,y_2) \\ &= [d_1(x_1,z_1) + d_2(x_2,z_2)] + [d_1(z_1,y_1) + d_2(z_2,y_2)] \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Definição 2.11 (Espaços Vetoriais Normados) *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma função*

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

é uma norma se as seguintes propriedades estiverem satisfeitas:

(i) $\|v\| \geq 0$ *para todo* $v \in V$ *e* $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$*;*

(ii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ *para todo escalar* α *e todo* $v \in V$*;*

(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *para quaisquer* $u, v \in V$*.*

O par $(V, \|\cdot\|)$ *é chamado de Espaço Vetorial Normado.*

Observação 2.7 Um Espaço Vetorial Normado V é um Espaço Métrico com a métrica dada por

$$d(u,v) = \|u - v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

De fato, para $u, v, w \in V$, tem-se

i) $d(v, v) = \|v - v\| = 0$;

ii) Se $u \neq v$, então $d(u,v) = \|u - v\| > 0$, pelo item (i) da Definição de Norma.

iii) $d(u,v) = \|u - v\| = \| - (v - u)\| = |(-1)|\|v - u\| = \|v - u\| = d(v,u)$.

iv) $d(u,v) = \|u - v\| = \|u - w + w - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\| = d(u,w) + d(w,v)$, em que a desigualdade segue do item (iii) da Definição de Norma.

Nesse caso, diz-se que a métrica d é induzida pela norma.

Exemplo 2.13 O módulo de um número complexo satisfaz as condições da Definição 2.11, consequentemente, é uma norma em $\mathbb{C}$ e, portanto,

$$d(x,y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{C},$$

é uma distância em $\mathbb{C}$.

Exemplo 2.14 No Exemplo 2.6, vimos que o conjunto

$$C[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ é contínua}\}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. A aplicação $\| \cdot \|_\infty : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|, \ f \in C[0,1]$$

é uma norma.

A demonstração ocorre de maneira análoga ao exemplo anterior.

Exemplo 2.15 Sejam V um Espaço Vetorial de Dimensão Finita e $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base para V. A aplicação

$$\begin{array}{rccc} \| \cdot \| : & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & \|v\| \end{array}$$

em que $\|v\| = \max_{1 \leq i \leq n}\{|\alpha_i|\}$, em que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, com $\alpha_i \in \mathbb{K}$, é uma norma sobre V.

De fato, para $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, tem-se

$$\|v\| = 0 \Longleftrightarrow \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i| = 0 \Longleftrightarrow |\alpha_i| = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Pelas propriedades de módulo de um número real ou complexo, isto ocorre se, e somente se, $\alpha_i = 0, \quad \forall i \in i, ..., n$. E, também pelas propriedades do módulo em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\|v\| \geq 0$, para todo $v \in V$.

Agora, sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, então

$$\begin{aligned} \|\alpha v\| &= \|\alpha(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n)\| \\ &= \|(\alpha\alpha_1 v_1 + ... + \alpha\alpha_n v_n)\| \\ &= \max_{1\le i\le n} |\alpha\alpha_i| \\ &= \max_{1\le i\le n} |\alpha||\alpha_i| \\ &= |\alpha| \max_{1\le i\le n} |\alpha_i| \\ &= |\alpha|\|v\|. \end{aligned}$$

Por fim, se v é como antes e $u = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$, com $\beta_i \in \mathbb{K}$, $\forall 1 \le i \le n$, então

$$\|u + v\| = \|(\alpha_1 + \beta_1)v_1 + ... + (\alpha_n + \beta_n)v_n\| = \max_{1\le i\le n} |\alpha_i + \beta_i|.$$

Como

$$|\alpha_i + \beta_i| \le |\alpha_i| + |\beta_1| \le \max_{1\le i\le n} |\alpha_i| + \max_{1\le i\le n} |\beta_i|$$

daí, segue que

$$\|u + v\| \le \max_{1\le i\le n} |\alpha_i| + \max_{1\le i\le n} |\beta_i| = \|u\| + \|v\|.$$

Assim, $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado.

Definição 2.12 (Operador Linear Limitado) *Sejam V um espaço vetorial normado e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Então T é limitado se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todos $v \in V$, tem-se*

$$\|T(v)\| \le C\|v\|. \tag{2.4}$$

Proposição 2.7 *Se V é um Espaço Vetorial Normado de dimensão finita, então todo operador linear em V é limitado.*

Prova. A prova encontra-se em Kreyszig (1989), página 96.

■

Nas condições da Definição 2.12, observa-se que

$$\frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \le C, \quad v \ne 0$$

tomando o supremo em ambos os lados da desigualdade,

$$\sup_{v\in V} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \le C, \quad v \ne 0$$

ou, equivalentemente, pela Linearidade de T,

$$\sup_{v \in V; \|v\|=1} \|T(v)\| \leq C.$$

Este supremo, em verdade, é a menor constante tal que 2.4 se verifica e, quando $dimV < \infty$, graças a Proposição 2.7, ele define uma norma em $\mathcal{L}(V)$, ou seja,

$$\|T\| = \sup_{v \in V; \|v\|=1} \|T(v)\|, \quad \forall T \in \mathcal{L}(V).$$

A prova deste fato é apresentada no Exemplo a seguir.

Proposição 2.8 (Norma de um Operador Linear) Sejam V um espaço normado de dimensão finita e T um operador linear sobre V. Então a aplicação

$$\|T\| = \sup\{\|T(v)\| : v \in V, \ \|v\| = 1\}$$

é uma norma em $\mathcal{L}(V)$.

De fato,

i) Como $T(v) \in V$ e V é normado, segue que

$$\|T(v)\| \geq 0, \quad \forall v \in V,$$

logo, pelas propriedades de supremo,

$$\|T\| = \sup\{\|T(v)\| : v \in V, \ \|v\| = 1\} \geq 0.$$

Ainda, supondo $\|T\| = 0$, deve-se mostrar que $T = 0$. De $\|T\| = 0$, resulta que $T(v) = 0, \quad \forall v \in V$, logo, $T = 0$, pois, se $v \neq 0$,

$$\frac{\|T(v)\|}{\|v\|} = \left\| T\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| \leq \sup\{\|T(v)\| : v \in V, \ \|v\| = 1\} = \|T\| = 0.$$

