UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMATICA

ELIAS DANIEL DE SOUZA FRANÇA

TEOREMA DE BAIRE E ALGUMAS APLICACAÇÕES

CAMPINA GRANDE
2021

ELIAS DANIEL DE SOUZA FRANÇA

TEOREMA DE BAIRE E ALGUMAS APLICACAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof.Dr. Davis Matias de Oliveira.

CAMPINA GRANDE
2021

F814t França, Elias Daniel de Souza.
Teorema de Baire e algumas aplicações [manuscrito] / Elias Daniel de Souza Franca. - 2021.
42 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.
"Orientação : Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira , Departamento de Matemática - CCT."

1. Matemática - Teoremas. 2. Topologia. 3. Espaços métricos. I. Título

21. ed. CDD 514.3

Elaborada por Lucas H. A. da Silva - CRB - 15/898 BC/UEPB

ELIAS DANIEL DE SOUZA FRANÇA

TEOREMA DE BAIRE E ALGUMAS APLICACAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 26/07/2021.

BANCA EXAMINADORA

Davis Matias de Oliveira

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Francisco Sibério B. Albuquerque

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana R. Freitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Severino do Ramo e Eva Pereira, por sua presença e amor incondicional sempre na minha vida.

À minha irmã, Emmanuelle Dayane, por todo apoio e confiança depositado em mim.

À Universidade Estadual da Paraíba e todos os seus professores que sempre proporcionaram um ensino de alta qualidade.

Aos meus amigos que dividiram comigo essa jornada, sou grato por todas trocas de ideias e ajuda mutua. Sem vocês essa conquista não seria a mesma.

A meu orientador Dr. Davis Matias de Oliveira pela sua paciência e dedicação tanto nesse projeto como em outros onde pude evoluir não só intelectualmente mas também como pessoa.

Por fim, quero agradecer a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

“A Matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza.”

Stephen Hawking

RESUMO

O Teorema de Baire é um resultado da Topologia Geral que tem influência em outros teoremas das mais diversas áreas da matemática, a exemplo da Análise Matemática, Análise Funcional e Geometria Diferencial. O objetivo central desse trabalho é abordar e relacionar a sua importância em algumas de suas aplicações. E em especial, o Teorema de Banach-Steinhaus, Teorema da Aplicação Aberta e Teorema do Gráfico Fechado. Propõe-se, assim, apresentar tanto o Teorema e suas aplicações como também toda base teórica necessária para compreendê-los. Para o desenvolvimento desse trabalho a metodologia se deu através de pesquisas bibliográficas. Sob esta ótica, o estudo foi de grande valia pois o Teorema de Baire juntamente com os conceitos e propriedades previamente estudados servem de base para pesquisas e estudos futuros.

Palavras-chave: Teorema de Baire. Espaços Métricos. Topologia.

ABSTRACT

The Baire's Theorem is a result of General Topology that has influency in other theorems from the most diserve areas of mathematics, for example of Mathmetical Analysis, Functional Analysis and Differential Geometry. The main objective of this article is approach and connect the importance in some of your applications. In special, the Banach-Steinhaus Theorem, Open Mapping Theorem and Closed Graph Theorem. So it's proposed, show the theorem and your applications as well all the theoric basis necessary to understand them. For the development of this article the methodology occurs through of bibliographic research. From this perspective, the study was worthy because the Baire's Theorem together with your concepts and properties that was studied can be used as basis of future researches and studies.

Keywords: Baire's Theorem. Metric Spaces. Topology.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

(x_n)	Sequência
$\inf$	Ínfimo
$\overline{A}$	Fêcho de A
$\overset{\circ}{A}$	Interior de A
$\rho(A)$	Fronteira de A
$\sup$	Supremo
$\text{diam}(A)$	Diamêtro de A
$\times$	Produto cartesiano
A'	Conjunto derivado ou conjunto dos pontos de acumulação de A
$B(p, \varepsilon)$	Bola aberta de centro em p e raio ε
$d(x, y)$	Distância de x a y
f^{-1}	Função inversa

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Para o estudo da Análise Matemática é de suma importância conhecer a topologia dos espaços que são estudados. Os espaços métricos são uma classe de espaço topológico. Nos espaços topológicos podem-se determinar inúmeros conceitos matemáticos tais como continuidade, convergência, entre outros. Além disso, tais estudos sobre esses espaços são importantes para diversos ramos da Matemática.

O Teorema de Baire é relevante para inúmeras áreas matemáticas pois seu resultado acarreta na demonstração de vários teoremas. O teorema tem esse nome pois sua descoberta se deu pelo matemático francês René-Louis Baire (1874-1932) em 1899. Dentre algumas das suas aplicações está o Teorema de Banach-Steinhaus, Teorema da Aplicação Aberta e, o Teorema do Gráfico Fechado.

O objetivo desse trabalho é fazer um estudo dos conceitos e propriedades referentes aos Espaços Métricos e Topológicos com o intuito de se obter uma ferramenta matemática que possibilite apresentar uma demonstração para o Teorema de Baire e de suas aplicações.

