UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

GENILSON BATISTA DA SILVA

SOBRE O MODELO ADD E O PROBLEMA DA HIERARQUIA.

CAMPINA GRANDE
2021

GENILSON BATISTA DA SILVA

SOBRE O MODELO ADD E O PROBLEMA DA HIERARQUIA.

Trabalho apresentado ao Curso de Licenciatura plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Física.

Orientador: Prof: Dr. Eugênio Bastos Maciel

CAMPINA GRANDE
2021

S586s Silva, Genilson Batista da.
Sobre o Modelo ADD e o problema da hierarquia [manuscrito] / Genilson Batista da Silva. - 2021.
29 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.
"Orientação : Prof. Dr. Eugênio Bastos Maciel , Coordenação do Curso de Física - CCT."

1. Modelo ADD. 2. Problema da Hierarquia. 3. Teoria de Kaluza Klein. I. Título

21. ed. CDD 530

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

GENILSON BATISTA DA SILVA

SOBRE O MODELO ADD E O PROBLEMA DA HIERARQUIA

Trabalho apresentado ao Curso de Licenciatura plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Eugênio Bastos Maciel.

Aprovada em: 04/06/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eugênio Bastos Maciel (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Profa. Me. Deusalete Câmara Vilar Neta
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. Alex da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sempre me dá força nessa jornada.

Aos meus pai Severino, a minha mãe Leni, que sempre me apoiaram e incentivaram a estudar, estando sempre ao meu lado nos momentos de dificuldade

A minha companheira Geângela por sempre me aconselhar e me ajudar com seu companheirismo e dedicação.

Aos meus colegas que trilharam boa parte dessa jornada, Alcimar, Arthur, Gyovanna, Davidson, Lucas, Claudiély.

Ao professor Eugenio que teve paciência comigo na construção desse trabalho.

É com muita satisfação que divido com todos essa realização. Obrigado a todos!

SOBRE O MODELO ADD E O PORBLEMA DA HIERARQUIA

GENILSON BATISTA DA SILVA[1]

RESUMO

No ano de 1921 o matemático Theodor Kaluza publicou um artigo no qual trazia a solução para um grande problema em questão àquela época, ele estava unificando o campo eletromagnético com o campo gravitacional considerando um Universo com cinco dimensões, as quatros dimensões do espaço tempo ordinário mais uma dimensão espacial extra. Cinco anos após o trabalho de Kaluza, o físico Oscar Klein inseriu alguns ajustes à teoria de Kaluza, desde então esta teoria passou a ser conhecida como a teoria de Kaluza-Klein, esta foi a primeira teoria de dimensões extras. Com o passar do tempo, o interesse pelo estudo de teorias de dimensões extras foi de certo modo arrefecido, uma vez que não temos a possibilidade de verificação empírica. No entanto, no ano de 1998 a ideia novamente vem a tona na comunidade científica com o chamado modelo ADD (Modelo de dimensões Extras de Grande Escala), que tem como objetivo resolver o problema da hierarquia, que consiste na grande discrepância dos valores entre a energia da escala eletrofraca e a energia da escala de Planck. O modelo ADD é considerado o primeiro modelo de branas no cenário de gravitação, onde nosso universo é uma hipersuperficie (brana) imersa em um espaço dimensionalmente maior. Neste trabalho será feito um estudo sobre os principais aspectos do modelo ADD e sua proposta para a resolução do problema da hierarquia.

PALAVRAS-CHAVE: Dimensões Extras. Modelo ADD. Problema da Hierarquia.

---

[1] Graduando em Licenciatura Plena em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

ON THE ADD MODEL AND THE HYERARCHY PROBLEM

GENILSON BATISTA DA SILVA[2]

ABSTRACT

In the year 1921 the mathematician Theodor Kaluza published an article in which he brought the solution to a big problem in question at that time, he was unifying the electromagnetic field with the gravitational field considering a Universe with five dimensions, the four dimensions of ordinary time space more an extra spatial dimension. Five years after Kaluza's work, physicist Oscar Klein made some adjustments to Kaluza's theory, since then this theory has come to be known as the Kaluza-Klein theory, this was the first theory of extra dimensions. Over time, the interest in the study of theories of extra dimensions has been somewhat cooled, since we do not have the possibility of empirical verification. However, in 1998 the idea again comes to the fore in the scientific community with the so-called ADD model, which aims to solve the hierarchy problem, which consists of a large discrepancy in the values between the energy of the electroweak scale and the energy of the scale from Planck. The ADD model is considered the first white model in the gravitation scenario, where our universe is a hypersurface immersed in a dimensionally larger space. In this work, a study will be made on the main aspects of the ADD model and his proposal for solving the problem of hierarchy.

KEYWORDS: Extra Dimensions. ADD model. Hierarchy problem.

[2] Undergraduate Degree in Physics from the State University of Paraíba

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Pode-se afirmar seguramente que o grande objetivo da física teórica seja o de descrever todos os fenômenos da natureza por meio de um único esquema, ou seja, por meio de uma única teoria. Ao longo dos anos, algumas teorias se fizeram destaque neste âmbito, como exemplo, podemos citar a teoria do eletromagnetismo de Maxwell. No ano de 1864 James Clerk Maxwell, baseado principalmente nos estudos anteriores de Michael Faraday, propôs que todos os fenômenos elétricos e magnéticos poderiam ser descritos em apenas quatro equações, conhecidas atualmente como equações de Maxwell, frutos de uma única quantidade conhecida como campo eletromagnético.

