UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SEVERINO TOMAZ SIMÃO

UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE
2020

SEVERINO TOMAZ SIMÃO

UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba.

Orientadora: Prof$^{\text{a}}$. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano

CAMPINA GRANDE
2020

S588e Simão, Severino Tomaz.
Um estudo sobre o Teorema Fundamental do Cálculo e algumas de suas aplicações [manuscrito] / Severino Tomaz Simao. - 2021.
35 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.

"Orientação : Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Teorema Fundamental do Cálculo. 2. Cálculo Diferencial e Integral. 3. Sólidos de revolução. I. Título

21. ed. CDD 515.33

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

SEVERINO TOMAZ SIMÃO

UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba, sob a orientação da Profª. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano.

Aprovado em 16/03/2021.

BANCA EXAMINADORA:

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profª. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
(Orientadora)

Maria Isabelle Silva Dias Yanes

Profª. Dra. Maria Isabelle Silva Dias Yanes
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
(Examinadora)

José Hélio Henrique de Lacerda

Prof. Me. José Hélio Henrique de Lacerda
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
(Examinador)

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer inicialmente a Deus, pois é quem ilumina meus passos a cada segundo do meu caminhar.

À minha família, de modo particular a minha mãe, que sempre batalhou e me deu todo apoio em todos os momentos de minha vida.

À minha orientadora, Profª. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano, por ter sido além de uma excelente orientadora, uma pessoa amiga e conselheira. Por ter se arriscado em aceitar a ir adiante nessa aventura de concretizar este trabalho e por todo seu apoio para comigo.

A meus amigos em geral, pelos momentos de apoio, ajuda, brincadeiras e pelas valiosas contribuições acadêmicas. Nos quais destaco aqueles que foram amigos na Universidade e continuam sendo pela vida: Daniel Freire de Macedo, Philipe Hugo Bezerra Barbosa, Iriedson Souto Maior de Moraes Vilar, Italo Luan Lopes Nunes, José Paulo Silva dos Santos, Sivanildo Gomes Da Silva e Antonio Jefferson de Luna Gomes.

A todos os meus professores no qual fizeram parte de minha graduação, pelo apoio, pelas aulas e colaboração que contribuíram para minha formação, no qual destaco alguns: Prof. Me. Onildo dos Reis Freire, Profª. Drª. Abigail Fregni Lins, Profª. Drª. Maria Isabelle Silva Dias Yanes, Prof. Me. José Hélio Henrique de Lacerda, Profª. Drª. Luciana Roze de Freitas, Prof. Dr. Aníbal de Menezes Maciel, Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, Prof. Me. José de Brito Silva, Prof. Dr. José Lamartine da Costa Barbosa, Profª. Drª. Marcella Luanna da Silva Lima e Profª. Drª. Emanuela Régia de Sousa Coelho.

RESUMO

Este trabalho vem a abordar um estudo sobre o Teorema Fundamental do Cálculo - TFC, e algumas de suas aplicações. É notável que o Teorema Fundamental do Cálculo ocupa um lugar de destaque dentro do campo do Cálculo Diferencial e Integral, pois trata das relações existentes entre as operações de diferenciação e integração como inversas entre si, além de calcular integrais definidas dando ênfase ao cálculo de comprimentos de arcos, volumes e áreas. Diante disto este trabalho tem como objetivo mostrar a importância do Teorema Fundamental do Cálculo como uma poderosa ferramenta nas suas aplicações não só dentro do cálculo, mas também em outras áreas como a Física, Astronomia, Engenharia, Química, dentre outras. Este trabalho trata de uma pesquisa de natureza bibliográfica e de cunho descritivo e qualitativo. Bibliográfica pois tem seu desenvolvimento tentando dar explicação de um problema a partir de teorias abordadas em livros. Descritiva porque investiga, examina, registra e ligam aspectos (variáveis) que abrangem fatos ou fenômenos, sem manipulá-los, e qualitativa já que possui natureza mais exploratória e conduz a uma maior reflexão para análise dos resultados.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo. Cálculo Diferencial e Integral. Aplicações.

RESUMEN

Este trabajo viene a abordar un estudio sobre el Teorema Fundamental del Cálculo - TFC, y algunas de sus aplicaciones. Es notable que el teorema fundamental del cálculo ocupa un lugar destacado dentro del campo del Cálculo Diferencial e Integral, ya que trata las relaciones existentes entre las operaciones de diferenciación e integración como inversas entre sí, además de calcular integrales definidas haciendo énfasis en el cálculo de longitudes de arcos, volúmenes y áreas. Ante esto, este trabajo pretende mostrar la importancia del Teorema Fundamental del Cálculo como una poderosa herramienta en sus aplicaciones no solo dentro del cálculo, sino también en otras áreas como la Física, Astronomía, Ingeniería, Química, entre otras. Este trabajo trata de una investigación bibliográfica descriptiva y cualitativa. Bibliográfico porque tiene su desarrollo tratando de explicar un tema a partir de teorías abordadas en libros y artículos. Descriptivo porque investiga, examina, registra y vincula aspectos (variables) que abarcan hechos o fenómenos, sin manipularlos, y cualitativo porque tiene un carácter más exploratorio y conduce a una mayor reflexión para el análisis de resultados.

Palabras clave: Teorema Fundamental del Cálculo. Cálculo Diferencial e Integral. Aplicaciones.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Teorema Fundamental do Cálculo vem traduzir um conceito que tem como centro o Cálculo Diferencial e Integral. Reportando-se aos estudos e trabalhos realizados por Leibniz e Newton no final do século XVII.

O presente Teorema estabelece uma importante relação entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral, já que o Cálculo Diferencial vem abordar sobre a determinação da reta Tangente a uma curva em um ponto, enquanto o Cálculo Integral veio a ser criado com o objetivo de determinar áreas sob uma curva em um plano cartesiano.

Em muitos livros e manuais, há a afirmação de que o cálculo Diferencial e Integral foi criado por Newton e Leibinz, entretanto esta afirmação não é bem concreta. "Na realidade, o cálculo é produto de uma longa evolução que não foi iniciada nem concluída por Newton e Leibniz"(JÚNIOR apud COURANT, 2000, p.481). O que chama a atenção para esses estudiosos é a relação estabelecida entre os problemas de determinação de retas tangentes a uma curva; determinação de área entre curvas e problemas de quadratura. Newton e Leibinz não são considerados os inventores do Teorema em questão, mas são considerados os pioneiros dessa construção, pois ambos foram construindo seus próprios raciocínios e seus próprios métodos para assim criarem soluções aos problemas observados, até a decorrência desse Teorema.

A realização do presente trabalho é de extrema importância, pois vem nos mostrar a importância que o Teorema Fundamental do Cálculo tem, juntamente com exemplos de algumas aplicações. Ele abrange não só a área da Matemática, como também a Astronomia, Engenharia, Química, Física, dentre outras. Do ponto de vista da estrutura matemática esse Teorema é uma ferramenta poderosa, pois permite calcular integrais definidas, facilitando na resolução de problemas. Há disciplinas em que o Presente teorema é importante. Exemplo, Equações Diferenciais Ordinárias, Análise Matemática e Cálculo Diferencial e Integral.

