



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA  
CAMPUS VIII – ARARUNA  
CENTRO DE CIÊNCIAS, TECNOLOGIA E SAÚDE – CCTS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
LICENCIATURA EM FÍSICA**

**FRANCIELHO FERNANDES DA SILVA JUSTINO**

**GEOMETRIA FRACTAL: A DIMENSÃO DE HAUSSDORFF PARA PAPÉIS  
AMASSADOS**

**ARARUNA-PB  
2021**

**FRANCIELHO FERNANDES DA SILVA JUSTINO**

**GEOMETRIA FRACTAL: A DIMENSÃO DE HAUSSDORFF PARA PAPÉIS  
AMASSADOS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao departamento de Física do curso de licenciatura em Física da Universidade Estadual da Paraíba campus Araruna, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Física.

**Área de concentração:** Física

**Orientador:** Prof. Dr. Mário César Soares Xavier

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

J96g Justino, Francielho Fernandes da Silva.  
Geometria fractal [manuscrito] : a dimensão de Hausdorff para papéis amassados / Francielho Fernandes da Silva Justino. - 2021.  
21 p.

Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde , 2021.  
"Orientação : Prof. Dr. Mário César Soares Xavier , Coordenação do Curso de Física - CCTS."

1. Física. 2. Geometria . 3. Dimensão. I. Título  
21. ed. CDD 530

**FRANCIELHO FERNANDES DA SILVA JUSTINO**

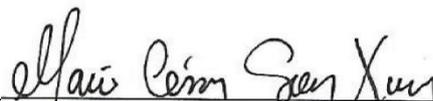
**GEOMETRIA FRACTAL: A DIMENSÃO DE HAUSSDORFF PARA PAPÉIS  
AMASSADOS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao departamento de Física do curso licenciatura em Física da Universidade Estadual da Paraíba campus Araruna, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Física.

**Área de concentração:** Física

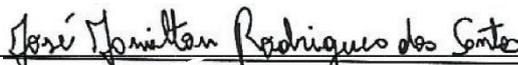
Aprovado em:14/10/2021

**BANCA EXAMINADORA**



---

Prof. Dr. Mário Cesar Soares Xavier  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



---

Prof. Dr. José Jamilton Rodrigues dos Santos  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



---

Prof. Dr. João Hugo Baracuy da Cunha Campos  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>2. TEORIA DOS FRACTAIS .....</b>	<b>12</b>
<b>2.1 Auto semelhança, Escala e Complexidade.....</b>	<b>13</b>
<b>3. FRACTAIS DETERMINÍSTICOS .....</b>	<b>14</b>
<b>3.1 Conjunto de cantor.....</b>	<b>14</b>
<b>3.2 Triângulo de sierpinski.....</b>	<b>15</b>
<b>3.3 A curva de koch .....</b>	<b>15</b>
<b>3.4 Curva de hilbert .....</b>	<b>16</b>
<b>4. DIMENSÃO DE HAUSDORFF .....</b>	<b>16</b>
<b>4.1 Dimensão fractal em papéis amassados .....</b>	<b>17</b>
<b>4.2 Estimativa da dimensão fractal.....</b>	<b>18</b>
<b>5. RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>20</b>
<b>6. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>21</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>22</b>

## GEOMETRIA FRACTAL: A DIMENSÃO DE HAUSDORFF PARA PAPÉIS AMASSADOS

## FRactal Geometry: The Hausdorff Dimension for Crashed Paper

FRANCIELHO FERNANDES DA SILVA JUSTINO<sup>1</sup>

### RESUMO

O presente trabalho visa tratar alguns aspectos sobre a dimensão de Hausdorff para a geometria fractal, analisando experimentalmente o comportamento de um sistema de dobragem aleatória de folhas de papéis, para obter a sua dimensão anômala. A referida análise consiste em descrever um sistema fractal simples. A geometria das bolas de papel amassadas é examinada e a análise enfatiza alguns aspectos físicos, matemáticos e intuitivos do problema, introduzindo o conceito de dimensão fractal. Através do padrão fractal sugerido, os valores de dimensão  $D$  obtidos, para todos os materiais, variaram no intervalo entre 2 e 3 dimensões.

**Palavras - chave:** Dimensão Fractal. Auto Similaridade. Complexidade Infinita.

### ABSTRACT

The present paper aims to deal with some aspects of the Hausdorff dimension for fractal geometry, experimentally analyzing the behavior of a random folding system for sheets of paper, in order to obtain its anomalous dimension. This analysis consists of describing a simple fractal system. The geometry of the crumpled paper balls is examined and the analysis emphasizes some physical, mathematical and intuitive aspects of the problem, introducing the concept of fractal dimension. Through the suggested fractal pattern, the  $D$  dimension values obtained, for all materials, varied in the range between 2 and 3.

**Keywords:** Fractal Dimension. Self-Similarity. Infinite Complexity.

### 1. INTRODUÇÃO

Fractais são caracterizados por sua dimensão fracionária, objetos com estrutura fractal podem ser facilmente encontrados na natureza, chamados de fractais naturais, como as nuvens, árvores, rios e assim por diante (BARNESLEY, 1988). A expressão ‘fractal’ resulta do encontro do adjetivo *fractus*, do verbo *frangere*, que quer dizer quebrar. O termo surgiu quando Benoît Mandelbrot (1924 – 2010), matemático e engenheiro de sistemas da *International Business Machines* (IBM) sentiu a necessidade de criar um nome para a geometria que buscava representar as reais formas da natureza.

---

<sup>1</sup> Graduando em Física pela Universidade Estadual da Paraíba,  
[franielho.justino@aluno.eupb.edu.br](mailto:franielho.justino@aluno.eupb.edu.br)

Por outro lado, os fractais podem ser criados a mão, como por exemplo, a compressão de filmes finos, tal como uma folha de papel amassado, conceito de *dimensão de Hausdorff*<sup>2</sup> e topologia. Tecnicamente, um fractal é um elemento que apresenta certa invariância no seu formato, sendo um objeto áspero, rugoso e fragmentado que pode ser subdividido em partes, cada uma das quais é pelo menos aproximadamente um tamanho reduzido da cópia do todo. Estruturas fractais surgem sempre que um sistema apresenta características auto semelhantes, dotados de uma estrutura interna, aspectos levam à autossimilaridade.