Assim como Maxwell, Einstein também buscou uma teoria de unificação, neste caso, ele tentara encontrar o modelo pelo qual o campo eletromagnético de Maxwell junto com campo gravitacional (já interpretado pelo próprio Einstein como uma propriedade geométrica do espaço-tempo) fossem advindos de uma única fonte. Einstein, não obteve sucesso em sua busca. Somente no ano de 1921 é que o sonho de Einstein é realizado por meio da ideia do matemático Theodor Kaluza (KALUZA, 1921), que descreve a unificação do campo eletromagnético com o campo gravitacional considerando um espaço-tempo de dimensões espaciais superiores. Com os ajustes à teoria de Kaluza por Oscar Klein (KLEIN, 1926), a teoria ficou conhecida como a teoria de Kaluza-Klein

Ao que parece, todas as teorias físicas que carregam uma proposta de unificação dos fenômenos naturais necessitam de dimensões espaciais extras quando incluem a gravitação, como exemplo, a teoria de cordas, gravidade quântica etc. No entanto, no ano de 1998, surge um modelo que envolve a gravidade no cenário de dimensões extras que possui por objetivo não uma unificação, mas o de justificar o chamado problema da hierarquia. Este modelo, conhecido como modelo ADD (ARKANI, DIMOPOULOS, DVALI, 1998), pode ser considerado como o primeiro modelo de gravitação no cenário de branas, ele ainda admite a existência de um espaço suplementar o que nos justifica o fato da atração gravitacional ser tão fraca quando comparada as outras interações fundamentais da natureza. Ao contrário da teoria de Kaluza-Klein, o modelo ADD nos traz a possibilidade de se ter uma dimensão extra em escala submilimétrica, que esta passiva de uma eventual observação.

Este trabalho está organizado como segue. No capítulo 2 será feita uma abordagem sobre a teoria de Kaluza-Klein que nos servirá de base para a compreensão do modelo ADD, com o qual possui algumas semelhanças. No capítulo 3 será apresentado o modelo ADD onde teremos como destaque a interpretação do nosso Universo como uma brana imersa dentro de um espaço suplementar dimensionalmente maior. No capítulo 4 apresentamos o problema da hierarquia, nele veremos as constantes fundamentais da física no cenário de dimensões extras, isto nos possibilitará de forma clara e direta observar como um Universo dotado de dimensões espaciais extras pode eventualmente suprimir este problema. Por fim, apresentamos as considerações finais no capítulo 5.

2 – A TEORIA DE KALUZA-KLEIN

Em 1916, Albert Einstein apresentou a teoria da relatividade Geral, na qual a gravidade deixa de ser considerada como uma força e passa a ser vista como uma propriedade geométrica do espaço-tempo. Segundo Einstein seria possível o desenvolvimento de uma teoria de unificação das interações gravitacional e eletromagnética, o que daria conta de explicar todos os fenômenos da natureza conhecido aquela época[3], ele procurou, mas não obteve sucesso em sua busca.

Entretanto, 5 anos após a sua teoria de gravitação ele se surpreenderia com a publicação de um artigo pelo matemático Theodor Kaluza (KALUZA, 1921). Neste artigo, ele propôs a unificação entre a teoria eletromagnética de Maxwell e a Teoria da Relatividade Geral de Einstein considerando um universo com mais de três dimensões espaciais (mais precisamente uma dimensão extra). Sem dúvidas esta foi uma ideia revolucionária que iria reverberar por muito tempo no âmbito da física teórica.

> "Em abril de 1919, Einstein recebeu uma carta de um matemático desconhecido, Theodor Kaluza, da Universidade de Konigsberg, na Alemanha. Num artigo curto, de apenas algumas páginas, este matemático estava propondo uma solução para um dos maiores problemas do século. Em poucas linhas, Kaluza estava unindo a teoria da gravidade de Einstein com a teoria da luz de Maxwell, introduzindo a quinta dimensão, isto é, quatro dimensões de espaço e uma dimensão de tempo" (Kaku,1993.p 289).

A motivação de Kaluza foi observar uma grande similaridade entre a Relatividade Geral e a Teoria Eletromagnética em um espaço com dimensões espaciais extras. Ele supôs que a dimensão extra seria uma dimensão espacial z, de forma que o conjunto completo das coordenadas em um espaço tempo $(4+1)$ dimensional seria (x^μ, z), $\mu = 0,1,2,3$.

As equações de Einstein em cinco dimensões sem o tensor energia-momento 5-dimensional

$$G_{AB} = 0, \tag{1}$$

o que nos conduz a considerar

$$R_{AB} = 0. \tag{2}$$

[3] Na época de Einstein os dois campos conhecidos eram o campo gravitacional e o campo eletromagnético.

Temos nessas equações que $G_{AB} = R_{AB} - \frac{R}{2} g_{AB}$ trata-se do tensor de Einstein, R_{AB} e $R = g_{AB} R^{AB}$ são o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, respectivamente, em cinco dimensões.

As equações acima são descritas de tal maneira que descrevem o universo em 5 dimensões como ausente de matéria, isso vem do fato adotado por Kaluza que em dimensões mais elevadas, ou seja, com dimensões extras o espaço está vazio. Ao observar a métrica adotada na teoria de Kaluza, para um espaço-tempo em 5 dimensões, possui três partes distintas

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + k^2 \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ k\phi A_\nu & \phi \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Onde os seus componentes são respectivamente

- $g_{\mu\nu}$ a métrica do espaço tempo ordinário
- $g_{\mu z} = g_{z\mu}$ um campo vetorial
- g_{zz} um campo escalar

Dessa forma, identifica-se a parte $g_{\mu z}$ com A_μ, o potencial vetor eletromagnético, e a parte g_{zz} com o campo escalar ϕ e k é uma constante. A assinatura da métrica 4-dimensional é tomada como sendo $(+,-,-,-)$. Os índices de variam com $(A, B = 0,1,2,3,4,5)$.

