UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÀTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CÍCERO DE MACEDO SILVA

FUNÇÃO QUADRÁTICA E ALGUMAS APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE – PB
2021

CÍCERO DE MACEDO SILVA

FUNÇÃO QUADRÁTICA E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura e Aplicada.

Orientador(a): Profª Ms. Joselma Soares dos Santos

CAMPINA GRANDE - PB
2021

S586f Silva, Cicero de Macedo.
Função quadrática e algumas aplicações [manuscrito] / Cicero de Macedo Silva. - 2021.
49 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.
"Orientação : Profa. Ma. Joselma Soares dos Santos , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Funções quadráticas. 2. Zero da Função. 3. Funções quadráticas - Aplicações. I. Título

21. ed. CDD 515.5

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

CICERO DE MACEDO SILVA

FUNÇÃO QUADRÁTICA E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura e Aplicada.

Aprovada em: 09/06/2021.

BANCA EXAMINADORA

Joselma Soares dos Santos

Profª. Ms. Joselma Soares dos Santos (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profª. Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana R Freitas

Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Ao meu pai, Pedro Ferreira da Silva em memoria, a minha mãe Maria Madalena de Macedo Silva, a minha esposa Monalisa Souza de Macedo e aos meus filhos Kaio Gabriel Souza de Macedo e Thalyta Souza de Macedo, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pois o coração do homem pode fazer planos, mas a resposta certa dos lábios vem do senhor.

À minha orientadora professora Joselma Soares dos Santos por ter tido tanta competência na orientação desse trabalho.

Aos demais professores por terem contribuído para a minha formação acadêmica.

RESUMO

As primeiras experiências relacionadas a função quadrática surgem logo no 9º ano do Ensino Fundamental, e é um dos conteúdos que é usado direta ou indiretamente em todos os demais anos do Ensino Médio, do Ensino Superior e em várias áreas. Neste trabalho estudamos um pouco sobre a função quadrática, onde abordamos alguns conceitos e usamos a sua forma canônica para demonstrar alguns resultados, em especial envolvendo o zero da função quadrática, os valores máximo e mínimo e o estudo do sinal desta função, com o objetivo de aplicar os conceitos estudados na resolução de alguns problemas.

Palavras-Chave: Função quadrática. Zero da Função. Máximo e Mínimo. Aplicações.

ABSTRACT

The first experiences related to the quadratic function appear in the 9th grade of elementary school, and it is one of the contents that is used directly or indirectly in all other years of high school, higher education and in various areas. In this work we study a little about the quadratic function, where we approach some concepts and use its canonical form to demonstrate some results, in particular involving the zero of the quadratic function, the maximum and minimum values and the study of the sign of this function, with the objective to apply the concepts studied in solving some problems.

Keywords: Quadratic function. Function Zero. Maximum and minimum. Applications.

.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A noção de função quadrática associa-se originalmente a ideia de equação do 2° grau, por volta de 300 a.C. o matemático grego Euclides (325-265 a.C) desenvolveu uma nova técnica denominada Álgebra Geométrica. No renascimento destacou-se as tentativas de explicar o movimento de queda livre de um corpo ou trajetória de uma bola de canhão, vários teóricos dos séculos XVI e XVII tentaram explicar essa trajetória, sem obter a parábola, ao longo do tempo essas explicações foram aperfeiçoadas até se chegar à parábola associada à curva de 2° grau, de modo a relacionar curvas a equações, álgebra à geometria.

As primeiras experiências relacionadas a função quadrática surgem logo no 9º ano do Ensino Fundamental, porém em algumas escolas isso pode acontecer antes ou depois. De modo mais informativo, a verdade é que a grande maioria dos alunos que prosseguem estudos superiores onde a Matemática continua a ser estudada, não mais volta a abordar o aperfeiçoamento do que vem já de trás, muito em especial as funções de 2º grau. O aprendizado desse conteúdo leva o aluno a ter um entendimento mais claro e óbvio quando se depararem com outros conteúdos algébricos mais complexos. O estudo de funções é um dos temas mais importantes do programa de matemática do ensino básico.

Neste trabalho, iremos estudar as funções quadráticas, para isto, o mesmo está dividido em 3 capítulos. No capitulo 1, estudamos um pouco sobre a história da função quadrática e sua importância como conteúdo para o ensino básico. No Capítulo 2, estudamos a definição de função quadrática, que é uma função que associa a cada número real x, o número real $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c números reais e $a \neq 0$, também vimos que a sua representação gráfica é uma parábola e que a sua concavidade pode ser voltada para cima ou para baixo, dependendo do sinal do coeficiente a. Também estudamos a forma canônica desta função, e usamos ela para mostrar alguns resultados envolvendo zeros da função, máximo e mínimo, vértice da parábola e o estudo do sinal da função quadrática. No Capítulo 3, estudamos algumas aplicações da função quadrática, dentre elas vimos uma aplicação da função quadrática na física, na análise do máximo e mínimo no lançamento de projeteis, e também na economia onde resolvemos alguns problemas envolvendo custo, receita e lucro.

2. FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Este capítulo aborda a definição de função quadrática, bem como sua representação gráfica, o valor máximo e mínimo e o estudo do sinal destas funções. Além disso, também apresentaremos alguns teoremas com suas demonstrações e alguns exemplos para uma boa compreensão sobre o estudo da função quadrática. Para isto, foram utilizadas as referências [1], [2], [3], [4],[5],[6] e [7] .

2.1 Definição

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática ou do segundo grau quando existem números reais a, b, c com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.1: São exemplos de funções quadráticas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = -x^2 + 100x$, em que $a = -1, b = 100\ e\ c = 0$.

b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, em que $a = 3, b = -2\ e\ c = 1$.

c) $f(x) = x^2 - 4$, em que $a = 1, b = 0\ e\ c = -4$.

d) $f(x) = 20x^2$, em que $a = 20, b = 0\ e\ c = 0$.

Por definição, o domínio da função quadrática f é o conjunto dos números reais, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$, e a imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$, ou seja, $Im(f) \subset \mathbb{R}$.

2.2 Parábola e Concavidade

O gráfico da função quadrática é uma parábola.

Exemplo 2.2.1: Construir o gráfico das funções definidas em $\mathbb{R}$:

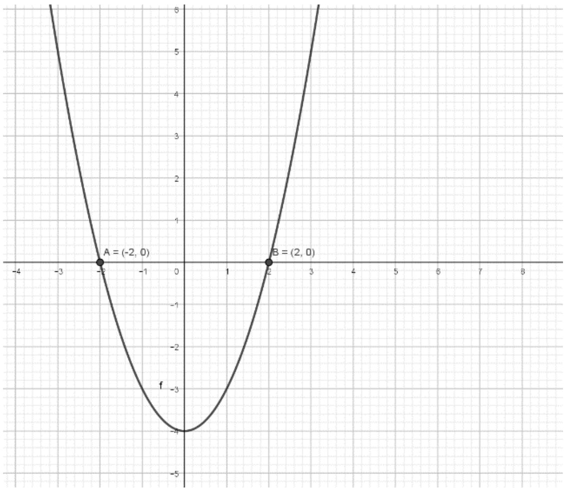
a) $y = x^2 - 4$

Solução:

Construindo uma tabela e atribuindo valores para x para obtermos valores para y temos:

x	$y = x^2 - 4$	(x, y)
-2	$y = (-2)^2 - 4 = 0$	$(-2{,}0)$
-1	$y = (-1)^2 - 4 = -3$	$(-1, -3)$
0	$y = 0^2 - 4 = -4$	$(0, -4)$
1	$y = 1^2 - 4 = -3$	$(1, -3)$
2	$y = 2^2 - 4 = 0$	$(2, 0)$

Figura 1- Gráfico do exemplo: 2.2.1 a) utilizando o Geogebra



Fonte: O autor.