Tive o interesse de pesquisar sobre o mesmo, desde quando o estudei na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II.

Ao longo de nosso trabalho surgiram alguns questionamentos tais como resolver integrais definidas usando o Teorema Fundamental do Cálculo e onde aplicá-lo.

O presente trabalho tem por objetivo realizar um estudo sobre o Teorema Fundamental do Cálculo e apresentar algumas de suas aplicações. Apresentar algumas definições importantes de base para podermos enunciá-lo e mostrar sua importância dentro do cálculo, visualizando seu poder como uma grande ferramenta.

Através deste trabalho, tentaremos mostrar a relação do Teorema Fundamental do Cálculo Diferencial com o Cálculo Integral, dando ênfase a sua importância e aplicações, pois ele é o centro de todo o cálculo. Serão mostradas as relações de derivadas e Integrais, trazendo a conceituação e demonstrações desde limites até aplicações do presente teorema, com o propósito de estudá-lo dentro da disciplina de cálculo de maneira lógica e ordenada.

O trabalho está dividido em três capítulos, além das considerações finais. No primeiro capítulo falaremos sobre a história do cálculo ao longo do tempo, como ele foi surgindo, os principais matemáticos de cada período e as contribuições de cada um. No segundo capítulo mostraremos alguns resultados, definições e teoremas importantes para poder enunciar o Teorema Fundamental do Cáculo e sua demonstração de maneira mais formal. Logo após no terceiro capítulo abordaremos algumas de suas aplicações.

Por fim, as considerações finais. Com nossas conclusões a respeito do teorema em questão, seu uso, importância e aplicações.

Capítulo 1

O Cálculo ao longo do tempo

Este Capítulo será dedicado a relatar brevemente a história do cálculo e matemáticos importantes para a sua evolução.

1.1 História do Cálculo

Com a invenção do cálculo, a Matemática Elementar teve um grande avanço. Pois, passou para um plano mais elevado, surgindo primeiro o cálculo Integral e logo após o Diferencial. Ligados com a ideia de calcular certos volumes, comprimentos e áreas vêm-se a ideia de integração. Já a diferenciação veio após com a ideia de resolver problemas ligados a tangentes e curvas. Com o decorrer do tempo percebeu-se que a integração era o inverso da diferenciação.

Na história do cálculo, que abrange não só a Matemática, mas também outras áreas como economia e administração, houve a contribuição de muitos personagens. Podemos citar Cavalieri, Fermat, Barrow, Kepler, Newton, dentre outros. Muitos deles já usavam o cálculo na resolução de problemas. Em um determinado tempo pensou-se que a Matemática Elementar preenchia o mundo que os sentidos humanos podiam perceber. A partir do século XIX foi que a Matemática pura veio a se desprender das limitações impostas pela natureza. Sem dúvidas que ela surgiu como parte da vida cotidiana do ser humano, desde os primórdios onde tinham suas maneiras de contar e registrar suas quantidades.

Na época em que Euclides escrevia seu livro *Os Elementos*, os gregos já usavam os fundamentos dele para desenvolver o cálculo, apesar de terem ficados presos com as restrições surgidas.

As ideais ligadas aos infinitesimais, infinitos e ao contínuo começaram a ser compreendidas pelos gregos, daí vieram os primeiros conceitos de cálculo.

> O cálculo teve sua origem nas dificuldades encontradas pelos antigos matemáticos gregos na sua tentativa de expressar suas ideias intuitivas sobre as razões ou proporções de segmentos de retas, que vagamente reconheciam como contínuas em termos de números, que consideram discretos. (BOYER apud BROLEZZI, 1999, p.38)

O primeiro a falar de infinitesimais foi Demócrito. Ele foi o primeiro matemático grego a determinar o volume da pirâmide e do cone, mesmo que os egípcios já soubessem calcular o volume da pirâmide de base quadrada, Demócrito generalizou como calcular o volume da pirâmide de base qualquer. Daí as ideias de infinitesimais de Demócrito foram combatidas pelo influxo dos pensamentos de Parmênides. Logo entra para a história um aluno de Parmênides, Zeno de Eléa, que afirmava ser um absurdo a ideia de infinitésimos, pois se possuía algum comprimento, deveria ter uma quantidade infinita para compor uma reta de comprimento infinito, e se não tem comprimento, então uma quantidade infinita deles não terá nenhum comprimento. E ainda acrescentava que aquilo que acrescentado a outro não o torna maior e caso for subtraído não o torna menor, é simplesmente nada. Boyer afirma que a Matemática após Zeno ganhou outra aparência:

> As grandezas não são associadas a números ou pedras, mas a segmentos de retas. Em *Os Elementos* os próprios inteiros são representados por segmentos. O reino dos números continuava a ser discreto, mas o mundo das grandezas contínuas (e esse continha a maior parte da Matemática pré-helênica e pitagórica) era algo à parte dos números e devia ser tratado por métodos geométricos. (BOYER apud BROLEZZI, 1999, p.39)

O Método da Exaustão de Eudoxo que futuramente ficaria conhecido como Postulado de Arquimedes, mostra que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente. "Se da maior subtrairmos uma grandeza maior que a sua metade, e do que restou subtrairmos uma grandeza maior que a sua metade, repetindo esse processo continuamente, restará uma grandeza que será menor que a menor grandeza dada". (BOYER apud BROLEZZI, 1999, p.39). A enunciação desse axioma é dada por Euclides e mostra que essa definição exclui o infinitesimal de todas as demonstrações geométricas gregas.

Também se pode raciocinar com essa definição que Eudoxo deixa claro que se pode chegar a uma grandeza muito pequena quanto qualquer outra dada, propondo assim que não é preciso ir até o infinito para se chegar de fato até o limite. Por volta de 430 a.c, Antifon foi a procura de calcular a quadratura do círculo através de uma sequência finita de polígonos regulares inscritos, mas daí surgiu o problema que essa sequência nunca poderia ser concluída. Mas, a partir dessa ideia se originou o método da exaustão o qual é creditado a Eudoxo.

É notável que o método da Exaustão chega a se associar com o raciocínio do uso de limites visto que ele não exige que o polígono inscrito chegue a coincidir com o círculo, mas apenas lida com o fato de a diferença poder ser tão pequena quanto desejamos.

Dos personagens mais antigos o que mais mostrou claramente o método da exaustão foi Arquimedes, que tratou como um teorema de quadratura da parábola. Ele provou que a área de delimitação por uma parábola é uma linha reta e $\frac{4}{3}$ vezes a área do triângulo inscrito.

Matemáticos dos tempos modernos que usavam métodos comparados ao de Arquimedes foram o engenheiro Flamengo Simon Stevin e o matemático Italiano Luca Valerio Stevin usava o método em seu trabalho na área da hidrostática para determinar a força exercida pela pressão de um fluído sobre um dique vertical.

Logo após desenvolvendo ideias relacionadas a infinitésimos em trabalhos com a integração destacamos Johann Kepler, que recorreu aos procedimentos de integração para calcular as áreas que envolvia em sua segunda lei do movimento planetário e volumes.

