UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PEDRO HENRIQUE AMORIM DE OLIVEIRA

O PRIMÓRDIO DA TRIGONOMETRIA E APLICAÇÕES

Campina Grande
2021

PEDRO HENRIQUE AMORIM DE OLIVEIRA

O PRIMÓRDIO DA TRIGONOMETRIA E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ma. Katia Suzana Medeiros Graciano

Campina Grande
2021

O48p Oliveira, Pedro Henrique Amorim de.
O Primórdio da Trigonometria e aplicações [manuscrito] / Pedro Henrique Amorim de Oliveira. - 2021.
57 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.

"Orientação : Profa. Ma. Katia Suzana Medeiros Graciano , Coordenação do Curso de Computação - CCT."

1. História da Matemática . 2. Trigonometria. 3. Funções trigonométricas. I. Título

21. ed. CDD 516.24

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

PEDRO HENRIQUE AMORIM DE OLIVEIRA

O PRIMÓRDIO DA TRIGONOMETRIA E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano

Aprovada em: 19 / 03 / 2021.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Castor da Paz Filho

Prof. Me. Castor da Paz Filho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Prof. Me. Maria da Conceição Vieira Fernandes
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Aos meus pais, por todo amor, companheirismo e amizade, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Rosa de Lourdes Amorim e Carlos Antônio Ferreira de Oliveira, e também aos meus irmãos pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Aos meus amigos e colegas que fiz ao longo dessa trajetória, em especial a Andrieli Cavalcante, a Karina Braz, ao Paulo Ricardo e ao Ricardo Araújo.

A minha orientadora Profª. Ma. Katia Suzana Medeiros Graciano, por aceitar fazer parte deste momento, pelo suporte e incentivos.

Aos professores do curso de Matemática da UEPB por transmitirem parte de seus conhecimentos e me ajudando a moldar meu eu profissional.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha trajetória acadêmica, o meu muito obrigado.

RESUMO

O presente estudo possui como objetivo evidenciar o surgimento da trigonometria em diferentes culturas assim como algumas aplicações que podemos encontrar em nosso cotidiano. Neste trabalho estudamos a Trigonometria, partindo de uma revisão bibliográfica, tratando inicialmente do contexto histórico, dando ênfase a sua origem e evolução ao longo dos anos entre as civilizações Egípcia, Mesopotâmica e Grega. Em seguida, desenvolvemos o conteúdo sobre a Trigonometria, em que priorizamos o Triângulo Retângulo, onde demonstramos o Teorema de Pitágoras e observamos alguns conceitos importantes, tais como as razões trigonométricas no triangulo retângulo, os ângulos notáveis e a construção de sua tabela e a tabela trigonométrica. Posteriormente, trouxemos as definições e características das Funções Trigonométricas: Seno, Cosseno e Tangente. Finalizamos algumas aplicações fazendo o elo entre a Trigonometria e o nosso cotidiano. Assim, mostrando o quão importante podem ser as aplicações trigonométricas para o uso diário, facilitando a compreensão do surgimento da Trigonometria e buscamos evidenciar como a mesma era aplicada na antiguidade e sua evolução.

Palavras-Chave: História da Matemática. Trigonometria. Aplicações.

ABSTRACT

This study aims to highlight the emergence of trigonometry in different cultures, as well as some applications that we can find in our daily lives. In this work we study Trigonometry, starting from a bibliographic review, dealing with a bulletin of the historical context, emphasizing its origin and evolution over the years between the Egyptian, Mesopotamian and Greek civilizations. Next, we developed the content on Trigonometry, in which we prioritized the Right Triangle, where we demonstrated the Pythagorean Theorem and observed some important concepts, such as the trigonometric ratios in the right triangle, the notable angles and the construction of its table and trigonometric table. Subsequently, we brought the specifications and characteristics of the Trigonometric functions: Sine, Cosine and Tangent. We ended some applications by making the link between Trigonometry and our daily lives. Thus, it shows how important trigonometric applications can be for daily use, facilitating the understanding of the emergence of Trigonometry and we seek to show how it was applied in antiquity and its evolution.

Keywords: History of Mathematics. Trigonometry. Applications.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Trigonometria geralmente é vista pelos alunos como um conteúdo complicado e que raramente iremos utilizar em nossa vida, o que os levam a um bloqueio ao entendimento da trigonometria no triângulo retângulo quanto das funções trigonométricas. Devido a esta forma de pensamento, muitos alunos buscam estudar o conteúdo de forma decorativa onde é visado apenas a aprovação como o objetivo sem ter o real interesse de compreender e entender onde podemos aplicar o assunto que é de extrema importância.

Os principais motivos para a escolha do tema, Trigonometria, está relacionada no conhecimento de que é um tema de grande importância que nos leva a pensar além do horizonte e tem uma gama de aplicações e que esse conteúdo demonstra uma certa dificuldade tanto para aos alunos quanto para os professores que, muitas vezes, não conseguem levar o estudo para a realidade nas quais os alunos vivenciam, transformando assim em um tema difícil de ser compreendido.

O surgimento da Matemática permeou as primeiras civilizações, o que possibilitou o desenvolvimento de aplicações concretas como o comércio, o manejo de plantações, a medição de terra, a observação e previsão de eventos astronômicos e rituais religiosos. Nestas civilizações, os estudos de estruturas matemáticas, quais sejam: a geometria e a trigonometria surgiram e permitiram alavancar, tanto economicamente quanto culturalmente, essas sociedades (SILVA, 2014).

Nesse contexto, o presente estudo possui como objetivo evidenciar o surgimento da trigonometria em diferentes culturas assim como algumas aplicações que podemos encontrar em nosso cotidiano. Para isso, este trabalho foi fundamentado na pesquisa bibliográfica em que discutiremos o surgimento da trigonometria nas civilizações Egípcia, Babilônica e Grega, evidenciando as transformações que a trigonometria sofreu ao longo do tempo.

A trigonometria, segundo o (DICIO, 2009-2019), é um ramo da Matemática que trata do cálculo dos elementos, planos de um triângulo e aplicações de tais funções ao estudo das figuras geométricas. Tal palavra vem do grego trigono que significa triângulo, mais metron, que significa medida, derivado do Indo-Europeu me-, medir. Possivelmente, a Trigonometria iniciou-se seu estudo através da astronomia, na qual exigia o cálculo de distâncias entre pontos inacessíveis, agrimensura e nas navegações. Grande parte da evolução da Trigonometria é devida aos astrônomos babilônios, que durante muitos anos buscavam regular os movimentos dos astros. Apenas por volta do século XV, a Trigonometria foi desvinculada da astronomia, em consequência ao surgimento de aplicações em diversas áreas do conhecimento.

Segundo (SILVA, 2014), os primeiros indícios de noções trigonométricas surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e lados de triângulos semelhantes. Diante disso, podemos destacar que no Egito a trigonometria era utilizada nas construções de pirâmides, nas demarcações de terrenos através de triângulos contendo os nós. Os babilônicos que tinham um interesse pela Astronomia, por razões religiosas, como também pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio. Foram também os babilônicos que por volta do século XXVIII a.C., durante o reinado de Sargon, construíram um calendário astrológico e elaboraram, a partir do 747 a.C., uma tabua de eclipses lunares. Entretanto, foi na Grécia que a trigonometria começou a ganhar corpo e sentido com o surgimento de concepções, teoremas, axiomas de seus filósofos, onde os mesmo buscavam estudar o por quê, e um dos principais filósofos era o Hiparco de Nicéia, o qual é considerado o pai da trigonometria por grandes contribuições para o desenvolvimento da mesma.

O presente trabalho está organizado em cinco capítulos da seguinte maneira:

No Capítulo 2, relatamos um pouco sobre os primórdios históricos da trigonometria e como a mesma era aplicada no Egito, na Mesopotâmia e na Grécia.

No Capítulo 3, daremos ênfase no que diz respeito ao conteúdo de trigonometria, apresentando alguns conceitos da mesma no triangulo retângulo e a demonstração do Teorema de Pitágoras.

No Capítulo 4, abordamos de forma rápida as Funções Trigonométricas seno, cosseno e tangente com suas definições, gráficos da função e algumas características.

No Capítulo 5, apresentamos algumas aplicações relacionadas a Trigonometria no triângulo retângulo e a Funções Trigonométricas que podemos encontrar no nosso dia a dia.

No Capítulo 6, concluímos o nosso trabalho.

2 OS PRIMÓRDIOS DA TRIGONMETRIA

Neste capítulo, discutiremos a história do surgimento da trigonometria em diferentes culturas, entre elas: Egípcia, Babilônica e Grega, evidenciando as transformações que a trigonometria sofreu ao longo do tempo nestas três civilizações. O conteúdo deste capítulo foi baseado nas seguintes referências (BOYER; MERZBACH, 2019) e (EVES, 1995).

2.1 Egito Antigo

O Egito Antigo está localizado a nordeste do continente africano, encontra-se entre os desertos da Líbia e Arábia e tem como sua principal fonte o rio Nilo, que nasce abaixo da linha de equador e percorre o Egito de sul a norte e deságua no mar Mediterrâneo. Em diversos lugares, suas margens estão tomadas por vegetações, comunidades se instalaram as margens do rio e tinham a vantagem por estarem em uma região fértil para o cultivo de alimentos.

Figura 1: Mapa do Egito

Fonte: (HISTÓRIA, 2009-2021)

Com muitos conflitos entre si e diversos centros de poder do Nilo, por volta de 3500 a.C., foram unificados em dois reinos, o Baixo Egito, ao norte, onde se forma o Delta do Nilo, era considerado uma região de clima mais favorável, com temperaturas mais suaves e com mais chuvas. Já no Alto Egito, ao sul, o clima era mais seco e com poucas chuvas, sendo que as inundações do Nilo faziam com que a terra fosse extremamente fértil.

Todos os anos durante os meses de julho a outubro acontecia inundações, cheia do rio, por causa das chuvas. A agricultura no Egito dependia dos ciclos de cheias do Nilo, em seu percurso natural, o rio deixava uma grande quantidade de húmus nas terras, tornando-as, assim, terras férteis para o plantio.

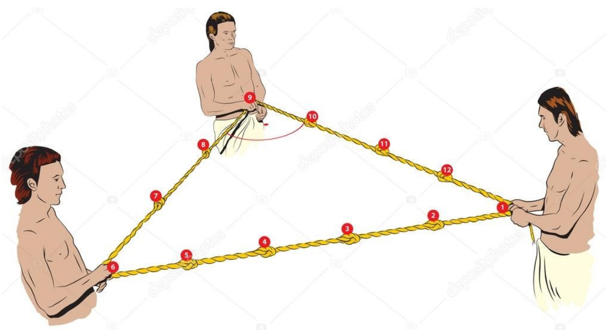
Durante o período de novembro a fevereiro, de plantio, a terra era preparada para a sementeira arando-a, na qual era feita por bois ou cavadas por enxadas. E ainda, eram utilizados os bovinos, ovino ou caprino para enterrar as sementes que foram espalhadas. Preparando-se para o período de colheitas nos meses de março a junho. Assim, o calendário egípcio era formado a partir das três estações, relacionado ao ciclo do rio: Akhert (inundação); Peret (plantio) e Shemu (colheita).

Figura 2: Lavoura - Pintura na tumba de Sennedjem

Fonte:(FERREIRA, 2020)

Ao término do período de cheia do rio era necessário fazer as remarcações das terras, pois as cheias provocavam erosões no terreno. Para isso, os egípcios chamavam os agrimensores (esticadores de corda) para fazerem a demarcação dos terrenos nas margens do rio. Era utilizado uma corda com 12 nós equidistantes e quando dobrada formava um triangulo 4 e 3, nós de lado e o último lado de 5 nós, juntando ao nó inicial. Tal triângulo era conhecido como triângulo egípcios ou de esticadores de cordas.