2.1 A condição Cilíndrica

Um fato importante levou Kaluza a propor uma condição a sua teoria. A física é sobretudo uma ciência experimental, desta forma, a dimensão extra deveria ser passível de observação, no entanto no que diz respeito a estas atividades experimentais, as dimensões extras ainda não são observadas. Para que isto esteja incluso em sua teoria, Kaluza impôs uma condição ao seu modelo, que exige que todas a derivada de todas as componentes da métrica com relação a coordenada extra seja nula

$$\frac{\partial g_{AB}}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Esta condição é conhecida como condição cilíndrica. Ou seja, não percebemos a dimensão extra, deste modo os fenômenos da natureza aconteceriam em um Universo quadridimensional imerso em um Universo maior, de 5 dimensões.

Quando impomos a condição cilíndrica às equações de Einstein em um Universo de dimensões superiores encontramos as equações de campo gravitacional em acoplamento com o campo eletromagnético (MACIEL,2018).

2.2 Compactação de Klein

Perceba que a condição cilíndrica de Kaluza diz respeito a uma análise puramente matemática sem nenhuma justificativa do ponto de vista físico. No entanto, em 1926, o matemático Oscar Klein procurou justificar fisicamente a condição cilíndrica proposta por Kaluza (KLEIN, 1926), desde então a teoria ficou conhecida como a teoria de Kaluza-Klein.

A consideração realizada foi de que a coordenada extra deveria ter a topologia de um circulo e uma escala de comprimento muito pequena. É importante ressaltar que a condição cilíndrica e a compactação são coisas distintas, onde a compactação seria um mecanismo que apenas explica a natureza aparente quadrimensional do universo.

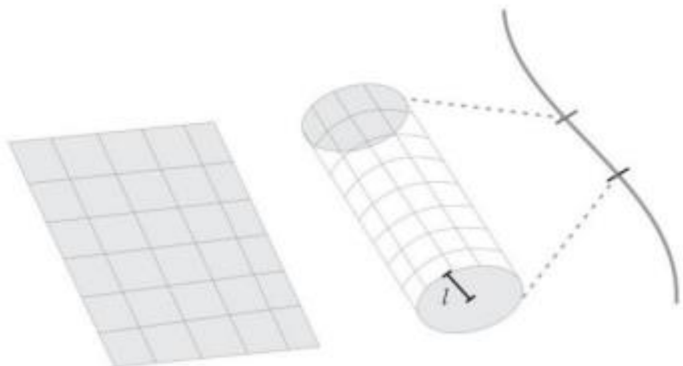

Figura 1: Dimensão extra no modelo de Kaluza-Klein. (SILVA, 2009. p 10)

A figura 1 ilustra a ideia defendida por Klein. As quatro dimensões espaciais formam um "cilindro" onde as três dimensões do espaço tempo ordinário (x^1, x^2, x^3) são infinitas com a topologia do $\mathbb{R}^3$. A dimensão extra z é um circulo de raio l .

A primeira consideração para a justificativa da ideia de Klein é que os campos devem ser periódicos em relação a coordenada extra, desta forma, pode-se expandi-los em séries de Fourier

$$g_{\mu\nu}(x^\mu, z) = \sum_n g_{\mu\nu}^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l}, \tag{5}$$

$$\phi(x^\mu, z) = \sum_n \phi^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l}, \tag{6}$$

$$A_\mu(x^\mu, z) = \sum_n A_\mu^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l}. \tag{7}$$

Perceba que recuperamos a natureza quadridimensional destes campos fazendo a dimensão extra ser nula, ou seja, $z = 0$.

Considerando o cilindro sendo homogêneo e o espaço-tempo plano pode-se investigar os efeitos das dimensões extras sob o campo escalar, desta forma, se torna mais fácil observar a justificativa física proposta por Kaluza. Assim, podemos escrever o campo escalar conforme a expressão

$$\phi(x^\mu, z) = \chi(x^\mu)\varphi(z). \tag{8}$$

Onde $\chi(x^\mu)$ é uma função que descreve as coordenadas do espaço tempo ordinário e $\varphi(z)$ uma função apenas da coordenada extra.

A equação (8) pode ser resolvida pelo método da substituição de variáveis. Com este método chegamos a seguinte equação diferencial para a função da coordenada extra $\varphi(z)$

$$\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} = -C\varphi(z). \tag{9}$$

Onde a constante C é uma constante que pode eventualmente ser interpretada como a massa do campo. A equação (9) nos fornece como solução a seguinte função para a coordenada z,

$$\varphi(z) = A\sin\left(\sqrt{C}z\right) + B\cos\left(\sqrt{C}z\right). \tag{10}$$

Considerando o fato da dimensão extra ter a topologia de círculo, podemos usar o fato que $\phi(0) = \phi(2\pi l)$ e assim mostrar que

$$C = \frac{n^2}{l^2}. \tag{11}$$

Podemos ver claramente que a constante é positiva, neste caso reforça a ideia que pode ser interpretada como a massa do campo, de modo que tenhamos

$$m_n^2 = \frac{n^2}{l^2}. \tag{12}$$

Assim, é natural interpretar que o campo $\chi(x^\mu)$ seja decomposto em um modo zero, ou seja, quando temos $n = 0$ o que nos leva a interpretar este estado como o campo sem massa e os demais modos que são conhecidos como os modos de Kaluza-Klein (KK). A figura abaixo nos mostra uma ilustração para os modos (KK).