Deixando uma obra vasta de grande abrangência, Bonaventura Cavalieri foi o responsável pela introdução dos logaritmos na Europa. Suas raízes vêm de Demócrito e Arquimedes, talvez sendo motivado pelas tentativas de Kepler. Os princípios de Cavalieri representam poderosas ferramentas para o cálculo integral moderno.

1.2 Wallis e Barrow

Conforme o livro de BOYER(1974), Um dos matemáticos mais destacados por volta de 1649 foi John Wallis, predecessor de Newton. Nasceu no dia 23 de novembro de 1616 em Ashford, Kent, Inglaterra. Passou a ter contato com a Matemática quando seu irmão lhe ensinou as regras de aritmética. Foi ordenado padre, mas passou a maior parte de seu tempo se dedicando aos estudos da Matemática.

Durante a guerra civil, Wallis decodificou uma mensagem apenas em duas horas. Então começou a decifrar mensagens criptográficas dos monarquistas para os parlamentalistas. Assim lhe foi dado muitos recursos e influências. Wallis manifestou sua paixão por estudar matemática quando leu a obra de Oughtred, Clavis Mathematicae, em 1647. Anos depois, em 1655 publicou dois livros, um chamado de *Tractatus de sectionibus conicis sobre Geometria Analítica* e outro chamado de *Arithmetica infinitorum*, onde expandiu e aritmetizou a *Geometria indivisibilibus de Cavalieri*. Nesse contexto ele incentivou e levou estímulo a outros matemáticos pela expansão em série por meio de integração e também usou pela primeira vez o símbolo que conhecemos hoje como infinito. Isaac Newton deu continuidade às pesquisas feitas por Wallis. Ele teve grande importância para a história do cálculo. Também escreveu a obra *Mechanica Sive Tratatus deMotu*, referindo-se aos erros relativos ao movimento que continuam desde o período de Arquimedes e escreveu *Treatise on Algebra*, Onde faz um grande estudo sobre equações e introduz o conceito de números complexos.

Esse matemático também fez publicações de obras na área de Teologia, Lógica e Filosofia e foi o primeiro a fazer um planejamento para ensinar surdos-mudos. Empenhouse em determinar $\frac{\pi}{4}$ fazendo uma busca para uma expressão e área $\frac{\pi}{4}$, de um quadrante do círculo $x^2 + y^2 = 1$, ou seja, que equivale a calcular

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

Wallis morreu no dia 28 de outubro de 1703 em Oxford, Inglaterra, com 87 anos de idade. Suas contribuições ao cálculo estão situadas na integração. Outro matemático, chamado Isaac Barrow foi um teólogo inglês e matemático, nasceu em Londres no ano de 1630 e faleceu em 1677, também em Londres. Na época ele não era reconhecido por suas descobertas na área do cálculo moderno. Seu trabalho matemático mais importante é o *Lectiones Opticae et geometricae*, do ano em que renunciou a sua cátedra. Ele foi o primeiro a perceber que a diferenciação e a integração eram operações inversas. Essa descoberta grandiosa é conhecida como Teorema Fundamental do Cálculo e é provada nas *Lectiones* de Barrow.

Nessas alturas já se havia a ideia de limite, processos de diferenciação e reconhecimento do Teorema Fundamental do Cálculo.

1.3 Newton e Leibniz

Considerado um dos maiores gênios da humanidade, Isaac Newton nasceu em Woolsthorpe no ano de 1642. Possuía grande habilidade para projetar miniaturas e assim se debruçou em suas maravilhosas experiências. Suas experiências foram levando-o a criar sua própria matemática, começou lendo *os Elementos* de Euclides, depois *La geométrie* de Descartes, dentre outros. Descobriu o teorema do binômio generalizado e depois o método dos fluxos, conhecido atualmente como Cálculo Diferencial. Também foi se interessando pela física e daí formulou os princípios básicos da gravitação. No período de 1673 a 1683 suas atividades centralizaram-se em álgebra e teoria das equações.

Newton com seu método dos fluxos resolveu muitos problemas, determinava mínimos e máximos, tangentes e curvas, pontos de inflexões, curvaturas e muitos outros. Newton é elogiado por muitos matemáticos, Leibniz lhe prestou um tributo dizendo: "Tomando a matemática desde o início do mundo até a época em que Newton viveu o que ele fez foi, em grande escala a metade melhor". Lagrange também faz menção a Newton como sendo o maior gênio de todos os tempos, e também o mais feliz, pois só há um sistema do universo e coube a ele o privilégio de instituí-lo.

Gottfriend Wilhelm Leibniz, nascido em Leipzig em 1646, considerado o maior gênio universal do século XVII foi rival de Newton na invenção do cálculo. Aos 12 anos de idade, já possuía grande conhecimento em matemática, filosofia, teologia e leis publicadas pelos textos da época. Leibniz usou pela primeira vez o símbolo de integral um S alongado, derivado da primeira letra do vocábulo latim summa (soma) em 29 de outubro de 1675.

Somente em 1684 apareceu seu primeiro artigo sobre o Cálculo Diferencial e já escrevia $\int xdx$ e $\int xdy$ para integrais se define dx como um intervalo finito arbitrário e dy pela proporção $dy : dx = y : subtangente$.

As regras de derivação estudadas logo nos ínicios dos cursos de cálculos foram deduzidas por Leibniz.

Hoje em dia há muitas discussões sobre a história do cálculo, colocando em evidência Newton e Leibniz. O primeiro texto de cálculo foi publicado em 1696 pelo marquês de L'Hospital, que havia publicado as lições que recebera de Johann Bernoulli, seu professor particular. Não se pode afirmar uma idade certa do surgimento do cálculo, pois ele se encaixa em períodos distintos. Há uma grande controvérsia sobre quem pode ser considerado o pai da história do cálculo, Newton ou Leibniz. Porém, os dois foram muito importantes com seus estudos e publicações independentes. O cálculo também é chamado de infinitesimais devido a sua capacidade de se calcular quantidades muito pequenas.

1.4 A Era Bernoulli

Muitas vezes as descobertas de algum grande matemático podem até ficar perdidas, a menos que outros cientistas as compreendam e venham a ter o interesse de pesquisar e esclarecê-las de várias maneiras. Newton por exemplo, era demasiadamente sensível e não se comunicava livremente, por outro lado, Leibiniz encontrou discípulos esforçados e dedicados a aprender o Cálculo Diferencial e Integral para assim passar adiante seus conhecimentos. Nessa primeira linha estavam dois irmãos: Jacques Bernoulli e Jean Bernoulli, membros da família Bernoulli, a família que mais produziu ilustres matemáticos e físicos da História. BOYER (1906).

Os Bernoulli foram os primordiais a usarem pela primeira vez o vocábulo integral. A história dos Bernoulli se originou na Holanda, fugindo após para a Suiça, por serem protestantes.

Jacques Bernoulli, nascido em 27 de dezembro de 1654 em Basileia e falecido em 16 de agosto de 1705, na mesma cidade, desde sua infância tinha sua vocação para a Matemática, mas para satisfazer a vontade do pai, estudou Teologia. Foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal, mais aprofundado do que o feito por Newton e Leibiniz. Teve importante contribuição para a geometria analítica, cálculo de variações e teorias de probabilidades. É considerado o pai do Cálculo exponencial. Seu trabalho mais importante foi a *Ars Conjectandi*, sendo publicada oito anos após a sua morte, desde já é a obra mais antiga sobre teoria das probabilidades.