Figura 3: Triângulo Egípcio



Fonte: (DEPOSITPHOTOS, 2015)

Por mais que as medições fossem precisas, a área de um terreno depois da cheia dificilmente era a mesma antes da cheia. Para solucionar tal problema, os egípcios criaram números que eram representados em forma de frações, ou seja, os números fracionários. Com isso, eles utilizavam com maior frequência a fração $\frac{2}{3}$, que era representado através de um símbolo hierático. E mais, também possuíam habilidades na decomposição de frações unitárias, isto é, que tem numeradores um.

Em relação ao domínio da escrita, a mesma era restrita a um pequeno grupo de pessoas, formado pelos membros da família real, sacerdotes e funcionários conhecido como escribas. Cabia a eles ter o controle do que era produzido, das construções, de administrar a mão de obra, fazer os cálculos de impostos dos agricultores e pastores, no Egito. Tal domínio de escrita era passada de pai para filho.

Artistas egípcios costumavam representar os escribas em suas obras, seja ela em escultura ou em pinturas nas pirâmides e sarcófagos, onde geralmente os mostram com um papiro em mãos. O mesmo era uma espécie de papel primitivo, produzido através de uma planta que possui o mesmo nome e era encontrada nos pântanos da região. Para escrever no papiro, os escribas usavam pincéis de junco e tintas preta e vermelhas. Para produzir o papiro os egípcios seguiam os seguintes passos:

Figura 4: Técnica de fabricação do papiro

Fonte: (GRAFFITI, 2017)

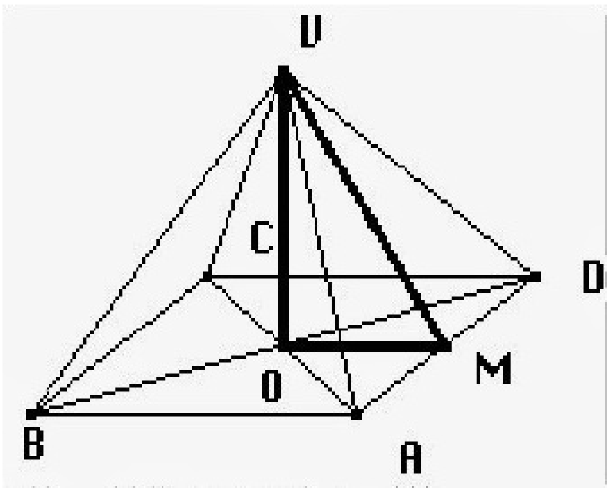
Nessa perspectiva, foi por meio do papiro que foram encontrados indicativos da trigonometria, entre esses documentos históricos relevantes para a matemática, destacamos: o Papiro de Rhind, um documento egípcio de aproximadamente 1650 a.C., manuscrito por um escriba de nome Ahmes que detalhou 85 problemas de matemática, na qual entre os problemas 56 a 60 se destacam os conceitos trigonométricos envolvendo situações de medidas de pirâmide.

Figura 5: Papiro de Rhind

Fonte: (INTERNET, 2008)

As aplicações trigonométricas feitas pelos egípcios baseavam-se, na maioria das vezes, na semelhança de triângulos. Com isso, na construção das pirâmides era primordial manter uma inclinação constante das faces, possibilitando que os egípcios introduzissem o conceito de Seqt, que condizia com a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical, essa preocupação permitiu que os egípcios buscassem a construção de um novo conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo.

Figura 6: Seqt Egípcio

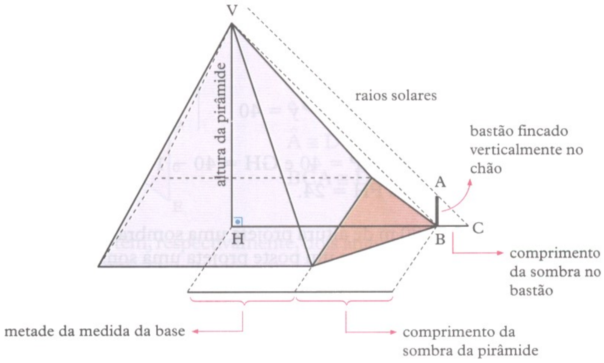


Fonte: (MATEMÁTICA, 2019)

Em 1500 a.C., aproximadamente, os egípcios começaram a utilizar uma vara vertical para associar sombras projetadas por Gnômon, a números, resultando no que seria o primeiro relógio de Sol. Por volta de 600 a.C., durante uma viagem ao Egito, Tales foi chamado pelo

Faraó para calcular a altura de uma pirâmide. Utilizando uma vara fixada ao solo, por meio da luz do sol, aguardou o momento em que a sombra da vara estivesse com o mesmo comprimento de sua altura no chão. Imediatamente foi medida a sombra da pirâmide. Devido a sua extensão, estabeleceu-se, então, que a altura da pirâmide era igual a sombra mais a metade da base (a metade da base da pirâmide oculta uma parte de sua sombra), isto é, o modelo matemático que determina a altura da pirâmide conforme figura 7:

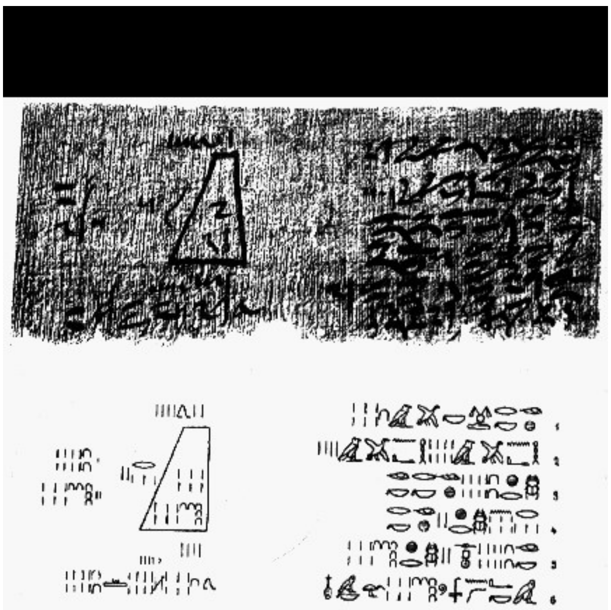
Figura 7: Medição da altura da Pirâmide



Fonte: (MATEMÁTICA, 2020)

O outro Papiro que destacamos é o Golenishchev ou de Moscou que é uma estreita tira de 5,5 metros de comprimento por 8 centímetros de largura, encontra-se atualmente em Moscou, escrito aproximadamente no ano de 1850 a.C., no qual foi encontrado um texto matemático que continha 25 problemas. Entre outros problemas, foi possível verificar que o mesmo possuía o problema envolvendo a área de um triângulo e o Volume do Tronco de Pirâmide, mas devido ao seu estado de degradação foi impossível interpretar todos os problemas contidos nele.

Figura 8: Papiro de Moscou



Fonte: (IMÁTICA, 2008)

Outros papiros, da mesma época, são o Papiro de Berlim, que engloba dois problemas que envolvem equações do 2° grau e o Papiro de Kahun, temos ainda o Papiro de Cairo (século I a.C.), onde se encontram vários problemas com o teorema de Pitágoras e que evidencia uma forte influência babilônica.

2.2 Mesopotâmia

Por volta de 4000 a.C., um dos primeiros lugares do mundo onde a escrita começou a ser praticada foi na região da Ásia, entre os sumérios, que atualmente é a região Oriente Médio. Antes, parte desse território era conhecida como Mesopotâmia.

A palavra Mesopotâmia deriva do grego e tem seu significado "entre rios", devido sua localização está em um vale entre os rios Tigres e Eufrates (no atual Iraque) que dominavam o cenário da região. Como no Egito, na Mesopotâmia os rios tem uma extrema importância vital para a sobrevivência de sua população. Tais rios correm ao longo de uma planície em que a temperatura, durante o verão, ultrapassa os 50 graus Celsius. Sua paisagem ora era desértica, por conta das tempestades de areia, ora era pantanosa, provocada pelas cheias anuais dos dois rios.

A Mesopotâmia foi habitada por diversos povos nômades, que modificaram sua paisagem, construíram suas aldeias e disputavam por território. Entres tais povos estavam os sumérios, os caldeus, os hititas, os assírios, os caldeus e os babilônicos.

Inicialmente, por volta de 4000 a 1900 a.C., a Mesopotâmia foi povoada pelos Sumérios, na qual tem sua origem desconhecida, tal povoado habitavam uma região próxima ao golfo Pérsico, onde os dois rios deságuam. Por volta de 1900 a.C., a civilização suméria desaparece, mas teve forte influência sobre os povos posteriores da região.

Os rios Tigre e Eufrates tiveram um importante papel no desenvolvimento da sociedade suméria em que, durante a primavera, os rios transbordavam deixando assim o solo enriquecido de minerais o que tornava extremamente férteis para o plantio e cultivo de alimentos.

Entretanto, era preciso ter o controle das enchentes, para poder aproveitar ao máximo a riqueza do solo, suas águas eram capazes de devastar aldeias que estava erguida nas margens dos rios.

Para isso, os sumérios realizaram grandes obras como diques para controlar as cheias, abertura de canais para irrigação de regiões distantes e construíram açudes para terem garantia de abastecimento de água à população. Essas obras, transformaram algumas partes do deserto em áreas para o cultivo de trigo, cevada e outros cereais.

Com o arado de cobre, instrumento que aprimorou as atividades agrícolas, atrelado aos bois, permitia revolver uma quantidade de terra maior, deixando a terra já pronta para a semeadura. Com maior área de plantio, os sumérios passaram a ter excedentes de alimentos, que eram estocados para os períodos difíceis e até mesmo usado como escambo.

A ampliação da produção agrícola gerou o desenvolvimento do comércio e aparecimento de outras atividades e profissões. Surgindo assim, os comerciantes, artesões, pessoas encarregadas no transporte de mercadorias, soldados, entre outros. Mediante a estas novidades, as aldeias cresceram e algumas delas se tornaram em cidades, nas quais tinham milhares de pessoas vivendo nelas. Entre as principais cidades Mesopotâmica estão Erridu, Ur, Nippur, Eruk que gozavam de autonomia e estavam sempre disputando a hegemonia.

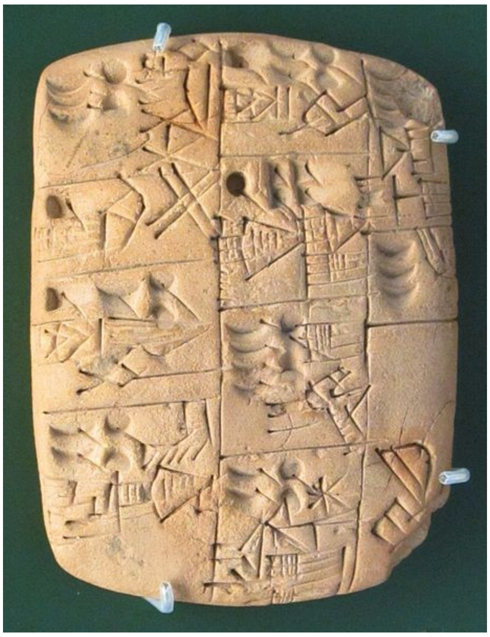
Figura 9: Cidades-Estados da Suméria

Fonte: (SUMÉRIA,)

Com a necessidade de registrar os estoques de alimento, os impostos, as transações comerciais e as leis existentes, fizeram com que os sumérios desenvolvessem um sistema de escrita, um dos mais antigos, por volta do quatro milênio a.C.