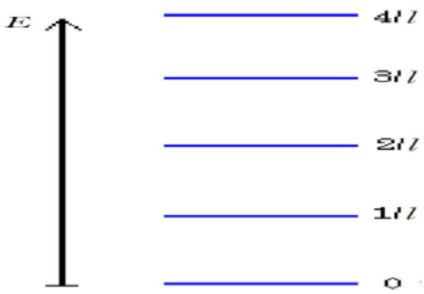

Figura 2: A torre de Kaluza-Klein. (SILVA, 2009. p 12)

Perceba que nesta configuração, cada modo carrega uma energia que é inversamente proporcional ao comprimento l.

$$E \sim \frac{1}{l}. \tag{13}$$

Se temos uma escala de comprimento muito pequena devemos ter uma quantidade suficientemente grande de energia para excitar os modos de Kaluza-Klein. Assim, como estamos considerando que o comprimento da dimensão extra é proporcional ao comprimento de Planck

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1{,}6 \times 10^{-35} m, \tag{14}$$

a massa dos estados excitados deveria ser da ordem da massa de Planck $M_P \approx 10^{19} GeV$. Portanto, este fato justifica a não observação na natureza das dimensões extras, uma vez que necessita de uma quantidade de energia que está além daquelas desenvolvidas nos aceleradores de partícula.

3- DIMENÕES EXTRAS EM LARGA ESCALA: O MODELO ADD

A partir de agora, dando seguimento a nosso estudo sobre as teorias de dimensões extras entramos em contato com o modelo ADD, que se configura na análise central deste trabalho. Conhecido como Modelo de Dimensões Extras de Grande Escala, foi proposto por Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Giorgi Dvali (ARKANI, DIMOPOULOS, DVALI, 1998). Este modelo difere da proposta de Kaluza-Klein anteriormente apresentado pelo fato que embora as dimensões extras ainda sejam consideradas pequenas e compactas estão agora em uma escala de comprimento submilimétrica, o que o torna mais próximo de ser verificado experimentalmente.

É importante ressaltar que o modelo ADD surge como uma tentativa de resolver o chamado problema da hierarquia. De forma resumida pode se dizer que esse problema consiste em explicar a grande diferença de magnitude entre a escala de Planck e a teoria eletro-fraca, como será discutido no capítulo posterior.

3.1 O Confinamento da Matéria.

Podemos considerar o modelo ADD aquele que nos traz o conceito de brana no cenário de gravitação. Neste modelo, o nosso Universo é considerado uma hipersuperfície que contém os campos e a matéria em um estado de confinamento que se encontra imersa em um espaço de dimensões extras conhecido como espaço ambiente ou bulk. Somente a gravidade é capaz de propagar ao longo da dimensão extra. A esta hipersuperfície tridimensional chamamos de $3-brana$, em alusão a uma membrana. A figura baixo nos mostra uma ilustração deste modelo.

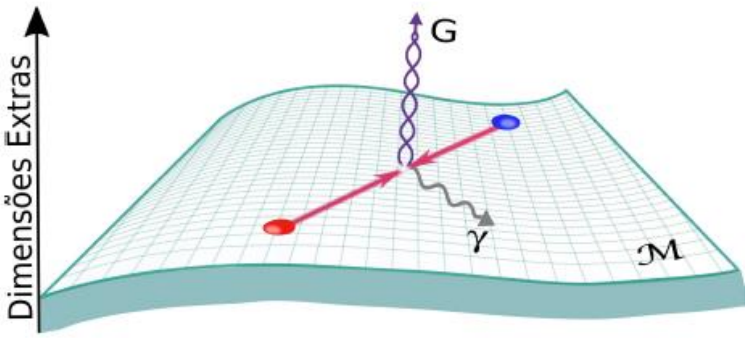

Figura 3: Universo de acordo com o modelo ADD. (LEMOS, 2018. p 16)

Vimos na teoria de Kaluza-Klein que o mecanismo de compactação surge com a tentativa de esconder a dimensão extra e nos mostrar a aparente característica quadridimensional do Universo. No modelo ADD, as dimensões extras estão escondidas por meio do mecanismo de confinamento da matéria. Este mecanismo é bem conhecido na literatura por meio da localização dos férmions (RUBAKOV, SHAPOSHNIKOV, 1983). O confinamento da matéria pode ser visualizado por meio de uma teoria de localização de férmions para o caso em que temos uma dimensão extra z.