Jacques Bernoulli lecionou Matemática quando voltou para Basileia em 1689, aprofundando os estudos pelo cálculo de Leibiniz junto com um de seu irmão.

Jean Bernoulli escreveu dois livros sobre cálculo em 1692, onde se encontrara em Paris, tornando-se professor particular de um marquês chamado Guilherme François

L'Hospital, com o qual fez um pacto. O marquês lhe pagaria um salário e em troca podia usar como desejasse as descobertas de Jean Bernoulli. Através deste acordo Jean deixou uma grande contribuição para a resolução de limites indeterminados, no qual ficou conhecido como regra de L'hospital. Daí, veio à publicação do *Analyses des infinites petits* (Análise dos Infinitamente pequenos), publicado em Paris no ano de 1699, livro de grande sucesso que foi tirado milhares de exemplares. No prefácio, o marquês apresenta seus agradecimentos de modo especial a Jean Bernoulli e Leibiniz.

Jean Bernoulli também começou a se interessar pelo cálculo varicional. Após a morte de L'Hospital foi conhecido pelo mundo todo devido a seus trabalhos dentro do mundo da física, matemática e engenharia. Jean casou-se com Marie Euler, sobrinha do grande Euler, com a qual teve três filhos: Nicolau I, Daniel I e Jean II. Jean veio a falecer em 03 de janeiro de 1748, vítima de loucura. Já apresentava sinais de louquice desde quando expulsa de casa seu filho Daniel. Pois, concorreu com ele a um prêmio da Academia de Ciências de Paris. A inveja deixada nele foi tão grande que o deixa praticamente sozinho no mundo e abandonado inclusive por sua família.

1.5 Euler

Leonhard Euler nasceu em 15 de abril de 1707 e morreu em 18 de setembro de 1783. Foi o matemático que mais produziu na história. Euler veio a falecer aos 76 anos, enquanto tomava chá com seus netos. Mas até depois de sua morte várias de suas obras são exploradas.

Euler desde cedo já conquistara reputação em todo o mundo. Nasceu na Basileia. Seu pai era um ministro religioso e tinha para Euler o mesmo desejo dos pais de Jacques Bernoulli, que o filho seguisse seus passos. Assim, mandou Euler para a Universidade para prepará-lo ao ministério. Graças a intercessão de Jacques Bernoulli, no qual foi professor do pai de Euler, ele conseguiu entrar para a Matemática, somando assim na sua vida um amplo conhecimento em física, teologia e outras línguas orientais, que logo mais desfrutaria desses conhecimentos. Em 1727, Euler ouviu da Rússia que havia um lugar para medicina na Academia de S. Petersburgo, local onde os jovens Bernoulli tinham ido como professor de Matemática. Conforme ele foi crescendo na Academia ele conheceu também Catarina, a grande, imperatriz da Rússia. Euler sofria com uma forte febre, a qual o foi deixando com cegueira. Logo após, descobriu que sofria de catarata. Mesmo assim não parou seus trabalhos e cada vez mais aumentava seus conhecimentos em quase todas as áreas da matemática pura e aplicada, desde os mais elementares aos mais avançados. Euler foi o primeiro matemático a usar as funções seno e cosseno. Iniciou o estudo das linhas de curvatura, popularizou o símbolo de π, de somatório e introduziu a análise matemática, Também fez a introdução do símbolo de $\imath$ para $\sqrt{-1}$ e utilizou a notação de $f(x)$ para uma função de x, enfim, Euler teve inúmeras contribuições em várias áreas. Foi através de seus contributos na área de cálculo e análise que se iniciou uma nova abordagem nas resoluções de equações diferenciais.

> Euler foi, sem dúvida, o maior responsável pelos métodos de resolução usados hoje nos cursos introdutórios sobre equações diferenciais, e até muitos dos problemas específicos que aparecem em livros de texto de hoje remontam aos grandes tratados que Euler escreveu sobre o *Cálculo-Institutiones, Calculi Differentialis (1755) e Institutiones Calculi Integralis* (1768-1770, 3 volumes). (Boyer, 1974, p. 333)

Vários matemáticos trocaram ideias com Euler como D'Alembert e Fermat.

Capítulo 2

Principais Resultados

Neste capítulo iremos conhecer os principais resultados para podermos enunciar e demonstrar o Teorema Fundamental do Cálculo. Como base para nossas definições foram consultadas as obras de Swokowski(vol. 1, 1983), George Thomas(vol.1, 2009) e Diva Flemming(2006).

2.1 Máximos e Mínimos Locais

Antes de definirmos máximos e mínimos locais, vejamos a definição de derivada e valores extremos.

Definição 1. *A* ***derivada*** *de uma função* $f(x)$ *em relação à variável* x *é a função* f'*, cujo valor em* x *é*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

desde que o limite exista.

Fórmula alternativa para a derivada

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

Definição 2. *Sejem* f *uma função definida em um intervalo* I *e* c *um número em* I*. Então:*

(I) $f(c)$ *é* ***máximo*** *de* f *em* I *se* $f(x) \leq f(c)$ *para todo* x *em* I*.*

(II) $f(c)$ *é* ***mínimo*** *de* f *em* I *se* $f(x) \geq f(c)$ *para todo* x *em* I*.*

Os máximos e mínimos costumam ser chamados de **valores extremos** ou **extremos** de f.

Teorema 2.1.1. *Se uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, então f toma seu máximo e seu mínimo ao menos uma vez em $[a,b]$.*

Os extremos também são chamados mínimo absoluto e máximo absoluto de f em um intervalo. Estamos interessados em extremos locais de f, que se definem como segue.

Definição 3. *Seja c um valor do domínio de uma função f.*

(i) *$f(c)$ é **mínimo local** de f se existe um intervalo aberto (a,b) contendo c, tal que $f(x) \geq f(c)$ para todo x em $(a,b) \cap Domf$.*

(ii) *$f(c)$ é **máximo local** de f se existe um intervalo aberto (a,b) contendo c, tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo x em $(a,b) \cap Domf$.*

Teorema 2.1.2. *Se uma função f tem extremo local para um valor c, então ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Demonstração. Suponhamos que f tenha extremo local em c. Se $f'(c)$ não existe, nada mais a demonstrar. Se $f'(c)$ existe, então (i) ou $f'(c) < 0$,(ii) ou $f'(c) > 0$, (iii) ou $f'(c) = 0$. Chegaremos a (iii) provando que nenhuma das hipóteses (i) e (ii) pode ocorrer. Suponhamos, então, $f'(c) > 0$. Aplicando a Definição 1, temos:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

Daí existe um intervalo aberto (a,b) contendo c, tal que

$$\tfrac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$$

para todo x em $(a,b) \cap Domf$ diferente de c. A última desigualdade implica que, se $a < x < b$, e $x \neq c$, então $f(x) - f(c)$ e $x - c$ são ambos positivos ou ambos negativos; isto é,

$$\begin{cases} f(x) - f(c) < 0 & se \quad x - c < 0 \quad e \\ f(x) - f(c) > 0 & se \quad x - c > 0 \end{cases}$$

outra maneira de enunciar esses fatos: se x está em (a,b), e $x \neq c$, então

$$\begin{cases} f(x) < f(c) & se \quad x < c \quad e \\ f(x) > f(c) & se \quad x > c \end{cases}$$

Segue-se que $f(c)$ não é nem máximo local nem mínimo local de f, contrariamente a hipótese. Consequentemente, (i) não pode ocorrer. De maneira análoga, a hipótese $f'(c) < 0$ acarreta uma contradição. Logo, (iii) deve ser verdadeira, o que prova o Teorema.