Por outro lado, se $T = 0$, então $\|T\| = 0$; pois,

$$\|T\| = \sup\{\|T(v)\| : v \in V, \ \|v\| = 1\} = \sup\{0 : v \in V, \ \|v\| = 1\} = 0.$$

ii) Para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|\alpha T\| &= \sup\{\|\alpha T(v)\|, \quad v \in V, \ \|v\| = 1\} \\
&= \sup\{|\alpha|\|T(v)\|, \quad v \in V, \ \|v\| = 1\} \\
&= |\alpha| \sup\{\|T(v)\|, \quad v \in V, \ \|v\| = 1\}
\end{aligned}$$

$$= |\alpha|\|T\|.$$

iii) Por fim, sejam T, S operadores limitados. Então

$$\begin{aligned} \|T+S\| &= \sup\{\|(T+S)(v)\|, v \in V,\ \|v\| = 1\} \\ &= \sup\{\|T(v)+S(v)\|, v \in V,\ \|v\| = 1\} \\ &\leq \sup\{\|T(v)\| + \|S(v)\|, v \in V,\ \|v\| = 1\} \\ &\leq \sup\{\|T(v)\|, v \in V,\ \|v\| = 1\} + \sup\{\|S(v)\|, v \in V,\ \|v\| = 1\} \\ &= \|T\| + \|S\|. \end{aligned}$$

Observa-se que, pelo Exemplo 2.15 é sempre possível definir uma norma num espaço vetorial de dimensão finita. Essa informação nos será extremamente útil, uma vez que a prova que apresentamos a utiliza, pois a função que minimizamos depende da norma do Espaço Vetorial considerado.

Definição 2.13 (Bolas) *Seja (M, d) um Espaço Métrico e a um ponto de M. Dado um número real $r > 0$, definimos:*

i) A bola aberta de centro a e raio r como sendo o conjunto $B(a; r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r. Ou seja,

$$B(a;r) = \{x \in M;\ d(x;a) < r\}.$$

ii) A bola fechada de centro a e raio r como sendo o conjunto $B[a; r]$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor ou igual do que r. Ou seja,

$$B[a;r] = \{x \in M;\ d(x;a) \leq r\}.$$

Teorema 2.3 *Considere em $\mathbb{C}$ a distância usual dada no Exemplo 2.13. Seja $\Lambda \subset \mathbb{C}$ um conjunto com a seguinte propriedade:*

Existe $r > 0$, tal que, se $\lambda \in \Lambda$, então $B(\lambda, r) \subset \Lambda$.

Então, $\Lambda = \mathbb{C}$.

Prova. Como $\Lambda \subset \mathbb{C}$, basta provar que $\mathbb{C} \subset \Lambda$ e, para isso, seja $x_0 \in \mathbb{C}$. Considere $\lambda \in \Lambda \setminus \{x_0\}$ e o conjunto

$$[\lambda, x_0] = \{(1-t)\lambda + tx_0; t \in [0,1]\}.$$

O conjunto acima é chamado de segmento de extremos λ e x_0.

Seja $c = |\lambda - x_0|$. Temos $c > 0$, já que $\lambda \in \Lambda\backslash\{x_0\}$, isto é, $\lambda \neq x_0$, e considere $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{c}{n} < r$. Defina, para cada $i = 1, \cdots, n$, $t_i = \frac{i}{n} \in [0,1]$ e seja $x_i = (1-t_i)\lambda + t_i x_0 \in [\lambda, x_0]$. Assim,

$$|\lambda - x_1| = \left|\lambda - \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\lambda + \frac{1}{n}x_0\right)\right| = \left|\frac{1}{n}\lambda - \frac{1}{n}x_0\right| = \frac{1}{n}|\lambda - x_0| = \frac{c}{n},$$

ou seja,

$$|\lambda - x_1| < r$$

e, portanto, $x_1 \in B(\lambda, r) \subset \Lambda$, consequentemente,$x_1 \in \Lambda$ e $B(x_1, r) \subset \Lambda$.

Ainda, se $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, temos

$$\begin{aligned} |x_i - x_{i+1}| &= \left|\left(\left(1 - \frac{i}{n}\right)\lambda + \frac{i}{n}x_0\right) - \left(\left(1 - \frac{i+1}{n}\right)\lambda + \frac{i+1}{n}x_0\right)\right| \\ &= \left|-\frac{i}{n}\lambda + \frac{i}{n}x_0 + \frac{i+1}{n}\lambda - \frac{i+1}{n}x_0\right| \\ &= \frac{1}{n}|\lambda - x_0| \\ &= \frac{c}{n}, \end{aligned}$$

portanto,

$$|x_i - x_{i+1}| < r$$

e $x_{i+1} \in B(x_i, r)$. Ou seja,

$$x_2 \in B(x_1, r) \subset \Lambda,$$

logo, $x_2 \in \Lambda$ e $B(x_2, r) \subset \Lambda$. De,

$$x_3 \in B(x_2, r) \subset \Lambda,$$

temos, $x_3 \in \Lambda$ e $B(x_3, r) \subset \Lambda$. E, assim sucessivamente, até

$$x_n \in B(x_{n-1}, r) \subset \Lambda,$$

o que acarreta em $x_n \in \Lambda$. Mas,

$$x_n = \left(1 - \frac{n}{n}\right)\lambda + \frac{n}{n}x_0 = (1-1)\lambda + x_0 = x_0,$$

ou seja, $x_0 \in \Lambda$. Portanto, $\mathbb{C} \subset \Lambda$ e, consequentemente, $\Lambda = \mathbb{C}$.

$\blacksquare$

2.2.1 Sequências

Definição 2.14 (Sequências) *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow M$, é chamada sequência de elementos de M. Para $n \in \mathbb{N}$, escreve-se $x(n) = x_n$ e este é chamado de termo geral da sequência.*

As notações (x_n) ou $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ indicam uma sequência em M.

Definição 2.15 (Subsequências) *Sejam (M, d) um espaço métrico e (x_n) uma sequência em M. Uma subsequência de (x_n) é a restrição de x a um subconjunto infinito $n_1 < n_2 < \cdots$ de $\mathbb{N}$. A subsequência pode ser indicada pelas notações $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ ou, simplesmente, (x_{n_k}).*

Exemplo 2.16 A sequência $(4, 16, 64, ..., 4^k, ...)$ é uma subsequência de $(2, 4, 8, 16, ..., 2^n, ...)$, na qual $\mathbb{N}'$ é o conjunto dos números pares.