Para tal desenvolvimento, vamos considerar um campo escalar definido com $\phi = \phi(x^{\mu}, z)$, cuja equações de movimento podem ser obtidas por meio da ação

$$S = \int d^4x\, dz \left[\frac{1}{2}(\partial_A \phi)^2 - V(\phi)\right]. \tag{15}$$

Perceba que esta ação nos mostra a mesma estrutura para a ação de Einstein-Hilbert (WALD,1997), do espaço tempo ordinário, com exceção da coordenada extra z e considerando $\partial_A\phi$ substituindo o escalar de Ricci R. Vamos assumir o potencial $V(\phi)$ tendo a forma

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{8}(\phi^2 - \upsilon^2)^2. \tag{16}$$

Podemos ver o comportamento deste gráfico na figura abaixo,

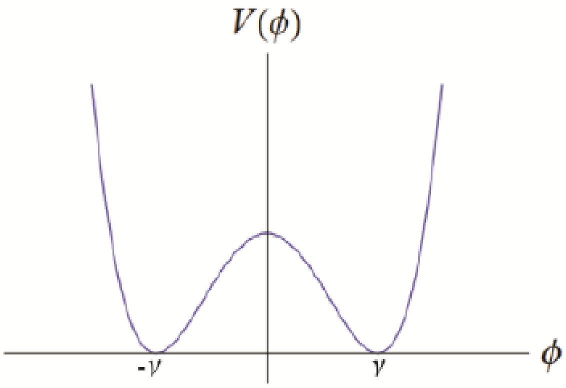

Figura 4: Gráfico do potencial escalar pelo campo escalar. (SILVA, 2009. p 15)

Perceba pelo gráfico que temos dois valores mínimos de energia, exatamente em $\phi = -\upsilon$ e $\phi = \upsilon$, note também que ele possui um máximo instável em $\phi = 0$. Para que se determine a dinâmica do campo por meio das equações de movimento, usamos a equação de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_A\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_A\phi)}\right] = 0. \tag{17}$$

Por meio da equação (17) é possível mostrar que o campo escalar em função da coordenada extra possui o seguinte aspecto,

$$\phi(z) = \upsilon \tanh\left(\frac{\lambda\upsilon z}{2}\right) \tag{18}$$

Esta solução é muito comum no contexto de teoria de campos. Podemos enxergar melhor seu comportamento no gráfico abaixo

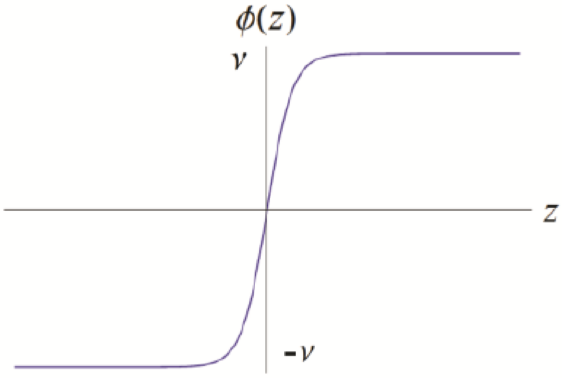

Figura 5: Solução do tipo Kink, parede de domínio (SILVA, 2009, p 16)

Perceba o comportamento assintótico do campo quando fazemos $\phi(z \to -\infty) = -\upsilon$ e $\phi(z \to \infty) = \upsilon$. Esta solução é conhecida como parede de domínio pois conecta os estados pelos quais o campo ϕ apresenta menor energia, ou seja, ela conecta os estados fundamentais $\phi = \upsilon$ e $\phi = -\upsilon$ em $z \to +\infty$ e $z \to -\infty$ respectivamente, isto justifica o fato de os campos estarem presos na brana. Esta solução é conhecida muitas vezes como kink.

3.2 O Potencial Gravitacional em Dimensões Extras.

Como vimos na seção anterior toda matéria e os campos estão presos na brana. No modelo ADD o único campo que não está aprisionado é o campo gravitacional, assim, podemos discutir alguns efeitos das dimensões extras no potencial gravitacional. Iniciamos nossa abordagem tratando do contexto newtoniano clássico, como sabemos, o campo gravitacional $\vec{g}$ deve satisfazer a equação

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho. \tag{19}$$

Onde ρ é a densidade de matéria. Usando as propriedades de simetria esférica para a distribuição de massa e o teorema da divergência de Gauss (THRONTON, MARION, 2011), por meio da equação (19), é possível mostra que o potencial gravitacional é dado por:

$$\vec{g}(r) = -\frac{Gm}{r^2}\hat{e}_r. \tag{20}$$

Onde $\hat{e}_r = \vec{r}/|\vec{r}|$ é o vetor unitário que aponta na direção do raio da esfera. Este resultado é comum para o espaço tempo ordinário de quatro dimensões.

É possível generalizar a expressão (20) do campo gravitacional, para um espaço com D dimensões espaciais. O método utilizado para essa determinação é análogo ao caso do espaço-tempo ordinário, usamos mais uma vez a simetria esférica agora generalizada para a situação de D, (SILVA, 2009). Desta forma, o potencial gravitacional será definido por:

$$\vec{g}(r) = -\frac{2\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\pi^{\frac{D}{2}-1}}\frac{G^{(D)}m}{r^{D-1}}\hat{e}_r. \tag{21}$$

Onde $\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)$ é a função Gamma[4] e $G^{(D)}$ é constante gravitacional em um espaço com D dimensões. Perceba que o fato de o campo gravitacional ser escrito em termos do número de dimensões extras preserva o vetor unitário na direção radial. Perceba ainda que se fizermos $D = 3$ recuperamos o caso newtoniano estabelecido pela equação (20). Outra importante informação podemos retirar da equação (21), quando estamos em dimensões superiores, o campo gravitacional cai mais rápido para grandes distâncias, no entanto, para pequenas distâncias nas proximidades de um corpo massivo, o campo cresce rapidamente.

Como sabemos o campo gravitacional é conservativo, desta forma, teremos a seguinte relação

$$\vec{\nabla} \times \vec{g}(r) = 0, \tag{22}$$

[4] Veja a definição e algumas propriedades da função Gamma no Apêndice A.