■

2.2 Teorema de Rolle

Antes de enunciar o Teorema de Rolle, vejamos a definição de ponto crítico.

Definição 4. *Um ponto interior do domínio de uma função f em que f' é zero ou indefinida é um* ***ponto crítico*** *de f.*

O teorema a seguir, em razão do matemático francês Michel Rolle (1652-1719), dá condições suficientes para a existência de um ponto crítico. O teorema é enunciado para uma função f contínua em um intervalo $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e tal que $f(a) = f(b)$.

Teorema 2.2.1 (Rolle)**.** *Se uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, derivável no intervalo aberto correspondente (a, b) e se $f(a) = f(b)$, então $f'(c) = 0$ para ao menos um número c em (a, b).*

Demonstração. A função f deve pertencer a uma das três categorias:

(i) $f(x) = f(a)$ para todo x em (a, b). Neste caso, f é uma função constante e $f'(x) = 0$ para todo x. Consequentemente, todo ponto c de (a, b) é ponto crítico.

(ii) $f(x) > f(a)$ para algum x em (a, b). Neste caso, o máximo de $f(x)$ em $[a, b]$ é maior do que $f(a)$ e $f(b)$, devendo, pois, ocorrer em algum ponto c do intervalo aberto (a, b). Como a derivada existe em todo o intervalo (a, b), concluímos, pelo Teorema 2.1.2, que $f'(c) = 0$.

(iii) $f(x) < f(a)$ para algum x em (a, b). Então o mínimo de f em $[a, b]$ é menor do que $f(a)$ou $f(b)$, devendo ocorrer em algum ponto c de (a, b). Tal como em (ii), $f'(c) = 0$.

■

2.3 Teorema do Valor Médio

Teorema 2.3.1. *Se uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e é diferenciável no intervalo aberto (a, b), então existe um número c em (a, b), tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Demonstração. Definamos uma função g como segue:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a)$$

para todo x em $[a, b]$. Como f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a,b), o mesmo é válido para g. Derivando, obtemos:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

.

Além disso, por substituição direta, vemos que $g(a) = g(b) = 0$ e, assim, a função g satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. Consequentemente, existe um ponto c em (a,b), tal que $g'(c) = 0$ ou, equivalentemente,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

A última equação pode escrever-se sob a forma da conclusão do teorema.

■

2.4 Teorema do Valor Intermediário

Teorema 2.4.1. *Se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e se w é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe ao menos um número c em $[a, b]$ tal que $f(c) = w$.*

O Teorema do Valor Intermediário afirma que, quando x varia de a a b, a função contínua f toma todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

Uma consequência do teorema em questão é que se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, então existe um número c entre a e b tal que $f(c) = 0$; isto é, f tem um zero em c.

2.5 Antiderivadas

Definição 5. *Uma função F é uma antiderivada(ou primitiva) de uma função f se $F' = f$.*

Usamos um F maiúsculo para representar uma primitiva de uma função f, G para representar uma primitiva de g, e assim por diante.

As antiderivadas nunca são únicas. Com efeito, a derivada de uma constante é zero, segue-se que se F é uma antiderivada de f, também o será a função G definida por $G(x) = F(x) + C$, para toda constante C.

Exemplo 1. *Determine a antiderivada da função $f(x) = 2x^4 + 7$.*

Solução: De imediato temos como solução, $F = \dfrac{2x^5}{5} + 7x$.

Exemplo 2. *Determine a antiderivada da função $f(x) = x^2$.*

Solução: De imediato temos como solução, $F(x) = \dfrac{x^3}{3} \Longrightarrow F(x) = x^2$

Teorema 2.5.1. *Se F_1 e F_2 são funções diferenciáveis, tais que $F_1'(x) = F_2'(x)$ para todo x em um intervalo fechado $[a, b]$, então $F_2(x) = F_1(x) + C$, para algum número C e todo x em $[a, b]$.*

Demonstração. Definindo a função g como

$$g(x) = F_2(x) - F_1(x),$$

segue-se que

$$g'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = 0$$

Para todo x em $[a, b]$. Se x é um número, tal que $a < x \leq b$, então, aplicando o Teorema do Valor Médio (2.3.1) à função g e ao intervalo fechado $[a, x]$, existe um número z no intervalo aberto (a, x), tal que

$$g(x) - g(a) = g'(z)(x - a) = 0(x - a) = 0.$$

Logo, $g(x) = g(a)$ para todo x em $[a, b]$. Substituindo na primeira equação da demonstração, vem

$$g(a) = F_2(x) - F_1(x).$$

■

2.6 Integral Definida

Inicialmente vamos definir o que é uma partição.

Seja **A** um conjunto não vazio. Uma **partição** de um conjunto **A** é qualquer coleção **C** de subconjuntos não vazios de **A** dotada da seguinte propriedade: todo elemento de **A** pertence a um e apenas um dos elementos de **C**.

Assim uma coleção de conjuntos $C = A_1, A_2, ..., A_n$ é uma partição (finita) do conjunto **A**, se as seguintes condições forem simultaneamente satisfeitas:

(1) $A_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, ..., n$;

(2) $A_i \subset \emptyset$, $i = 1, 2, ..., n$;

(3) $A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_n$;

(4) A_1, A_2, ... , A_n são mutuamente disjuntos, isto é, $A_1 \bigcap A_j \doteq \emptyset$, para $i \neq j$, com $i = 1, 2, ..., n$

2.6.1 Soma de Riemann

Segue-se um conceito, devido ao matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), que é fundamental para a definição de integral definida.

Definição 6. *Seja f uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja P uma partição de $[a, b]$. Uma soma de Riemann de f em relação a P é qualquer expressão R_P da forma*

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i,$$

onde w_i é um número em $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, ..., n$.

A Integral Definida é uma ferramenta fundamental em cálculo para definir quantidades importantes para a matemática e para a ciência, tais como calcular áreas, volumes, comprimentos de linhas de curvas, probabilidades e pesos de vários objetos. A construção de somas finitas apropriadas é a base para a formulação de integrais definidas.

Definição 7. *Seja f uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$. A integral definida de f desde a até b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, é dada por*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_i f(w_i)\Delta x_i,$$

desde que o limite exista.

Caso a integral definida de f, de a e b, exista, então dizemos que f é integrável no intervalo $[a, b]$, ou que a integral $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Definição 8. *A troca dos limites de integração acarreta mudança do sinal da integral. Se $c > d$, então*

$$\int_c^d f(x)dx = -\int_d^c f(x)dx$$

desde que a última integral exista.