Definição 2.16 (Sequências Limitadas) *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) em M é dita limitada se existe uma constante $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, tal que*

$$d(x_n, x_m) < c, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, conclui-se que

Observação 2.8 *Toda subsequência de uma sequência limitada, em um Espaço Métrico (M, d), é também limitada.*

Observação 2.9 Se $(V, \|\cdot\|)$ é um Espaço Vetorial Normado, então a definição anterior é equivalente a

$$\|x_n\| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}.$$

De fato, utilizando a métrica proveniente da norma, seja (x_n) uma sequência tal que

$$d(x_n, x_m) < c, \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

então,

$$\begin{aligned}
\|x_n\| &\leq \|x_n - x_m\| + \|x_m\| \\
&= d(x_n, x_m) + \|x_m\| \\
&< c + \|x_m\| = c', \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, se (x_n) é tal que $\|x_n\| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$d(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\| \leq \|x_n\| + \|x_m\| \leq 2c, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Definição 2.17 (Limite de uma sequência) *Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que um ponto $p \in M$ é limite de uma sequência (x_n) de pontos de M se, para toda bola $B(p; \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq n_0 \Longrightarrow x_n \in B(p; \varepsilon).$$

Para indicar que p é limite da sequência (x_n) usa-se a notação $\lim x_n = p$ ou, ainda, $x_n \longrightarrow p$, $n \to \infty$. Para exprimir esse fato, diz-se que (x_n) é uma sequência convergente ou que (x_n) converge para p.

Exemplo 2.17 Consideremos $C[0, 1]$ com a norma $\| \cdot \|_\infty$, nesse caso, a métrica induzida pela norma é dada por

$$d(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} \{|f(t) - g(t)|\}.$$

A sequência $(f_1, f_2, \cdots)$, em que $f_n(t) = \frac{1}{n}$, para todo $t \in [0, 1]$, converge para a função constante nula.

De fato, seja $\varepsilon > 0$ e considere $n_0 \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Assim,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d(f_n, 0) = \sup_{t \in [0,1]} \{|f_n(t)|\} = \sup_{t \in [0,1]} \left\{ \frac{1}{n} \right\} = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Exemplo 2.18 Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $0 < \alpha < 1$. Definindo $x_n = n\alpha^n$, para $n \in \mathbb{N}$, segue do critério da razão para séries numéricas em $\mathbb{R}$, que

$$x_n = n \cdot \alpha^n \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty.$$

Proposição 2.9 (Unicidade do limite) *Seja (x_n) uma sequência convergente de um espaço métrico M. Então é único o limite dessa sequência.*

Prova. Sejam $a, b \in M$ tais que

$$\lim x_n = a \text{ e } \lim x_n = b.$$

Seja $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, então existem $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon \text{ e } n > n_1 \Rightarrow d(x_n, b) < \epsilon.$$

Agora, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \max\{n_0, n_1\}$, então

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2\epsilon.$$

Segue, portanto, que

$$0 \leq d(a, b) < 2\epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$. Todavia, ϵ é um número suficientemente pequeno, logo

$$d(a,b) = 0$$

assim, resulta que $a = b$.

■

Proposição 2.10 *Seja (M,d) um espaço métrico. Se uma sequência (x_n) de M converge para $p \in M$, então toda subsequência de (x_n) também converge para p.*

Prova. Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, ...)$ uma subsequência de sequência dada e consideremos $\epsilon > 0$. Da hipótese que $\lim x_n = p$ decorre que existe k tal que

$$n \geq k \Longrightarrow d(x_n, p) < \epsilon.$$

Ora, como cada $n_i \in \mathbb{N}$ e $n_1 < n_2 < ...$, então existe $n_t > k$ e portanto, para todo $n_i \geq n_t$, vale a relação

$$d(x_{n_i}, p) < \epsilon$$

o que prova que $\lim x_{n_i} = p$.

■

2.2.2 Topologia dos Espaços Métricos

Definição 2.18 (Conjuntos abertos) *Seja (M,d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset M$ se diz aberto se, para todo $p \in A$, existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que $B(p;\varepsilon) \subset A$.*

Definição 2.19 (Conjuntos fechados) *Seja (M,d) um espaço métrico. Um subconjunto $F \subset M$ se diz fechado se, e somente se, $F \setminus M$ é aberto.*

Exemplo 2.19 A bola aberta em um espaço métrico é um conjunto aberto.

Com efeito, seja $B = B(a;r)$ a bola aberta de centro a e raio $r > 0$. Com efeito, se $x \in B$, então $d(x,a) < r$, assim, $s = r - d(x,a) > 0$.
Afirmação: $B(x;s) \subset B$.

De fato, seja $y \in B(x;s)$, então

$$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + r - d(x,a) = r.$$

Portanto, que $y \in B(a;r)$. Daí, segue que $B(a;r)$ é um conjunto aberto.

Exemplo 2.20 A bola fechada é um conjunto fechado.

Se fato, seja $B = B[a;r]$ a bola fechada de centro a e raio $r > 0$. Considerando

$x \in B^C$ (o complementar de B), tem-se que

$$d(x;a) > r.$$

Ainda, sejam $s = d(x;a) - r > 0$ e $B(x;s)$ a bola de centro x e raio $s > 0$. Se $y \in B(x;s)$, então

$$d(x;a) \leq d(x;y) + d(y;a) < d(x,a) - r + d(y,a)$$

ou seja,

$$d(y;a) > r.$$

Isto é, $B(x;s) \subset B^C$. Portanto, B^C é aberto e B é fechado.

Definição 2.20 (Compacidade) *Seja (M, d) um espaço métrico. Diz-se que um subconjunto $K \subset M$ é compacto se, para toda sequência (x_n) de pontos de K, existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge para um ponto $p \in K$.*

Definição 2.21 (Conjunto Limitado) *Seja A um subconjunto de um espaço métrico (M, d). Se existe $k \in \mathbb{R}$, tal que*

$$d(x,y) \leq k$$

para todo $x, y \in A$, então A um conjunto limitado.

Proposição 2.11 *Seja V um espaço vetorial normado de dimensão finita. Então $W \subset V$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Prova. A prova encontra-se em Kreyszig (1989), página 77.

Exemplo 2.21 Seja M um espaço vetorial normado de dimensão finita, toda bola fechada é um conjunto compacto.

De fato, como já foi mostrado, a bola fechada é um conjunto fechado. Ainda, pela sua caracterização, a mesma também é um conjunto limitado. Pela Proposição anterior, conclui-se que a bola fechada é um conjunto compacto.

Observação 2.10 O exemplo anterior implica que toda sequência limitada, em um espaço vetorial normado de dimensão finita, possui uma subsequencia convergente.