Este trabalho de conclusão de curso é fruto de estudos realizados no Programa de Iniciação Científica (PIBIC) onde foram vistos detalhadamente muitos dos conceitos presente no trabalho. E o motivo da escolha desse tema é que ele consegue reunir alguns dos principais pontos que foram estudados nesse Programa.

A metodologia utilizada foi feita através de pesquisas bibliográficas para enunciar os conceitos, propriedades e teoremas que serão vistos no decorrer do trabalho. Uma das principais referências foi (Domingues, 1982) pois contém os mais imprescindíveis conceitos de Espaços Métricos e Topologia Geral.

Sendo assim, o trabalho foi divido da seguinte forma: no primeiro capítulo veremos conceitos de Espaços Métricos e Topologia Geral, como por exemplo Funções Contínuas, Conjuntos Convexos, Sequências, entre outros. Enquanto que, no segundo capítulo serão abordados tanto o Teorema de Baire como também algumas de suas aplicações que são os Teorema de Banach-Steinhaus, Teorema da Aplicação Aberta e Teorema do Gráfico Fechado.

2 ESPAÇOS MÉTRICOS E TOPOLOGIA GERAL

Neste capítulo, apresentamos conceitos necessários para a compreensão tanto do enunciado do Teorema de Baire e suas aplicações mas também de suas demonstrações. Dentre os conceitos apresentados, abordamos os espaços métricos, transformações lineares, conjuntos convexos, noções de topologia como conjunto aberto, fechado, denso e entre outras.

2.1 Espaços Métricos

Para áreas como Cálculo, Geometria, dentre outras, mesmo que de modo intuitivo, é necessário a noção de distância entre dois pontos ou conceitos advindos dessa noção para que haja um ponto de partida teórico. Nesse trabalho essa noção estará presente em várias definições futuras, por isso é necessário uma generalização do conceito.

Definição 2.1 *Dado um conjunto $M \neq \emptyset$ seja $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$. Dizemos que d é uma* ***métrica*** *quando forem satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$*;*

ii) $d(x, y) = d(y, x)$*;*

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Caso estas três condições sejam atendidas cada imagem $d(x, y)$ recebe o nome de distância de x a y e um par (M, d), onde d é uma métrica sobre M ganha o nome de **espaço métrico**.

Cada elemento de um espaço métrico será sempre referido como ponto desse espaço, sendo ele um ponto, ou um número, ou ainda uma função ou um vetor.

Exemplo 2.1 (Métrica zero-um ou discreta) *É o mais trivial exemplo de métrica que podemos considerar. Dado $M \neq \emptyset$ define-se $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ do seguinte modo:*

$$d(x, x) = 0,\ \forall x \in M \text{ e } d(x, y) = 1 \text{ sempre que } x \neq y.$$

Provemos que d é uma métrica. Note que a primeira condição é imediata, pois dados $x, y \in M$ com $d(x, y) = 0$ então $x = y, \forall x, y \in M$. Além disso, se $x = y$ então $d(x, y) = 0$. A segunda condição também é imediata, pois dados $x, y \in M$ caso $x = y$ ocorre $d(x, y) = d(y, x)$ enquanto que, se $x \neq y$ temos $d(x, y) = 1 = d(y, x)$.

Agora para provar a última condição, a desigualdade triangular, existem quatro casos para se verificar:

i) Tomemos $x = y = z$. Note que é imediato pois $d(x, y) = d(x, z) = d(z, y) = 0$. Portanto, $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$;

ii) Agora, tomando $x = y$ e $y \neq z$ temos $d(x, y) = 0, d(x, z) = 1$ e $d(z, y) = 1$. Sendo assim, $0 = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = 1 + 1 = 2$, o que satisfaz a desigualdade;

iii) Tomemos o caso onde $x \neq y$ e $y = z$. Com isto, temos $d(x,y) = 1, d(x,z) = 1$ e $d(z,y) = 0$. Logo, neste caso, $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$;

iv) Por último, tomemos $x \neq y$, $x \neq z$ e, $y \neq z$. Com isso, temos $d(x,y) = d(x,z) = d(z,y) = 1$. Logo, $1 = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = 2$.

Exemplo 2.2 (A reta usual) *Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e a função $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, dada por $d(x,y) = |x - y|$. d é a métrica sobre $\mathbb{R}$. A verificação das duas primeiras condições da definição de métrica é imediata. Quanto a terceira temos:*

$$d(x,y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x,z) + d(z,y).$$

Quando referimos à reta usual como espaço métrico, a **métrica** é chamada de **métrica usual em** $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.3 (O espaço $\mathbb{R}^n$) *O conjunto $\mathbb{R}^n$ é formado por todas as n-uplas (sequên- cias finitas) ($x_1, x_2, \ldots, x_n$), onde cada $x_i \in \mathbb{R}$. Existem três métricas importantes sobre $\mathbb{R}^n$. Sendo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pontos quaisquer do $\mathbb{R}^n$, são essas métricas definidas de tal forma:*

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|;$$

$$d_2(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\} = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|.$$

A verificação de que d_1 e d_2 são métricas é imediata pois essas métricas são similares ao exemplo anterior na métrica usual. Entretanto na métrica d, a primeira condição é imediata e, para segunda basta notar que

$$(x_i - y_i)^2 = {x_i}^2 - 2x_iy_i + {y_i}^2 = {y_i}^2 - 2y_ix_i + \ldots + {x_i}^2 = (y_i - x_i)^2,$$

logo $d(x,y) = d(y,x)$.