Primeiramente, as anotações eram feitas com hastes de bambu em placas de argilas umedecidas que logo após eram secadas ao sol. Posteriormente, as hastes foram trocadas por estiletes em forma de cunha. Tal escrita ficou conhecida como escrita cuneiforme. Em um primeiro momento, era representada por símbolos que significava palavras, tal escrita é conhecida como pictográfico, chegando a utilizar cerca de dois mil sinais. Com o passar do tempo os pictográficos foram aprimorando a escrita passando a conceber silabas ou sons, com isso permitiu que o número de sinais fosse reduzido a 600.

Figura 10: Tabua de Argila, Escrita Cuneiforme



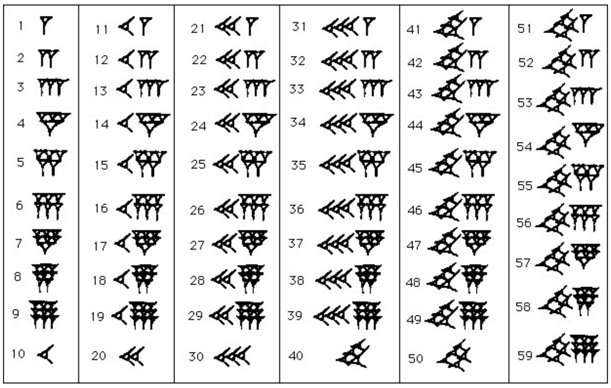
Fonte: (SUMÉRIA,)

Nesse sentido, foi por meio dos sacerdotes que aconteceram um grande desenvolvimento, principalmente na ciência e, por consequência, a matemática mesopotâmia, uma vez que era eles que detinham o saber mesopotâmico. Sua matemática era extremamente prática, assim como a matemática Egípcia. Os textos matemáticos representam cerca de 400 plaquetas que se referiam a problemas, mas nunca à teoria. As tábuas ensinavam o resultado da operação, mas não a raciocinar, a compreender, a pensar sobre o problema.

É relevante destacar que os babilônios foram excelentes astrônomos, influenciando as culturas posteriores. Aproximadamente no século 28 a.C., durante o reinado de Sargon (c.2300 a.C.–c. 2215 a.C), eles desenvolveram um calendário astrológico e elaboraram, a partir do ano 747 a.C., uma tábua de eclipses lunares.

Os babilônios possuíam grande interesse pela astronomia, pelas ligações com o calendário e as épocas de plantação. Os astrônomos babilônios por meio da posição solar, mediam os meses de acordo com as fases lunares e os anos. Nesse sentido, a numeração tinha valor devido a posição do sol e se baseava em um sistema sexagesimal, que continha combinação decimal e apenas dois sinais cuneiformes para registrar toda a numeração, devido a essa relação aconteceram certa ambiguidade e dificuldade interpretativa.

Figura 11: Representação Numérica dos Babilônicos



Fonte: (INVIVO, 2008)

Dessa forma, o número correto dependia do contexto, o que dificultava a decifração das plaquetas. Assim, o sistema sexagesimal babilônio originou-se, possivelmente, por meio da astronomia. Com isso, a contagem dos dias pelos babilônicos era composta pela revolução solar ao longo da orbita da Terra o que deve ter levado à divisão desse círculo em 360 compartimentos ou graus. A fácil divisão do círculo em seis partes iguais, pela inserção de um hexágono, teria levado a incrementação do número 60 como base no sistema de numeração (SILVA, 2014 apud COLIN RONAN, 2001). Assim, a contagem do tempo ficou divido em horas minutos e segundos, na qual uma hora equivale a sessenta minutos.

Por meio da relação posicional feito pelos babilônicos, foi desenvolvido a construção de tábuas de trigonometria, com valores correspondentes ao seno, cosseno, tangente e cotangente de um ângulo ou arco de uma circunferência que até hoje tem extrema importância no ramo da Matemática para soluções de problemas trigonométricos.

2.3 Grécia

A partir de uma ideia simples a civilização grega mudou a forma de se pensar a Matemática. Enquanto babilônicos e egípcios se perguntavam "como"?, os filósofos gregos passaram a investigar o "por quê"?. Deste modo, a matemática deixou de ser essencialmente prática, até aquele momento, para ter seu desenvolvimento voltado para concepções, teoremas e axiomas.

Todas as descobertas matemáticas realizadas ate então, serviram como contribuição para a matemática desenvolvida pelos gregos. Está que continua sendo, a base matemática que se é estudada ainda hoje. Assim, sem a axiomatização desenvolvida pelos gregos, não haveria o desenvolvimento da matemática abstrata e dos conceitos, postulados, definições e axiomas tão necessários à nossa matemática.

Pelo fato dos texto serem escritos em papiros, e ainda eram muito frágeis, a maioria dos textos dos matemáticos gregos não chegaram aos nossos dias na sua versão original, pois com a utilização os rolos de papiros comprometiam sua estrutura física.

Por conta das diversas tentativas dos gregos de resolverem problemas, fez surgir o método axiomático-dedutivo. Tal método se resulta em admitir como verdade certas proposições e a partir delas chegar a proposições mais gerais, por meio de uma sequência lógica.

Ao se depararem com problemas relacionados aos números irracionais, fizeram com que os gregos encontrassem bastante dificuldades fazendo que os desviassem da álgebra, encaminhando-se assim para a geometria. E é na geometria em que eles se destacam, com a obra de Euclides, cujo o título é "Os Elementos". Após Euclides, podemos encontrar os trabalho de Arquimedes de Siracusa e de Apolônio de Perga.

No período de Apolônio e Arquimedes, a Grécia já não era mais o centro cultural do mundo, por causa das conquistas de Alexandre, havia se transferido para a cidade de Alexandria. Depois de Apolônio e Arquimedes, a matemática grega entra no seu declínio. Com o surgimento das primeiras divisões nas ciências, na Grécia, surgem dois grupos distintos de filósofos: os Sofistas e os Pitagóricos, que começam a pensar de formas distintas a ciência, em que:

Os Sofistas abordavam os problemas matemático de forma investigativa filosófica, desenvolvendo uma matemática voltada à compreensão do que à utilidade. Enquanto, os Pitagóricos, sociedade secreta criada por Pitágoras de Samos, enfatizavam o estudo dos elementos imutáveis da natureza e da sociedade. Os Pitagóricos estudavam o geometria, aritmética, astronomia e música, o estudo de tais conhecimentos eram conhecidos como Quadrivium. A expressão de que "tudo é número", resume a filosofia dos Pitagóricos, no qual diziam que tudo pode ser expresso por meio de números na natureza.

Pode-se creditar aos Pitagóricos, duas descobertas importantes, quais são: o conceito de numero irracional por meio de segmentos de retas incomensuráveis e a axiomatização das relações entre os lados de um triângulo retângulo, mais conhecido como o Teorema de Pitágoras, na qual já era conhecido pelos povos babilônicos e egípcios em seus cotidianos.

Inicialmente, a trigonometria não era vista pelos gregos como uma ciência, mas como instrumento de auxílio para o estudo da astronomia. À medida que a trigonometria foi se desenvolvendo como instrumento dessa ciência, passou-se a servir de base para outras áreas do conhecimento. Tomada essa proporção, os gregos antigos transformaram a trigonometria em uma ciência, sendo originada a partir de questões estudadas pela astronomia.

Os principais nomes dentre tantos para o desenvolvimento da trigonometria grega são: Hiparco de Nicéia, Menelau de Alexandria e Cláudio Ptolomeu. E ainda, podemos citar também, Aristarco de Samos e Eratóstenes de Cirene, na qual indicavam problemas de relações mais sistematizadas entre ângulos e cordas.

Apesar das obras de Euclides e Arquimedes não abordarem a trigonometria explicitamente dita, elas trazem teoremas expressos em linguagem geométrica que são equivalentes as leis ou fórmulas trigonométricas. Tendo como exemplo, as proposições 12 e 13 do segundo livro de "Os Elementos", sendo elas, lei dos cossenos para ângulos obtusos e agudos, respectivamente. E ainda, os teoremas com relação ao comprimento de cordas aproveitar-se das aplicações da lei dos senos.

No que diz respeito ao teorema de Arquimedes sobre cordas fragmentadas observa-se que é similar as fórmulas do seno da soma e diferença de ângulos na linguagem trigonométrica. Como ainda não tinham sido desenvolvidas as tabelas trigonométricas, os matemáticos da época de Samos recorreram a um conhecido teorema geométrico que em notações atuais seria exposto pela seguinte desigualdade: $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} < \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$, em que $0^\circ < \beta < \alpha < 90^\circ$.

A primeira amostra da contribuição grega para o estudo da trigonometria se deu por Hípsicles, por volta de 180-125 a.C. sendo influenciado pela astronomia babilônica, em que dividiu o dia em 360 partes, ideia essa que posteriormente Hiparco adotou para generalizar um círculo qualquer.

Na segunda metade do século II a.C. Hiparco de Niceia, conhecido como o pai da trigonométrica, foi responsável pela codificação da primeira tabela trigonométrica, cujo os cálculos obtidos foram utilizados no estudo da astronomia. O mesmo também pode ser caracterizado como uma figura de transição entre a astronomia babilônia e a obra de Ptolomeu.

Na astronomia as principais contribuições atribuídas a Hiparco constituíram-se na organização de dados empíricos derivados dos babilônios, bem como na elaboração do catálogo estrelar, a duração do mês e ano, o tamanho da lua, o ângulo de inclinação da eclíptica e, por fim, a descoberta da precessão dos equinócios. Ainda, supõe-se que Hiparco teve grande participação na construção dos sistemas planetários geométricos, mas não se sabe ao certo, pois não há como comprovar até onde Apolônio aplicou os métodos de trigonometria na astronomia.

Outro grande nome da trigonometria Grega foi Menelau de Alexandria um grande matemático, sabe-se que ele escreveu várias obras relacionadas a trigonometria e geometria, através de comentários de sábios gregos e árabes, alguns desses comentadores foram, Pappus (290–350) e Proclus (412/17–485) e Theon de Alexandria (335–405).

Em meio as obras de Theon, o mesmo menciona uma coleção de seis livros sobre Cordas no Círculo, entretanto, esse trabalho assim como vários outros de Menelau se perderam, restando apenas uma versão árabe traduzida mil anos depois que o original foi escrito.

O único livro de Menelau que sobreviveu ao tempo foi o Sphaerica, um tratado em três volumes sobre geometria e trigonometria esférica, contendo algumas informações sobre o desenvolvimento da trigonometria e que foi primeiro trabalho preservado em trigonometria esférica.

No Livro I da Sphaerican tem-se a definição de triângulo esférico, na qual estabelece muitas das proposições estabelecidas por Euclides para os triângulos planos, como teoremas usuais de congruência e teoremas sobre triângulos isósceles entre outros.

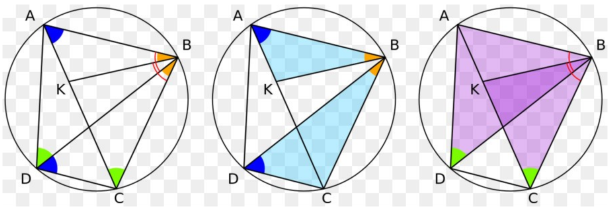
No Livro II contém teoremas de interesse da astronomia. Já no Livro III desenvolve-se a trigonometria esférica através da proposição conhecida como teorema de Menelau, esse teorema tem uma representação para os casos plano e esférico.