De fato, basta observar que, se $\{x_n\}$ é uma sequência limitada num espaço vetorial normado de dimensão finita, então existe $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, tal que

$$\|x_n\| \leq k, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$x_n \in B[0;k], \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e, portanto, pelo exemplo anterior e pela definição de compacidade, temos o desejado.

2.2.3 Funções Contínuas

Definição 2.22 (Funções contínuas) *Sejam (M, d) e (N, d') espaços métricos. Uma função $f : M \longrightarrow N$ se diz contínua no ponto $p \in M$ se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que*

$$d(x,p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon.$$

Dizer que f é contínua significa que f é contínua em todos os pontos de M.

Proposição 2.12 *Sejam M, N espaços métricos. A fim de que a aplicação $f : M \longrightarrow N$ seja contínua no ponto $a \in M$ é necessário e suficiente que $x_n \longrightarrow a$ em M implique $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ em N.*

Prova. Seja f contínua no ponto a. Se $x_n \longrightarrow a$, então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

A partir de δ, obtém-se $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(a)) < \epsilon.$$

Logo,

$$\lim f(x_n) = f(a).$$

Reciprocamente, supondo, por absurdo, que f não seja contínua no ponto a. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, pode-se obter $x_n \in M$, com

$$d(x_n, a) < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad d(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon.$$

Ora, encontrou-se uma sequência (x_n) em M, com $x_n \longrightarrow a$ sem que $f(x_n)$ convirja para $f(a)$, o que contraria a hipótese feita. Portanto, f deve ser, necessariamente, contínua.

■

Exemplo 2.22 Seja V um espaço vetorial normado de dimensão finita, então, todo operador linear em V é contínuo.

De fato, seja $v \in V$ e $(v_n) \subset V$, então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|v_n - v\| < \frac{\epsilon}{\|T\|},$$

em que $\|T\| = \sup_{v \in V; \|v\|=1}\{\|T(v)\|\}$. Logo, para $n > n_0$,

$$\|T(v_n) - T(v)\| = \|T(v_n - v)\| \leq \|T\|\|v_n - v\| < \|T\|\frac{\epsilon}{\|T\|} = \epsilon,$$

ou seja,

$$T(v_n) \longrightarrow T(v).$$

Segue, portanto, que T é contínuo.

Proposição 2.13 *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.*

Prova. A prova encontra-se em Lima (2015), página 213.

Teorema 2.4 (Weierstrass) *Sejam (M, d) um espaço métrico e A um subconjunto compacto de M. Para toda função real contínua $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, existem $x_0, x_1 \in A$ tais que, para todo $x \in A$,*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1).$$

Prova. A Proposição anterior garante que a imagem $f(A)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Logo, é limitado e fechado. Assim, f é limitada e, fazendo $\alpha = \inf f(A)$ e $\beta = \sup f(A)$, tem-se

$$\alpha \in f(A) \quad \text{e} \quad \beta \in f(A).$$

Isto é, existem $x_0, x_1 \in A$ tais que

$$f(x_0) = \alpha \quad \text{e} \quad f(x_1) = \beta.$$

Dessa forma,

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \text{ para todo } x \in M.$$

■

3 EXISTÊNCIA DE AUTOVALORES E AUTOVETORES EM DIMENSÃO FINITA

O trato com autovalores e autovetores é uma ferramenta indispensável no estudo de Operadores Lineares e em diversas de suas aplicações. Em Espaços Vetoriais de dimensão finita é comum mostrar a equivalência entre a existência de autovalores e a existência de raízes para um polinômio (chamado de característico) cuja definição provém da teoria de matrizes e sua relação com as transformações lineares em dimenão finita. Mas, como vimos, a definição de autovalor e a teoria de Álgebra Linear até aqui introduzida, independe de matrizes e, é natural que o resultado de existência de autovalores e autovetores também possa ser provado sem o uso dessa teoria.

Neste Capítulo, nosso objetivo é garantir a existência de autovalores e autovetores em dimensão finita a partir de uma perspectiva diferente da abordagem clássica vista nos cursos introdutórios de Álgebra Linear. Para tal, faremos uso dos resultados apresentados no Capítulo anterior. As ideias apresentadas foram retiradas de Schaftingen (2013) que, por sua vez, baseou-se na ideia da prova feita por Argand em uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

Enunciaremos, agora, o Teorema principal.

Teorema 3.1 *Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Se $V \neq \{0\}$, então existem $v_* \in V \setminus \{0\}$ e $\lambda_* \in \mathbb{C}$ tais que*

$$T(v_*) = \lambda_* v_*,$$

ou seja, todo operador linear definido num Espaço Vetorial Complexo de dimensão finita possui autovalor.

Para provar o Teorema , como citado anteriormente, Schaftingen seguiu a estratégia utilizada por Argand ao provar o T.F.A. Nesta prova, ao tomar um polinômio P, a função

$$z \in \mathbb{C} \longrightarrow |P(z)|$$

é minimizada e Argand mostra que o valor mínimo dessa função é 0. Já na adaptação feita por Schaftingen - e que apresentamos aqui -, a função

$$(v, \lambda) \in (V \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \longrightarrow \frac{\|T(v) - \lambda v\|}{\|v\|}$$

é a que será minimizada. E, a partir disto, poderemos garantir a existência dos autovalores e seus autovetores associados. Chamamos atenção que, como estamos em dimensão finita, segue do Exemplo 2.15 que é possível definir uma norma em todo espaço vetorial de dimensão finita, portanto, os resultados apresentados são válidos para qualquer espaço nessas condições.

Iniciamos a demonstração do Teorema 3.1 provando que $\|T(v) - \lambda v\|$ pode ser minimizado. Para isso, utilizamos a seguinte observação:

Observação 3.1 *Se V é um espaço vetorial normado complexo de dimensão finita, considerando $\|T\| = c$, tem-se*

$$\|T(v) - \lambda v\| \geq (|\lambda| - c) \cdot \|v\|.$$

$$\|T(v)\| \leq \|T\| \cdot \|v\| = c\|v\|, \quad \forall v \in V.$$

Logo, $\lambda \in \mathbb{C}$, tem-se

$$\begin{aligned} |\lambda| \cdot \|v\| &= \|\lambda v\| \\ &= \|\lambda v - T(v) + T(v)\| \\ &\leq \|\lambda v - T(v)\| + \|T(v)\| \\ &= \|T(v) - \lambda v\| + \|T(v)\| \\ &\leq \|T(v) - \lambda v\| + c\|v\|. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\|T(v) - \lambda v\| \geq (|\lambda| - c) \cdot \|v\|.$$

Como foi obtida uma desigualdade em λ, pode-se começar a pensar em uma minimização. Provar-se-á, agora, a existência deste par (λ, v) mínimo.