Agora para demonstrar a validez da terceira condição da definição de métrica, faz-se necessário o uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz cujo seu enunciado é o seguinte:

Dados $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ números reais arbitrários, então

$$\sum_{i=1}^{n} |x_iy_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Com isso, podemos demonstrar a desigualdade triangular e, para isto, basta tomar

$x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, .., y_n)$ e $z = (z_1, ..., z_n)$ pontos do $\mathbb{R}^n$.

Então:

$$\begin{aligned}
[d(x,y)]^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i+z_i-y_i)^2 = \\
&= \sum(x_i-z_i)^2 + 2\sum(x_i-z_i)(z_i-y_i) + \sum(z_i-y_i)^2 \leq \\
&\leq \sum(x_i-z_i)^2 + 2\left[\sum(x_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum(z_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \sum(z_i-y_i)^2 = \\
&= \left[\sqrt{\sum(x_i-z_i)^2} + \sqrt{\sum(z_i-y_i)^2}\right]^2 = [d(x,z)+d(z,y)]^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Definição 2.2 *Seja A um subconjunto não vazio de um espaço métrico M. Suponhamos que $k \in \mathbb{R}$ de maneira que $d(x,y) < k$, para quaisquer $x, y \in A$. Nestas condições dizemos que A é um conjunto limitado e o supremo do conjunto $\{d(x,y); x, y \in A\}$ chama-se diâmetro do conjunto A e é denotado por diam(A). Assim:*

$$\textit{diam}(A) = \sup\{d(x,y); x, y \in A\}.$$

2.2 Bolas Abertas

Assim como a definição de distância entre dois pontos é importante, a de bolas abertas é essencial para a teoria dos espaços métricos. A definição estará presente tanto em definições futuras como também no Teorema de Baire e na suas aplicações.

Definição 2.3 *Seja p um ponto de um espaço métrico (M,d). Sendo $\varepsilon > 0$ um número real, a bola de centro p e raio ε, denotado por $B(p,\varepsilon)$, é o seguinte subconjunto de M:*

$$B(p,\varepsilon) = \{x \in M; d(x,p) < \varepsilon\}.$$

Exemplo 2.4 (Bolas num espaço cuja a métrica é a zero-um) *Seja (M,d) um espaço discreto e consideremos $p \in M$. Há dois casos a considerar:*

i) $0 < \varepsilon \leq 1$. *Neste caso $B(p,\varepsilon) = \{x \in M; d(x,p) < \varepsilon\} = \{p\}$, porque o único ponto cuja a distância a p é menor que 1 é o próprio p;*

ii) $1 < \varepsilon$. *Quando isto acontece, $B(p,\varepsilon) = \{x \in M; d(x,p) < \varepsilon\} = M$, porque todos os pontos de M estão a uma distância de p igual a zero ou igual a 1, e portanto, menor que ε.*

Exemplo 2.5 (Bolas na reta munida da métrica usual) *Na reta real a bola de centro $p \in \mathbb{R}$ e raio ε é o conjunto*

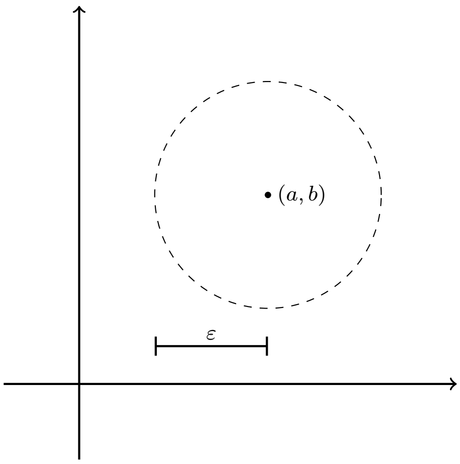
$$B(p,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}; |x-p| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R}; p-\varepsilon < x < p+\varepsilon\} =]p-\varepsilon, p+\varepsilon[.$$

Exemplo 2.6 (Bolas no espaço $\mathbb{R}^2$) *Lembremos que as métricas no $\mathbb{R}^2$ já foram definidas. Para quaisquer $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2};$$
$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|;$$
$$d_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|; |x_2 - y_2|\}.$$

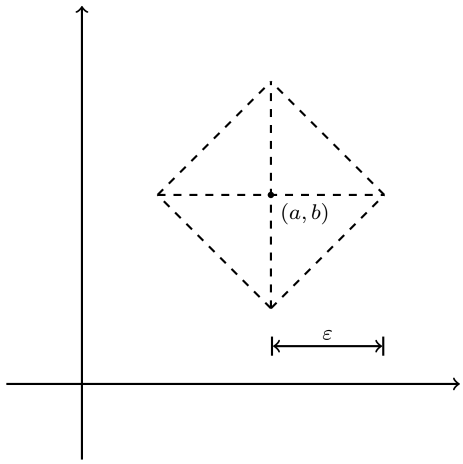
As Figuras 1, 2 e 3 ilustram a geometria das respectivas bolas referentes às métricas d, d_1 e d_2.