Existem duas propriedades principais dos fractais, a saber, que é auto similaridade de todos os tamanhos (quantidade seja ela finita ou infinita) e as dimensões fracionárias ou não inteiras. A auto semelhança é identificada quando uma (porção, parte, setor) de uma figura ou algum elemento da natureza, possa ser vista como uma réplica do todo, numa escala menor (MANDELBROT, 1975). A complexidade infinita se refere ao fato da recorrência de um padrão fractal quando o objeto se encontra como sub procedimento, do procedimento anteriormente executado. Isso também pode ser descrito como um subconjunto de um conjunto, onde ocorre um rearranjo de componentes idênticos (HOWARD, 2004).

Apesar de estarmos habituados com a geometria Euclidiana, que é uma geometria linear, do plano e da reta e que só tem dimensões inteiras, essa geometria não descreve bem o mundo real ou as formas da natureza, tal como; a forma de uma montanha, de uma nuvem e do litoral, por exemplo, porque não tem formatos lineares, não são esferas, arcos ou cones, respectivamente. “Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, o som do latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta” . (MANDELBROT, 1983, p.1). Na geometria tradicional, uma linha tem dimensão um, uma superfície tem dimensão dois e um volume tem dimensão três.

A dimensão fractal, ao contrário do que acontece na geometria Euclidiana, não corresponde a um valor inteiro. Um fractal tem quantidade fracionaria, representando o nível de ocupação no espaço que a contem. Logo, o termo “*frac*” pressupõe a ideia de fração, e “*tal*” significa total.

A física é uma ciência abrangente e fundamental que em seus estudos procura entender e elucidar a ocorrência de diversos fenômenos naturais, possuindo fortes relações com outras ciências. No decorrer de toda história a física trás no seu desenvolvimento a matemática sendo ferramenta essencial, no sentido de ser uma linguagem para descrever e formalizar tais fenômenos. A medida que a física evolui ela precisa de um subsídio, uma ferramenta para que possa concretizar as teorias e conceitos envolvidos nas evoluções (MARCO, 2021). Enfim, atualmente a Física ainda mantém e estabelece novas relações com outras áreas, como a Química, Biologia entre outras. No entanto, a relação com a matemática é absolutamente singular e frutífera. O trabalho em conjuntos com grandes matemáticos acresceu um brilhantismo de formalidades a Física, associado à geometria fractal, utilizando modelos contínuos, discretos e dinâmicos de experimentos físicos e computacionais associados a esta dimensão, trazendo novos horizontes para o estudo de entropia, que estuda o grau de desordem e complexidade de um sistema. Entretanto há aplicações inúmeros áreas que a dimensão está presente, como na medicina (ligados ao funcionamento do coração e pulmão, sistemas circulatórios e análise de células cancerígenas), na economia (pelo comportamento na bolsa de valores) e nas ciências sociais (comportamento de multidões).

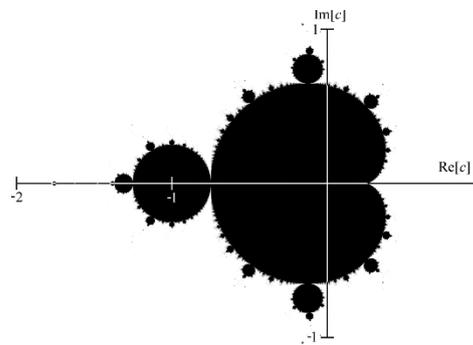
---

<sup>2</sup> O termo dimensão de Hausdorff advém do matemático alemão Felix Hausdorff (1868-1942), o qual publicou trabalhos na área de topologia e introduziu a ideia de dimensão fracionada.

## 2. TEORIA DOS FRACTAIS

Dimensões fractais podem ser identificadas geometricamente ou aleatoriamente, através de objetos que têm propriedades de auto similaridade e dimensão fracionária, em contraste com o conceito Euclidiano, como citado anteriormente. Desse modo, em uma dimensão inteira, euclidiana, a complexidade infinita não acontece. Por exemplo, com o contorno de uma circunferência, que diminui a sua curva à medida em que ampliamos uma das suas partes. A geometria fractal de Mandelbrot fornece uma descrição e um padrão matemático para muitas das formas visivelmente complexas encontradas na natureza. Esses padrões muitas vezes têm invariância notável sob mudanças de ampliação. Por exemplo, conjunto de Mandelbrot mais conhecido como símbolo dos fractais.

**Figura 1:** Conjunto de Mandelbrot (Fractal computacional)



Fonte: Domínio público.

O conjunto de Mandelbrot, apesar de apresentar complexidade, segue alguns conceitos matemáticos, relativamente simples. O conceito do plano complexo e o conceito de sequência e estabilidade. Números complexos têm duas partes: a parte real e a parte imaginária. Esses números podem ser representados no plano cartesiano, colocando a parte real no eixo das abscissas e a parte imaginária no eixo das ordenadas. Logo, se tem o plano complexo, usado para traçar o conjunto.