é possível sempre escrever o campo como o gradiente de uma função escalar, que para o nosso caso, é o potencial gravitacional, ou seja,

$$\vec{g}(r) = -\vec{\nabla}\phi(r), \tag{23}$$

Assim, o potencial gravitacional para um espaço com dimensões espaciais superiores, pode ser definido como

$$\phi(R) = \frac{2\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\pi^{\frac{D}{2}-1}(1-D)} \frac{Gm}{r^{D-1}} \tag{24}$$

Perceba que recuperamos o caso newtoniano quando fazemos $D = 3$. No entanto, se fizermos $D = 4$, uma dimensão (espacial) extra, teremos o potencial com um comportamento de $1/r^2$, este comportamento não é compatível com as observações gravitacionais a longas distancias. Este fato surge devido a dimensão extra não está compacta.

Vamos investigar o potencial gravitacional gerado por uma dimensão extra compacta. Para um dado observador O que vê uma dada partícula de massa m em um ponto do Universo as linhas de campo dão voltas em torno do espaço até atingir o observador em O.

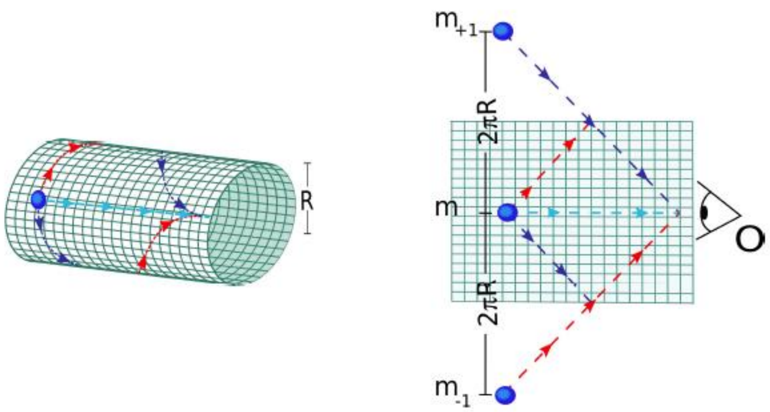

Figura 6: Dimensão extra compacta no Universo para o modelo ADD (LEMOS, 2018. p 19).

A figura acima nos ajuda a compreender melhor esta situação. Suponha que possamos cortar o cilindro e desenrola-lo, assim, para o observador que se encontra em O verá diversas linhas de força que possuem origem na massa.

Do seu referencial, ele estará sofrendo a ação de não apenas uma massa, mas de várias outras cargas $(m_1, \ldots, m_2)$ conhecidas como massas topológicas que se encontram espalhadas sob a linha que passa pelo centro da massa. A distância mínima entre as massas é proporcional ao comprimento da dimensão extra. Mais uma vez, utilizamos as propriedades de simetria, neste caso, de simetria cilíndrica, utiliza-se a lei de Gauss (LEMOS, 2018), desta forma, o potencial gravitacional para um espaço com D dimensões é

$$\phi(r) = -\frac{G_D m}{r^{D+1}} \tag{25}$$

Onde a constante gravitacional em um espaço ambiente de dimensões superiores é dada por $G_D = G(2\pi R)^D$, perceba que se $D = 0$ recuperamos a constante gravitacional no regime newtoniano.

Percebemos pela equação (25) que para distâncias comparadas ao comprimento da dimensão extra, a força gravitacional é amplificada e pode causar efeitos significativos em escala atômica (DAHIA, LEMOS, 2016), (DAHIA, MACIEL, LEMOS, 2018). Para distancias maiores do que o comprimento da dimensão extra o potencial newtoniano é recuperado.

.

4 O PROBLEMA DA HIERARQUIA

No estudo dos modelos de altas energias, há sempre um questionamento acerca de até onde as leis da física são válidas. Para que tais modelos incluindo nestes, a gravidade, é necessário que a escala de energia limite deva ter um valor máximo, aquela em que os efeitos da gravidade quântica passam a ser relevantes, esta escala é também chamada de escala de Planck. Ao considerar o estudo em uma escala de comprimento tão ínfima, surge o chamado problema da Hierarquia, onde não se encontra uma relação para a grande diferença entre a escala de Planck $m_P \sim 10^{19}\ GeV$ e a escala eletrofraca $m_{EF} \sim 10^3 GeV$. De fato, tomando a razão entre estas duas escalas de energia devemos ter $\frac{m_P}{m_{EF}} \sim 10^{16} GeV$, que é assustadoramente grande. Investigaremos neste capítulo como o modelo ADD resolve este problema, considerando um espaço tempo com dimensões extras.

4.1 Escala de comprimento

O desenvolvimento do conhecimento engloba e expande o que já foi estabelecido, no caso da Relatividade Geral por exemplo, ao se tratar de baixas velocidades e campos fracos, esta deve recair na teoria Newtoniana da gravitação. Através da teoria Newtoniana é possível calcular o comprimento de Planck em varias dimensões e explorar como as constantes gravitacionais se comportam num cenário com várias dimensões espaciais compactadas.