Figura 1- Métrica d



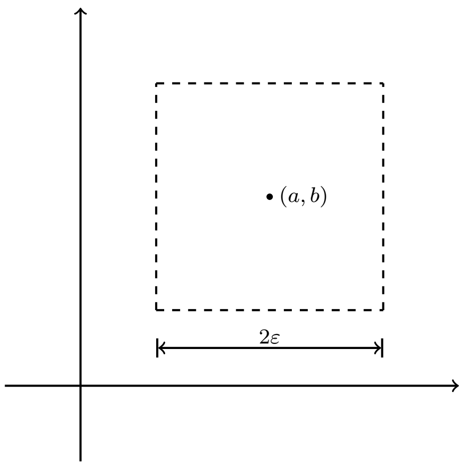
Fonte: Feito pelo autor, 2021

Figura 2- Métrica d_1



Fonte: Feito pelo autor, 2021

Figura 3- Métrica d_2



Fonte: Feito pelo autor, 2021

Proposição 2.1 (Propriedades das Bolas Abertas)

Nas propriedades que seguem as bolas abertas são consideradas em um espaço métrico arbitrário, (M, d), em que ε e δ são números reais positivos.

1. Dadas $B(p, \varepsilon)$ e $B(p, \delta)$, se $\varepsilon \leq \delta$, então $B(p, \varepsilon) \subset B(p, \delta)$. Para ver isto, note que, se $x \in B(p, \varepsilon)$, então $d(x, p) < \varepsilon$. Como $\varepsilon \leq \delta$, concluímos que $d(x, p) < \delta$ e portanto que $x \in B(p, \delta)$;

2. Dado $q \in B(p,\varepsilon)$, então existe $\delta > 0$ de maneira que $B(q,\delta) \subset B(p,\varepsilon)$. Neste caso, tomemos $\delta = \varepsilon - d(p,q)$ e mostraremos que $B(q,\delta) \subset B(p,\varepsilon)$. Seja $x \in B(q,\delta)$. A desigualdade triangular nos garante que $d(x,p) \leq d(x,q) + d(q,p)$. Como $d(x,q) < \delta = \varepsilon - d(p,q)$, então $d(x,p) < \varepsilon - d(p,q) + d(p,q) = \varepsilon$ o que garante que $x \in B(p,\varepsilon)$;

3. Sejam $B(p,\varepsilon)$ e $B(q,\delta)$ bolas não disjuntas. Se $t \in B(p,\varepsilon) \cap B(q,\delta)$, então existe $\lambda > 0$ tal que $B(t,\lambda) \subset B(p,\varepsilon) \cap B(q,\delta)$. Aqui, observe que, devido a primeira propriedade existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$ de modo que $B(t,\lambda_1) \subset B(p,\varepsilon)$ e $B(t,\lambda_2) \subset B(q,\delta)$. Se $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, então $B(t,\lambda)$ está contida tanto em $B(t,\lambda_1)$ como em $B(t,\lambda_2)$ e, portanto, $B(t,\lambda) \subset B(p,\varepsilon) \cap B(q,\delta)$;

4. Sejam p e q dois pontos distintos de um espaço métrico M. Se $d(p,q) = \varepsilon$, então $B(p,\frac{\varepsilon}{2}) \cap B(q,\frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$. Para a verificação deste fato, suponhamos que exista $x \in B(p,\frac{\varepsilon}{2}) \cap B(q,\frac{\varepsilon}{2})$. Então $x \in B(p,\frac{\varepsilon}{2})$ e $x \in B(q,\frac{\varepsilon}{2})$ e, portanto, $d(x,p) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(x,q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Donde, considerando a desigualdade triangular:

$$\varepsilon = d(p,q) \leq d(p,x) + d(x,q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   o que é um absurdo;

5. Dadas as bolas $B(p,\varepsilon)$ e $B(q,\delta)$, se $\varepsilon + \delta \leq d(p,q)$, então $B(p,\varepsilon) \cap B(q,\delta) = \emptyset$. De fato, suponhamos o contrário, ou seja, que existe um ponto $x \in B(p,\varepsilon) \cap B(q,\delta)$. Então $d(x,p) < \varepsilon$ e $d(x,q) < \delta$ e, portanto,

$$d(p,q) \leq d(p,x) + d(x,q) < \varepsilon + \delta \leq d(p,q)$$

   o que é impossível;

6. O diâmetro de uma bola $B(p,\varepsilon)$ é menor ou igual a 2ε, isto é, diam$(B(p,\varepsilon)) \leq 2\varepsilon$. Para a comprovação desta afirmação, sejam x e y pontos arbitrários de $B(p,\varepsilon)$. Então $d(x,y) \leq d(x,p) + d(p,y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Donde: $\sup\{d(x,y); x,y \in B(p,\varepsilon)\} \leq 2\varepsilon$, ou seja, diam$(B(p,\varepsilon)) \leq 2\varepsilon$.