Para abordar o conceito de sequência e estabilidade se segue: sequência são os conjuntos de números que obtemos ao aplicar uma regra, tal como “faça o quadrado do número anterior”, por exemplo; começando pelo número 2, temos;  $(2 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 256 \rightarrow 65.536 \rightarrow \dots)$ . Logo percebe-se que os números tendem a ficar maiores e vão ao infinito, o que significa que essa sequência não é estável. Porém, se iniciarmos por um número “quebrado” como 0,5, temos;  $(0,5 \rightarrow 0,25 \rightarrow 0,0625 \rightarrow 0,00390635 \rightarrow \dots)$ . Neste exemplo, os números tendem a ficar menores com cada iteração, se aproximando do zero, como essa sequência se aproxima de um número ao invés de ir ao infinito, logo é estável. De acordo com esses conceitos, é possível obter o conjunto de fractais de Mandelbrot da seguinte forma: a princípio pegamos a sequência como a seguinte regra “Faça o quadrado do número anterior e some a constante C, considerando o primeiro termo igual a zero”. Tem-se, portanto,

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C \quad (1)$$

A criação da maioria dos fractais envolve aplicações de regras simples, sobre um conjunto de formas geométricas ou números. A partir desta fórmula temos que, a saída da rodada anterior é a entrada para a rodada seguinte. Ou seja, segue um processo de retroalimentação e iteração. Sendo assim a repetição do mesmo processo sobre o resultado.

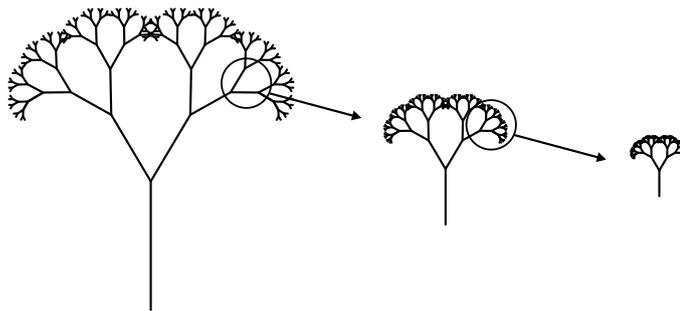
Onde a constante  $C$  nos dá o gráfico. Logo, basta pegarmos um plano complexo e colorirmos de preto todos os valores de  $C$  que fazem com que a sequência fique estável. Assim se obtém o Conjunto de Mandelbrot.

Muitos dos objetos fractais são encontrados na natureza e também feitos a mão, como os fractais feitos de fibras que se obtém apertando, por exemplo, uma folha de papel. A dimensão do papel amassado é calculada pela massa dos fractais. A análise enfatiza alguns aspectos físicos, matemáticos e intuitivos do problema, introduzindo o conceito de dimensão fractal que fundamenta muitas áreas da física moderna.

## 2.1 Auto semelhança, Escala e Complexidade

Um elemento é auto semelhante se apresentar sucessivamente o mesmo aspecto visual em qualquer escala, ou seja, a figura pode ser ampliada ou reduzida, podendo gerar uma réplica do todo, em uma escala menor. “Daí, a ideia de que a parte está no todo e o todo está na parte”. Esse processo de formação de uma estrutura fractal, pode ser gerado em uma cadeia de processos recorrentes. Como pode ser observado na figura seguinte:

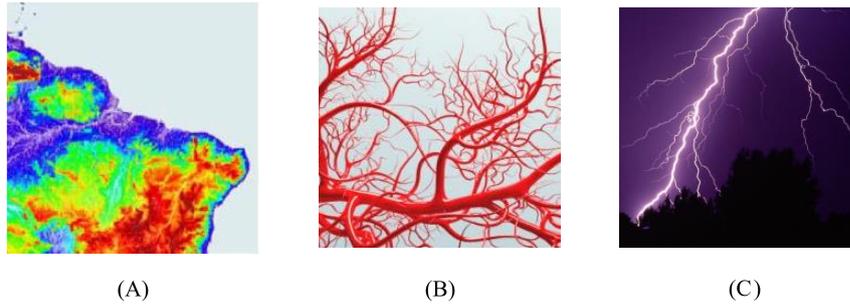
**Figura 2:** auto similaridade exata



**Fonte:** adaptação do autor

A (Figura 2) é um exemplo de uma estrutura fractal, construída iterativamente retratando características de auto semelhança. A construção desta estrutura inicia-se com uma fita de um dado comprimento e provida de certa largura. A metade superior é substituída por dois galhos com metade tanto de comprimento como de largura, com os galhos formando sempre um mesmo ângulo. Este processo continua até que um fractal na forma de uma árvore é gerado. Para infinitas iterações, verifica-se a complexidade infinita da estrutura.

Quando falamos de figuras ou elementos auto semelhantes, temos que considerar dois tipos de auto semelhança: a exata e a aproximada. A auto semelhança exata só existe em elementos gerados em processos matemáticos onde, o conjunto total é formado por pequenas réplicas perfeitas dela mesmo, por isso o nome auto semelhança exata. E a aproximada não se tem réplicas perfeitas, e são encontrados na natureza. Como nos exemplos a seguir:



**Figura 3:** (A) Bacia do rio Amazonas - Fonte: imagem obtida pelo radar de altimetria ERS-1 ([www.esa.int](http://www.esa.int)); (B) Sistema arterial Fonte: (pexels.com); (C) Raios. Fonte: (pexels.com)

Ambas possuem dimensão fractal na sua composição. Aqui é descrito um exemplo interessante de dimensão fractal, definida por esses elementos (formas) que possuem certa invariância simplificadora bastante nítida quando há mudanças de ampliação. Essa auto similaridade é a qualidade essencial dos fractais encontrados na natureza.

### 3. FRACTAIS DETERMINÍSTICOS

Fractais determinísticos são gerados por funções iterativas, e possuem auto similaridade exata. Sendo assim, não perdem as características em diferentes escalas. Muitos matemáticos ao longo da história, dedicaram seus estudos para descrever o comportamento da natureza, com o objetivo de tornar os fenômenos naturais compreensíveis e simples, assim, foram surgindo novas teorias e embasamentos físicos e matemáticos que descreviam e formalizavam tais fenômenos.