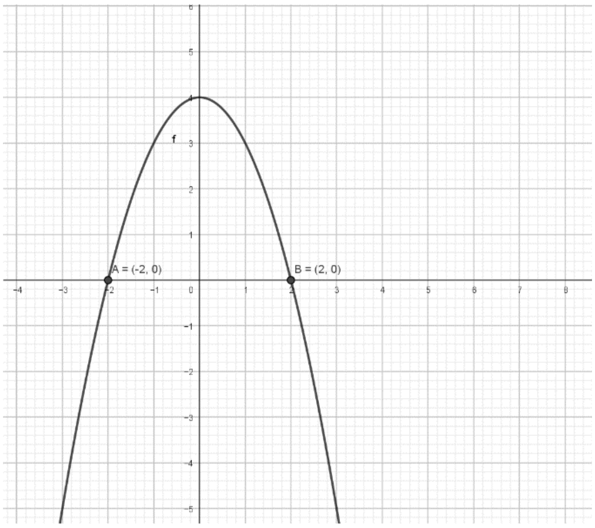
b) $y = -x^2 + 4$

Solução:

Construindo uma tabela e atribuindo valores para x para obtermos valores para y temos.

x	$y = -x^2 + 4$	(x, y)
-2	$y = -(-2)^2 + 4 = 0$	$(-2{,}0)$
-1	$y = -(-1)^2 + 4 = 3$	$(-1{,}3)$
0	$y = -0^2 + 4 = 4$	$(0, 4)$
1	$y = -1^2 + 4 = 3$	$(1{,}3)$
2	$y = -2^2 + 4 = 0$	$(2{,}0)$

Figura 2 – Gráfico do exemplo: 2.2.1 b) utilizando o Geogebra



Fonte: O autor.

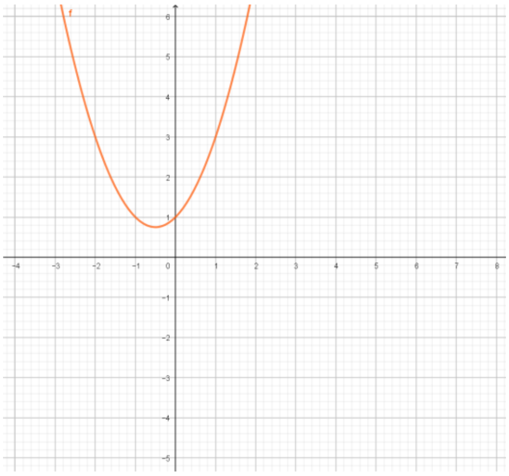
Observação: Mais adiante, após estudarmos os zeros da função quadrática e o vértice, iremos estudar como construir este gráfico, pois nem sempre atribuindo apenas valores a x conseguimos obter uma parábola.

Conforme podemos observar no exemplo acima, a parábola representativa da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, pode ter concavidade voltada para cima ou voltada para baixo. Ou seja,

i. Se $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima;
ii. Se $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Se $a > 0$, temos

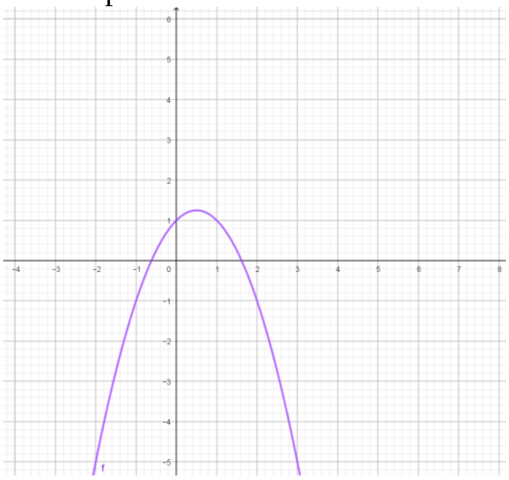
Figura 3- Gráfico da parabóla com convavidade voltada para cima



Fonte: O autor.

Se $a < 0$, temos

Figura 4 - Gráfico da parabóla com convavidade voltada para baixo



Fonte: O autor.

2.3 Forma Canônica

Agora iremos escrever a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ de outra forma, que é conhecida como forma canônica desta função, conforme veremos abaixo, esta forma será utilizada nas demonstrações de alguns resultados que iremos estudar.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

Colocando o a em evidência temos:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Utilizando o método de completar quadrado temos:

$$\Rightarrow f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \underbrace{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}}_{=0} + \frac{c}{a}\right]$$

$$\Rightarrow f(x) = a\left[\underbrace{\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right)} - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

$$\Rightarrow f(x) = a\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)}^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right].$$

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, temos a forma canônica

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Esta forma permite dentre outras coisas, determinar de forma mais rápida os pontos onde a parábola intercepta o eixo dos x ou a abscissa do ponto da parábola de maior ou menor ordenada.

2.4 Zeros da Função Quadrática

Definição 2.4.1: Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores reais de x tais que $f(x) = 0$. Ou seja, são as soluções da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Observação 2.4.1: Para fazer referência a essas raízes costumamos utilizar os símbolos $x' e\ x''$ ou $x_1\ e\ x_2$.

Como $f(x) = ax^2 + bx + c$ note que fazendo $f(x) = 0$, temos que $ax^2 + bx + c = 0$, ou ainda, usando a forma canônica temos,

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}.$$

Aplicando a raiz quadrada em ambos os membros, obtemos.

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ou seja,

$$x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\text{ e }x"=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Observação 2.4.2: A fórmula encontrada acima, para determinar os zeros ou raízes de uma função do 2º grau é conhecida como fórmula de Bhaskara. Esta fórmula é utilizada para resolver equações do 2º grau, e como $\Delta = b^2-4ac$, a fórmula de Bháskara é dada por:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\text{ ou }x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Assim, devemos considerar o valor de Δ para determinar a quantidade de raízes reais de uma função quadrática. Onde temos os seguintes casos:

i. Se $\Delta > 0$, a função têm duas raízes reais e diferentes, consequentemente, a parábola intercepta o eixo x em dois pontos distintos: $(x', 0) e\ (x", 0)$, onde

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\ e\ x" = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

ii. Se $\Delta = 0$, a função têm duas raízes reais e iguais $(x' = x")$, consequentemente, a parábola tangencia o eixo x, no ponto $(x, 0)$, onde

$$x = x' = x" = \frac{-b}{2a}.$$

iii. Se $\triangle < 0$, a função não têm raízes reais (pois no conjunto dos números reais, não está definida raiz quadrada de número negativo), consequentemente, a parábola não intercepta o eixo x.

Exemplo 2.4.1: Determinar os zeros reais das funções dadas abaixo:

a) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$.

Solução:

Seja $a = 3;\ b = -7\ e\ c = 2$. Calculando o valor do $\Delta = b^2 - 4ac$, temos

$\Delta = (-7)^2 - 4.3.2$

$\Rightarrow \Delta = 49 - 24$

$\Rightarrow \Delta = 25.$

Como $\Delta > 0$ a função tem duas raízes reais diferentes, usando a formula de Bhaskara temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2.3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm 5}{6}$$

Então, os zeros reais da equação dada são:

$$x' = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ e } x'' = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

b) $f(x) = -4x^2 + 8x - 4.$

Solução:

Seja $a = -4, b = 8\ e\ c = -4$. Calculando o valor do $\Delta = b^2 - 4ac$, temos

$$\Delta = 8^2 - 4\,.\,(-4).\,(-4)$$

$$\Rightarrow \Delta = 64 - 64$$

$$\Rightarrow \Delta = 0.$$

Como $\Delta = 0$ a função tem duas raízes reais iguais, usando a formula de Bhaskara temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2.1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-8 \pm 0}{2}.$$

Então, os zeros reais da equação dada são:

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2} = -4.$$

c) $f(x) = 5x^2 + 4x + 1.$

Solução:

Seja $a = 5, b = 4\ e\ c = 1$. Calculando o valor do $\Delta = b^2 - 4ac$, temos

$$\Delta = 4^2 - 4\,.\,5.\,1$$

$$\Rightarrow \Delta = 16 - 20$$

$$\Rightarrow \Delta = -4.$$

Como $\Delta < 0$, a função não têm raízes reais, pois no conjunto dos números reais, não está definida raiz quadrada de número negativo.