Definição 9. *Se $f(a)$ existe, então*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Nem toda função f é integrável. Por exemplo, se $f(x)$ torna-se infinita, positiva ou negativamente, para algum valor em $[a, b]$, então a integral definida não existe.

2.7 Propriedades Fundamentais da Integral Definida

Teorema 2.7.1. *Se f é a função constante definida por $f(x) = c$ para todo x em $[a, b]$ e P é uma partição de $[a, b]$, então para toda soma de Riemann de f,*

$$\sum_i f(w_i)\Delta x_i = \sum_i c\Delta x_i = c\sum_i \Delta x_i = c(b-a),$$

pois a soma $\Sigma_i \Delta x_i$ é o comprimento do intervalo $[a, b]$.

isto é,

$$\int_a^b c dx = c(b-a)$$

.

Teorema 2.7.2. *Se $a < c < b$ e f é integrável tanto em $[a, c]$ como em $[c, b]$, então f é integrável em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

.

2.8 Teorema do Valor Médio para Integrais Definidas

Teorema 2.8.1. *Se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então existe um número z no intervalo aberto (a, b), tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(z)(b-a).$$

Demonstração. Se f é uma função constante, então o resultado é trivial e decorre do Teorema (2.7.1), onde z é qualquer número em (a, b). Suponhamos, então, que f não seja constante e que m e M sejam o mínimo e o máximo de f, respectivamente, em $[a, b]$. Sejam $f(u) = m$ e $f(v) = M$, onde u e v pertencem a $[a, b]$ e, daí de imediato

$$\int_a^b m dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b M dx$$

.

Aplicando o Teorema 2.7.1,

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a).$$

Dividindo por $b - a$ e substituindo m e M por $f(u)$ e $f(v)$, respectivamente, obtemos

$$f(u) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx < f(v).$$

Como $[1/(b-a)]\int_a^b f(x)dx$ é um número entre $f(u)$ e $f(v)$, segue-se do Teorema do Valor Intermediário (2.4.1) que existe um número z, estritamente entre u e v, tal que

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Multiplicando ambos os membros por $b - a$, obtemos a conclusão do teorema.

■

Exemplo 3. *Mostre que, se f é contínua em $[a, b]$, $a \neq b$, e se*

$$\int_a^b f(x)dx = 0,$$

então $f(x) = 0$ pelo menos uma vez em $[a, b]$.

Solução. *O valor médio de f em $[a, b]$ é a média $(f) =$*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a} \cdot 0 = 0.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, f assume esse valor em (a, b).

2.9 O Teorema Fundamental do Cálculo

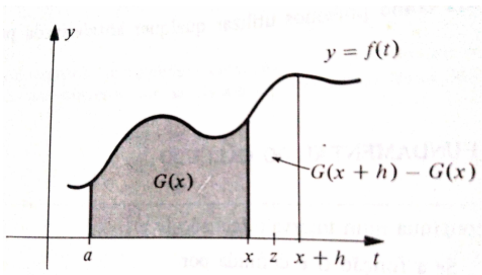
O Teorema Fundamental do Cálculo é o teorema mais importante do cálculo integral pois permite calcular uma integral definida sem utilizar limites de somas. Ele salienta não só a importância no cálculo de integrais definidas, como a ligação entre a diferenciação e a integração. Este teorema foi estabelecido por Isaac Newton (1642-1727) na Inglaterra e por Gottfriend Leibniz (1646-1716) na Alemanha.

Usando a variável t denotaremos a integral definida de f desde a até b por $\int_a^b f(t)dt$. Se f é contínua em $[a, b]$ e se x pertence a $[a, b]$, então f é contínua em $[a, x]$ e daí por teorema, f é integrável em $[a, x]$, desde que a $\leq x \leq b$. Consequentemente a equação

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (I)$$

define uma função G com domínio $[a, b]$, pois, a cada x em $[a, b]$, corresponde um número único $G(x)$ dado pela equação (I).

Figura 2.1: Teorema Fundamental do Cálculo



Fonte: SWOKOWSKI, 1983.

Teorema 2.9.1. *Seja f contínua num intervalo fechado $[a, b]$.*

Parte I. Se a função G é definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

para todo x em $[a, b]$, então G é uma antiderivada de f em $[a, b]$.

Parte II. Se F é uma antiderivada de f, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Para estabelecer I, devemos mostrar que se x pertence a $[a,b]$, então $G'(x) = f(x)$, isto é

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x).$$

Antes de apresentar uma demonstração formal, convém salientar alguns aspectos geométricos desta fórmula. Se $f(x) \geq 0$ em todo $[a,b]$, então $G(x)$ é a área sob o gráfico de f de a até x. Se $h > 0$, então a diferença $G(x+h) - G(x)$ é a área sob o gráfico de f de x a $x+h$, R é o comprimento do intervalo $[x, x+h]$ e $f(x)$ é a ordenada do ponto de abscissa x no gráfico e f. Mostraremos que $[G(x+h) - G(x)]/h = f(z)$, onde z está entre x e $x+h$. Raciocinando intuitivamente, afigura-se-nos que, se $h \to 0$, então $z \to x$ e $f(z) \to f(x)$.

Propomos-nos agora a dar uma demonstração rigorosa de que $G'(x) = f(x)$ se f é contínua em $[a,b]$. Se x e $x+h$ pertencem a $[a,b]$, então, usando a definição de G, juntamente com a Definição 7 e com o Teorema 2.7.2,

$$\begin{aligned} G(x+h) - G(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Consequentemente, se $h \neq 0$,

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Se $h > 0$, então pelo Teorema do Valor Médio para integrais definidas (2.8.1), existe um número z (que depende de h) no intervalo aberto $(x, x+h)$, tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(z)h$$

e, portanto,

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(z). \qquad (II)$$

Como $x < z < x+h$, segue-se que

$$\lim_{h\to 0^+} f(z) = \lim_{z\to x^+} f(z) = f(x)$$

e, daí, por (II),

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x).$$

Se $h < 0$, então podemos mostrar de maneira análoga que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x).$$

Os dois últimos limites laterais implicam que

$$G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x),$$

que é o que queríamos demonstrar.

Para demonstrar II, seja F uma antiderivada de f e seja G a antiderivada especial definida por (I), segue-se, do Teorema 2.3.1, que F e G diferem por uma constante; isto é, existe um número C, tal que $G(x) - F(x) = C$ para todo x em $[a, b]$. Logo, pela definição de G,

$$\int_a^x f(t)dt - F(x) = C$$

para todo x em $[a, b]$. Fazendo $x = a$ e utilizando a Definição 8, então $0 - F(a) = C$. Consequentemente,

$$\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a).$$

Como se trata de uma identidade para todo x em $[a, b]$, podemos substituir x por b, obtendo

$$\int_a^b f(t)dt - F(b) = -F(a).$$

Somando F(b) a ambos os membros da equação e substituindo a variável t por x, obtemos a conclusão desejada.