No final do século XIX, alguns matemáticos como, Cantor, Koch, Sierpinski, Peano e Hilbert investigavam objetos relacionados à álgebra e a geometria. Esses objetos eram considerados como os “monstros matemáticos”, eram chamados assim, por desafiar os conceitos já estabelecidos até então, e que aparentemente não teriam aplicações. Pois, os fractais exibem, como propriedade, uma infinita complexidade, logo, as medidas comuns de comprimento, área e de volume perdem o sentido intuitivo para esse sistema. Os conjuntos de Cantor e Sierpinski são criados a partir de um processo de remoção de uma das partes da figura inicial, diferente dos conjuntos de Koch, Hilbert e Peano. Pois, são formados através de processo de rearranjo da figura inicial.

#### 3.1 Conjunto de Cantor

De acordo com (FALCONER, 1990) Georg Cantor (1845-1918), matemático russo, ganhou destaque por apresentar ideias altamente inovadoras sobre o conceito de infinito. O conjunto de Cantor ou “poeira de cantor” é um subconjunto infinito de pontos em um intervalo unitário  $[0,1]$ . Vamos considerar um segmento de reta, depois dividir o segmento em três partes iguais e eliminar a central, em seguida considerar os segmentos de reta restantes e retornar a fazer o processo anteriormente citado.

**Figura 6:** Conjunto de Cantor

**Fonte:** Scientific Diagram.

Na figura 6 podemos ver a construção do conjunto de Cantor após 3 iterações, onde os segmentos foram representados por barras para ter uma melhor visualização.

### 3.2 Triângulo de Sierpinski

Waclaw Sierpinski (1882-1969), matemático polaco que criou em 1916 o fractal que herdou seu nome “Triângulo de Sierpinski”. Esse fractal é obtido por um processo semelhante à criação do conjunto de Cantor, partimos de um processo de remoção de uma das partes iniciais. Partindo de uma figura clássica da geometria Euclidiana, um triângulo equilátero (FALCONER, 1990).

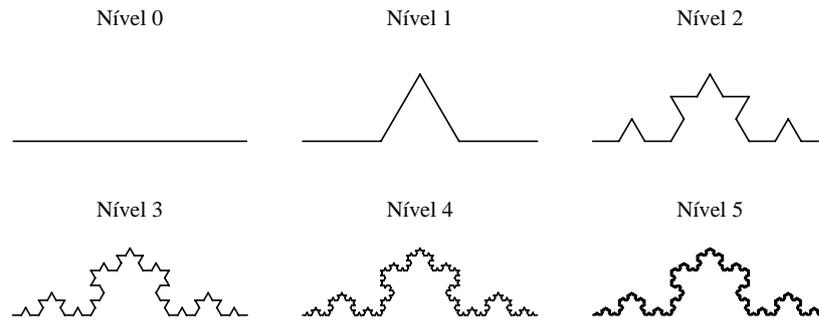
**Figura 7:** Triângulo de Sierpinski

**Fonte:** <https://www2.ufjf.br/fractalize/2021/05/22/triangulo-de-sierpinski/>

Inicialmente determinam-se os pontos médios de cada lado do triângulo. Depois, remove-se o triângulo do meio. Posteriormente, esses passos são repetidos para cada um dos outros triângulos restantes assim por diante.

### 3.3 A curva de Koch

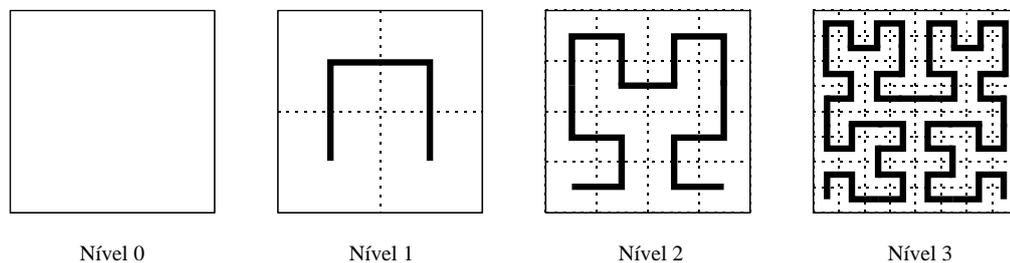
Helge Von Kock (1870-1924), matemático sueco introduziu em 1904 o fractal conhecido como a curva de Koch. Inicialmente a curva de Koch tem um segmento de reta, divide-se o segmento em três partes iguais, retira-se a parte central, substituindo por dois segmentos de mesmo comprimento, inclinados fazendo referência a forma de um triângulo equilátero sem base (FALCONER, 1990).

**Figura 8:** Curva de Kock

**Fonte:** Sociedade Brasileira de Educação Matemática

### 3.4 Curva de Hilbert

David Hilbert (1862-1943), matemático alemão desenvolveu seu fractal através de um processo recursivo. Inicialmente a figura é um quadrado unitário, que se divide em quatro quadrados iguais, unindo os pontos no centro de cada um desses quadrados.

**Figura 9:** Processo recursivo da construção da curva de Hilbert.

**Fonte:** curvas\_preenchimento.pdf (ufpr.br)

A curva de Hilbert é formada, não pelos quadrados, mas sim pelos segmentos de retas alinhados no centro dos quadrados menores. Esse processo tem comprimento infinito, limitando a área de um quadrado até preenche-lo completamente (FALCONER, 1990).

## 4. DIMENSÃO DE HAUSDORFF

A ideia de dimensão “quebrada”, que se aplica às formas descontínuas, surgiu com o matemático Hausdorff no ano de 1919 (STAHLKE, 1993, p.33). Utilizado para dimensionamentos de estruturas fractais, que são gerados por iterações de funções, em que as medidas do objeto gerador se relacionam de maneira bem definida com o objeto inicial. De acordo com Barbosa (2002), a vantagem de utilizar dimensão de Hausdorff é que ela se adequa para qualquer conjunto matemático conveniente, pelo fato de utilizar medidas relativamente simples de manipular.

A Natureza é rica em fractais, tanto geométrica como nas distribuições estatísticas, mas mesmo na Sociologia e no Urbanismo estas estruturas são importantes. O sistema circulatório de mamíferos, o fluxo de caminhões nas estradas e rodovias de um país, o número de contatos

que uma pessoa tem por dia, todas estas grandezas seguem distribuições de probabilidade que são fractais (DEPPMAN, 2021).