Cláudio Ptolomeu foi um outro grande astrônomo que desenvolveu a obra trigonométrica mais relevante e influente da antiguidade, obra essa nomeada de Almagesto, ou de Syntaxis Mathematica. Esta obra é composta por treze livros que sintetiza os trabalhos dos astrônomos da Antiguidade. Nesse sentido, podemos citar o trabalho O Almagesto que é baseado na cosmologia aristotélica, que apresenta o sistema cosmológico geocêntrico, isto é, sistema em que a Terra é o centro do Universo e que os astros e corpos celestes orbitam ao seu redor, representando círculos perfeitos, segundo Platão e Aristóteles ensinavam.

O Almagesto foi um modelo astronômico que percorreu até Copérnico no século XVI. Dos treze livros que fazem parte do Almagesto, o primeiro é formado por informações matemáticas preliminares, indispensáveis na época, sendo utilizado para investigação dos fenômenos celestes, bem como proposições sobre geometria esférica, métodos de cálculo, uma tabela de cordas e explicações gerais sobre os corpos celestes. Os demais livros são dedicados à Astronomia.

Um teorema central para o cálculo das cordas de Ptolomeu, que até hoje é conhecido como teorema de Ptolomeu, tem o seguinte enunciado: Se ABCD é um quadrilátero (convexo) inscrito em um círculo, então: 2r · BC + AB · CD = AC · BD. Nesse caso, a soma dos produtos de lados opostos de um quadrilátero inscritível é igual ao produto das diagonais, conforme mostra a figura 12.

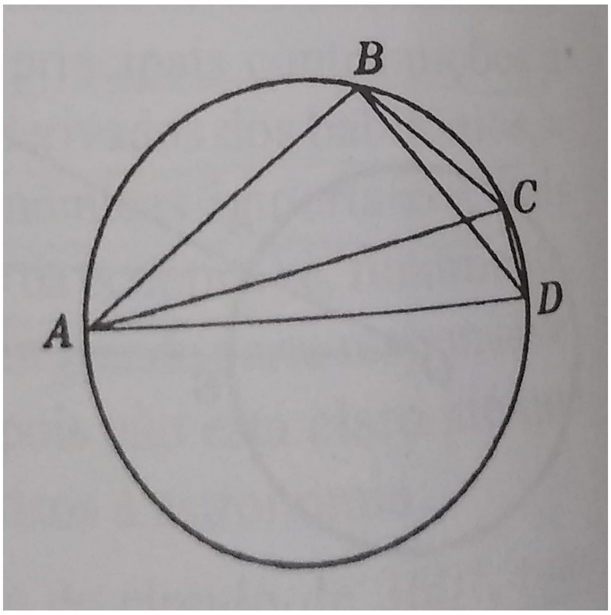
Figura 12: Teorema de Ptolomeu



Fonte: (O..., 2020)

Outro caso que podemos destacar do teorema de Ptolomeu, a figura 13, que foi bastante útil para a construção da tabela de cordas, é aquele em que um lado, AD, é o diâmetro do círculo. Então se $AD = 2r$, temos: “$2r \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$". Portanto, este teorema de Ptolomeu temos o seguinte resultado de $\text{sen}(a-b) = \text{sen}(a) \cdot \cos(b) - \cos(a) \cdot \text{sen}(b)$. Dessa forma usando raciocínio análogo obtêm-se a fórmula: $\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \text{sen}(b)$, e ao par, $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \pm \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)$. Estas quatro formulas da soma e diferença são chamadas de formula de Ptolomeu, que usava corda em vez de seno e cosseno.

Figura 13: Caso Especial do Teorema de Ptolomeu



Fonte: (BOYER; MERZBACH, 2019)

Por meio do termo de corda, Ptolomeu conhecia as propriedades de seno e cosseno. Através dessas fórmulas, o mesmo construiu uma tabela de cordas de uma circunferência, para ângulos que variam de meio em meio grau, entre 0° e 180°. Assim, inscrevendo polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 e 10 lados num círculo calculou comprimentos de corda dos ângulos de 36°, 60°, 72°, 90° e 120°.

Em posse das fórmulas Ptolomeu descobriu uma método para calcular a metade do arco de uma corda conhecida. Nessa perspectiva, trazendo para os dias atuais, o termo de cordas poderia ser representado com as seguintes formulas:

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \operatorname{sen}(b)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \pm \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

É importante salientar que a contribuição do Almagesto foi tornar conhecida a descrição quantitativa dos fenômenos naturais pela matemática, já que ele desenvolveu métodos da trigonometria esférica que simplificaram bastante as interpretações e análises de tais fenômenos.

Os gregos deram uma nova configuração a trigonometria existente até essa época, superando os feitos realizados pelos egípcios e babilônicos. Assim os trabalhos desenvolvidos pelos gregos trouxeram avanços significativos que estão contidos nas obras de Hiparco, Menelau e Ptolomeu, na qual serviram de suporte para os trabalhos matemáticos posteriores.

Portanto, apesar dos grandes feitos realizados pelos gregos, outras civilizações também trouxeram grandes contribuições para a trigonometria como os indianos, persas e árabes que por meio de seus estudos aperfeiçoaram a trigonometria existente que serviram como auxílio para o desenvolvimento de várias ciências.

No capítulo a seguir iremos abordar a trigonometria no triângulo retângulo e as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

3 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

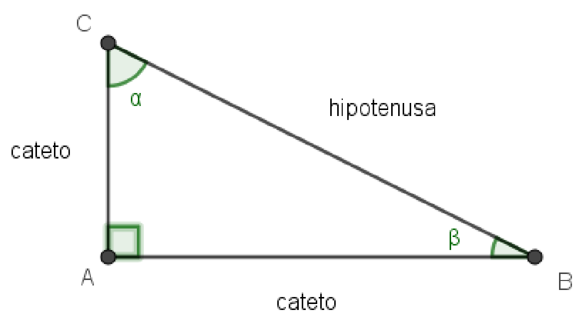
Neste capítulo vamos visualizar como podemos trabalhar com um dos triângulos mais importante, na Matemática, por sua utilidade na vida cotidiana. E ainda, definir o seno, cosseno e tangente com base no que foi extraído dos livros didáticos. O conteúdo deste capítulo foi baseado nas seguintes referências (DANTE, 2016); (PAIVA, 2015) e (IEZZI et al., 2017).

3.1 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Vimos na sessão 2 que os egípcios e babilônicos já utilizavam, empiricamente, a ideia de triângulo retângulo através de nó em corda, para fazerem as marcações de terras após a cheia de seus principais rios e construções de pirâmides sem terem o conceitos de ângulo, ainda moldados. Entretanto, foram os gregos que aprimoraram e generalizaram uma expressão que era valida para qualquer triângulo retângulo.

Com base nisso, a partir da figura 14, podemos definir de forma geral, os elementos de um triângulo retângulo:

Figura 14: Triângulo Retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

- o lado $\overline{BC}$ oposto ao ângulo reto $\widehat{A}$, é chamado de hipotenusa, tendo a como sua medida do lado;
- os lados que formam o ângulo reto, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, são chamados de catetos, em que b e c são as medidas dos lados, respectivamente;
- Os ângulos agudos são complementares, ou seja $\alpha + \beta = 90^\circ$.

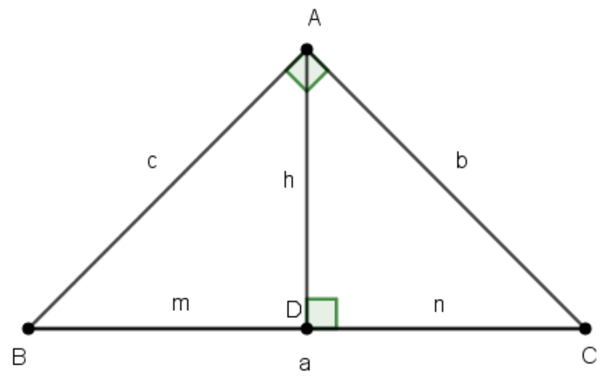
Na Matemática, uma das relações primordiais é o famoso Teorema de Pitágoras. Com ele, importantes resultados da geometria e trigonometria, mostrando assim, uma grande importância que o mesmo tem para a Matemática e é enunciado da seguinte forma:

Teorema 3.1 (Teorema de Pitágoras)**.** *Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Além disso, o teorema foi demonstrado diversas vezes, ao longo da história, por civilizações antigas, grandes matemáticos e estudiosos. Dentre as inúmeras demonstrações deste teorema, temos a algébrica onde utilizaremos as relações métricas de um triangulo retângulo, que com o auxilio da figura 15, tem-se a seguinte demonstração:

Figura 15: Altura do Triângulo Retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Demonstração. Considere um triângulo ABC, reto no ângulo $\widehat{A}$. Do vértice A tracemos a altura AD, perpendicular ao lado BC. E mais, considere $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AD} = h$, $\overline{BD} = m$, $\overline{DC} = n$.

Sabemos que a reta AD é perpendicular ao lado BC, então, temos que os triângulos DBA e DAC também os são, pois:

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$$

E ainda, no triângulo DBA em especial o ângulo $D\widehat{A}B$, temos que:

$$\widehat{B} + D\widehat{A}B = 90^\circ$$

Assim,

$$D\widehat{A}B = \widehat{C}.$$

De forma análoga, no triângulo DCA, temos:

$$\widehat{C} + D\widehat{A}C = 90^\circ$$

Então,

$$D\widehat{A}C = \widehat{B}$$

.

Deste modo, mostramos que os ângulos correspondentes dos triângulos ABC, DBA e DAC são congruentes. Consequentemente, os mesmo são semelhantes dois a dois.

Da semelhança entre os triângulos ABC e DBA, temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BA}}$$

Isto é,

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c}$$

Daí, tem-se:

$$c^2 = am \tag{1}$$

Agora, fazendo a semelhança entre os triângulo ABC e DAC, obtemos os seguintes resultados:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{AC}}$$

Logo,

$$\frac{c}{a} = \frac{h}{b}$$

Ou seja,

$$ah = bc \tag{2}$$

E mais, ainda obtemos a seguinte semelhança;

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$$

Daí,

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b}$$

Com isso,

$$b^2 = an \tag{3}$$

Por fim, comparando os triângulos DBA e DAC, obtemos o seguinte resultado;

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DA}}$$

Ou ainda,

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$

Logo,

$$h^2 = mn \tag{4}$$

Agora, somando as equações 1 e 3, obtemos:

$$c^2 + b^2 = am + an$$

Ou seja,

$$c^2 + b^2 = a(m+n) \tag{5}$$

Entretanto, como o ponto D esta localizado entre B e C, ou ainda, $\overline{BC} = \overline{DB} + \overline{DC}$, ou melhor $a = m+n$. Com isso, temos de 5 que

$$c^2 + b^2 = a \cdot a$$

Portanto,

$$a^2 = c^2 + b^2$$

□

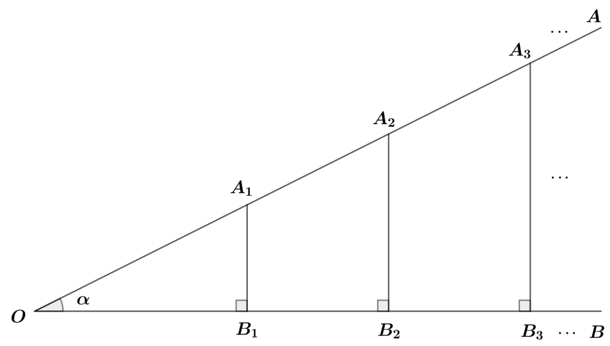
Observação. *As equações 1, 2, 3 e 4 são conhecidas como equações das relações métricas de um triângulo retângulo.*

Desse modo, o teorema nos proporciona uma vasta gama de aplicações, dentre eles, podemos aplicar para determinar a diagonal do quadrado, assim como, a altura de um triângulo equilátero. Estas aplicações citadas veremos na seção 3.1.2.