2.5 Máximo e Mínimo da Função Quadrática

Definição 2.5.1: Seja $y_M \in Im(f)$, dizemos que o número y_M é o valor máximo da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \geq y$ para qualquer $y \in Im(f)$. O valor $x_M \in D(f)$ tal que $y_M = f(x_M)$ é chamado ponto de máximo da função.

Definição 2.5.2: Seja $y_m \in Im(f)$, dizemos que o numero $y_m \in Im(f)$ é o valor mínimo da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_m \leq y$ para qualquer $y \in Imf(x)$. O valor $x_m \in D(f)$ tal que $y_m = f(x_m)$ é chamado ponto mínimo da função.

Teorema 2.5.1: Se $a < 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\frac{b}{2a}$.

Demonstração:

A partir da forma canônica da função quadrática,

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right]^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big], \qquad (1)$$

se $a < 0$, temos que o valor de y será maior, quanto menor for o valor da diferença

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Como $-\frac{\Delta}{4a}$ é uma constante (pois não depende de x, só de a, b, c) e $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para todo x real, então a diferença $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ assume o maior valor possível exatamente quando $\left(x+\frac{\Delta}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Logo para $x = -\frac{b}{2a}$, temos pela expressão (1) que

$$y = a\left[\left(-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}\right)\right]^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow y = a\left[0^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \Rightarrow y = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Portanto, $y = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo da função quadrática, como queríamos demonstrar.

Teorema 2.5.2: Se $a > 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\frac{b}{2a}$.

Demonstração: A demonstração é análoga ao que fizemos no Teorema 2.5.1.

Exemplo 2.5.1: Para cada uma das funções quadráticas dadas abaixo, determine o valor máximo ou mínimo.

a) $y = -x^2 + x + 6$
b) $y = x^2 + 10x - 75$

Solução:

a) Na função $y = -x^2 + x + 6$, temos $a = -1, b = 1$ e $c = 6$. Como $a < 0$, pelo Teorema 2.5.1, a função admite valor máximo dado por

$$y = -\frac{\Delta}{4a},$$

onde

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\,.\,(-1)\,.6 = 25.$$

Logo, o valor máximo da função é

$$y = -\frac{25}{4.(-1)} = \frac{25}{4},$$

que é atingido quando $x_m = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2.(-1)} = \frac{1}{2}$.

b) Na função $y = x^2 + 10x - 75$, temos $a = 1, b = 10 \; e \; c = -75$. Como $a > 0$, pelo Teorema 2.5.2, a função admite valor mínimo dado por

$$y = -\frac{\Delta}{4a},$$

onde

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4.1.(-75) = 100 + 300 = 400.$$

Logo, o valor mínimo da função é

$$y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{400}{4} = -100,$$

que é atingido quando $x_m = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2.1} = -5$.

Exemplo 2.5.2: Determinar o valor de m na função real $f(x) = -3x^2 + 2(m-1)x + (m+1)$ para que o valor máximo seja 2.

Solução: Temos $a = -3 < 0$, assim pelo Teorema 2.5.1, a função admite valor máximo $y_M = \frac{-\Delta}{4a}$, sendo $\Delta = b^2 - 4ac, onde\; a = -3, b = 2(m-1) = 2m - 2, c = (m+1)$.

Assim, para que o valor máximo seja 2, devemos ter $y_M = 2$, isto é, $2 = \frac{-\Delta}{4a}$.

Calculando Δ, obtemos

$$\Delta = (2m-2)^2 - 4(-3)(m+1) = 4m^2 - 8m + 4 + 12m + 12$$

$\Rightarrow \Delta = 4m^2 + 4m + 16.$

Substituindo os valores na igualdade $2 = \frac{-\Delta}{4a}$, temos

$2 = \frac{-(4m^2+4m+16)}{4(-3)}$

$$\Rightarrow 2 = \frac{-(4m^2+4m+16)}{-12}$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 4m + 16 = 24$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 4m + 16 - 24 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 4m - 8 = 0.$$

Dividindo a última igualdade acima por 4, obtemos

$$m^2 + m - 2 = 0.$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara para resolver a equação acima, temos que $m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $a_1 = 1, b_1 = 1$ e $c_1 = -2$, ou seja,

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-2)}}{2.1} \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow m = \frac{-1 \pm 3}{2}.$$

Daí, temos

$$m_1 = \frac{-1+3}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{2}{2} \Rightarrow m_1 = 1 \text{ ou } m_2 = \frac{-1-3}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{-4}{2} \Rightarrow m_2 = -2.$$

Portanto, para que o valor máximo da função dada seja 2, devemos ter $m = -2$ ou $m = 1$.

Exemplo 2.5.3: Determine o valor de m na função real $f(x) = (m-1)x^2 + (m+1)x - m$ para que o valor mínimo seja 1.

Solução:

Temos que $a = m - 1$, assim pelo Teorema 2.5.1, se $a = m - 1 > 0$, ou seja, se $m > 1$ a função admite valor mínimo $y_m = \frac{-\Delta}{4a}$, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, onde $a = m - 1, b = m + 1$ e $c = -m$.

Assim, se $m > 1$ para que o valor mínimo da função seja 1, devemos ter $y_m = 1$, isto é, $1 = \frac{-\Delta}{4a}$.

Calculando Δ, obtemos

$$\Delta = (m+1)^2 - 4(m-1)(-m) = m^2 + 2m + 1 - 4(-m^2 + m)$$

$$\Rightarrow \Delta = m^2 + 2m + 1 + 4m^2 - 4m \Rightarrow \Delta = 5m^2 - 2m + 1.$$

Substituindo os valores na igualdade $1 = \frac{-\Delta}{4a}$, temos:

$$1 = \frac{-(5m^2 - 2m + 1)}{4(m-1)}$$

$$\Longrightarrow 1 = \frac{-5m^2 + 2m - 1}{4m - 4}$$

$$\Longrightarrow -5m^2 + 2m - 1 = 4m - 4$$

$$\Longrightarrow -5m^2 + 2m - 4m - 1 + 4 = 0$$

$$\Longrightarrow -5m^2 - 2m + 3 = 0.$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara para resolver a equação acima, temos que $m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $a_1 = -5, b_1 = -2$ e $c_1 = 3$, ou seja,

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.(-5).3}}{2.(-5)}$$

$$\Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{-10}$$

$$\Rightarrow m = \frac{2 \pm 8}{-10}.$$

Daí, temos

$m_1 = \frac{2+8}{-10} \Rightarrow m_1 = \frac{10}{-10} \Rightarrow m_1 = -1$ ou $m_2 = \frac{2-8}{-10} \Rightarrow m_2 = \frac{-6}{-10} \Rightarrow m_2 = \frac{3}{5}$.

Mais como, devemos ter $m > 1$, e os valores encontrados não são maiores que 1. Portanto, não existe valor de m para que o valor mínimo da função dada seja 1.

2.6 Vértice da Parábola da Função Quadrática

O ponto $V(x_v, y_v)$, onde $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$, é chamado vértice da parábola representativa da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemplo 2.6.1: Determine o vértice de cada uma das funções quadráticas dadas abaixo:

a) $y = 2x^2 - 5x + 2$
b) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Solução:

a) Como $y = 2x^2 - 5x + 2$, temos $a = 2; b = -5 \; e \; c = 2$, daí

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-5)^2 - 4.2.2 = 25 - 16 = 9.$$

Logo temos

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(-5)}{2.2} \Rightarrow x_v = \frac{5}{4}$$

e

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-9}{4.2} \Rightarrow y_v = -\frac{9}{8}.$$

Portanto, o vértice é dado por $V\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$.

b) Como $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, temos $a = -1; b = \frac{1}{2}\ e\ c = \frac{3}{2}$, daí

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4.(-1).\frac{3}{2} = \frac{1}{4} + 6 = \frac{25}{4}.$$

Logo temos

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-\frac{1}{2}}{2(-1)} \Rightarrow x_v = \frac{\frac{1}{2}}{2} \Rightarrow x_v = \frac{1}{4}$$

e

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-\frac{25}{4}}{4(-1)} \Rightarrow y_v = \frac{\frac{25}{4}}{4} \Rightarrow y_x = \frac{25}{16}.$$

Portanto, o vértice é dado por $V\left(\frac{1}{4}, \frac{25}{16}\right)$.