Em termos do operador diferencial D_x, a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo implica que $D_x G(x) = G'(x) = f(x)$. Isto dá a fórmula:

$$D_x \int_a^x f(t)dt = f(x). \qquad (III)$$

Costuma-se denotar a diferença $F(b) - F(a)$, seja pelo símbolo $F(x)]_a^b$ ou por $[F(x)]_a^b$. Podemos, então, escrever

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \qquad (IV)$$

onde $F'(x) = f(x)$. A fórmula precedente vale também se $a \geq b$, pois, se $a > b$, então, pela Definição 7,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx \\ &= -[F(a)-F(b)] \\ &= F(b)-F(a).\end{aligned}$$

Se $a = b$, então, pela Definição 4

$$\int_a^a f(x)dx = 0 = F(a) - F(a)$$

.

■

Exemplo 4. *Calcule* $\int_{-1}^{2}(x^3+1)^2dx$.

Solução. *elevando o integrando ao quadrado e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos:*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(x^3+1)^2dx &= \int_{-1}^{2}(x^6+2x^3+1)dx \\ &= \left[\frac{1}{7}x^7+\frac{2}{4}x^4+x\right]_{-1}^{2} \\ &= \left[\frac{1}{7}(2)^7+\frac{2}{4}(2)^4+2\right]-\left[\frac{1}{7}(-1)^7+\frac{2}{4}(-1)^4+(-1)\right] \\ &= \frac{405}{14}\end{aligned}$$

Trabalhar com o Teorema Fundamental do Cálculo parece bem abstrato de início para quem o vê em primeiro contato, todavia quando utilizamos na resolução de problemas cotidianos pode ser de grande ajuda. No capítulo a seguir, mostraremos aplicações de como calcular áreas entre curvas, volumes por seções transversais e sólidos de revolução usando o método do disco.

Capítulo 3

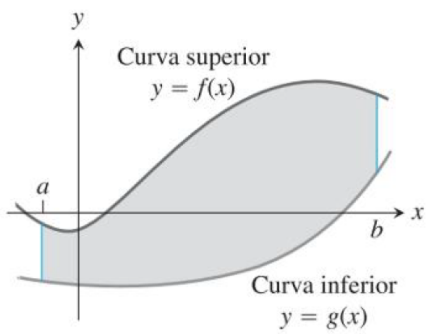
Algumas aplicações

No capítulo anterior mostramos os principais resultados para enunciar e demonstrar o Teorema Fundamental do Cálculo. Neste capítulo veremos três de suas aplicações, cálculo de áreas entre curvas, cálculo de volume por seções transversais e cálculo de volume em sólidos de revolução utilizando o método do disco.

3.1 Áreas entre curvas

Vamos supor que queiramos determinar a área de uma região delimitada acima pela curva $y = f(x)$, abaixo pela curva $y = g(x)$ e à esquerda e à direita pelas retas $x = a$ e $x = b$ (Figura 3.1). A região, por acaso, pode ter uma forma cuja área poderíamos determinar usando técnicas elementares da Geometria, mas se f e g forem funções contínuas arbitrárias, em geral teremos de determinar a área usando uma integral.

Figura 3.1: Área entre curvas



Fonte: THOMAS, 2012.

Para vermos qual deve ser a integal, primeiro aproximamos a região com n retângulos verticais com base em uma partição $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ (Figura 3.2). A área do K-ésimo retângulo (Figura 3.3) é

$$\Delta A_k = altura \times largura = [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k$$

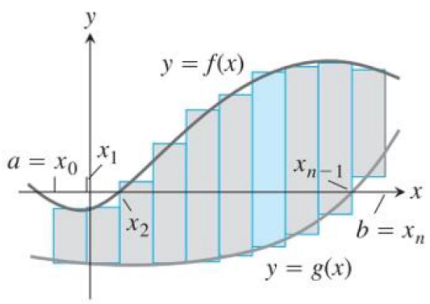
Então, aproximamos a área da região adicionando as áreas dos n retângulos:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{i=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k$$

Quando $\parallel P \parallel \longrightarrow 0$, as somas à direita se aproximam do limite $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ porque f e g são contínuas. Tomamos a área da região como o valor dessa integral. Isto é,

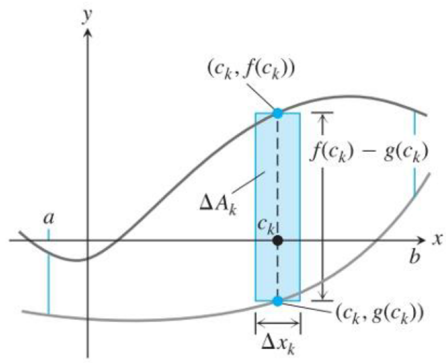
$$A = \sum_{\|P\| \longrightarrow 0}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Figura 3.2: Fazemos uma aproximação da região com retângulos perpendiculares ao eixo x



Fonte: THOMAS, 2012.

Figura 3.3: Área do k-ésimo retângulo



Fonte: THOMAS, 2012.

Definição 10. *Se f e g são contínuas com $f(x) \geqslant g(x)$ ao longo de $[a, b]$, então a área da região entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ de a até b é a integral de $(f - g)$ de a até b:*

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Exemplo 5. *Determine a área da região compreendida acima da curva $y = 2e^{-x} + x$, abaixo da curva $y = \dfrac{e^x}{2}$, à esquerda por $x = 0$ e à direita por $x = 1$.*

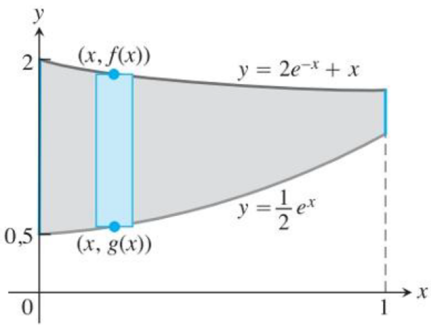
Solução. Os gráficos das curvas e da região cuja área se pretende determinar são exibidos na figura 3.4.

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo temos que a área entre as curvas sobre o intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$ é dada por

$$A = \int_0^1 [(2e^{-x} + x) - \frac{1}{2}e^x]dx = \left[-2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}e^x\right]_0^1$$

$$= \left(-2e^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e\right) - \left(-2 + 0 - \frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{2}{e} - \frac{e}{2} \approx 0,9051.$$

Figura 3.4: Região do Exemplo 5 com um retângulo típico de aproximação.

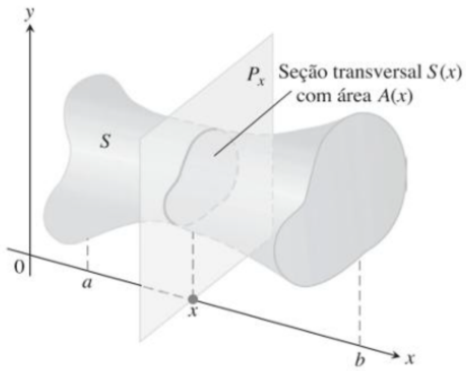


Fonte: THOMAS, 2012.

3.2 Volumes por seções transversais

Nesta seção vamos definir os volumes de sólidos usando as áreas de suas respectivas seções transversais. Uma seção transversal de um sólido S é a região plana formada pela interseção de S com um plano.

Figura 3.5: Seção transversal $S(x)$ do sólido S formado pela interseção de S com um plano P_x perpendicular ao eixo X através do ponto x no intervalo $[a, b]$.



Fonte: THOMAS, 2012.