Para que possamos definir o seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo, vamos fazer uso da semelhança de triângulos. Tais definições são denotadas de razões trigonométricas no triângulo retângulo. Assim, temos:

Seja $A\widehat{O}B = \alpha$, com $0° < \alpha < 90°$. Na semirreta $\overrightarrow{OA}$, considere os pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots$, a partir desses pontos tracemos segmentos perpendiculares a semirreta $\overrightarrow{OB}$, quais sejam: $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$, $\ldots$, como mostra abaixo na figura 16.

Figura 16: Semelhança de Triângulos



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Com isso, por possuírem os mesmos ângulos ,temos que os triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, $\cdots$, são semelhantes. Pode-se, assim, escrever:

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_3B_3}{OA_3} = \ldots$$

Esta relação por não depender do comprimento de seus segmentos, mas sim de seu ângulo agudo α.

Assim, podemos definir **seno** de α, onde denotaremos por $\operatorname{sen}\alpha$. Como sendo:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Analogamente, por semelhança de triângulo, temos a definição do **cosseno** de α, na qual denotaremos de $\cos\alpha$.

Com isso,

$$\frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2} = \frac{OB_3}{OA_3} = \ldots$$

Portanto,

$$\cos\alpha = \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Por fim, também de maneira análoga, temos a definição da **tangente** de α, em que denotaremos por $\tan\alpha$.

Então,

$$\frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3} = \ldots$$

Logo,

$$\tan\alpha = \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Portanto, as razão $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ encontradas acima são denotadas de **razões trigonométricas no triângulo retângulo** em função ao angulo α. A seguir, veremos as relações entre tais razões.

3.1.1 Relações entre Seno, Cosseno e Tangente

As razões trigonométricas se concatenam de diversas formas e situações, a partir de um ângulo agudo. Com isso, será exposto, as principais relações entre elas.

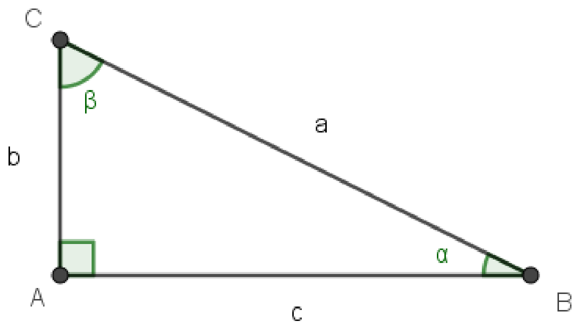
A primeira delas é a que denominamos de relação trigonométrica fundamental, em que, a mesma nos diz que

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

Onde, podemos facilmente demonstrar esta relação.

Para isso, Considere um triângulo ABC, reto em A, como mostra a figura 17.

Figura 17: Relações Trigonométricas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Do Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$a^2=b^2+c^2$$

e fazendo o uso das definições de $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ com relação a figura 17, temos:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2=\left(\frac{b^2+c^2}{a^2}\right)=\frac{\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}}=1.$$

Logo, mostramos a relação fundamental.

Aproveitando, ainda, da figura 17, conseguimos demonstrar, a segunda relação, que nos diz:

$$\tan\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Ou seja,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a}}{c} = \frac{b}{c} = \tan\alpha.$$

Portanto, temos que, $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Por fim, temos que se α e β são complementares, ou seja, $\alpha+\beta = 90°$ então o $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$. Além do mais, temos que $\tan\alpha = \dfrac{1}{\tan\beta}$.

Para demonstrar, basta usarmos as definições de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, na figura 17, então:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{c}{a} \qquad \tan\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{c}{a} \qquad \cos\beta = \frac{b}{a} \qquad \tan\alpha = \frac{c}{b}$$

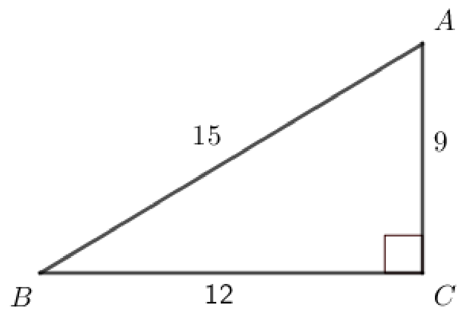
Em outras palavras, o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de seu complemento. E mais, a tangente de um ângulo agudo é igual ao inverso de seu complementar.

Com essas três relações, se conhecermos as razões trigonométricas de um ângulo agudo, passamos, então, a conhecer as razões de seus ângulos complementares.

Vejamos a seguir, alguns exemplos, extraídos dos livros didáticos, para ratificar o que foi visto anteriormente para uma melhor compreensão.

Exemplo 1. *Dado o* $\triangle ABC$*, encontre* $\operatorname{sen}\hat{A}$, $\cos\hat{B}$ *e* $\tan\hat{A}$.

Figura 18: Ilustração do Triângulo Retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Solução: Como sabemos, para achar o $\operatorname{sen}\hat{A}$, $\cos\hat{B}$ e $\tan\hat{A}$, basta recorremos a definição de seno, cosseno e tangente de um ângulo.

Assim, tem-se:

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{12}{15}$$

simplificando o numero e o denominador por 3, obtemos que :

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{4}{5}$$

E ainda, tem-se:

$$\cos\hat{B} = \frac{12}{15}$$

simplificando o numero e o denominador por 3, obtemos que :

$$\cos\hat{B} = \frac{4}{5}$$

.

Por fim, tem-se:

$$\tan\hat{A} = \frac{12}{9}$$

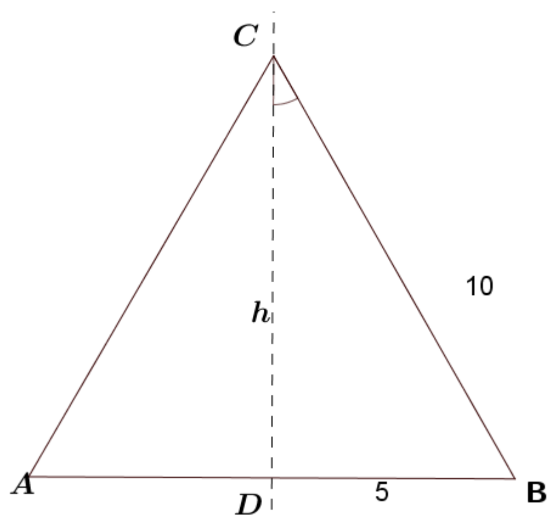
simplificando o numero e o denominador por 3, obtemos que :

$$\tan\hat{A} = \frac{4}{3}$$

Exemplo 2. *Considere ABC um triângulo equilátero de lado 10 u.c.. Calcule a sua altura,* $\operatorname{sen}\dfrac{\hat{C}}{2}$ *e* $\operatorname{sen}\hat{B}$.

Solução: Para calcularmos a altura deste triângulo equilátero, primeiramente devemos baixar um pé de perpendicular do vértice C até o ponto D, no segmento de reta $\overline{AB}$. Com isso obtemos o triângulo retângulo BDC, reto em D.

Figura 19: Ilustração o Triângulo Equilátero



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Aplicando o Teorema de Pitágoras(3.1), neste triângulo temos:

$$\begin{aligned} h^2 + 5^2 &= 10^2 \\ h^2 &= 100 - 25 \\ &= 75 \\ h &= \sqrt{75} \end{aligned}$$

logo,

$$h = 5\sqrt{3}$$

.

Para encontrarmos $\sin\frac{\hat{C}}{2}$ e $\operatorname{sen}\hat{B}$, aplicaremos a definição de seno no triângulo BDC, ou seja,

$$\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

e ainda,

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

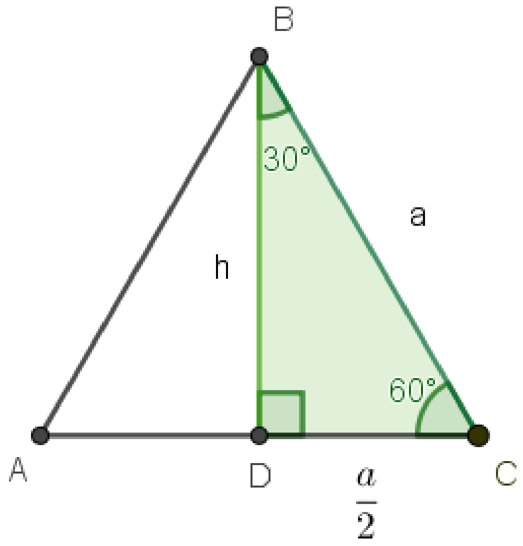
3.1.2 Ângulos Notáveis

Para estudarmos a trigonometria é de extrema importância que saibamos conhecer os valores dos ângulos de 30°, 45°, 60° por terem uma frequência maior nos problemas matemáticos, quanto nas demais áreas de exatas, envolvendo ângulos. Estes ângulos citados são conhecidos como **ângulos notaveis**.

Podemos obter tais razões, dos ângulos notáveis, com o auxílio do triângulo equilátero e do quadrado.

Para isso, considere um triângulo equilátero ABC de lado a. Sabe-se que cada ângulo interno do mesmo mede 60°. Trançando uma altura, h em um de seus vértices, obtemos dois triângulos retângulos, quais sejam, DBA e DBC, conforme mostra a figura 20, abaixo.

Figura 20: Triângulo Equilátero



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, no triângulo DBC, vamos descobrir o valor da altura, h. Para isso, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \\
h^2 &= a^2 - \frac{a^2}{4} \\
&= \frac{4a^2 + a^2}{4} \\
&= \frac{3a^2}{4} \\
h &= \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}}
\end{aligned}
$$

Sendo assim,

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Deste mesmo triângulo, vamos obter os valores do seno, cosseno e tangente de 30° , então:

Usando a definição de seno deste triangulo, tem-se:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} 30^\circ &= \frac{\frac{a}{2}}{a} \\
&= \frac{\cancel{a}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{a}}
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Fazendo o mesmo com o cosseno, tem-se:

$$
\begin{aligned}
\cos 30^\circ &= \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} \\
&= \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a} \\
&= \frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{2\cancel{a}}
\end{aligned}
$$

Com isso,

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{7}$$

Por fim, temos a tangente:

$$
\begin{aligned}
\tan 30^\circ &= \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{\cancel{a}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{a}\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Obtendo assim,

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \tag{8}$$

E mais, temos que o ângulo de 60° , é o complemento do ângulo de 30° . Com isso tem-se que:

$$\operatorname{sen} 60° = \cos 30°$$

Ou ainda,

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{9}$$

Já o cosseno, tem-se:

$$\cos$$
$$ang 60 = \operatorname{sen} 30°$$

Com isso,

$$\cos 60° = \frac{1}{2} \tag{10}$$

Por fim, temos que a tangente é:

$$\tan 60° = \frac{\operatorname{sen} 60°}{\cos 60°}$$

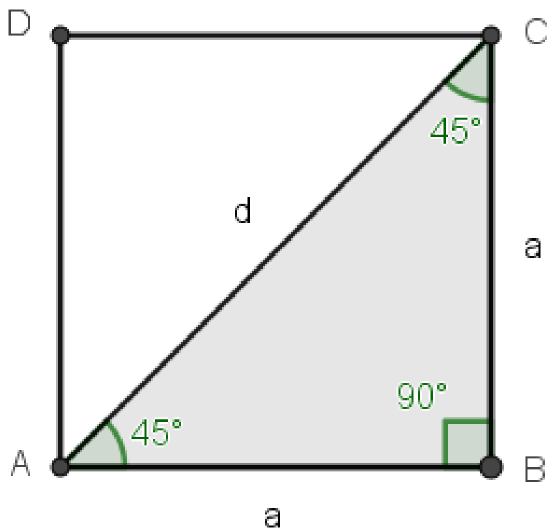
$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}$$

Logo,

$$\tan 60° = \sqrt{3} \tag{11}$$

Agora, considere um quadrado ABCD de lado a. Sabe-se que cada ângulo interno do mesmo é dividido por uma diagonal, de medida d, gerando assim, dois triângulos retângulos com ângulos de 45°, conforme mostra a figura 21:

Figura 21: Quadrado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, reto em B, obtêm-se o valor da diagonal, d, ou seja:

$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 + a^2 \\ &= 2a^2 \\ d &= \sqrt{2a^2} \\ &= a\sqrt{2} \end{aligned}$$

Logo,

$$d = a\sqrt{2}$$

.