Proposição 3.1 *Seja V um espaço vetorial normado complexo de dimensão finita. Se $T : V \longrightarrow V$ é um operador linear e $V \neq \{0\}$, então existe $v_* \in V \setminus \{0\}$ e $\lambda_* \in \mathbb{C}$ de tal forma que, para cada $v \in V \setminus \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,*

$$\frac{\|T(v) - \lambda v\|}{\|v\|} \geq \frac{\|T(v_*) - \lambda_* v_*\|}{\|v_*\|}.$$

Prova: Considere a função

$$\begin{array}{rccl} f: & V \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (v,\lambda) & \longmapsto & f(v,\lambda) = \|T(v) - \lambda v\|. \end{array}$$

e sejam

$$\{(v_n,\lambda_n)\} \subset V \times \mathbb{C} \text{ e } (v_0,\lambda_0) \in V \times \mathbb{C}$$

com

$$(v_n,\lambda_n) \longrightarrow (v_0,\lambda_0) \text{ em } V \times \mathbb{C},$$

então

$$\begin{array}{rcl} |f(v_n,\lambda_n) - f(v_0,\lambda_0)| & = & \Big| \|T(v_n) - \lambda_n v_n\| - \|T(v_0) - \lambda_0 v_0\| \Big| \\ & \leq & \|T(v_n) - \lambda_n v_n - T(v_0) + \lambda_0 v_0\| \\ & \leq & \|T(v_n) - T(v_0)\| + \|\lambda_n v_n - \lambda_0 v_0\|. \end{array}$$

Como $v_n \to v_0$ em V e $\lambda_n \to \lambda_0$ em $\mathbb{C}$, tem-se

$$Tv_n \longrightarrow Tv_0 \text{ e } \lambda_n v_n \longrightarrow \lambda_0 v_0,$$

donde

$$\|Tv_n - Tv_0\| \longrightarrow 0 \text{ e } \|\lambda v_n - \lambda_0 v_0\| \longrightarrow 0,$$

ou seja,

$$|f(v_n,\lambda_n) - f(v_0,\lambda_0)| \longrightarrow 0.$$

Daí, segue a continuidade.

Como $V \neq \{0\}$, existe $v' \in V$, $v \neq 0$, e pode-se tomar

$$v_0 = \frac{v'}{\|v'\|} \in V.$$

Pela Observação 3.1, existe $c > 0$ tal que, se $v \in V$ e $\|v\| = 1$, então

$$f(v,\lambda) = \|T(v) - \lambda v\| \geq |\lambda| - c,$$

portanto, se $|\lambda| > \|T(v_0)\| + c$ e $\|v\| = 1$, tem-se

$$\begin{array}{rcl} f(v_0,0) & = & \|T(v_0) - 0 \cdot v_0\| \\ & = & \|T(v_0)\| \\ & < & |\lambda| - c \\ & \leq & \|T(v) - \lambda v\| \end{array}$$

$$= \quad f(v, \lambda),$$

ou seja,

$$f(v_0, 0) \leq f(v, \lambda), \quad \forall v \in V, \quad \|v\| = 1 \quad \text{e} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ com } |\lambda| > \|T(v_0)\| + c. \tag{3.1}$$

Ainda, seja

$$K = \{(v, \lambda) \in V \times \mathbb{C}; \quad \|v\| = 1 \text{ e } |\lambda| \leq \|T(v_0)\| + c\}.$$

Se

$$\{x_n\} \subset K$$

tem-se

$$x_n = (v_n, \lambda_n) \in V \times \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

com

$$\|v_n\| = 1 \text{ e } |\lambda_n| \leq \|T(v_0)\| + c, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

As sequências $\{v_n\}$ e $\{\lambda_n\}$ em (3.2) são limitadas em V e $\mathbb{C}$, respectivamente. Logo, da Observação 2.10, $\{v_n\}$ possui subsequência $\{v_{n_k}\}$ convergente. Considere $\{\lambda_{n_k}\} \subset \{\lambda_n\}$. Como $\{\lambda_{n_k}\}$ é também limitada, pela Proposição 2.8, ela possui subsequência convergente, digamos $\{\lambda_{n_{k_j}}\}$. Nesse caso, $\{x_{n_{k_j}}\} \subset \{x_n\}$ é convergente. Dessa forma, o conjunto K é compacto.

Ainda, uma vez que f é contínua, o conjunto K é compacto e não vazio, pelo Teorema de Weierstrass, f possui mínimo em K, ou seja, existe $(v_1, \lambda_1) \in K$ tal que, para cada $(v, \lambda) \in K$,

$$f(v, \lambda) \geq f(v_1, \lambda_1). \tag{3.3}$$

Por (3.1), a desigualdade (3.3) também é satisfeita para $v \in V$ com $\|v\| = 1$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| > \|T(v_0)\| + c$, considerando $(v_2, \lambda_2) \in V \times \mathbb{C}$ tal que

$$f(v_2, \lambda_2) = min\{f(v_1, \lambda_1), f(v_0, 0)\}.$$

Finalmente, se $v \in V \setminus \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$\frac{\|T(v) - \lambda v\|}{\|v\|} = f\left(\frac{v}{\|v\|}, \lambda\right) \geq f(v_2, \lambda_2) = \|T(v_2) - \lambda_2 v_2\|.$$

Tomando $(v_*, \lambda_*) \in V \times \mathbb{C}$, de modo que

$$v_2 = \frac{v_*}{\|v_*\|} \text{ e } \lambda_* = \lambda_2,$$

segue que

$$\frac{\|T(v) - \lambda v\|}{\|v\|} \geq \|T(v_2) - \lambda_2 v_2\| = \frac{\|T(v_*) - \lambda v_*\|}{\|v_*\|}.$$

e o resultado é válido.

□

A segunda parte da prova do Teorema 3.1 consiste em mostrar que um par de mínimo produz um autovetor e seu autovalor associado. Para tal, deve-se mostrar que qualquer par mínimo que não é autovalor com seu autovetor associado produz pares mínimos adicionais.