2.7 Conjunto Imagem da Função Quadrática

O conjunto imagem de uma função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ é determinado a partir da ordenada y_v do vértice da parábola. Temos dois casos a considerar:

i) Quando $a > 0$. Neste caso, conforme vimos na seção anterior, a função apresenta um ponto de mínimo, cuja ordenada é $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, que é o valor mínimo da função. Logo:

$$a > 0 \Rightarrow Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} | y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\}.$$

ii) Quando $a < 0$ a função apresenta um ponto de máximo, cuja ordena é $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, que é o valor máximo da função. Logo:

$$a < 0 \Rightarrow Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} | y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}.$$

Exemplo 2.7.1: Determinar a imagem das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
b) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

Solução:

a) Temos, $a = 1, b = -2$ e $c = -3$, dai:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (-3) = 16.$$

Como $a > 0$, a função apresenta um ponto de mínimo cuja ordenada é $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, isto é, $y_v = -\frac{16}{4.1} = -4$.

Portanto, o conjunto imagem da função é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq -4\}$.

b) Temos, $a = -1, b = 6\ e\ c = -9$, daí:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \,.\, (-1). (-9) = 0.$$

Como $a < 0$, a função apresenta um ponto de máximo cuja ordenada é $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, isto é, $y_v = -\frac{0}{4(-1)} = 0$.

Portanto, o conjunto imagem da função é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \leq 0\}$.

2.8 Construindo o Gráfico da Função Quadrática

Iremos utilizar os conceitos estudados a fim de obtemos informações para construirmos o esboço do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$.

Vimos que:

1) Para determinar a concavidade da função, basta saber o sinal de a:
   - ✓ Se $a < 0$ a parábola tem concavidade voltada para baixo.
   - ✓ Se $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima.
2) No cálculo dos zeros da função:
   - ✓ Se$\Delta > 0$, a parábola intersecta o eixo dos x em dois pontos distintos $(x', 0) e\ (x", 0)$, onde $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ e\ x" = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
   - ✓ Se $\Delta = 0$, a parábola intersecta o eixo dos x em um único ponto $(x, 0)$, onde $x = x' = x" = \frac{-b}{2a}$.
   - ✓ Se $\Delta < 0$, a parábola não intersecta o eixo x.
3) O vértice da parábola é o ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, que é ponto onde a função atinge o valor máximo se $a < 0$ ou o valor mínimo se $a > 0$.

Agora, iremos construir o gráfico de algumas funções quadráticas, utilizado os conceitos estudados acima.

Exemplo 2.8.1: Construa o gráfico de cada uma das funções:

a) $f(x) = -x^2$

Solução: Neste caso, temos $a = -1, b = 0 \; e \; c = 0$. Como $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo.

- Determinando os zeros da função e os pontos de interseção com o eixo x:

Fazendo $f(x) = 0,$ temos $-x^2 = 0$. Temos que $\Delta = b^2 - 4\,.\,a\,.\,c$, ou seja,

$$\Delta = 0^2 - 4\,.\,(-1).\,0 \Longrightarrow \Delta = 0.$$

Como $\Delta = 0$, a parábola intercepta o eixo x em apenas um ponto $(x, 0)$, onde

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Logo a parábola intercepta o eixo x no ponto $(0, 0)$.

- Determinando o vértice da função:

Temos

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Longrightarrow x_v = \frac{0}{-2} = 0$$

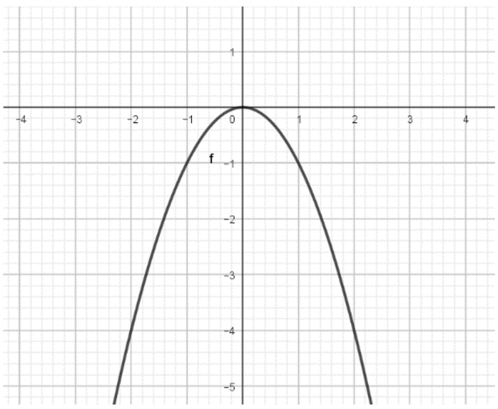
e

$$y_v = \frac{-\Delta}{4.\,a} \Longrightarrow y_v = \frac{0}{-4} = 0.$$

Logo, o vértice é $V(0,0)$.

- Construindo o gráfico:

Figura 5 - Gráfico do exemplo 2.8.1a) utilizando o Geogebra



Fonte: O autor.

b) $(x) = x^2$

Solução: Neste caso, temos $a = 1, b = 0\ e\ c = 0$. Como $a > 0$ a concavidade é voltada para cima.

- Determinando os zeros da função e os pontos de interseção como eixo x:

Fazendo $f(x) = 0,$ temos $x^2 = 0$. Temos que $\Delta = b^2 - 4\,.\,a\,.\,c$, ou seja,

$$\Delta = 0^2 - 4\,.\,1.0 \Longrightarrow \Delta = 0.$$

Como $\Delta = 0$, a parábola intercepta o eixo x em apenas um ponto $(x, 0)$, onde

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0.$$

Logo a parábola intercepta o eixo x no ponto $(0, 0)$.

- Determinando o vértice da função:

Temos

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Longrightarrow x_v = \frac{0}{2} = 0$$

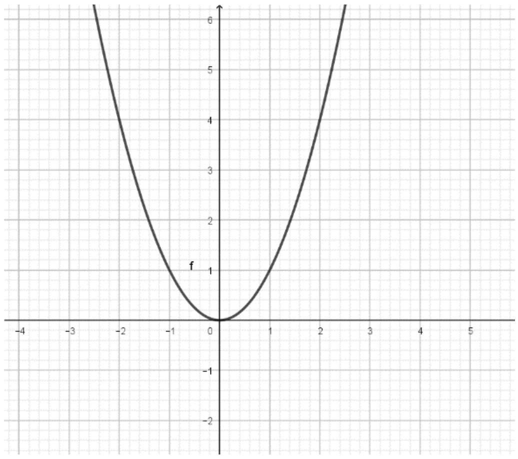
e

$$y_v = \frac{-\Delta}{4.a} \Longrightarrow y_v = \frac{0}{4} = 0.$$

Logo, o vértice é $V(0{,}0)$.

- Construindo o gráfico:

Figura 6 - Gráfico do exemplo 2.8.1 b) utilizando o Geogebra



Fonte: O autor.

c) $f(x) = 4x^2 - 1$

Solução: Neste caso, temos $a = 4, b = 0 \; e \; c - 1$. Como $a > 0$ a concavidade é voltada para cima.