Agora, podemos encontrar os valores do seno, cosseno e tangente de 45°: Encontrando o seno, tem-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 45^\circ &= \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Então,

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{12}$$

E ainda, encontrando o cosseno, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\cos 45^\circ &= \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{13}$$

Observação. *Podemos perceber que* $\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ$*, pois os mesmos são complementares.*

Portanto, como sabemos que o valor da tangente é a razão entre o seno e o cosseno, em que ambos são iguais. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
\tan 45^\circ &= \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\tan 45^\circ = 1. \tag{14}$$

Após os cálculos e utilizando os valores encontrados, podemos, então, construir a tabela 1, com os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis.

Tabela 1: **Ângulos Trigonométricos Notáveis**

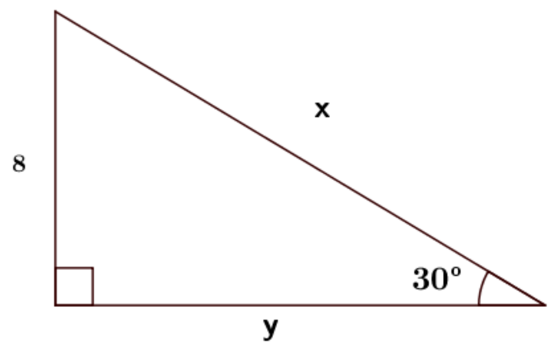
Relações Trigonométricas	Ângulos		
	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: (DANTE, 2014)

Assim, podemos então identificar facilmente os valores dos ângulos notáveis, tais valores que são bastante utilizadas em aplicações, na áreas de exatas, na forma fracionária, em quanto os demais valores são representados na forma decimal para facilitar os cálculos. Vejamos a seguir, alguns exemplos nos quais podemos aplicar os Ângulos Notáveis para uma melhor fixação.

Exemplo 3. *Dado o $\triangle$ ABC, encontre o valor de x e y.*

Figura 22: Triângulo Retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Solução: Para descobrirmos os valores de x e de y, basta-nos observar qual a relação dos dois com triângulo retângulo e o ângulo de 30°.

Ou seja, se olharmos para o x, percebemos que o mesmo está oposto ao ângulo reto, sendo assim, o x é a nossa hipotenusa. Já, no que diz respeito ao y notamos que ele é um cateto deste triângulo, mas ao relacionarmos o mesmo com o ângulo dado, reparamos que é adjacente a este ângulo. Com isso, podemos usar o seno para encontrarmos o valor de x e o cosseno para encontrarmos o valor de y.

Tendo nota disso, podemos resolver a questão, assim:

Para encontrar o valor de x:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{8}{x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{8}{x}$$

Fazendo meio pelos extremos, temos que:

$$x = 16$$

Para encontrar o valor de y:

$$\cos 60^\circ = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{16}$$

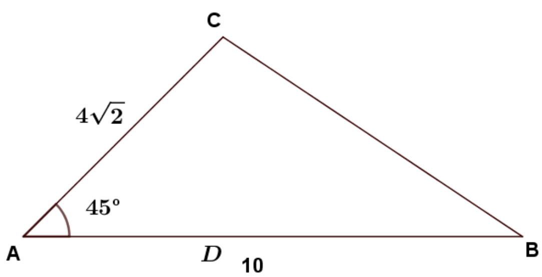
$$2y = 16\sqrt{3}$$

Assim, temos que:

$$y = 8\sqrt{3}.$$

Exemplo 4. *Dado o $\triangle$ ABC, calcule a área deste triângulo.*

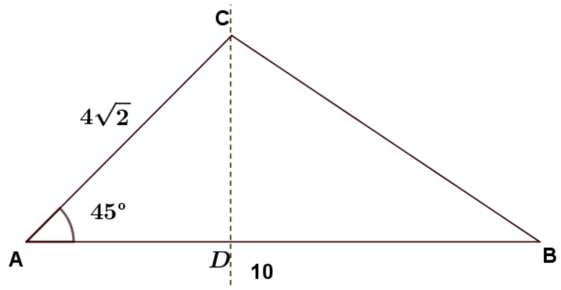
Figura 23: Triângulo ABC



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Solução: Para calcularmos a área deste triângulo, primeiramente temos que encontrar sua altura. Para isso, Do vértice C baixemos uma perpendicular até o ponto D que se encontra no segmento de reta $\overline{AB}$, formando um triângulo retângulo ADC.

Figura 24: Triângulo ABC com a altura CD



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Aplicando a definição de seno neste triângulo tem-se:

$$\begin{aligned}
sen 45° &= \frac{h}{4\sqrt{2}} \\
\frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{h}{4\sqrt{2}} \\
2h &= 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} \\
2h &= 8 \\
h &= 4
\end{aligned}$$

Assim, a área do triângulo é:

$$\begin{aligned}
A_{\triangle} &= \frac{b\cdot h}{2} \\
&= \frac{10\cdot 4}{2} \\
&= \frac{40}{2}
\end{aligned}$$

Logo,

$$A_{\triangle} = 20.$$

Como cada ângulo agudo possui um valor único para seno, cosseno e tangente, na segunda metade do século II a.C., Hiparco de Niceia, codificou a primeira tabela trigonométrica, visando facilitar os cálculos. A mesma fornece os valores do seno, cosseno e tangente, na forma decimal, dos ângulos de 1° a 89°, conforme mostra a tabela 2.

Tabela 2: **Tabela Trigonométrica**

Ângulo	sen	cos	tan	Ângulo	sen	cos	tan
1°	0,017	1,000	0,017	46°	0,719	0,719	1,036
2°	0,035	0,999	0,035	47°	0,731	0,682	1,072
3°	0,052	0,999	0,052	48°	0,743	0,669	1,111
4°	0,070	0,998	0,070	49°	0,755	0,656	1,150

5°	0,087	0,996	0,087	50°	0,766	0,643	1,192
6°	0,105	0,995	0,105	51°	0,777	0,629	1,235
7°	0,122	0,993	0,123	52°	0,788	0,616	1,280
8°	0,139	0,990	0,141	53°	0,799	0,602	1,327
9°	0,156	0,988	0,158	54°	0,809	0,588	1,376
10°	0,174	0,985	0,176	55°	0,819	0,574	1,428
11°	0,191	0,982	0,194	56°	0,829	0,559	1,483
12°	0,208	0,978	0,213	57°	0,839	0,545	1,540
13°	0,225	0,974	0,231	58°	0,848	0,530	1,600
14°	0,242	0,970	0,249	59°	0,857	0,515	1,664
15°	0,259	0,966	0,268	60°	0,866	0,500	1,732
16°	0,276	0,961	0,287	61°	0,875	0,485	1,804
17°	0,292	0,956	0,306	62°	0,883	0,469	1,881
18°	0,309	0,951	0,325	63°	0,891	0,454	1,963
19°	0,326	0,946	0,344	64°	0,899	0,438	2,050
20°	0,342	0,940	0,364	65°	0,906	0,423	2,145
21°	0,358	0,934	0,384	66°	0,914	0,407	2,246
22°	0,375	0,927	0,404	67°	0,921	0,391	2,356
23°	0,391	0,921	0,424	68°	0,927	0,375	2,475
24°	0,407	0,914	0,445	69°	0,934	0,358	2,605
25°	0,423	0,906	0,466	70°	0,940	0,342	2,747
26°	0,438	0,899	0,488	71°	0,946	0,326	2,904
27°	0,454	0,891	0,510	72°	0,951	0,309	3,078
28°	0,469	0,883	0,532	73°	0,956	0,292	3,271
29°	0,485	0,875	0,554	74°	0,961	0,276	3,487
30°	0,500	0,866	0,577	75°	0,966	0,259	3,732
31°	0,515	0,857	0,601	76°	0,970	0,242	4,011
32°	0,530	0,848	0,625	77°	0,974	0,225	4,332
33°	0,545	0,839	0,649	78°	0,978	0,208	4,705
34°	0,559	0,829	0,675	79°	0,982	0,191	5,145
35°	0,574	0,819	0,700	80°	0,985	0,174	5,671
36°	0,588	0,809	0,727	81°	0,988	0,156	6,314
37°	0,602	0,799	0,754	82°	0,990	0,139	7,115
38°	0,616	0,788	0,781	83°	0,993	0,122	8,144
39°	0,629	0,777	0,810	84°	0,995	0,105	9,514
40°	0,643	0,766	0,839	85°	0,996	0,087	11,430
41°	0,656	0,755	0,869	86°	0,998	0,070	14,301

42°	0,669	0,743	0,900	87°	0,999	0,052	19,081
43°	0,682	0,731	0,933	88°	0,999	0,035	28,636
44°	0,719	0,719	0,966	89°	1,000	0,017	57,290
45°	0,707	0,707	1,000				

Fonte: (DANTE, 2014)

Com isso, encerramos a parte trigonométrica no triangulo retângulo e a seguir iremos definir as Funções Trigonometrias e suas características.

4 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

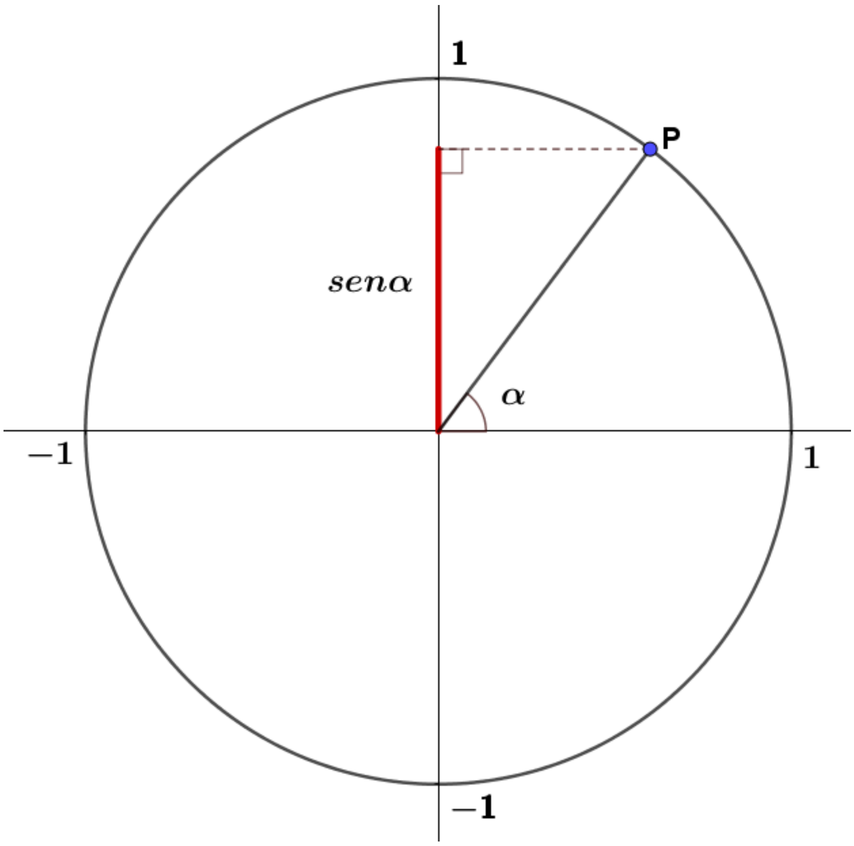
Neste capítulo exibiremos a definição das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente.