Para obter uma estrutura fractal são necessários dois aspectos, como: a simetria de escala e a estrutura complexa. Onde a simetria de escala leva a distribuições de alguma lei de potência, onde,

$$P(x) = p_0 \left( \frac{x}{x_0} \right)^\alpha \quad (2)$$

Onde  $(p_0), (x_0)$  e  $(\alpha)$  são constantes, logo  $(p_0)$  é uma constante de normalização que garante.

$$\int_0^\infty P(x) dx = 1 \quad (3)$$

Hausdorff mostrou que o parâmetro  $\alpha$  está relacionado à dimensão topológica ( $D$ ), do sistema, isso implica dizer, se o sistema possui uma, duas ou três dimensões, onde existe uma distribuição anômala ( $d$ ) que pode ser fracionária. A relação entre as dimensões é dada por,

$$\alpha = D + d \quad (4)$$

$(x_0)$  tem a mesma unidade de  $x$ , onde desempenha um papel importante na teoria fractal, que é o parâmetro de escala do sistema. Essa é a grandeza que garante que o sistema seja livre de escala, pois se mudarmos respectivamente  $x$  e  $x_0$  de forma que  $x \rightarrow x' = ax$  e  $x_0 \rightarrow x_0' = ax_0$ , a probabilidade  $P(x) = P(x')$ . Isto que significa ser invariante por transformação de escala. Na natureza, porém, sempre temos uma quebra dessa simetria, que de alguma forma define uma dimensão preferencial. Quando  $x_0'$  é fixado nesse valor,  $P(x)$  se torna uma lei de potência (DEPPMAN, 2021).

No caso de superfícies, observa-se empiricamente que a relação entre a massa da superfície dobrada e o diâmetro da bola obtida, se realizada sob a mesma pressão, varia com:

$$M = k\varphi^D \quad (5)$$

Onde  $k$  é uma constante, e  $\varphi$  é o diâmetro da bola. O expoente  $D$  é a dimensão fractal, ou dimensão de Hausdorff. Sendo  $D$  a dimensão que é dada por,

$$D = \frac{\log(n)}{\log(r)} \quad (6)$$

Onde  $n$  é a quantidade total de partes e  $r$  o fator de redução, que é definido pela razão entre a medida final e a medida inicial.

#### 4.1 Dimensão fractal em papéis amassados

A geometria Euclidiana é pensada na seguinte forma, um ponto tem dimensão zero (0) uma linha reta tem dimensão um (1), a caixa que forma a área da superfície (um plano) tem dimensão dois (2) e um cubo tem dimensão três (3). Ao representar essas figuras num espaço

geométrico, suas dimensões possuem números positivos inteiros a partir do zero. A geometria fractal possui elementos, cujas a suas dimensões podem ser fracionária.

A dimensão fractal nos objetos auto semelhantes podem ser exatas ou aproximadas. Ambas têm a característica de não serem necessariamente uma dimensão inteira. De acordo com Mandelbrot (1975) “um dado conjunto  $A$  constitui um fractal se, em  $A$ , ( $D_i > D > D_t$ ), sendo  $D$  a dimensão fractal e  $D_t$  a dimensão topológica do conjunto  $A$ ”.

**Figura 10:** Curva de Kock



**Fonte:** sistemascomplexos.com

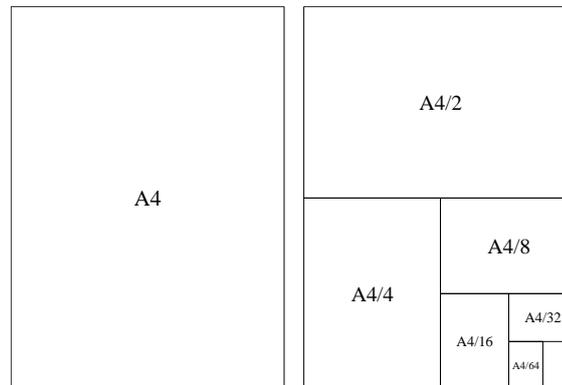
Um objeto maciço (esfera) tem dimensão 3, já que sua forma é perfeitamente regular e todos os espaços são ocupados por matéria. Imagine um papel, ele tem dimensão 2 (plano), ao amassar esse papel, por mais compacto que tente deixar, sua dimensão tenderá a de uma esfera maciça, porém, haverá irregularidades e espaços não preenchidos. Desse modo, sua dimensão será fracionária. Pensando assim, é possível observar que quanto mais próximo for a dimensão fractal da dimensão topológica mais irregular é o objeto.

Na natureza a matéria está distribuída, em diferentes formas, composições e arranjos espaciais, com diferentes graus de aleatoriedade e complexidade em todas as escalas. Muitas dessas estruturas existentes não possuem dimensão inteira. Enquanto nos objetos descritos pela Geometria Euclidiana se dá com um expoente  $d$  inteiro (1, 2 ou 3), nos fractais ela se dá com expoente  $D$  fracionário (DELGADO, 2017). Assim, a bola de papel se torna um bom exemplo, sua dimensão está entre 2 e 3, dimensão topológica e dimensão euclidiana, respectivamente.

#### 4.2 Estimativa da dimensão fractal

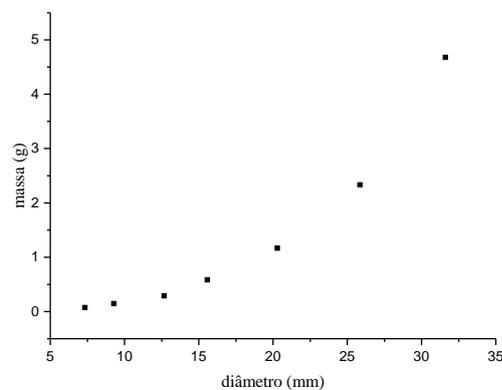
Para a análise proposta foi utilizado três formas distintas de materiais, sendo elas: papel alumínio (material 1), papel office A4 (material 2), papel office molhado (material 3). De acordo com o modelo fractal para esses materiais, a dimensão estará entre 2 e 3. Com isso, pretende-se realizar um comparativo entre os materiais, e também, como é no caso do material 3, a sua possível variação a partir de alterações físicas. A dimensão linear de interesse para medida é o diâmetro da esfera formada ao após a compressão das folhas.