- Determinando os zeros da função e os pontos de interseção com o eixo x:

Fazendo $f(x) = 0,$ temos $4x^2 - 1 = 0$. Temos que $\Delta = b^2 - 4 \, . \, a \, . \, c$, ou seja,

$$\Delta = 0^2 - 4.4.(-1) \Rightarrow \Delta = 0 + 16 = 16$$

Como $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo x nos pontos $(x', 0)$ e $(x'', 0)$, onde

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \; e \; x" = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

ou seja,

$$x' = \frac{-0 + \sqrt{16}}{2.4} = \frac{-0 + 4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \, e \; x" = \frac{-0 - \sqrt{16}}{2.4} = \frac{-0 - 4}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Logo a parábola intercepta o eixo x nos pontos $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

- Determinando o vértice da função:

Temos

$$x_v = \frac{-b}{2.a} = \frac{0}{2.4} = \frac{0}{8} = 0$$

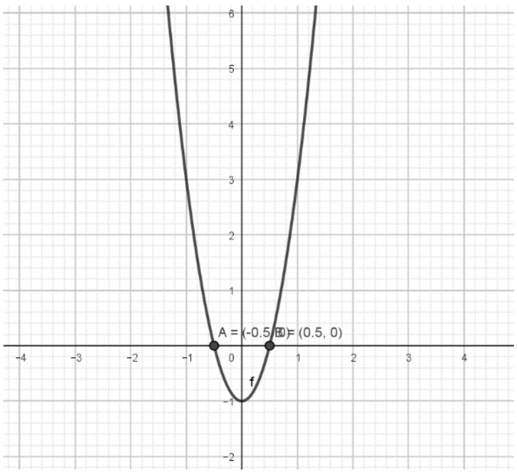
e

$$y_v = \frac{-\Delta}{4.a} = \frac{-16}{4.4} = \frac{-16}{16} = -1.$$

Logo, o vértice é $V(0, -1)$.

- Construindo o gráfico:

Figura 7 - Gráfico do exemplo 2.8.1 c) utilizando o Geogebra



Fonte: O autor.

d) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

Solução: Neste caso, temos $a = 4, b = -4\ e\ c = 1$. Como $a > 0$ a concavidade é voltada para cima.

- Determinando os zeros da função e os pontos de interseção com o eixo x:

Fazendo $f(x) = 0,$ temos $4x^2 - 4x + 1 = 0$, daí resolvendo a equação

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4.4.(-1) \Rightarrow \Delta = 16 - 16 = 0.$$

Como $\Delta = 0$, a parábola intercepta o eixo x em apenas um ponto $(x, 0)$, onde

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2.4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Logo a parábola intercepta o eixo x no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

- Determinando o vértice da função:

Temos

$$x_v = \frac{-b}{2.a} = \frac{-(-4)}{2.4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

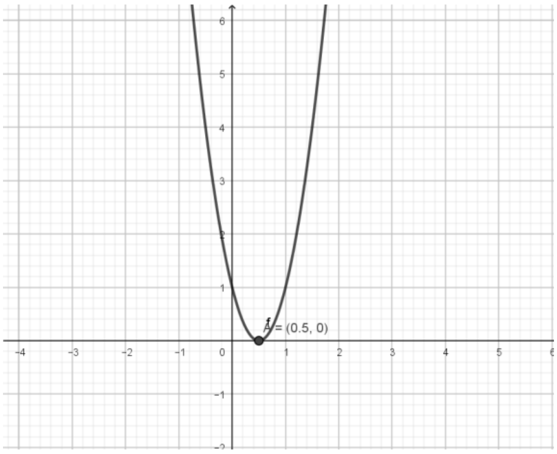
e

$$y_v = \frac{-\Delta}{4.a} = \frac{-0}{4.4} = 0.$$

Logo, o vértice é $V\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

- Construindo o gráfico:

Figura 8 - Gráfico do exemplo 2.8.1 d) utilizando o Geogebra



Fonte: O autor.

e) $f(x) = x^2 + x + 1$

Solução: Neste caso, temos $a = 1, b = 1\ e\ c = 1$. Como $a > 0$ a concavidade é voltada para cima.

- Determinando os zeros da função e os pontos de interseção com o eixo x:

Fazendo $f(x) = 0$, temos $x^2 + x + 1 = 0$, daí resolvendo a equação

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4.1.1 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3.$$

Como $\Delta < 0$, a parábola não intercepta o eixo x.

- Determinando o vértice da função:

Temos

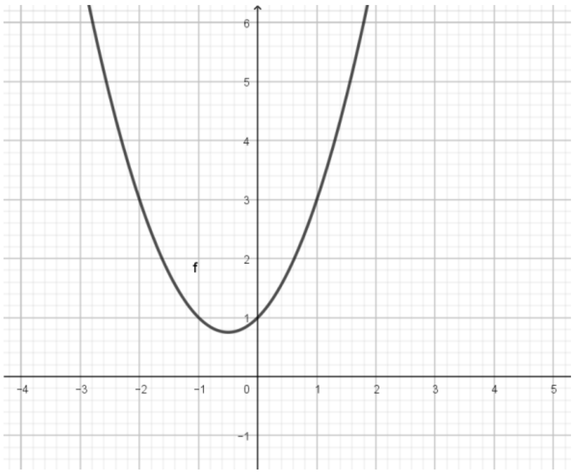
$$x_v = \frac{-b}{2.a} = \frac{-1}{2.1} = -\frac{1}{2}$$

e

$$y_v = \frac{-\Delta}{4.a} = \frac{-(-3)}{4.1} = \frac{3}{4}.$$

- Construindo o gráfico:

Figura 9 - Gráfico do exemplo 2.8.1 e) utilizando o Geogebra



Fonte: O autor.

2.9 Estudo do Sinal da Função Quadrática

Estudar o sinal da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, significa determinar os valores reais de x para os quais temos:

$$f(x) = 0, \qquad f(x) > 0 \quad e \quad f(x) < 0.$$

O estudo do sinal da função quadrática vai depender do valor que $\Delta = b^2 - 4ac$ assume, e do coeficiente a.

Para tanto temos três casos distintos;

1º) caso: para $\Delta < 0$.

Se $\Delta < 0$, temos $-\Delta > 0$, então da forma canônica, temos.

$$a\,.\,f(x) = a.a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow a\,.\,f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

pois, $a^2 > 0, \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ e sendo $-\Delta > 0$ temos $\left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right) > 0$.

Logo, a função $f(x) = a^2 + bx + c$, quando $\Delta < 0$, tem o mesmo sinal de a para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$a > 0 \Longrightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

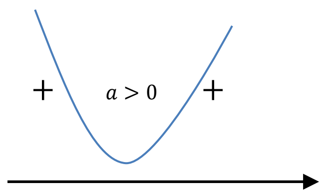
e

$$a < 0 \Longrightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

De fato, sendo $a\,.\,f(x) > 0$, se $a > 0$ para que o produto $a\,.\,f(x)$ seja maior que zero, devemos ter $f(x) > 0$. E, se $a < 0$ para que o produto $a\,.\,f(x)$ seja maior que zero, devemos ter $f(x) < 0$.

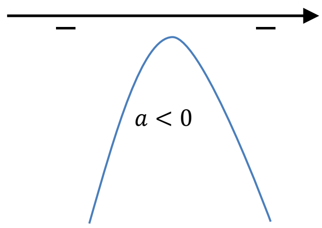
Graficamente:

Figura 10 – Gráfico para $\Delta < 0$ e $a > 0$.



Fonte:O autor.

Figura 11- Gráfico para $\Delta < 0$ e $a < 0$.



Fonte:O autor.

2º) caso: para $\Delta = 0$.

Da forma canônica, temos

$$a.f(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{0}{4a^2}\right)\right] = a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow a.f(x) \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R},$$

pois $a^2 > 0$ e $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Além disso, $a.f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$.

Logo a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta = 0$, tem o sinal de a para todo $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$, ou seja,

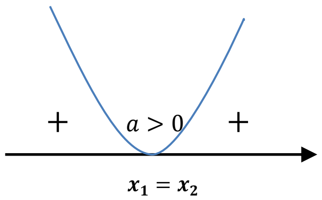
$$a > 0 \Longrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } f(x) > 0, x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$$

e

$$a < 0 \Longrightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } f(x) < 0, x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-b}{2a}\right\}.$$

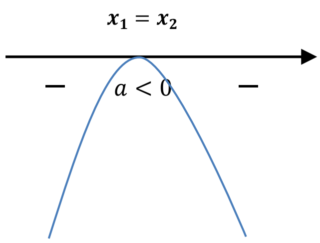
Graficamente:

Figura 12 -Gráfico para $\Delta = 0$ e $a > 0$.



Fonte:O autor.