4.1 Função Seno

Denominamos de função seno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para cada valores atribuídos de **x** um seno, ou seja, $f(x) = \operatorname{sen} x$.

E ainda, a $f(x)$ corresponde à sua imagem, o ponto, **P** na circunferência trigonométrica. Circunferência essa que varia de -1 a 1 no eixo das ordenadas, com isso, tem-se que, $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$.

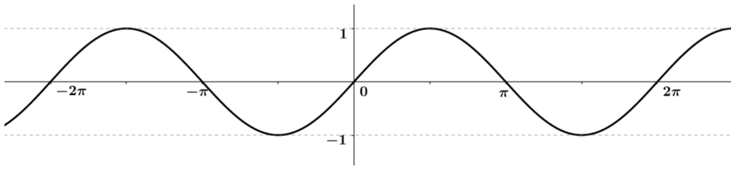
Figura 25: Seno de um Arco Trigonométrico



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Assim, o gráfico da função seno é o conjunto de todos os pontos (x, $\sin x$), $\forall x \in \mathbb{R}$, como mostra a figura 26:

Figura 26: Gráfico da Função Seno



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

E mais, podemos identificar características da função seno, quais sejam:

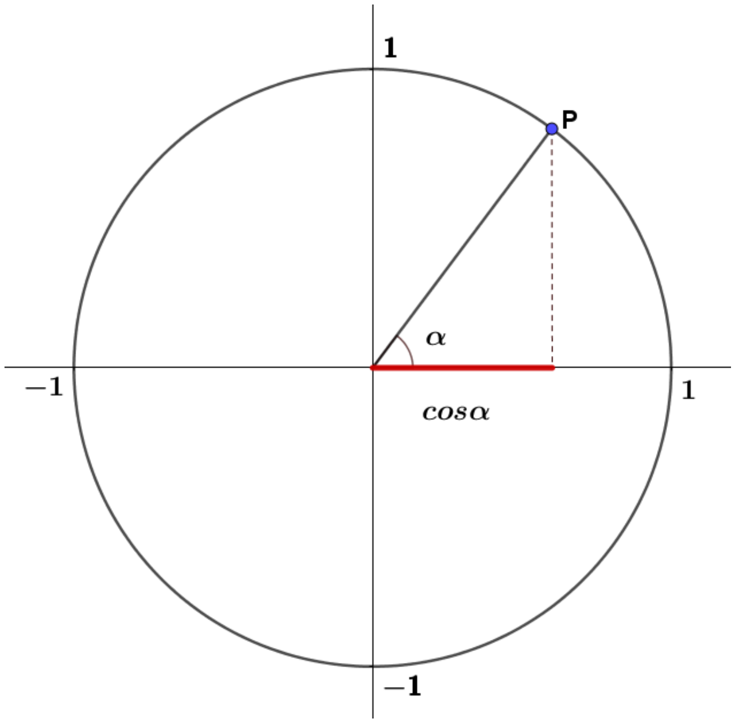
- O domínio e contradomínio da função seno são iguais, ou seja: $D(f) = \mathbb{R} = CD(f)$;
- O domínio e contradomínio da função seno são iguais, ou seja: $D(f) = \mathbb{R} = CD(f)$;
- O conjunto imagem da função é o intervalo entre $[-1, 1]$, como vimos acima, com isso tem-se: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$;
- Tem-se que a função **f** é crescente no primeiro e quarto quadrantes, e decrescente no segundo e terceiro quadrantes;
- Está função tem sinais positivos no primeiro e segundo quadrante, enquanto no terceiro e quarto possui sinais negativos;
- A função é periódica e seu período é 2π. Pois, $x + k \cdot 2\pi$, com k inteiro e x sendo ângulo, obtêm a mesma imagem no circulo trigonométrico, logo, $\text{sen} x = \text{sen}(x + k \cdot 2\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- Ainda temos que a função **f** é ímpar, $\forall x \in \mathbb{R}$, pois, $\text{sen}(-x) = -\text{sen} x$;
- Enfim, temos que o zero da função seno é dado por: $f(x) = 0$, se $x = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

4.2 Função Cosseno

Analogamente, denominamos de função cosseno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para cada valores atribuídos de **x** ao seu cosseno, ou seja, $f(x) = \cos x$.

E mais, a $f(x)$ corresponde à sua imagem, o ponto, **P** na circunferência trigonométrica, que varia de -1 a 1 no eixo das abscissas, então, tem-se que, $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Figura 27: Cosseno de um Arco Trigonométrico



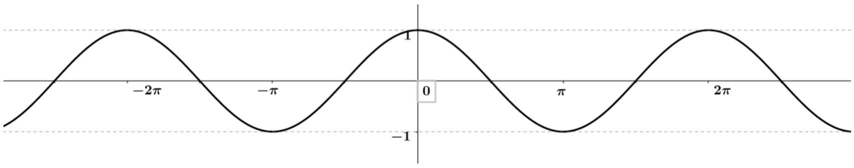
Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

A função cosseno possui as seguintes propriedades, quais sejam:

- O domínio e contradomínio da função cosseno são iguais, ou seja: $D(f) = \mathbb{R} = CD(f)$;
- O conjunto imagem da função é o intervalo entre $[-1,1]$, com isso, tem-se: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$;
- Tem-se que a função **f** é decrescente no primeiro e segundo quadrantes, e crescente no terceiro e quarto quadrantes;
- Como na função seno, a função cosseno também é periódica e seu período é 2π. Pois, $x + k \cdot 2\pi$, com k inteiro e x sendo ângulo, obtêm a mesma imagem no circulo trigonométrico, logo, $\cos x = \cos(x + k \cdot 2\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- Ao contrario da função seno, a função cosseno é par, $\forall x \in \mathbb{R}$, já que, $\cos(-x) = \cos x$;
- Está função tem sinais positivos no primeiro e quarto quadrante, enquanto no segundo e terceiro possui sinais negativos;
- Por fim, temos o zero da função cosseno que é dada por: $f(x) = 0$, se $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Com isso, podemos traçar o gráfico da função cosseno que é o conjunto de todos os pontos (x, $\cos x$), $\forall x \in \mathbb{R}$, como mostra a figura 28:

Figura 28: Gráfico da Função Cosseno



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

4.3 Função Tangente

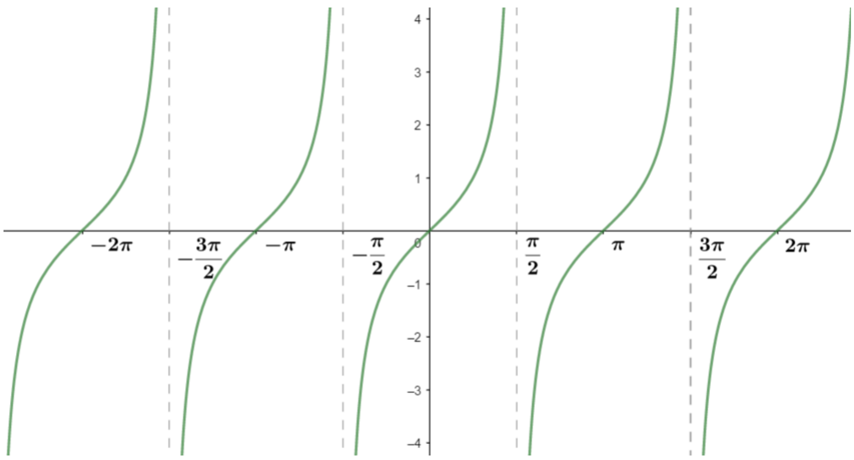
Denominamos a função tangente a função $f : A \to \mathbb{R}$, para cada valores atribuídos de **x** a $f(x) = \tan x$, em que $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})\}$.

A função tangente possui as seguintes características:

- A função tangente é dada pelo quociente entre as funções seno e cosseno $\tan x = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos x}$. Assim, o seu domínio possui uma restrição, pois o denominador, a função cosseno, tem que ser diferente de zero, $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, $D(f) = x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- O contradomínio e a sua imagem são iguais, com isso, $Im(f) = CD(f) = \mathbb{R}$;
- Temos ainda, a sua função é crescente em qualquer quadrante do circulo trigonométrico;
- Assim como as funções seno e cosseno, a função tangente é periódica, na qual seu período é π;
- Sua função tem sinais positivos no primeiro e terceiro quadrante, enquanto no segundo e quarto possui sinal negativo;
- Por fim, $f(x) = 0$, se $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Após estas características, podemos então esboçar o gráfico da função tangente, conforme mostra a figura 29

Figura 29: Gráfico da Função Tangente



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Podemos observar no gráfico da função tangente, figura 29, que nos múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ não tem nenhum ponto associado a eles, isso ocorre pois são exatamente os pontos onde a função cosseno é nula.

Assim, finalizamos as definições das Funções Trigonometrias e suas características. A seguir, iremos mostrar algumas aplicações sobre a Trigonometria que podemos utilizar com base em tudo que estudamos até aqui.

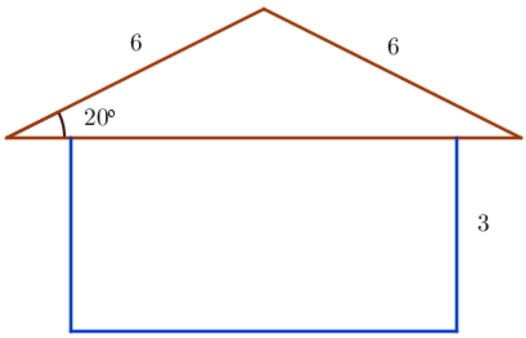
5 APLICAÇÕES

As aplicações trigonométricas já surgiram no Egito envolvendo as medições e construções das pirâmides segundo vestígios encontrados no Papiro de Rind entre outros. Na Babilônia, a trigonometria foi usada na construção do calendário, em épocas de plantios e para determinar as estações do ano. Diversos textos matemáticos mostram a utilização da trigonometria neste período e em períodos futuros.

Neste capítulo iremos apresentar algumas situações problemas da trigonometria que podemos encontrar em nosso cotidiano. O conteúdo deste capitulo foi baseado nas seguintes referências (DANTE, 2014); (FAVILLI, 1987); (PAIVA, 2015) e (IEZZI et al., 2017).

Aplicação 1. *Na construção de um telhado, foram usadas telhas francesas. O "caimento"do telhado é de* 20° *em relação ao plano horizontal. Sabendo que em cada lado da casa foram construídos 6 m de telhado e, até a laja do teto, a casa tem 3 m de altura, determine a que altura se encontra o ponto mais alto do telhado dessa casa.*

Figura 30: Ilustração da Casa

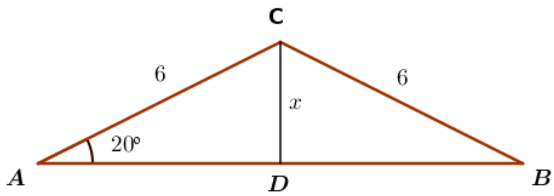


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Solução: Para descobrirmos o ponto mais alto, primeiramente devemos entrar a altura da laje do teto até o ponto mais alto do telhado.