Foi utilizado um fator de redução proporcional de  $\sqrt{2}$ , tomando como início as dimensões de uma folha A4, aplicado a todos os materiais. Como é demonstrado na figura 10,

**Figura 11:** Divisão das folhas.

**Fonte:** autor.

Foram utilizadas 6 amostras para cada diâmetro e material, e foi adotado um total de 5 medidas em regiões aleatórias das esferas utilizando um paquímetro digital de resolução de 0,01 mm. Para simplificação da análise dos dados foi feita uma alteração das escalas milimétricas para logarítmicas, tendo em vista que os dados possuem uma curva logarítmica, como podemos observar na figura seguinte:

**Gráfico 1:** distribuição dos dados (amostra1) alumínio.

**Fonte:** autor.

Sendo assim, se torna oportuno alterar a equação (5) para afim de facilitar a análise, tem-se:

$$\begin{aligned}
 m &= k\varphi^D \\
 \log(m) &= \log(k\varphi^D) \\
 \log(m) &= \log(k) + \log(\varphi^D) \\
 \log(m) &= \log(k) + D\log(\varphi)
 \end{aligned} \tag{7}$$

Dessa forma, fica evidenciado com pode-se obter a dimensão de Hausdorff sendo a inclinação da reta originada da distribuição  $m \times \varphi$ .

$$y = ax + b \tag{8}$$

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

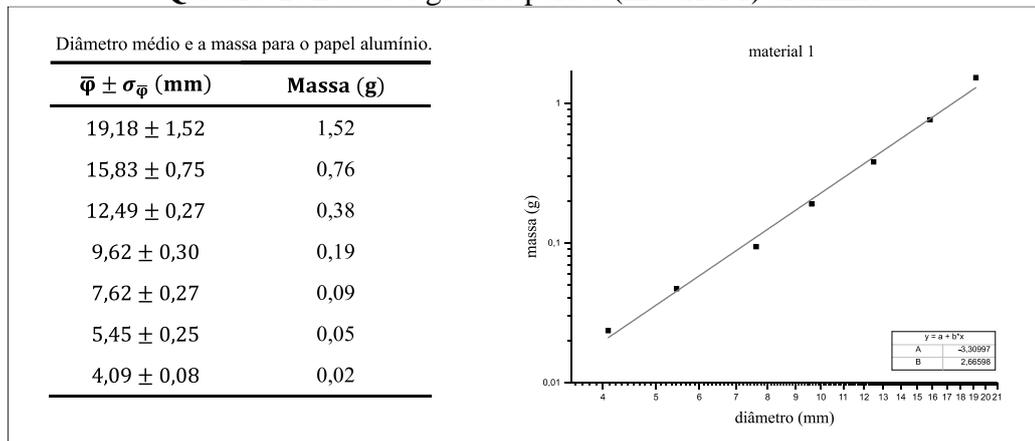
Para estimar a massa dos materiais foi utilizado a gramatura do papel office e também a medida em uma balança analítica, em seguida calculado uma aproximação para cada tamanho das folhas. Na tabela 1 é apresentado o valor de densidade estimada:

Tabela 1: Valores aproximados de densidade dos materiais utilizados

Material	Densidade $\sigma$ (g/mm <sup>2</sup> )
papel alumínio	$2,4 \times 10^{-5}$
papel office	$7,5 \times 10^{-5}$
papel molhado	$1,0 \times 10^{-4}$

Portanto, construindo o gráfico de  $\log(m)$  em função do  $\log(\varphi)$ , para cada material, e determinando os coeficientes lineares e angulares das retas ajustadas, foi possível determinar os valores de D e k.

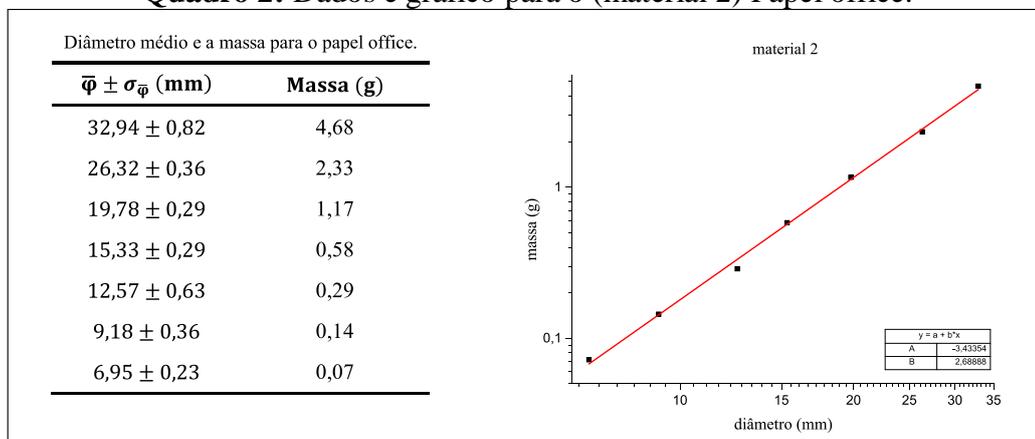
**Quadro 1:** Dados e gráfico para o (material 1) alumínio.



Fonte: autor.

O quadro 1 apresenta os valores da dimensão fractal D e da constante k, para o (material 1) esferas de papel alumínio, determinados a partir dos ajustes.