Partindo da visão do universo 4-dimensional, a força de atração entre dois corpos como massa varia com o inverso do quadrado da distância de separação entre eles, isso é garantido pela lei de gravitação de Newton.

$$\left|\vec{F}^{(4)}\right| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{26}$$

O valor numérico da constante gravitacional G em quatro de dimensões é $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$. Se analisarmos as unidades de medida

$$[G] = [Força]\frac{L^2}{M^2} = \frac{ML}{T^2} \cdot \frac{L^2}{M^2} = \frac{L^2}{MT^2} \tag{27}$$

Já no caso da velocidade da luz e da constante de Planck normalizada, temos

$$[c] = \frac{L}{T}, \qquad [\hbar] = \frac{ML^2}{T} \tag{28}$$

Como é possível verificar, a análise dessas grandezas físicas fica definida em termos de três unidades básicas: tempo, comprimento e massa. No estudo da gravitação utiliza-se o sistema de unidades naturais, na qual as unidades básicas de comprimento, massa e tempo são definidas de maneira que as constantes fundamentais $c, \hbar\ e\ G$ tomem valores numéricos iguais a 1. Essas novas quantidades são conhecidas como comprimento de Planck l_p, massa de Planck m_p, e tempo de Planck t_p. Nesse caso essas novas unidades, temos

$$G = 1 \cdot \frac{l_p^3}{m_p t_p^2}, \tag{29.1}$$

$$c = 1 \cdot \frac{l_p}{t_p}, \tag{29.2}$$

$$\hbar = 1 \cdot \frac{m_p l_p^2}{t_p}. \tag{29.3}$$

obtendo assim l_p, m_p e t_p em termos de c, $\hbar$ e G.

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1{,}61 \cdot 10^{-33} cm, \tag{30.1}$$

$$t_p = \frac{l_p}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5{,}4 \cdot 10^{-44} s, \tag{30.2}$$

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar C}{G}} = 2{,}17 \cdot 10^{-5} g. \tag{30.3}$$

Diante dessas quantidades que envolvem $G, c\ e\ \hbar,$ que representam a teoria da gravitação, relatividade restrita e mecânica quântica respectivamente, é comum admitir que esses valores representam a escala na qual os efeitos da gravidade quântica poderiam ser importantes. No entanto, sabemos que a gravidade é a mais fraca das interações da natureza. Nessa escala as interações gravitacionais passam a ser comparáveis com a interação forte e eletrofraca, dessa maneira considera-se a escala de Planck como a escala de energia limite para modelos de partículas.

4.2 Escala de comprimento no espaço ambiente

Algo importante acerca das quantidades de Planck (l_p, m_p, t_p), é a relação entre elas considerando um espaço de D dimensões. Em D dimensões, a constante gravitacional G^D tem dimensão de G multiplicada pela constante de Planck (LEMOS, 2018), vemos esta relação através de

$$(l_D)^{D-2} = \frac{G^{(D)}\hbar}{c^3} = l_p^2 \frac{G^{(D)}}{G}. \tag{31}$$

Como vimos, no capítulo anterior em um espaço que contenha uma dimensão extra compacta deve haver algum mecanismo de compactação de modo que a dimensão extra fique escondida dos dados observacionais. Desta forma, neste cenário as constantes da natureza assim como o comprimento de Planck para um espaço de quatro dimensões seriam na verdade um valor efetivo enquanto que o comprimento de Planck fundamental seria estabelecido no espaço ambiente l_D.

Tomando o caso particular onde temos uma dimensão extra ou seja $D = 5$ teremos a seguinte relação

$$\frac{G^{(5)}}{G^{(4)}} = 2\pi R = l_c. \tag{32}$$

Onde R é o raio da dimensão extra e l_c é o seu comprimento. De acordo com as constantes gravitacionais do espaço tempo $4-D$ e a do espaço de 5 dimensões (dimensão compacta), diferem de um fator que é proporcional ao comprimento da dimensão extra.

De forma generalizada a expressão acima (32) para um espaço de D dimensões (LEMOS, 2018), se dá através da relação:

$$\frac{G^{(D)}}{G} = (2\pi R)^D = (l_c)^{D-4}. \qquad (33)$$

Combinando as equações (31), (32) e (33), podemos escrever o comprimento da dimensão extra l_c em termos do comprimento de Planck l_p num espaço 4 –Dimensional e o comprimento de Planck em D dimensões (l_D):

$$l_c = l_D \left(\frac{l_D}{l_p}\right)^{\frac{2}{D-4}}. \qquad (34)$$

A partir de (34) pode-se resolver o problema da hierarquia. Pra que este problema seja de fato solucionado devemos considerar que o comprimento de Planck l_p em um espaço com D dimensões extra seja da mesma ordem da escala eletrofraca $l_D \approx 10^{-18}\ cm$. Dessa condição obtém-se uma relação para o tamanho da dimensão extra e l_c e o número de dimensões do espaço.

$$l_c = 10^{-18}(10^{15})^{\frac{2}{D-4}}. \qquad (35)$$

Observamos que no caso onde $D = 5$, ou seja, o Universo com uma dimensão extra, obtemos a escala da dimensão extra como sendo $l_c \approx 10^{12}\ cm$, e nesse caso a dimensão extra já teria sido observada, portanto, pra esse modelo o universo com apenas uma dimensão extra não é compatível com esse modelo. Por outro lado, para um universo de 6 dimensões, ou seja, duas dimensões extras, a medida é de $l_c \sim 0{,}01\ mm$. Este é um comprimento na qual as leis de Newton da gravitação estão sendo testadas atualmente.