Figura 13 -Gráfico para $\Delta = 0$ e $a < 0$.



Fonte:O autor.

3º) caso: para $\Delta > 0$.

Da forma canônica temos,

$$a.f(x) = a.a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] =$$

$$= a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] =$$

$$= a^2\left[\left(x - \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\right].$$

Lembrando que da fórmula de Bhaskara, as raízes de uma equação quadrática com $\Delta > 0$ são:

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Logo a forma canônica se transforma em:

$$af(x) = a^2\left[\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = a^2(x-x_1)(x-x_2).$$

Portanto o sinal de $a.f(x)$ depende dos sinais dos fatores $(x - x_1)\ e\ (x - x_2)$.

Admitindo $x_1 < x_2$, temos que:

1) se $x_1 < x_2$, temos

$$x < x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow a.f(x) = (x-x_1)(x-x_2) > 0.$$

2) se $x_1 < x < x_2$, temos:

$$x_1 < x < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow a.f(x) = a^2(x-x_1)(x-x_2) < 0.$$

3) se $x > x_2$,temos:

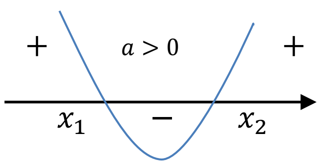
$$x > x_2 > x_1 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow a.f(x) = a^2(x-x_1)(x-x_2) > 0.$$

Logo significa que:

1) o sinal de $f(x)$ é o sinal de a para todo x, tal que $x < x_1$ ou $x > x_2$;
2) o sinal de $f(x)$ é o sinal $-a$ para todo x, tal que $x_1 < x < x_2$.

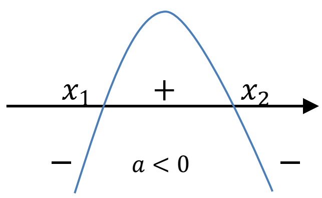
Graficamente:

Figura 14 - Gráfico para $\Delta > 0$ e $a > 0$.



Fonte:O autor.

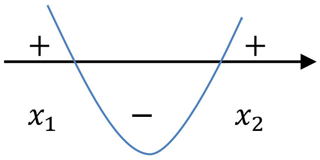
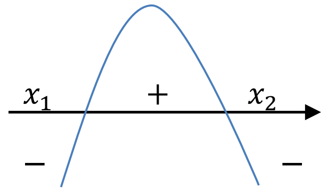
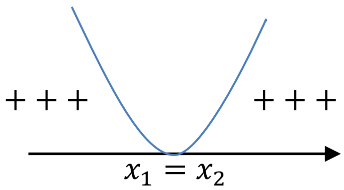
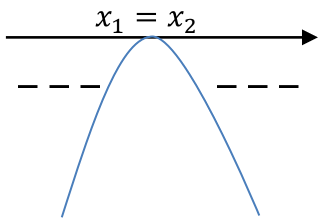
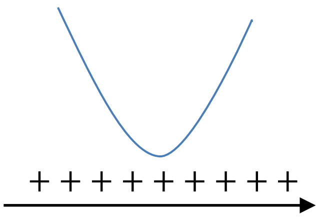
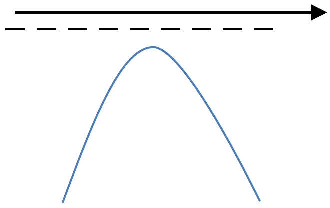
Figura 15 - Gráfico para $\Delta > 0$ e $a < 0$.



Fonte:O autor.

Resumindo, temos o seguinte quadro:

Tabela 1- Gráficos do estudo do sinal

Se $\Delta > 0$ e $a > 0$	**Se $\Delta > 0$ e $a < 0$**
 $f(x) < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x = x_2$ $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_1 ou\ x > x_2$	 $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < x_1\ ou\ x > x_2$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x = x_2$ $f(x) > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$
Se $\Delta = 0$ e $a > 0$	**Se $\Delta = 0$ e $a < 0$**
 $f(x) < 0, não\ existe\ x\ real$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x = x_2$ $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq x_1$	 $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \neq x_1$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x = x_2$ $f(x) > 0, não\ existe\ x\ real$
Se $\Delta < 0$ e $a > 0$	**Se $\Delta < 0$ e $a < 0$**
 $f(x) < 0, não\ existe\ x\ real$ $f(x) = 0, não\ existe\ x\ real$ $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$	 $f(x) > 0, não\ existe\ x\ real$ $f(x) = 0, não\ existe\ x\ real$ $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Fonte: O autor.

Exemplo 2.9.1: Estude o sinal de cada uma das funções reais dadas abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$
b) $f(x) = -x^2 + x - 1$
c) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$
d) $f(x) = x^2 - 7x + 6$

Solução:

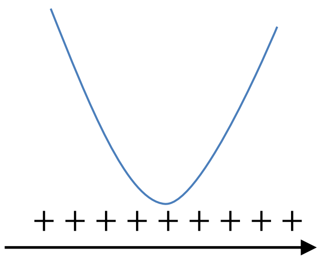
a) Temos $a = 1, b = -2$ e $c = 2$. Daí,

$$\Delta = b^2 - 4a.c = (-2)^2 - 4.1.2 = 4 - 8 = -4,$$

então a função não tem raízes reais.

Como $a > 1$ e $\Delta < 0$, temos

Figura 16 -gráfico do exemplo 2.9.1 a)



Fonte: O autor.

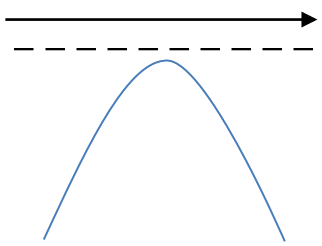
Logo, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) Temos $a = -1, b = 1$ e $c = -1$. Daí,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1).(-1) = 1 - 4 = -3,$$

então a função não tem raízes reais. E, como $\Delta < 0$ e $a < 0$, logo $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Figura 17 - Gráfico do exemplo 2.9.1 b)



Fonte: O autor.

c) Temos $a = 9, b = 6 \; e \; c = 1$. Daí

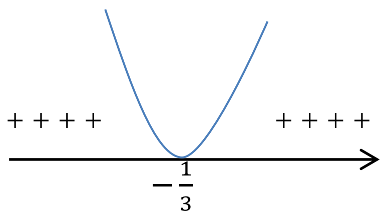
$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4.9.1 = 0.$$

E,

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2.a} = \frac{-6-0}{18} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}.$$

Como $a > 0 \; e \; \Delta = 0$, temos

Figura 18 - gráfico do exemplo 2.9.1 c)



Fonte: O autor.

Logo, $f(x) = 0 \; se \; x = -\frac{1}{3}$ e $f(x) > 0$ para todo $x \neq -\frac{1}{3}$.

d) Temos $a = 1, b = -7 \; e \; c = 6$. Daí

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4.1.6 = 25.$$

E,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

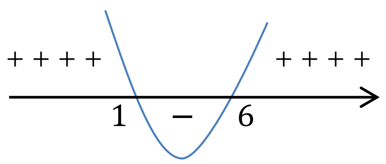
$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2.1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm 5}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \; e \; x_2 = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Como $a > 0 \; e \; \Delta > 0$, temos:

Figura 19 - Gráfico do emplo 2.9.1 d)



Fonte:O autor.

Logo, $f(x) = 0\ se\ x = 1\ ou\ x = 6$, $f(x) > 0\ se\ x < 1\ ou\ x > 6$ e $f(x) < 0$ se $1 < x < 6$.

No próximo capitulo estudaremos algumas aplicações da função quadrática.

3 APLICAÇÕES

Neste capítulo veremos como utilizar as definições e resultados estudados sobre a função quadrática na resolução de alguns problemas do nosso cotidiano. Dentre as várias aplicações iremos destacar o uso da função quadrática na física no movimento retilíneo uniformemente variado e no lançamento de um projétil visando alcançar a sua distância tanto na horizontal como na vertical. E em matemática financeira em problemas que envolvem as funções custo, receita e lucro.