Para auxiliar nesta tarefa, far-se-á necessário dois resultados. São eles:

Lema 3.1 *Sejam V um espaço vetorial normado complexo de dimensão finita e $S : V \longrightarrow V$ um operador linear invertível. Suponha, ainda, que $\sigma \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, e que ω é uma raiz n-ésima da unidade, isto é, $\omega^n = 1$ e $\omega^j \neq 1,\ j \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$. Se, para cada $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $S - \omega^j \sigma I$ é invertível, então*

$$\sum_{j=0}^{n-1} (S - \omega^j \sigma I)^{-1} \circ S \circ (I - (\sigma S^{-1})^n) = nI.$$

Prova: Primeiro, note que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$I - (\sigma S^{-1})^n = I - \sigma^n S^{-n} \tag{3.4}$$

e

$$(S^n - \sigma^n I) \circ S^{-n} = S^n S^{-n} - \sigma^n I S^{-n} = I - \sigma^n S^{-n},$$

ou seja,

$$I - (\sigma S^{-1})^n = (S^n - \sigma^n I) \circ S^{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $j \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$,

$$(S - \omega^j \sigma I)^{-1} \circ S \circ (S^n - \sigma^n I) \;=\; (S - \omega^j \sigma I)^{-1} \circ S \circ (S^n - (\omega^j \sigma I)^n), \tag{3.5}$$

Os operadores acima não são de igualdade imediata somente por um termo. Mas,

$$(\omega^j \sigma I)^n = (\omega^j)^n \sigma^n I = (w^n)^j \sigma^n I = \sigma^n I, \quad n \in \mathbb{N}, \quad j \in \{0, \cdots, n-1\}.$$

Como ω é raiz n-ésima primitiva da unidade, segue que 3.5 é válido.

Ainda, afirma-se que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $j \in \{0, ..., n-1\}$,

$$(S - \omega^j \sigma I)^{-1} \circ S \circ (S^n - (\omega^j \sigma I)^n) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} \sigma^k S^{n-k}$$

o que é equivalente a

$$S \circ (S^n - (\omega^j \sigma I)^n) = (S - \omega^j \sigma I) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} \sigma^k S^{n-k} \right).$$

De fato, por um lado, se $v \in V$,

$$\begin{aligned} S \circ (S^n - (\omega^j \sigma I)^n)(v) &= S \circ (S^n(v) - (\omega^j \sigma)^n(v)) \\ &= S^{n+1}(v) - (\omega^j \sigma)^n S(v) \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} & (S - \omega^j \sigma I) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} \sigma^k S^{n-k} \right)(v) \\ = \;& (S - \omega^j \sigma I) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} \sigma^k S^{n-k}(v) \right) \\ = \;& S \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} \sigma^k S^{n-k}(v) \right) - \omega^j \sigma \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} \sigma^k S^{n-k}(v) \right) \\ = \;& \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} \sigma^k S^{n-k+1}(v) \right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{j(k+1)} \sigma^{k+1} S^{n-k}(v) \right) \\ = \;& S^{n+1}(v) + \omega^j \sigma S^n(v) + \omega^{2j} \sigma^2 S^{n-1}(v) + ... + \omega^{(n-1)^j} \sigma^{(n-1)} S^2(v) \\ & - \big(\omega^j \sigma S^n(v) + \omega^{2j} \sigma^2 S^{(n-1)}(v) + ... + \omega^{jn} \sigma^n S(v) \big) \\ = \;& S^{n+1}(v) - (\omega^j \sigma)^n S(v) \\ = \;& S \circ (S^n - (\omega^j \sigma I)^n)(v). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (S - \omega^j \sigma I)^{-1} \circ S \circ (S^n - \sigma^n I) &= (S - \omega^j \sigma I)^{-1} \circ S \circ (S^n - (\omega^j \sigma I)^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} \sigma^k S^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ e } j \in \{0, ..., n-1\}. \end{aligned}$$

Ainda, variando $j \in \{0, ..., n-1\}$, obtém-se

$$\sum_{j=0}^{n-1} (S - \omega^j \sigma I)^{-1} \circ S \circ (S^n - \sigma^n I) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} \sigma^k S^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^k S^{n-k} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj}.$$

Uma vez que ω é uma raiz n-ésima da unidade e utilizando a fórmula de somatório parcial para um série geométrica, tem-se, para $k \neq 0$,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} = \omega^{0\cdot k} + \omega^{1\cdot k} + ... + \omega^{(n-1)\cdot k} = \frac{1-\omega^{kn}}{1-\omega^k} = \frac{1-1}{1-\omega^k} = 0.$$

Agora, para o caso $k = 0$, tem-se

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} = \omega^0 + \omega^{0\cdot 1} + \omega^{0\cdot 2} + ... + \omega^{0\cdot(n-1)} = 1 + 1 + ... + 1 = n \cdot 1 = n.$$

Isto é,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} = \begin{cases} \dfrac{1-\omega^{kn}}{1-\omega^k} = 0, & \text{se } k \neq 0 \\ \\ n, & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

e, assim,

$$\sum_{j=0}^{n-1} (S - \omega^j \sigma I)^{-1} \circ S \circ (S^n - \sigma^n I) = nS^n.$$

Com o auxílio de 3.4, obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} (S - \omega^j \sigma I)^{-1} \circ S \circ (I - (\sigma S^{-1})^n) &= \sum_{j=0}^{n-1} (S - \omega^j \sigma I)^{-1} \circ S \circ (I - \sigma^n S^{-n}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (S - \omega^j \sigma I)^{-1} \circ S \circ (S^n S^{-n} - \sigma^n S^{-n}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (S - \omega^j \sigma I)^{-1} \circ S \circ (S^n - \sigma^n) \circ S^{-n} \\ &= nS^n \circ S^{-n} \\ &= nI, \end{aligned}$$

e o resultado segue.

□

Lema 3.2 *Sejam V um espaço vetorial normado complexo de dimensão finita, $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, $v_* \in V \setminus \{0\}$ e $\lambda_* \in \mathbb{C}$. Se para cada $v \in V \setminus \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, tem-se*

$$\frac{\|T(v) - \lambda v\|}{\|v\|} \geq c_* := \frac{\|T(v_*) - \lambda_* v_*\|}{\|v_*\|},$$

então, para $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda - \lambda_*| < c_*$, existe $v_\lambda \in V \setminus \{0\}$ tal que

$$\frac{\|T(v_\lambda) - \lambda v_\lambda\|}{\|v_\lambda\|} = c_*$$

Prova: Suponha $c_* > 0$. Uma vez que, para cada $v \in V \setminus \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, tem-se

$$\frac{\|T(v) - \lambda v\|}{\|v\|} \geq c_*,$$

ou seja,

$$\|T(v) - \lambda v\| \geq c_* \|v\|,$$

então, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ o operador $T - \lambda I$ é uma bijeção, pois λ não pode ser um autovalor de T, já que, na equação acima, $c_*\|v\|$ é sempre diferente de zero, se $v \neq 0$. Dessa forma, $T - \lambda I$ é um operador invertível, pela Observação 2.6 e, portanto, para cada $v \in V \setminus \{0\}$,

$$\|(T - \lambda I)^{-1}(v)\| \leq \frac{\|v\|}{c_*}. \tag{3.6}$$

Em particular, isto nos permite definir

$$v_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}(T(v_*) - \lambda_* v_*). \tag{3.7}$$

Assim, basta mostrar que $\|v_*\| \leq \|v_\lambda\|$.