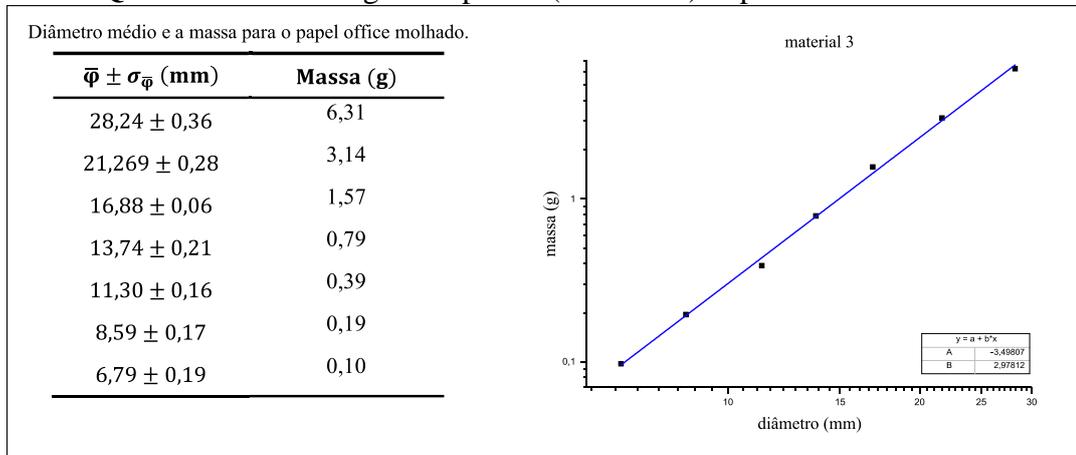
**Quadro 2:** Dados e gráfico para o (material 2) Papel office.



Fonte: autor.

O quadro 2 apresenta os valores da dimensão fractal  $D$  e da constante  $k$ , para o (material 2) esferas de papel office, determinados a partir dos ajustes.

**Quadro 3:** Dados e gráfico para o (material 3) Papel office molhado.



O quadro 3 apresenta os valores da dimensão fractal  $D$  e da constante  $k$ , para o (material 3) esferas de papel office molhado, determinados a partir dos ajustes.

A partir dos ajustes foram obtidos os seguintes valores da dimensão de Hausdorff para os materiais utilizados:

**Tabela 2:** Dimensão de Hausdorff para os materiais.

Material	Dimensão $D$
papel alumínio	2,66
papel office	2,68
papel molhado	2,97

Fonte: autor.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O padrão da geometria fractal pode ser aplicado as três amostras de papéis estudados: alumínio, office e office molhado. Os valores encontrados para dimensão fractal  $D$  foram: papel alumínio:  $D = 2,66$ ; papel office:  $D = 2,68$  e papel molhado:  $D = 2,97$ .

Como esperado, os valores de dimensão  $D$  obtidos, para todos os materiais, variaram no intervalo entre 2 e 3. As bolas de office molhado também descrevem o modelo de geometria fractal (mesmo sendo quase uma esfera compacta). O valor encontrado para dimensão fractal foi  $D = 2,97$ . Esse valor elevado se justifica pelo fato de que as bolas ficaram bem compactadas por causa da água, mesmo o valor sendo tão alto, não é compatível com a dimensão três ( $D=3$ ), caracterizando o modelo fractal e sua dimensão fracionária.

Foi possível demonstrar através de um simples experimento que é não precisa de muitas teoiras para reproduzir e analisar objetos fractais. Um simples papel amassado é um objeto fractal, porque sua forma não consegue preencher por completo um espaço de três dimensões, mesmo alterando sua composição (amostra 3).

## REFERÊNCIAS

ASSIS, Thiago Albuquerque de et al. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 30, p. 2304.1-2304.10, 2008.

BARNESLEY, Michael. F. Fractals Everywhere, 2nd Ed. Academic Press. London. 1988

DEPPMAN, Airton. Fractal structure of hadrons: experimental and theoretical signatures. UNIVERSE, Basel, v. 3, n. 3, p. 32, 2017. DOI: 10.3390/universe3030062.

DELGADO, Adriana de O. e Luiz H. S. Kadowaki, Geometria Fractal em Papel e Outros Materiais, Instituto de Física da USP.2017

EMMERT, Otávio de C. e Bárbara C. A. Kato, Geometria Fractal, Experimento Eletivo de Física Experimental II, USP. 2017

HOWARD, A dan Chris R. Aljabar Linier Elementer 8th Ed Jilid 2. Erlangga. Jakarta.2004

MANDELBROT, Benoit B. Conjunto de Mandelbrot.ufjf-Fractalize.2020. Disponível em: <https://www2.ufjf.br/fractalize/2020/12/23/conjunto-de-mandelbrot/>

MANDELBROT, Benoit B. The Fractal Geometry of Nature (W.H. Freeman and Company, Nova Iorque, 1975).

MANDELBROT, Benoit B. and Benoit B. Mandelbrot. The fractal geometry of nature. Vol. 1. New York: WH freeman, 1982.

PASARIBU, Agretta Litayani; MARDININGSIH, Mardiningsih; SEMBIRING, Pasukat. on hausdorff and topology dimensions of fiber materials fractal.

STAHLKE, T. M. Geometria Fractal: Um estudo da teoria de taxonomia baseado no processo de geração. Dissertação defendida na Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP, 1993.

K. Falconer, Fractal Geometry - Mathematical Foundation and Applications (John Wiley & Sons, Chichester, 1990).

## ANEXOS

## Anexo 1: Medidas de diâmetros para as amostras.

Tabela 3: Diâmetro das amostras para o papel alumínio.