□

2.3 Espaços Normados

Definição 2.4 *Um **espaço vetorial** sobre $\mathbb{R}$ é um conjunto E sobre o qual estão definidas duas leis de composição, uma interna*

$$(u,v) \longmapsto u + v \textit{ (adição)}$$

com $u, v \in E$ e, uma externa,

$$(\alpha,u) \longmapsto \alpha u \textit{ (multiplicação por escalares)}$$

sendo que $u \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, onde são satisfeitas as seguintes condições:

i) $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in E$;

ii) $u + v = v + u, \forall u, v \in E$;

iii) Existe $0 \in E$ de modo que $0 + u = u, \forall u \in E$;

iv) Para todo $u \in E$, existe $(-u) \in E$ tal que $u + (-u) = 0$, ou seja, E é um grupo abeliano em relação à adição e, ainda

v) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in E$;

vi) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in E$;

vii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in E$;

viii) $1u = u, \forall u \in E$.

Os elementos de um espaço vetorial são chamados de vetores.

Definição 2.5 *Uma **norma** sobre um espaço vetorial E, sobre $\mathbb{R}$, é uma aplicação $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ que associa a cada $u \in E$ um número real não negativo, denotado por $||u||$, e chamado de norma de u, tal que:*

(n_1) $||u|| = 0 \iff u = 0$;

(n_2) $||\alpha u|| = |\alpha| ||u||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall u \in E$;

(n_3) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall u, v \in E$.

Definição 2.6 *Um espaço vetorial normado real é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de uma norma. Se E é um espaço vetorial normado, então $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$, definida por $d(u, v) = ||u - v||$, é uma métrica sobre E pois:*

- $d(u, v) = ||u - v|| = 0 \iff u - v = 0 \iff u = v$;
- $d(u, v) = ||u - v|| = ||(-1)(v - u)|| = |-1| ||v - u|| = ||v - u|| = d(v, u)$;
- $d(u, v) = ||u - v|| = ||u - w + w - v|| \leq ||u - w|| + ||w - v|| = d(u, w) + d(w, v)$.

Observação 2.1 *A métrica d assim obtida chama-se métrica induzida pela norma em E.*

2.4 Noções de Topologia

Segundo (Lima, 2010, p.127) afirma, o objetivo da Topologia é “estabelecer, com grande generalidade, a noção de limite, as propriedades das funções contínuas e dos conjuntos onde tais funções são definidas e tomam valores”.

Com as definições e conceitos dos quais serão abordados nesse capítulo, podemos estruturar melhor os espaços que serão trabalhados ao restante do trabalho. Em especial conceitos como conjuntos abertos, fechados, fêchos, interiores e densos que serão visto no Teorema de Baire.

Definição 2.7 *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset M$ se diz **aberto** se, para todo $p \in A$, existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset A$.*

Exemplo 2.7 *Considere sobre* $\mathbb{R}$ *a métrica usual. Então* $A =]a, +\infty[$ *é aberto, para todo* $a \in \mathbb{R}$*, pois dado* $p \in A$*, tomando* $\varepsilon = \frac{p-a}{2}$*, então* $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\subset A$.

Exemplo 2.8 *Se* d *é a métrica zero-um sobre um conjunto* M*, então todo* $A \subset M$ *é aberto. De fato, se* $A = \emptyset$ *é imediato. Agora se* $A \neq \emptyset$*, então* $A = \bigcup_{p \in A} \{p\}$ *e como cada* $\{p\}$ *é uma bola aberta (centro* p *e raio* $\varepsilon \leq 1$*), então* A *é aberto.*

Proposição 2.2 *Seja* $\mathscr{A}$ *a coleção dos abertos de um espaço métrico* (M, d)*. Então:*

(i) $\emptyset, M \in \mathscr{A}$;

(ii) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{A}$;

(iii) Se (A_i) *é uma família de conjuntos abertos de* M*, ou seja, se cada* $A_i \in \mathscr{A}$*, então* $\cup A_i \in \mathscr{A}$.

Demonstração:

(i) É claro que $\emptyset$ é aberto, pelo fato de não conter pontos e, portanto, de não poder contrariar a definição dada. Quanto a M, toda bola de centro num ponto $p \in M$ é um subconjunto de M, por definição.

(ii) Seja $p \in A \cap B$. Então existem $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ tais que $B(p, \varepsilon) \subset A$ e $B(p, \lambda) \subset B$. Supondo que $\varepsilon \leq \lambda$ a propriedade das bolas abertas nos garante que $B(p, \varepsilon) \subset B(p, \lambda)$. Donde $B(p, \varepsilon) \subset A \cap B$.

(iii) Seja $p \in \cup A_i$. Então existe um índice t tal que $p \in A_t$ e, como A_t é aberto, para um certo $\varepsilon > 0$ vale a relação $B(p, \varepsilon) \subset A_t$. Então $B(p, \varepsilon) \subset \cup A_i$.