Pelo Lema 3.1, fazendo $S = T - \lambda_* I$ e $\sigma = \lambda_* - \lambda$, tem-se, para $n \in \mathbb{N}$ e ω raiz n-ésima da unidade,

$$\sum_{j=0}^{n-1} (T - \lambda_* I - \omega_n^j(\lambda - \lambda_*)I)^{-1} \left((T - \lambda_* I)(v_* - W_n)\right) = nv_*$$

em que $W_n = (\lambda_* - \lambda)^n (T - \lambda_* I)^{-n}(v_*)$.

Agora, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} \|nv_*\| = n\|v_*\| &= \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (T - \lambda_* I - \omega_n^j(\lambda - \lambda_*)I)^{-1} \left((T - \lambda_* I)(v_* - W_n)\right) \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left\| (T - \lambda_* I - \omega_n^j(\lambda - \lambda_*)I)^{-1} \left((T - \lambda_* I)(v_* - W_n)\right) \right\|. \end{aligned}$$

Por um lado, por 3.6, da desigualdade triangular e pela definição de c_*, se para cada $j \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\begin{aligned} &\left\| \Big(T - \Big(\lambda_* + \omega_n^j(\lambda - \lambda_*)\Big)I\Big)^{-1} \left((T - \lambda_* I)(v_* - Wn)\right) \right\| \\ \leq \ & \frac{1}{c_*} \|(T - \lambda_* I)(v_* - W_n)\| \\ \leq \ & \frac{1}{c_*} \Big(\|(T(v_*) - \lambda_* v_*\| + \|T(W_n) - \lambda_* W_n\| \Big) \end{aligned}$$

$$= \|v_*\| + \frac{1}{c_*}\left\|T(W_n) - \lambda_* W_n\right\|.$$

Por outro lado, de 3.6, 3.7 e da desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
& \left\|(T-\lambda_* I - (\lambda-\lambda_*)I)^{-1}(T-\lambda_* I)(v_* - W_n)\right\| \\
= & \left\|(T-\lambda I)^{-1}(T-\lambda_* I)(v_* - W_n)\right\| \\
= & \left\|(T-\lambda I)^{-1}(T-\lambda_* I)(v_*) - (T-\lambda I)^{-1}(T-\lambda_* I)(W_n)\right\| \\
\leq & \left\|(T-\lambda I)^{-1}(T-\lambda_* I)(v_*)\right\| + \left\|(T-\lambda I)^{-1}(T-\lambda_* I)(W_n)\right\| \\
= & \|v_\lambda\| + \frac{1}{c_*}\|(T-\lambda_* I)(W_n)\|.
\end{aligned}$$

Combinando as desigualdades anteriores que obtém-se,

$$\begin{aligned}
n\|v_*\| & \leq \sum_{j=1}^{n-1}\left[\|v_*\| + \frac{1}{c_*}\|T(W_n) - \lambda_* W_n\|\right] + \|\lambda v_\lambda\| + \frac{1}{c_*}\|T(W_n) - \lambda_* W_n\| \\
& = (n-1)\|v_*\| + \|v_\lambda\| + \frac{n}{c_*}\|T(W_n) - \lambda_* W_n\|
\end{aligned}$$

donde

$$\|v_*\| = n\|v_*\| - (n-1)\|v_*\| \leq \|v_\lambda\| + \frac{n}{c_*}\left\|T(W_n) - \lambda_* W_n\right\|. \tag{3.8}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_*}\left\|(T-\lambda_* I)W_n v_*\right\| & = \frac{1}{c_*}\left\|(T-\lambda_* I)(\lambda_* - \lambda)^n (T-\lambda I)^{-n} v_*\right\| \\
& = \frac{1}{c_*}|\lambda_* - \lambda|^n \left\|(T-\lambda_* I)^{-(n-1)} v_*\right\|
\end{aligned}$$

Como, por 3.6,

$$\begin{aligned}
\|(T-\lambda_* I)^{-(n-1)}(v_*)\| & = \|(T-\lambda_* I)^{-1}(T-\lambda_* I)^{-(n-2)} v_*\| \\
& \leq \frac{1}{c_*}\|(T-\lambda_* I)^{-(n-2)} v_*\| \\
& \leq \frac{1}{(c_*)^2}\|(T-\lambda_* I)^{-(n-3)} v_*\| \\
& \leq \frac{1}{(c_*)^{n-1}}\|v_*\|
\end{aligned}$$

então,

$$\frac{1}{c_*}\|(T-\lambda_* I)W_n(v_*)\| \leq \left(\frac{|\lambda_* - \lambda|}{c_*}\right)^n \|v_*\|.$$

Assim,

$$\frac{n}{c_*}\|(T-\lambda_* I)W_n v_*\| \leq n\left(\left(\frac{|\lambda_*-\lambda|}{c_*}\right)^n \|v_*\|\right)$$

uma vez que, por hipótese, $|\lambda - \lambda_*| < c_*$,

$$0 < \alpha = \frac{|\lambda_*-\lambda|}{c_*} < 1$$

logo, pelo Exemplo 2.18,

$$\alpha^n \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad n\cdot\alpha^n \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to +\infty$$

Fazendo $n \longrightarrow +\infty$ em 3.8, obtém-se

$$\|v_*\| \leq \|v_\lambda\|.$$

Como, por 3.7

$$T(v_*) - \lambda_* v_* = T(v_\lambda) - \lambda v_\lambda$$

segue que

$$\frac{\|T(v_\lambda)-\lambda v_\lambda\|}{\|v_\lambda\|} = \frac{\|(T-\lambda_*)v_*\|}{\|v_\lambda\|} \leq \frac{\|(T-\lambda_* I)v_*\|}{\|v_*\|} = c_* \leq \frac{\|T(v_\lambda)-\lambda v_\lambda\|}{\|v_\lambda\|}$$

portanto,

$$\frac{\|T(v_\lambda)-\lambda v_\lambda\|}{\|v_\lambda\|} = c_*.$$

Como desejado.