Como isso, trançando uma perpendicular do ponto mais alto até a laje do telhado, obtemos um triângulo retângulo, como mostra a figura abaixo:

Figura 31: Ilustração do Telhado



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Agora, ao analisarmos o triângulo ADC, verificamos que podemos utilizar a definição de seno. E ainda, recorrendo aos valores da tabela 2, tem-se:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{\pi}{9} &= \frac{x}{6}\\
0,342 &= \frac{x}{6}\\
x &= 0,342\cdot 6\\
x &= 2,052
\end{aligned}
$$

Assim, a altura da laje do teto até o ponto mais alto do telhado mede 2,052 m

Logo, o ponto mais alto é igual à: $3m+2,052m = 5,052m$.

Aplicação 2. *Determine os possíveis valores reais de* **m** *para que se tenha, simultaneamente,* $\operatorname{sen}\alpha = \frac{m}{2}$ *e* $\cos\alpha = m-1$.

Solução: Utilizaremos a equação fundamental da trigonometria para encontrarmos tais valores de m. Tal equação é dada do $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Do enunciado da questão sabe-se que: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{m}{2}$ e $\cos\alpha = m-1$. Aplicando-as na equação fundamental obtêm-se:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{m}{2}\right)^2 + (m-1)^2 &= 1\\
\frac{m^2}{4} + m^2 - 2m + 1 &= 1\\
\frac{m^2+4m^2}{4} - 2m &= 0\\
\frac{5m^2}{4} - 2m &= 0
\end{aligned}
$$

Resolvendo está equação de 2ª grau incompleta, colocando o m em evidência, tem-se:

$$
m\left(\frac{5m}{4} - 2\right) = 0
$$

Assim, obtemos dois valores para m, ou seja:

$$
m = 0
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\frac{5m}{4} - 2 &= 0\\
5m - 8 &= 0\\
m &= \frac{8}{5}
\end{aligned}
$$

Assim, os possíveis valores de m que satisfazem são: $m = 0$ ou $m = \frac{8}{5}$.

Aplicação 3. *(Enem-MEC) Um satélite de telecomunicações,* ***t*** *minutos após ter atingido sua órbita, está a* ***r*** *quilômetros de distância do centro da Terra. Quando* ***r*** *assume seus valores máximos e mínimos, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de* ***r*** *em função de* ***t*** *seja dado por*

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0,15 \cdot \cos(0,06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de ***r****, no apogeu e no perigeu, representado por* ***S****. O cientista deveria concluir que, periodicamente,* ***S*** *atinge o valor de:*

Solução: Para que r atinga seu apogeu, o cosseno tem que atingir seu valor máximo, ou seja, $\cos t = 1$. E para atingir seu perigeu, o cosseno tem que atingir seu valor mínimo, ou seja, $\cos t = -1$. Com isso, tem-se:

Calculando o apogeu:

$$\begin{aligned} r_M &= \frac{5865}{1 + 0,15 \cdot 1} \\ &= \frac{5865}{1,15} \\ r_M &= 5100km(apogeu) \end{aligned}$$

Calculando o perigeu:

$$\begin{aligned} r_m &= \frac{5865}{1 + 0,15 \cdot (-1)} \\ &= \frac{5865}{0,85} \\ r_m &= 6900km(perigeu) \end{aligned}$$

Assim, como S é a soma do apogeu com o perigeu, tem-se:

$$S = 5100 + 6900$$

$$S = 12.000.$$

Aplicação 4. *Sabendo que* ***x*** *é um número real pertence ao intervalo* $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$*, determine os possíveis valores reais de* ***m*** *de modo que tenhamos* $\cos x = \frac{2m}{5}$.

Solução: Como x pertence ao terceiro quadrante, então o cosseno é limitado entre $-1 \leq \cos x \leq 0$.

E ainda, $\cos x = \frac{2m}{5}$, então:

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{2m}{5} \leq 0 \\ -5 \leq 2m \leq 0 \\ \frac{-5}{2} \leq m \leq 0 \end{aligned}$$

Assim, os possíveis valores reais são: $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-5}{2} \leq m \leq 0\right\}$.

Aplicação 5. *Em uma ilha, certo tipo de vegetação é abundante em determinadas épocas do ano e escassa em outras. A área S , em quilômetros quadrados, ocupada por esta vegetação na ilha, ao longo do ano, pode ser expressa por meio da função:*

$$S(t) = 100 + 50 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{6}$$

, em que t= 1,t= 2,t= 3,$\cdots$ t= 12 representam o final dos meses de janeiro, fevereiro, março, $\cdots$ e dezembro, respectivamente.

Com base nisso, ao longo do ano, qual é a maior área da ilha ocupada por esta vegetação?

Solução: Para que haja a maior área de ocupação da vegetação, a função S tem que atingir seu valor máximo, S_M, ou seja, quando sen $\frac{\pi t}{6}$ = 1.

Com isso,

$$S_M = 100 + 50 \cdot 1$$

assim,

$$S_M = 150$$

Logo, a maior área ocupada pela vegetação ao longo do ano é de $150km^2$.

Aplicação 6. *Considerem, no universo dos números reais, a equação $\frac{-1+3\cos x}{2} = m$, na incógnita x. Para que os valores reais de m essa equação possui raiz no terceiro quadrante?*

Solução: Tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{-1+3\cos x}{2} &= m \\ 3\cos x &= 2m - 1 \\ \cos x &= \frac{2m-1}{3} \end{aligned}$$

Para que x seja uma medida do terceiro quadrante, devemos ter $-1 < \cos x < 0$, então temos:

$$-1 < \frac{2m-1}{3} < 0$$

Resolvendo esta inequação, concluímos que:

$$\begin{aligned} -1 < \frac{2m-1}{3} &< 0 \\ -3 < 2m - 1 &< 0 \\ -2 < 2m &< 1 \\ -1 < m &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Logo, a equação terá raiz no terceiro quadrante se, e somente se, $-1 < m < \frac{1}{2}$.

Fechamos assim, o conteúdo de Trigonometria mostrando algumas aplicações da mesma, aplicações essas que são utilizadas desde as antigas civilizações e serviram de base para a evolução da trigonometria que conhecemos hoje em dia.

6 CONCLUSÃO

No decorrer deste trabalho, mostramos como as antigas civilizações utilizavam a trigonometria e a evolução da mesma em seus conceitos, e estudos teóricos ao longo destas civilizações. Para realização do mesmo, foi feito um recorte histórico da antiguidade em determinadas culturas como a Egípcia, a Babilônica e a Grega. Mostramos também suas aplicações tanto teóricas como práticas, ressaltando a grande importância que ela tem para evolução não só da Matemática quanto para outras ciências e áreas do nosso conhecimento humano.

Por ser usada em abundantes áreas do conhecimento, a trigonometria é muito importante na atualidade por ser uma instrumento bastante poderoso e por ter uma gama de aplicações com seu uso em diversos recursos no ramo tecnológico, nas Engenharias, usadas nas construção de pontes, estradas, entre outras aplicações. Na Astronomia, são usadas para medidas de distâncias interplanetárias. Na Música com as ondas sonoras das cordas. Na Medicina também a função trigonométrica é evidenciada na análise e estudo da frequência cardíaca para verificar a pressão arterial de uma pessoa. Dentre outras áreas, tais como na Física, Biologia, Geologia e Cartografia.

Pensando nisso, para a escolha das aplicação desse trabalho foi realizado uma busca nos livros didáticos visando buscar uma aproximação dos alunos com a trigonometria tornando assim um ensino mais dinâmico e fácil para que os mesmos vejam onde se pode utilizar cada assunto estudado em seu cotidiano.

Assim, notamos o quão importante pode ser as aplicações trigonométricas para o uso diário, fazendo com que ajude no entendimento do surgimento da Trigonometria, buscamos evidenciar como a mesma era aplicada nos tempos antigos e sua evolução, fazendo com que seja confirmado como a História da Matemática, em particular, a história da Trigonometria é tão fascinante, importante tanto para os professores quanto para os alunos.

Nesta lógica, atentamos o quão enriquecedor é a História da Matemática para os debates, tendo que a mesma nos leva da origem dos conhecimentos matemáticos primitivos, e nos faz viajar ao longo de sua evolução até os dias atuais. Tornando-se assim uma aventura de conhecimentos e fazendo com que haja interesse por parte dos alunos na buscar do conhecimento mais profundo do mesmo e um facilitador entendimento que a matemática não é só um conteúdo a ser estudado, mas que ela faz parte da vida do homem.

Referências

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações-ensino médio, vol. I*. [S.l.]: São Paulo: Editora Ática, 2014.

DANTE, L. R. *Projeto Teláris: Matemática–9º ano – Ensino Fundamental Anos Finais–Matemática 2a ed*. [S.l.]: São Paulo: Editora Ática, 2016.

DEPOSITPHOTOS, I. . *Corda egípcia*. 2015. Disponível em: <https://br.depositphotos.com/72181839/stock-illustration-egyptians-rope.html>. Acesso em: 23 de novembro de 2019.

DICIO. *Trigonometria*. 2009–2019. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/trigonometria/>. Acesso em: 23 de novembro de 2019.

EVES, H. W. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Unicamp, 1995.

FAVILLI, U. *Matemática, vol. I*. [S.l.]: São Paulo: Editora Ática, 1987.

FERREIRA, L. *Agricultura Egípcia*. 2020. Disponível em: <https://antigoegito.org/agricultura-egipcia/>. Acesso em: 23 de novembro de 2020.

GRAFFITI, U. V. da Gravura ao. *Papiro - o precursor do papel*. 2017. Disponível em: <https://umaviagemdagravuraaograffiti.blogspot.com/2017/04/papiro-o-precursor-do-papel.html>. Acesso em: 16 de setembro de 2019.

HISTÓRIA, S. *Virtuous Tecnologia da Informação*. 2009–2021. Disponível em: <https://www.sohistoria.com.br/ef2/egito/>. Acesso em: 23 de novembro de 2019.

IEZZI, G. et al. *Coleção Matemática: ciência e aplicações*. [S.l.]: São Paulo: Editora Saraiva, 2017. v. 2.

IMÁTICA. *iMática - A Matemática Interativa na Internet*. 2008. Disponível em: <https://matematica.br/historia/pmoscou.html>. Acesso em: 23 de novembro de 2019.

INTERNET iMática A Matemática Interativa na. *iMática*. 2008. Disponível em: <http://www.matematica.br/historia/prhind.html>. Acesso em: 23 de novembro de 2019.

INVIVO. 2008. Disponível em: <http://www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=976&sid=9>. Acesso em: 22 de setembro de 2019.

MATEMÁTICA, D. a. *A altura da pirâmide de quéops e o teorema de tales – Derivando a matemática*. 2020. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~apmat/a-altura-da-piramide-de-queops-e-o-teorema-de-tales/>. Acesso em: 23 de novembro de 2019.

MATEMÁTICA, L. da. *A História da Trigonometria*. 2019. Disponível em: <http://ligadamatematica.blogspot.com/2013/11/a-historia-da-trigonometria.html>. Acesso em: 23 de novembro de 2019.

O Teorema De Ptolomeu. 2020. Disponível em: <https://www.gratispng.com/png-q729xo/>. Acesso em: 22 de setembro de 2020.

PAIVA, M. *Matemática Paiva 3a ed*. [S.l.]: São Paulo: Moderna, 2015.

SILVA, E. R. D. *O surgimento das trigonometrias em diferentes culturas e as relações estabelecidas entre elas*. 2014.

SUMÉRIA. Disponível em: <http://historia.avph.com.br/sumeria.php>. Acesso em: 22 de setembro de 2019.