□

Definição 2.8 *Seja* (M, d) *um espaço métrico. Se* $A \subset M$*, um ponto* $p \in A$ *é chamado ponto interior ao conjunto* A *se existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B(p, \varepsilon) \subset A$*. O conjunto dos pontos interiores a* A *é chamado* ***interior*** *de* A *e é indicado por* $\overset{\circ}{A}$*. E, é evidente que* $\overset{\circ}{A} \subset A$ *e que se* $\overset{\circ}{A} = A$*, então* A *é aberto.*

Exemplo 2.9 *Na reta real consideremos* $A = [a, b[$ *e* $B = [a, +\infty[$*. Nos dois casos o ponto* a *não é ponto interior, pois um intervalo* $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= B(a, \varepsilon)$ *não está contido nem em* A *e nem em* B*. Logo,* $\overset{\circ}{A} =]a, b[$ *e* $\overset{\circ}{B} =]a, +\infty[$*. Ainda em* $\mathbb{R}$ *temos* $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ *e* $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$*. De fato, um intervalo* $I =]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ *sempre contém números irracionais (Ver Anexo I) e, portanto,* $I \not\subset \mathbb{Q}$ *e* $I \not\subset \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.10 *Seja* d *a métrica zero-um sobre um conjunto* M*. Como todos os subconjuntos de* M *são abertos, então* $\overset{\circ}{A} = A$*, para todo* $A \subset M$.

Definição 2.9 *Seja* (M, d) *um espaço métrico. Um subconjunto* $F \subset M$ *se diz* ***fechado*** *se, e somente se,* F^c *é aberto.*

Observação 2.2 *Note que um conjunto fechado não significa não aberto. Podemos ter, dependendo do espaço M, subconjuntos nem abertos e nem fechados, como podemos ter subconjuntos fechados e abertos simultaneamente. Por exemplo, na reta usual o conjunto $\mathbb{Q}$ não é aberto, como já vimos e também não é fechado pois como existem números racionais em qualquer intervalo $]p-\varepsilon, p+\varepsilon[$, então tomando $p \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $]p-\varepsilon, p+\varepsilon[\not\subset \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ logo $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ não é aberto e portanto $\mathbb{Q}$ não é fechado.*

Exemplo 2.11 *Na reta real são fechados todos os intervalos do tipo $[a,b]$, $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,a]$. De fato:*

$$
\begin{aligned}
[a,b]^c &= \,]-\infty,a[\, \cup \,]b,+\infty[\text{ em ambos os intervalos são abertos};\\
[a,+\infty[^c &= \,]-\infty,a[\text{ é aberto};\\
]-\infty,a]^c &= \,]a,+\infty[\text{ é aberto}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.12 *Considerando sobre um conjunto $M \neq \emptyset$ a métrica zero-um, então todo $F \subset M$ é fechado. Isto é nítido pois F^c é aberto pelo fato de todos os subconjuntos de M serem abertos como já vimos.*

Proposição 2.3 *Seja $\mathscr{F}$ a coleção dos conjuntos fechados de um espaço métrico M. Então:*

(i) $\emptyset, M \in \mathscr{F}$;

(ii) $H, F \in \mathscr{F} \Rightarrow H \cup F \in \mathscr{F}$;

(iii) Se (F_i) é uma família de conjuntos fechados de M, então $\cap F_i \in \mathscr{F}$.

Demonstração:

(i) $\emptyset$ e M pertencem a $\mathscr{F}$ porque $\emptyset^c = M$ e $M^c = \emptyset$ pertencem a $\mathscr{A}$;

(ii) Sejam $A = H^c$ e $B = F^c$ abertos em M. Desse modo $A \cap B = H^c \cap F^c = (H \cup F)^c$ é aberto; logo $H \cup F$ é fechado em M;

(iii) Como cada F_i é fechado, então cada $F_i{}^c$ é aberto e, portanto, $\cup F_i{}^c = (\cap F_i)^c$ é aberto. Consequentemente $\cap F_i$ é fechado.

□

Definição 2.10 *Seja A um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $p \in M$ se diz **ponto aderente** ao conjunto A se, para todo $\varepsilon > 0$, vale a relação*

$$B(p,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes ao subconjunto A chama-se fêcho de A e é indicado por $\overline{A}$. É imediato que $A \subset \overline{A}$.

Exemplo 2.13 *Na reta real, se $A =]a, b]$ ou $A = [a, b[$ ou $A =]a, b[$, então $\overline{A} = [a, b]$. De fato, os pontos a e b são aderentes a esses intervalos porque qualquer bola de centro num deles, certamente intersecta o conjunto A. Por outro lado, se $p < a$ ou $p > b$, então $p \notin \overline{A}$ porque, por exemplo, tomando $\varepsilon = \frac{a-p}{2}$, a bola $B(p, \varepsilon) =]p-\varepsilon, p+\varepsilon[$ não intersecta A em nenhum dos três casos se $p < a$.*

Exemplo 2.14 *Ainda na reta real, temos que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. De fato, dado $p \in \mathbb{R}$, todo intervalo $]p-\varepsilon, p+\varepsilon[$ contém números racionais (Ver Anexo I), daí $]p-\varepsilon, p+\varepsilon[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ e portanto $p \in \overline{\mathbb{Q}}$.*

Proposição 2.4 *Seja (M, d) um espaço métrico. Então, para todo $A \subset M$, vale a relação $\left(\overline{A}\right)^c = (\overset{\circ}{A^c})$; isto é, o complementar do fêcho de A é igual ao interior do complementar de A.*

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Seja $p \in (\overline{A})^c$, logo $p \notin \overline{A}$. Pela Definição 2.10, existe $\delta > 0$, tal que $B(p, \delta) \cap A = \emptyset$. O que implica que $B(p, \delta) \subset A^c$, ou seja, $p \in (\overset{\circ}{A^c})$.