Diante disso, pode ser concluído que eventuais desvios da lei do inverso do quadrado da gravitação, poderia ser interpretada como indícios de dimensões extras. Essa relação entre o número de dimensões extras e o comprimento da dimensão é usado em diversos modelos, como por exemplo no caso da teoria das cordas em que $D = 10$, ou seja, 6 dimensões extras, o tamanho seria de $l_c = 10^{-13}\ cm$, embora pequeno, ainda é bem maior que o comprimento de Planck. Por esse motivo, tais teorias são conhecidas como modelos de dimensões extras em grande escala.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho realizamos um estudo acerca de teorias de dimensões extras dando enfoque no modelo ADD e o problema da Hierarquia. Incentivados pela curiosidade de tentativas de unificação entre as interações fundamentais e o desenvolvimento das ideias dentro de teorias de gravidade que abordam dimensões extras. Inicialmente foi realizado um estudo sobre a teoria de Kaluza-Klein, pioneira neste cenário, destacando sua motivação e dando uma justificativa para a não observância da dimensão extra na natureza por meio de um mecanismo de compactação.

Esta abordagem inicial serviu como base para que adentrássemos no estudo de dimensões extras no cenário de branas. Foi possível ver neste modelo a forma como as dimensões extras se encontram escondidas dos dados observacionais, por meio de um mecanismo de confinamento. Vimos que este modelo resolve de forma satisfatória um grande problema da física teórica, o chamado problema da hierarquia, que se configura numa enorme diferença entre duas escalas de energia fundamentais, a escala de Planck e a escala eletrofraca. Mais precisamente, este problema é resolvido se consideramos um Universo com duas dimensões espaciais extras.

De maneira geral, aparentemente os modelos com várias dimensões espaciais extras apresentam-se como motivação para boa parte da pesquisa no ramo da física teórica, tendo em vista que as grandes teorias de unificação como a teoria das cordas por exemplo utilizam tais modelos na tentativa de explicar o funcionamento do universo.

REFERÊNCIAS

ARFKEN, G.B.; WEBER, H.J. **Mathematical Methods for Phycists** 6a edição.

ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. **The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter**. Phys. Lett., B429, p. 263–272, 1998.

ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. **Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with submillimeter dimensions and TeV scale quantum gravity**. Phys. Rev., D59, p. 086004, 1999.

BERGMANN, Peter Gabriel. **Introdução a Teoria da Relatividade**. New York: Dover Publicações, 1975.

CARMELI, M.**Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**, New York, John Wiley and Sons, 1982.

CARROL, S. **Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity.** Chicago. Addison Wesley. University of Chicago. 2004.

DAHIA, F.; LEMOS, A. S. **Constraints on extra dimensions from atomic spectroscopy**.Physical Review D, APS, v. 94, n. 8, p. 084033, 2016.

DAHIA, F.; MACIEL, E.; LEMOS, A. S. **Rydberg states of hydrogen-like ions in braneworld**. arXiv preprint arXiv:1709.03863 [gr-qc], 2017.

KALUZA, T. **On the Problem of Unity in Physics**. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math.Phys.), v. 1921, p. 966–972, 1921.

KLEIN, O. **Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. Zeitschrift für Physik**, Springer-Verlag, v. 37, n. 12, p. 895–906, 1926. ISSN 0044-3328. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/BF01397481.

KAKU, M. **Hiperespaço "Uma odisseia científica através de universos paralelos, empenamentos do tempo e a décima dimensão"** Rocco Digital. 1993.

LEMOS, A. **Efeitos das Dimensões Extras em Sistemas Atômicos e o Problema do Raio do Próton.** 2018. TESE (Doutorado em Física) - Universidade Federal da Paraíba, JOÃO PESSOA, 2018.

MACIEL, Eugenio Bastos. **UM ESTUDO SOBRE A INFLUENCIA DA INTERACÃO GRAVITACIONAL NOS ESTADOS DE RYDBERG NO CENARIO DE DIMENSÕES EXTRAS**. 2018. TESE (Doutorado em Física) - Universidade Federal da Paraíba, JOÃO PESSOA, 2018.

NETO , João Barcelos. **MATEMÁTIA PARA FÍSICOS**: Vetores, Tensores e Spinores. 1a. ed. São Paulo: Livraria da física, 2010. v. I.

RANDALL, L.; SUNDRUM, R. **A Large mass hierarchy from a small extra dimension**. Phys. Rev. Lett., v. 83, p. 3370–3373, 1999.

RINDLER, W. **Relativity Special, General, and Cosmological**. 2 edition. Dallas, Texas: Oxford University. 2006.

RUBAKOV, V. A.; SHAPOSHNIKOV, M. E. **Do We Live Inside a Domain Wall?** Phys. Lett., v. 125B, p. 136–138, 1983.

SILVA, ALEX DE ALBUQUERQUE. **Um Estudo Sobre Dimensões Extras**. 2009. DISSERTAÇÃO (Mestrado em Física) - Universidade federal de campina grande, CAMPINA GRANDE, 2009.

THRONTON, T. MARION, J. **Dinâmica Clássica de Partículas e sistemas.** São Paulo. Cengage Learning. 2011.

WALD, R. M. **Black Holes and Relativistic Stars**. 3 edition. Chicago and London: The University of Chicago Press. 1997.

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity**, Massachusetts Institute of Technology. 1 edition. 1972.

APENDICE- A FUNÇÃO GAMMA

Em diversas situações na física nos deparamos com integrais que carregam o conceito de importantes funções, um exemplo é o caso da função Gamma. Por definição ela é dada por

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\, dt, \qquad (A.1)$$

De onde pode-se retirar as fórmulas de recursão

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n). \qquad (A.2)$$

$$\Gamma(n+1) = n!. \qquad (A.3)$$

A função Gamma assume certos valores especias, dentre estes podemos destacar

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \qquad (A.4)$$

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)\sqrt{\pi}}{2^m}\,. \qquad (A.5)$$