□

Dispondo dos resultados anteriores, mostra-se a segunda parte do Teorema.

Proposição 3.2 *Sejam V um espaço normado complexo de dimensão finita, $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, $\lambda_* \in \mathbb{C}$ e $v_* \in V \setminus \{0\}$. Se para cada $v \in V \setminus \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,*

$$\frac{\|T(v)-\lambda v\|}{\|v\|} \geq \frac{\|T(v_*)-\lambda_* v_*\|}{\|v_*\|}.$$

Então, $T(v_*) = \lambda_* v_*$.

Prova: Suponha, por contradição, $c_* = \dfrac{\|T(v_*)-\lambda_* v_*\|}{\|v_*\|} > 0.$

Definindo

$$\Lambda_* = \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ \text{existe } v_\lambda \in V\setminus\{0\} \text{ tal que } \frac{\|T(v_\lambda)-\lambda v_\lambda\|}{\|v_\lambda\|} = c_*\right\}.$$

Por hipótese, $\lambda_* \in \Lambda_*$. Pelo Lema 3, para cada $\lambda \in \Lambda_*$,

$$B_{c_*}(\lambda) \subset \Lambda_*,$$

o que é assegurado, pelo Teorema 2.3, que $\Lambda_* = \mathbb{C}$.

Assim, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, existe $v_\lambda \in V \setminus \{0\}$ tal que

$$c_* = \frac{\|T(v_\lambda) - \lambda v_\lambda\|}{\|v_{\lambda\|}}. \tag{3.9}$$

Por outro lado, pela Observação 3.1, se $|\lambda| > c_* + c$, então

$$\frac{\|T(v_\lambda) - \lambda v_\lambda\|}{\|v_\lambda\|} \geq |\lambda| - c > c_*$$

o que contradiz 3.9, logo $c_* = 0$.

Portanto,

$$0 = c_* = \frac{\|T(v_*) - \lambda_* v_*\|}{\|v_*\|} \Longrightarrow \|T(v_*) - \lambda_* v_*\| = 0 \Longrightarrow T(v_*) = \lambda_* v_*.$$

Conforme o desejado.

□

À luz de todos esses resultados, é possível demonstrar o Teorema 3.1.

Prova:**[Do Teorema 3.1]** Sob as hipóteses que, se V é um espaço vetorial complexo de dimensão finita e $T : V \longrightarrow V$ é um operador linear, donde $V \setminus \{0\}$, a Proposição 3.1 garante que existem $v_* \in V \setminus \{0\}$ e $\lambda_* \in \mathbb{C}$ de tal forma que, para cada $v \in V \setminus \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\frac{\|T(v) - \lambda v\|}{\|v\|} \geq \frac{\|T(v_*) - \lambda_* v_*\|}{\|v_*\|}.$$

Por sua vez, a Proposição 3.2 assegura que, se para cada $v \in V \setminus \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\frac{\|T(v) - \lambda v\|}{\|v\|} \geq \frac{\|T(v_*) - \lambda_* v_*\|}{\|v_*\|},$$

então,

$$T(v_*) = \lambda_* v_*.$$

E o Teorema está provado.

□

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo introdutório de Álgebra Linear é totalmente voltado para o trato com Espaços Vetoriais em dimensão finita e as Transformações Lineares definidas entre esses espaços. É comum e conveniente, pela facilidade com os cálculos, que a abordagem seja direcionado a relação dessa teoria com a Teoria de Matrizes e Determinantes, mas essas teorias são distintas e, por não ser trabalhada e, muitas vezes, sequer comentada, permite a dúvida sobre as possibilidades em desenvolver os estudos de Álgebra Linear sem o uso dessa teoria. Sendo assim, esse trabalho proporcionou esse olhar diferente acerca de resultados da Álgebra Linear sendo passíveis de serem provados, substituindo os argumentos da Teoria de Matrizes por argumentos introdutórios do estudo de topologia dos espaços métricos.

Assim, o estudo feito para a elaboração deste texto propiciou um rico itinerário sobre Operadores Lineares e demais conceitos subjacentes, através de ferramentas da Topoligia dos Espaços Métricos e da própria Álgebra Linear vistos na graduação. Aliás, foi possível perceber que as conceitos vistos ao decorrer do curso em diferentes situações, seja em disciplinas ou em projetos, mesclaram-se ao longo dessa construção e é possível emaranhar os conhecimentos de áreas aparentemente distintas.

Ademais, considerando que o estudo da teoria dos autovalores e autovetores é visto por estudantes de diversas áreas, espera-se colaborar com a produção de conhecimento científico, ao passo que fornecemos uma abordagem didática para a apresentação de um resultado que, em geral, não encontra-se em livros didáticos de Álgebra Linear. Por isto, este trabalho pode vir a ser importante para o aprimoramento destes estudos e aplicações. Bem como, destaca-se que, tal abordagem foi responsável pelo enriquecimento no alicerce da conclusão de curso e ampliou a bagagem de conhecimento ofertada.

REFERÊNCIAS

CALLIOLLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*. São Paulo: Atual, 1990. 352 p.

COELHO, F. U.; LOURENCO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. São Paulo: EDUSP, 2013. 265 p.

DOMINGUES, H. H. *Espaços Métricos e Introdução á Topologia*. São Paulo: Atual, 1982. 185 p.

DOMINGUES, H. H. *Álgebra Moderna*. 4. ed. São Paulo: Atual Editora, 2003.

HAWKINS, T. Cauchy and the spectral theory of matrices. historia mathematica. *Elsevier*, v. 2, n. 1, p. 1–29, Feb 1975.

KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: Wiley, 1989. 688 p.

LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

LIMA, E. L. Álgebra Linear. In: *Coleção Matemática Universitária*. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 357p.

LOUREDO, A. T. *Um Primeiro Curso de Álgebra Linear*. Campina Grande: EDUEPB, 2015. 356 p.

MUNKRES, J. R. *Topology: A First Course*. New Jersey: Prentice-Hall, 1975. 415 p.

PRIETO, A. B. *Quociente de Rayleigh e Algoritmos Genéticos: estudo de caso para o cálculo de Autovalores de Matrizes Simétricas*. Monografia (Dissertação) — Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, Campinas, 2016.

SCHAFTINGEN, J. V. A direct proof of the existence of eigenvalues and eigenvectors by weirstrass' s theorem. *The American Mathematical Monthly*, Philadelphia, v. 120, p. 741–746, Oct 2013.

VIEIRA, V. L. *Álgebra Abstrata para Licenciatura*. Campina Grande: EDUEPB, 2013. 613 p.