($\Longleftarrow$) Seja $p \in (\overset{\circ}{A^c})$, logo existe $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subset A^c$. Portanto, $B(p, \delta) \cap A = \emptyset$, então $p \notin A$. Se $p \notin A$, então $p \notin \overline{A}$, ou seja, $p \in (\overline{A})^c$.

$\square$

Corolário 2.0.1 *$F \subset M$ é fechado se, e somente se, $\overline{F} = F$.*

Demonstração:

Temos pela Definição 2.7 que $\overset{\circ}{A} = A$ se, e somente se, A é aberto. Como por hipótese F é fechado, então F^c é aberto. Como F^c é aberto, então $F^c = (\overset{\circ}{F^c})$. Pela proposição anterior, $(\overline{F})^c = (\overset{\circ}{F^c})$, ou seja, $F^c = \left(\overline{F}\right)^c$. Portanto, $\overline{F} = F$.

$\square$

Proposição 2.5 *Seja (M, d) um espaço métrico. Se $A, B \subset M$, então $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Se $p \in \overline{A \cup B}$, então para todo $\varepsilon > 0$ vale a relação $B(p, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Logo, $B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ou $B(p, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$, ou seja, $p \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

($\Longleftarrow$) Se $p \in \overline{A} \cup \overline{B}$, então para todo $\varepsilon > 0$ vale a relação $B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ou $B(p, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. Logo, $B(p, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, ou seja, $p \in \overline{A \cup B}$.

$\square$

Definição 2.11 *Dado um espaço métrico M, se $A \subset M$ define-se a **fronteira** de A (indicada por $\rho(A)$), através da seguinte fórmula: $\rho(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \cap (\overset{\circ}{A})^c$.*

Definição 2.12 *Dado um espaço métrico (M, d), um subconjunto $A \subset M$ se diz* ***denso*** *em M se $\overline{A} = M$.*

A definição acima significa que para todo $p \in M$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ de maneira que $d(a,p) < \varepsilon$. Ou seja, para cada ponto $p \in M$ existe, arbitrariamente próximo de p, um ponto $a \in A$. Um exemplo é que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ pois $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Proposição 2.6 *Seja M um espaço métrico. Se $A \subset M$ é denso em M, então $G \cap A \neq \emptyset$, para todo aberto $G \neq \emptyset$ desse espaço.*

Demonstração:

Dado $p \in G$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset G$. Como $\overline{A} = M$, então existe um $a \in A$ de maneira que $d(p, a) < \varepsilon$, ou seja, $a \in B(p, \varepsilon)$. Daí $a \in G$ e, portanto, $G \cap A \neq \emptyset$.

Proposição 2.7 *Seja (M, d) um espaço métrico. $F \subset M$ tem interior vazio se, e somente se, F^c é denso em M.*

Demonstração:

$\overset{\circ}{F} = \emptyset$ se, e somente se, para toda bola $B(p, \varepsilon)$, com $p \in M$ e $\varepsilon > 0$ vale a relação $B(p, \varepsilon) \cap F = \emptyset$, ou seja, $B(p, \varepsilon) \subset F^c$. Agora note que, para toda bola $B(p, \varepsilon)$, temos $B(p, \varepsilon) \cap F^c \neq \emptyset$ se, e somente se, $\overline{F^c} = M$.

Definição 2.13 *Sejam (M, d) um espaço métrico e A um subconjunto de M. Diz-se que um ponto $p \in M$ é* ***ponto de acumulação*** *de A se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, a interseção*

$$(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$$

Quer dizer, toda bola de centro p deve conter infinitos pontos de A, distintos do ponto p.
O conjunto dos pontos de acumulação de A é chamado conjunto derivado de A e se indica por A'. É imediato se $A \subset B \subset M$, então, $A' \subset B'$.

Exemplo 2.15 *No espaço métrico $\mathbb{R}$ usual o único ponto de acumulação de $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$ é o ponto 0. De fato, uma bola $B(0, \varepsilon) =]-\varepsilon, \varepsilon[$ contém todos os elementos $\frac{1}{r} \in A$ tais que $\frac{1}{r} < \varepsilon$. Por outro lado é óbvio que, para qualquer outro ponto $p \in \mathbb{R}$, existem bolas $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ cuja a interseção com A não contém infinitos elementos de A, sendo assim esses outros valores de p não são pontos de acumulação. Assim $A' = \{0\}$.*

Exemplo 2.16 *Se d é a métrica zero-um sobre M, então, para todo $A \subset M$, vale a igualdade $A' = \emptyset$. De fato, para qualquer $p \in M$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) = \{p\}$ basta tomar $0 < \varepsilon \leq 1$. Daí $(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap A = \emptyset$ e $p \notin A'$.*

2.5 Sequências

Nessa seção estudamos resultados envolvendo sequências, limites de sequências, sequências de Cauchy e espaço completo. Tais resultados são necessários para o próximo capítulo.