3.1 Função Quadrática na Física

A Função quadrática na física está presente na análise dos movimentos uniformemente variado (MRV), pois em razão da aceleração, os corpos variam a velocidade e o espaço em função do tempo.

A função quadrática tem à seguinte lei de formação $f(x) = ax^2 + bx + c$. Na física a expressão que relaciona o espaço em função do tempo é dada pela seguinte expressão.

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

que representa uma função quadrática $y = s(t)$, onde

$t =$ tempo;

$s =$ espaço em função do tempo;

s_0 =espaço inicial;

$v_0 =$ velocidade inicial;

$a =$ aceleração

Exemplo 3.1.1: Um móvel realiza um movimento obedecendo à função $s = t^2 - 9t + 18$, sendo s medido em metros e t em segundos. Em que instante o móvel muda de sentido.

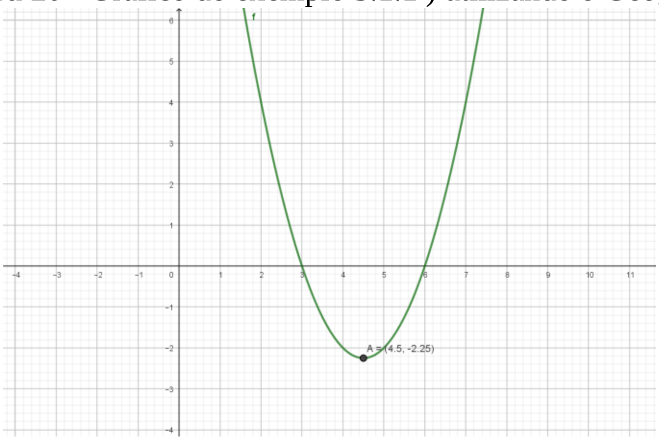
Solução:

A equação do movimento é uma função quadrática $y = s(t) = t^2 - 9t + 18$ com $a = 1, b = -9$ e $c = 18$, então ela descreve uma parábola com concavidade voltada para cima, pois $a = 1 > 0$, e que atinge o valor mínimo em $V(x_v, y_v)$, onde $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$. Assim, a mudança de sentido do móvel ocorrerá no momento em que o móvel atinge o ponto mínimo da parábola, calculando o ponto mínimo da parábola temos,

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-9)}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$$

Logo, o móvel muda de sentido no instante $t = 4,5$ segundos.

Figura 20 - Gráfico do exemplo 3.1.1) utilizando o Geogebra



Fonte: O autor.

3.2 Análise do máximo e mínimo no lançamento de projéteis

Quando se lança um objeto no espaço (pedra, tiro de canhão, ...) visando alcançar a maior distância possível tanto na horizontal como na vertical, a curva descrita pelo objeto forma uma parábola. Sendo esse lançamento modelado por uma função quadrática, para determinar a altura máxima que o objeto faz durante a trajetória basta determinar o valor máximo da função.

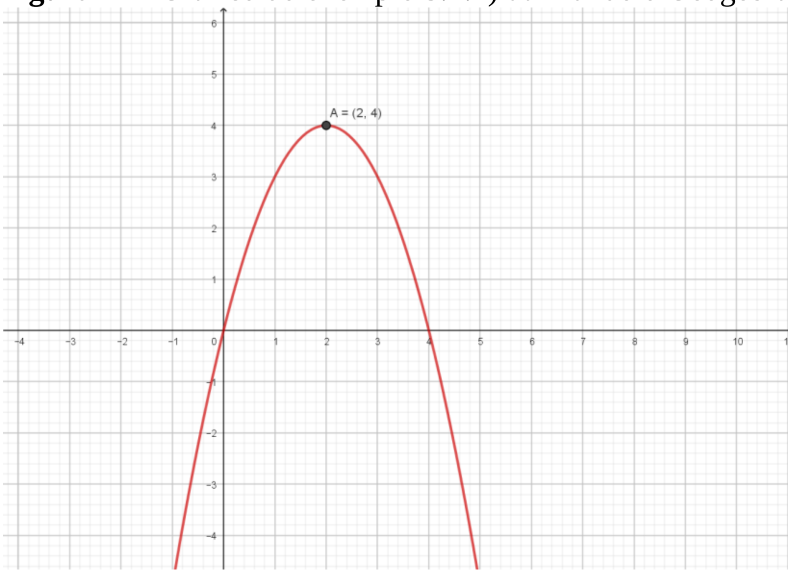
Exemplo 3.2.1: O movimento de um projétil, lançado para cima verticalmente é descrito pela função $y = -x^2 + 4x$, onde y é a altura, em metros, atingida pelo o projétil x segundos após o lançamento. Determine a altura máxima atingida pelo projétil durante o movimento.

Solução: Neste caso, o movimento do projétil é descrito pela função quadrática $y = f(x) = -x^2 + 4x$ com $a = -1, b = 4$ e $c = 0$. Como $a < 0$, esta função descreve uma parábola com concavidade voltada para baixo e a altura máxima é atingida quando a função quadrática atinge o seu valor máximo (que é atingido no vértice da função), que é dado por

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{4^2 - 4.(-1).0}{4.(-)1} = -\frac{16}{-4} = 4.$$

Logo, a altura máxima atingida pelo projétil é 4 $metros$.

Figura 21 - Gráfico do exemplo 3.2.1) utilizando o Geogebra



Fonte: O autor.

3.3 Função Quadrática na Economia: Custo, Receita e Lucro

Em alguns problemas de economia, em particular problemas envolvendo as funções custo, receita e lucro, estas funções são dadas por uma função quadrática. Antes de resolvermos alguns destes problemas, vamos primeiro definir estas funções.

Função Custo: A função custo (C) está relacionada aos gastos efetuados por uma empresa, indústria, loja, na produção ou aquisição de algum produto.

Função Receita: A função receita (R) está ligada ao faturamento bruto de uma entidade, dependendo do número de vendas de determinado produto.

Função Lucro: A função lucro (L) diz respeito ao lucro líquido das empresas, lucro oriundo da diferença entre a função receita e a função custo.

Exemplo 3.3.1: O custo de fabricação de x unidades de um relógio é de $(120x - 0{,}2x^2)$. Cada relógio é vendido a R$80,00. A fábrica só produz por encomenda.

a) Escreva a expressão do lucro L obtido na venda.
b) Quantas unidades devem ser produzidas para que a fábrica não tenha prejuízo?
c) E se desejar um lucro mínimo de R$2.500,00 em cada encomenda?

Solução:

a) Temos que o custo de fabricação de x unidades do relógio é dado por

$C(x) = 120x - 0{,}2x^2$.

E, como cada relógio é vendido por R$80,00 a receita (R) obtida com a venda de x unidades do relógio é dada por $R(x) = 80x$. Logo, como o lucro (L) é a diferença entre a função receita e a função custo, temos:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

$$\Rightarrow L(x) = 80x - (120x - 0{,}2x^2)$$

$$\Rightarrow L(x) = -40x + 0{,}2x^2.$$

b) Para que a fábrica não tenha prejuízo, devemos ter $L(x) > 0$, ou seja,

$$-40x + 0{,}2x^2 > 0.$$

Logo, para resolver este problema, basta fazer o estudo do sinal da função quadrática $L(x) = -40x + 0{,}2x^2$, com $a = 0{,}2$, $b = -40$ e $c = 0$. Temos

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (40)^2 - 4.0{,}2.0 \Rightarrow \Delta = 1600.$$

Calculando os zeros da função pela fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{\Delta}}{2.0{,}2}$$

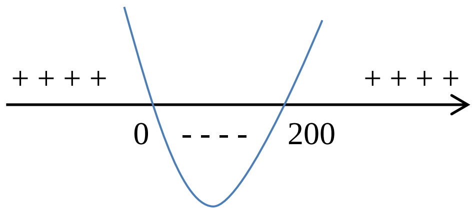
$$\Rightarrow x = \frac{40 \pm \sqrt{1600}}{0,4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{40 \pm 40}{0,4}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{80}{0,4} = 200 \text{ e } x_2 = \frac{0}{0,4} = 0.$$

Como $\Delta > 0\ e\ a\ > 0$ temos,

Figura 22 -Gráfico do exemplo 3.3.1 b)



Fonte: O autor.