Dimensão	$\varphi_1$ (mm)	$\varphi_2$ (mm)	$\varphi_3$ (mm)	$\varphi_4$ (mm)	$\varphi_5$ (mm)	$\varphi_6$ (mm)
A4	19,61	19,55	19,10	18,36	19,07	19,42
½ A4	15,86	15,07	16,29	15,27	16,27	16,21
¼ A4	12,46	12,85	12,76	12,26	12,18	12,41
1/8 A4	9,82	9,39	9,79	10,03	9,32	9,36
1/16 A4	7,37	7,90	7,96	7,66	7,52	7,31
1/32 A4	5,34	5,42	5,32	5,12	5,69	5,81
1/64 A4	4,19	4,15	4,04	4,03	4,14	3,99

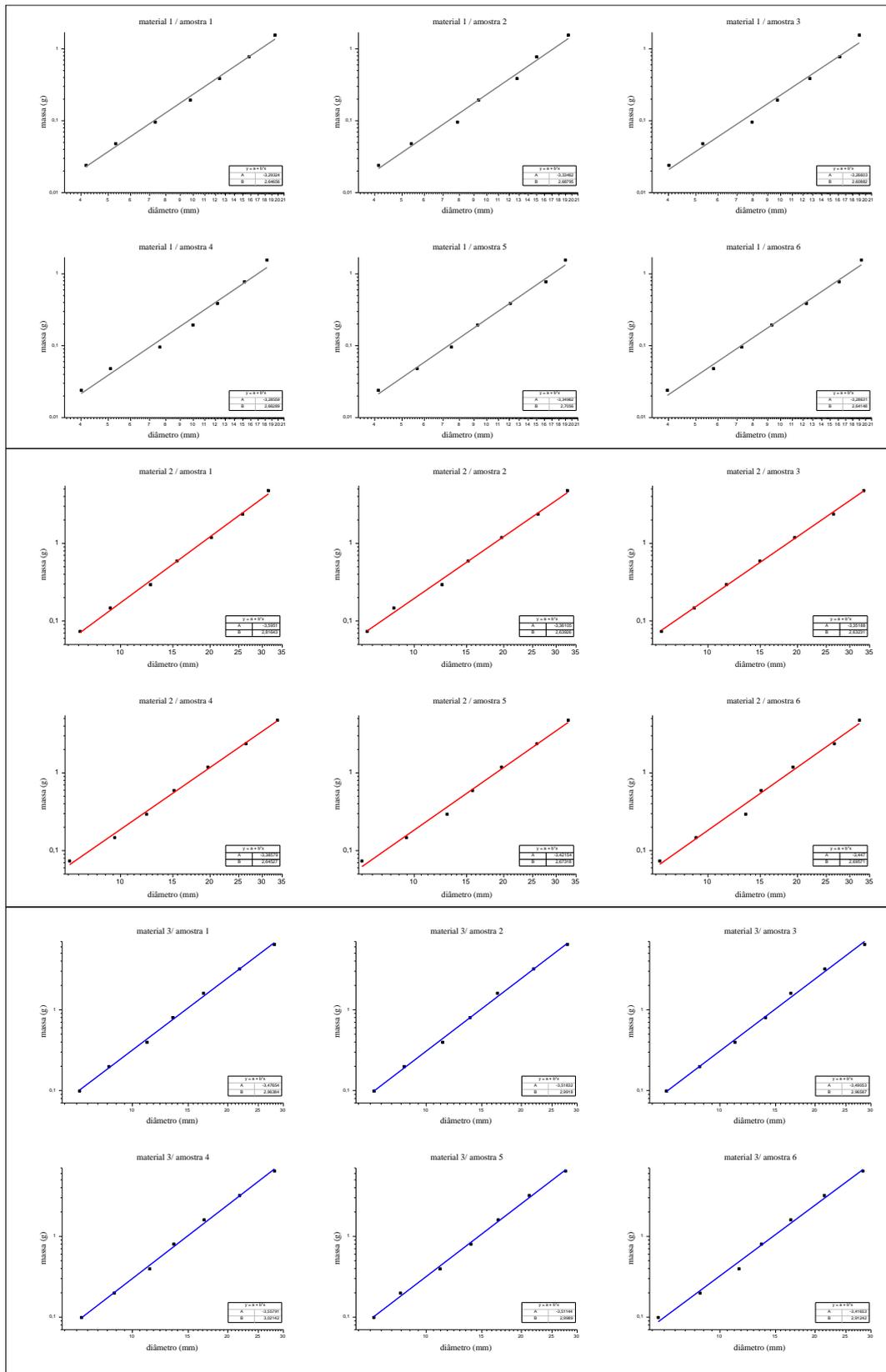
Tabela 4: Diâmetro das amostras para o papel office.

Dimensão	$\varphi_1$ (mm)	$\varphi_2$ (mm)	$\varphi_3$ (mm)	$\varphi_4$ (mm)	$\varphi_5$ (mm)	$\varphi_6$ (mm)
A4	31,61	32,93	33,59	33,89	33,11	32,48
½ A4	25,86	26,21	26,57	26,54	25,97	26,75
¼ A4	20,30	19,77	19,68	19,77	19,75	19,42
1/8 A4	15,57	15,26	15,02	15,21	15,78	15,15
1/16 A4	12,67	12,47	11,58	12,29	12,95	13,46
1/32 A4	9,28	8,57	9,03	9,61	9,45	9,15
1/64 A4	7,34	6,98	7,00	6,77	6,69	6,91

Tabela 5: Diâmetro das amostras para o papel office molhado.

Dimensão	$\varphi_1$ (mm)	$\varphi_2$ (mm)	$\varphi_3$ (mm)	$\varphi_4$ (mm)	$\varphi_5$ (mm)	$\varphi_6$ (mm)
A4	28,21	28,06	28,80	28,26	27,71	28,43
½ A4	21,91	21,96	21,56	21,92	21,28	21,50
¼ A4	16,85	16,88	16,83	16,93	16,97	16,83
1/8 A4	13,50	13,84	14,01	13,58	13,93	13,60
1/16 A4	11,18	11,33	11,22	11,40	11,12	11,55
1/32 A4	8,47	8,57	8,67	8,80	8,33	8,70
1/64 A4	6,84	6,88	6,81	6,94	6,87	6,42

## Anexo 2: Gráficos obtidos para cada medida.



## 3: Registro experimental.