Definição 11. *O volume de um sólido compreendido entre os planos $x = a$ e $x = b$ e cuja área da seção transversal por x é uma função integrável $A(x)$ é a integral de a e b de A:*

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Essa definição é aplicada sempre que $A(x)$ for contínua ou, de modo mais genérico, quando ela for integrável. Para aplicar essa fórmula no cálculo do volume de um sólido, os passos a seguir devem ser seguidos.

1. Esboce o sólido e uma seção transversal típica.

2. Encontre uma fórmula para $A(x)$, a área de uma seção transversal típica.

3. Encontre os limites de integração.

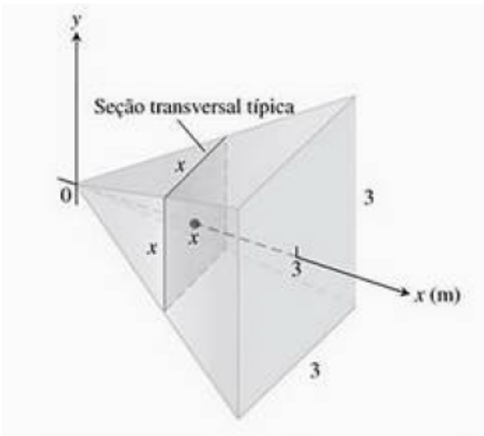
4. Integre $A(x)$ usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Exemplo 6. *Uma pirâmide com 3m de altura tem uma base quadrada com 3m de lado. A seção transversal da pirâmide, perpendicular à altura e a x metros abaixo do vértice, é um quadrado com x metros de lado. Determine o volume da pirâmide.*

Solução. Seguindo os quatro passos citados acima temos:

1 Um esboço. Desenhamos a pirâmide com sua altura ao longo do eixo x e seu vértice na origem e incluímos uma seção transversal típica (Figura 3.6)

Figura 3.6: As seções transversais da pirâmide do exemplo são quadradas.



Fonte: THOMAS, 2012.

2 Uma fórmula para $A(x)$. A seção transversal em x é um quadrado com x metros de lado, portanto sua área será

$$A(x) = x^2$$

3. Os limites de integração. Os quadrados vão de x = 0 a x = 3.

4. Integra para determinar o volume.

$$V = \int_0^3 A(x)dx = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo temos:

$$\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9m^3$$

3.3 Sólidos de revolução: o método do disco

Chama-se sólido de revolução um sólido que é gerado pela rotação de uma região plana em torno do eixo no plano. Para calcular seu volume necessitamos analisar que a área da seção transversal $A(x)$ é um disco de raio $R(x)$, a distância entre a fronteira da região bidimensional e o eixo de revolução. Portanto, a área é:

$$A(x) = \pi(raio)^2 = \pi[R(x)]^2 dx$$

Assim, graças à definição de volume, temos:

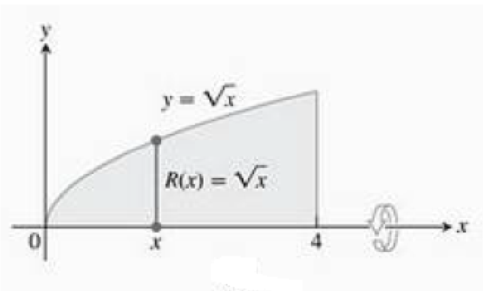
$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$

Esse método para calcular o volume de um sólido de revolução geralmente é denominado método do disco, pois uma seção transversal é um disco circular de raio $R(x)$.

Exemplo 7. *A região entre a curva* $y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4$, *e o eixo* x *gira em torno desse eixo para gerar um sólido. Determine seu volume.*

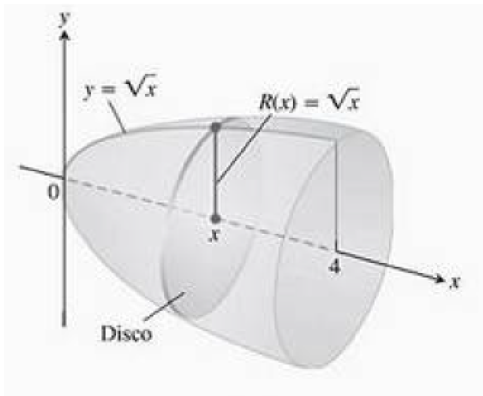
Solução. Esbocemos figuras mostrando a região, um raio típico e o sólido gerado (figura 3.7 e figura 3.8)

Figura 3.7: Raio típico



Fonte: THOMAS, 2012.

Figura 3.8: Sólido obtido



Fonte: THOMAS, 2012.

O volume é

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx = \int_0^4 \pi\left[\sqrt{x}\right]^2 dx \\ &= \pi \int_0^4 x dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi\frac{4^2}{2} = 8\pi \end{aligned}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática vem evoluindo ao longo da História e se aperfeiçoando de acordo com cada período. Em um desses períodos, foram surgindo matemáticos importantes como Newton e Leibiniz, que após anos de estudos e minúsculas interpretações vieram a desenvolver o Teorema Fundamental do Cálculo. Teorema esse que veio a aprimorar o Cálculo Diferencial e Integral, permitindo assim o cálculo de áreas com setores sinuosos.

O presente trabalho foi de extrema relevância, pois buscou fazer um estudo da importância do Teorema Fundamental do Cálculo com o objetivo de enunciar, demonstrar e mostrar algumas de suas aplicações. Para isso foi preciso fazer um estudo sobre suas origens e matemáticos que se destacaram em sua construção e formalização. O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma importante relação entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral, sendo considerado como uma poderosa ferramenta na resolução de problemas. Também há disciplinas que usam ele. Exemplo, Análise Matemática, Equações diferenciais Ordinárias e Cálculo Diferencial e Integral.

Utilizamos alguns resultados como o Teorema do Valor Médio para integrais definidas, o Teorema de Rolle, o Teorema do Valor Intermediário, entre outros para enunciar, demonstrar e mostrar algumas aplicações do teorema em questão.

Nas aplicações trabalhadas, cálculo de área entre curvas, cálculo de volume por seções transversais e cálculo de sólidos de revolução usando o método do disco, foi visto que o Teorema Fundamental do Cálculo traz uma grande praticidade comparado a outros métodos, como o Método da Exaustão.

REFERÊNCIAS

BOYER, carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

EVES, Howard. **Introdução a história da Matemática**. 5 edição. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

FLEMMING, Diva Marília; Gonçalves, Mirian Buss. **Cálculo A**. Florianópolis: Pearson, 2006.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). Disponível em: <https://ecalculo.if.usp.br/historia/leibniz.htm> Acesso em 12/02/2021.

John Wallis (1616 - 1703). Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/wallis.htm> Acesso em 12/02/2021.

JÚNIOR, Francisco Lopes da Silva. **Sobre o Teorema Fundamental do Cálculo**. Conde-PB, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/16865/1/FLSJ20022020.pdf> Acesso em 30/01/2021.

SWOKOWSKI, Earl William. **Cálculo com Geometria Analítica**. vol. 1. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983.

Teoria de Conjuntos: Partição. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/teoria-de-conjuntos-particao/> Acesso em 14/03/2021.

THOMAS, George Brinton. **Cálculo**. vol. 1. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009.