Logo,

- Se $x < 0$ ou $x > 200$, então $f(x) > 0$;
- Se $0 < x < 200$, então $f(x) < 0$;
- Se $x = 0\ ou\ x = 200$, então $f(x) = 0$.

Portanto para que não tenha prejuízo deve ser produzida uma quantidade maior que 200 unidades.

c) Para que a fábrica tenha um lucro mínimo de R$2.500,00 em cada encomenda, devemos ter $L(x) \geq 2.500$, ou seja,

$$-40x + 0,2x^2 \geq 2.500 \Rightarrow 0,2x^2 - 40x - 2500 \geq 0$$

Logo, para resolver este problema, basta fazer o estudo do sinal da função quadrática $f(x) = 0,2x^2 - 40x - 2500$, com $a = 0,2$, $b = -40$ e $c = -2500$. Temos

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Rightarrow \Delta = (40)^2 - 4.0,2(-2500)$$

$$\Rightarrow \Delta = 1600 + 2000 = 3600.$$

Calculando os zeros da função pela fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

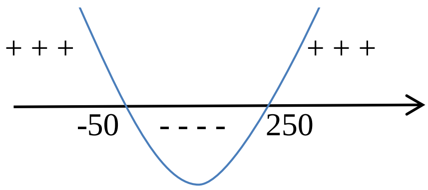
$$\Rightarrow x = \frac{-(-40) \pm \sqrt{3600}}{2.0,2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{40 \pm 60}{0,4}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{100}{0,4} = 250 \text{ e } x_2 = \frac{40-60}{0,4} = \frac{-20}{0,4} = -50.$$

Como $\Delta > 0 \; e \; a > 0$, temos:

Figura 23 - Gráfico do exemplo 3.3.1 c)



Fonte: O autor.

Logo,

- Se $x < -50 \; ou \; x > 250$, então $f(x) > 0$;
- Se $-50 < x < 250$, então $f(x) < 0$;
- Se $x = -50 \; ou \; x = 25$, então $f(x) = 0$.

Portanto, se desejar um lucro mínimo de R$2.500,00 em cada encomenda, devem ser produzidas uma quantidade maior que 250.

Exemplo 3.3.2: A receita mensal, em reais, de uma fábrica de CDs é $R(p) = 10.000p - 1.000p^2$, em que p é o preço de venda de cada unidade de CD.

a) Que preço deve ser cobrado para dar uma receita de R$25.000,00?
b) Para que valor de p a receita é máxima?
c) Para que valores de p a receita é inferior a R$18.750,00?

Solução:

a) Queremos o valor de p para que $R(p) = 25.000$, ou seja,

$$-1000p^2 + 10.000p = 25.000{,}00.$$

Simplificando a equação temos

$$-p^2 + 10p - 25 = 0.$$

Daí,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 10^2 - 4.(-1).(-25)$$

$$\Delta = 100 - 100 = 0.$$

E, pela fórmula de Bhaskara,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2.(-1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm 0}{-2} = 5.$$

Logo, o peço deve ser R$5,00.

b) Queremos o valor de p para que $R(p)$ seja máxima.

Como $a = -1 < 0$, esta função é representada por uma parábola de concavidade voltada para baixo e atinge o seu máximo no seu vértice $V(x_v, y_v)$, onde $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$.

Temos que $R(p) = 10.000p - 1.000p^2$, calculando os zeros da função:

$$10.000p - 1.000p^2 = 0 \Rightarrow 10p - p^2 = 0, \text{ com } a = -1, b = 10 \text{ e } c = 0.$$

Daí,

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Rightarrow \Delta = 10^2 - 4.(-1).0 = 100.$$

E o valor máximo da função é:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Longrightarrow y_v = \frac{-100}{4.(-1)} \Longrightarrow y_v = \frac{-100}{-4} = 25.$$

Portanto para que a receita seja máxima devemos ter $p = 25$.

c) Queremos o valor de p para que $R(p) < 18.750$, ou seja,

$$-1000p^2 + 10.000 < 18.750.$$

Simplificando a expressão temos

$$-p^2 + 10p < 18{,}75 \Rightarrow -p^2 + 10p - 18{,}75 < 0.$$

Logo, para resolver este problema, basta fazer o estudo do sinal da função quadrática $f(p) = -p^2 + 10p - 18{,}75$, com $a = -1$, $b = 10$ e $c = -18{,}75$. Temos

$$\Delta = b^2 - 4a.c$$

$$\Rightarrow \Delta = 10^2 - 4.(-1).(-18{,}75)$$

$$\Rightarrow \Delta = 100 - 75 = 25.$$

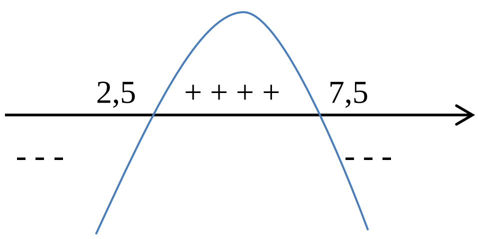
e

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow p = \frac{-10 \pm \sqrt{25}}{2(-1)} \Longrightarrow p = \frac{-10 \pm 5}{-2}$$

$$\Longrightarrow p_1 = \frac{-10+5}{-2} = \frac{-5}{-2} = 2{,}5 \text{ e } p_2 = \frac{-10-5}{-2} \Longrightarrow x\frac{-15}{-2} = 7{,}5.$$

Como $\Delta > 0$ e $a < 0$, temos:

Figura 24 - Gráfico do exemplo 3.3.2 c)



Fonte: O autor.

Logo,

- Se $p < 2{,}5\ ou\ p > 7{,}5$, então $f(p) < 0$;
- Se $2{,}5 < p < 7{,}5$, então $f(p) > 0$;
- Se $p = 2{,}5\ ou\ p = 7{,}5$, então $f(x) = 0$.

Portanto, para que a receita seja inferior a R$18.750,00, o preço deve ser menor que 2,5 e maior que 7,5.

4 CONCLUSÃO

Esta pesquisa mostra a importância sobre a necessidade do conhecimento da função quadrática, pôde-se perceber que é de suma importância que todo aluno tenha o mínimo de conhecimento nesse conteúdo, pois será preciso para que tenha um bom desempenho nos anos seguintes da educação básica e superior quando se encontrarem com esse tema.

Com relação a sua aplicação mostramos de forma contextualizada com a realidade de nosso cotidiano, como os conteúdos são trabalhados de forma com a realidade dos alunos fugindo do tradicionalismo de ensino que é a mecanização, com isso fazendo com que os alunos despertem o interesse pela função quadrática. Acreditamos que esse trabalho facilitará o entendimento deste conteúdo e irá motivar o seu entendimento através de aplicabilidade.

REFERÊNCIAS

[1] Dante, Luiz Roberto. Matemática contexto e aplicações: ensino médio, 2º edição, editora ática, 2001.

[2]Barreto Filho, Benigno; Silva, Claudio Xavier. Matemática aula por aula: volume único.São Paulo: FTD, 2000.

[3]Iezzi, Gelson; Murakami, Carlos. Fundamentos de Matemática elementar vol. 1, ensino médio: 7º edição, editora atual.

[4] http://prezi.com/pgnexnkstbeg/funçao-quadratica-ou-de-2ºgrau/

[5]http://portfoliocristianethalita.blogspot.com/2009/03/funcoes-polinomial-de-1-e-2-grau.html

[6] http://funcoesopcao1c.blogspot.com>algumas-aplicacoes

[7] http://mundoeducacao.uol.com.br>...>função