Definição 2.14 *Seja (M, d) um espaço métrico. Toda aplicação $n \to x_n$, de $\mathbb{N}^*$ em M , é chamada* ***sequência*** *de elementos de M e, a notação para se indicar uma tal sequência é $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, ou, por simplicidade, (x_n).*

Definição 2.15 *Dada uma sequência (x_n) em M, se $\{n_1, n_2, ...\} \subset \mathbb{N}^*$ e $n_1 < n_2 < ...$, então a aplicação dada por $n_i \to x_{n_i}$ é indicada por $(x_{n_1}, x_{n_2}, ...)$ e recebe o nome de* ***subsequência*** *de (x_n).*

Exemplo 2.17 *Considerando a sequência $(1, 2, 3, 1, 2, 3, ...)$ de elementos de $\mathbb{R}$. Então $(1, 1, 1, ...)$ é uma subsequência da sequência dada pois, como é óbvio, temos $(1, 1, 1, ...) = (x_1, x_4, x_7, ...)$ desde que façamos $(1, 2, 3, 1, 2, 3, ...) = (x_1, x_2, ...)$.*

Definição 2.16 *Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que um ponto $p \in M$ é limite de uma sequência (x_n) de pontos de M se, para toda bola $B(p, \varepsilon)$, existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$ tal que*

$$n \geq r \Rightarrow x_n \in B(p, \varepsilon).$$

Para indicar que p é limite da sequência (x_n) usa-se a notação $\lim x_n = p$ ou, ainda, $x_n \to p$. Dizemos que (x_n) é uma sequência convergente ou que (x_n) converge para p.

Exemplo 2.18 *Seja num espaço métrico M uma sequência estacionária; isto é, uma sequência (x_n) de pontos de M tal que $x_n = p$, a partir de um certo índice. Assim: $(x_n) = (x_1, \ldots, x_r, p, p, \ldots)$. Tais sequências são convergentes para o termo que se repete, ou seja, $(x_1, \ldots, x_r, p, p, \ldots) \to p$, uma vez que $x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = p$, então, para todo $\varepsilon > 0$, se $n \geq r + 1$ tem-se que $d(x_n, p) = d(p, p) = 0 < \varepsilon$.*

Exemplo 2.19 *Consideremos $\mathbb{R}$ dotado da métrica usual. A sequência $(x_1, x_2, \ldots)$, onde $x_n = \frac{n}{n+1}$ converge para 1.*

De fato, dado $\varepsilon > 0$, como consequência da propriedade arquimediana, podemos tomar $r \in \mathbb{N}^*$ de maneira que $\frac{1}{r+1} < \varepsilon$. Então, para todo $n \geq r$, temos

$$d(x_n, 1) = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{r+1} < \varepsilon$$

o que vem garantir a afirmação.

Proposição 2.8 *Seja (x_n) uma sequência convergente de um espaço métrico M. Então é único o limite dessa sequência.*

Demonstração:

Suponhamos que $\lim x_n = p$ e $\lim x_n = q$. Se $p \neq q$, então $\varepsilon = \frac{d(p,q)}{2} > 0$ e, portanto, existem índices r e s tais que

$$n \geq r \Longrightarrow d(x_n, p) < \varepsilon;$$

$$n \geq s \Longrightarrow d(x_n, q) < \varepsilon.$$

Tomando $t = \max\{r, s\}$, então $n \geq t \Longrightarrow d(x_n, p) < \varepsilon$ e $d(x_n, q) < \varepsilon$. Daí, para todo $n \geq t$:

$$d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(p, q)$$

o que é um absurdo.

□

Proposição 2.9 *Se A é um subconjunto de um espaço métrico M e, se $p \in \overline{A}$, então existe uma sequência $(x_1, x_2, \ldots)$ de pontos de A tal que* $\lim x_n = p$.

Demonstração:

Como $p \in \overline{A}$, então cada uma das bolas abertas $B\left(p, \frac{1}{n}\right)$, em que $n = 1, 2, \ldots$, contém pontos de A. A sequência $(x_1, x_2, \ldots)$, onde $x_n \in A \cap B\left(p, \frac{1}{n}\right)$, para todo $n \geq 1$, converge para p. De fato, toda bola $B(p, \varepsilon)$ contém $B\left(p, \frac{1}{r}\right)$ desde que $\frac{1}{r} < \varepsilon$ e portanto, com essas condições, contém $x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots$. Como (x_n) é uma sequência de pontos de A então a proposição está provada.

□

Definição 2.17 *No espaço $\mathbb{R}$ existem as chamadas sequências monótonas que compreendem os seguintes tipos:*

- ***Crescentes** são as sequências (x_n) tais que $x_r \leq x_{r+1}$, para qualquer índice r;*
- *Se $x_r < x_{r+1}$, para todo $r \geq 1$, então (x_n) se diz **estritamente crescente**;*
- ***Decrescentes** são as sequências (x_n) para as quais se tem $x_{r+1} \leq x_r$, para todo índice r;*
- *Quando $x_{r+1} < x_r$, para qualquer $r \geq 1$, então a sequência se diz **estritamente decrescente**.*

Exemplo 2.20 *A sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right)$ é estritamente decrescente ao passo que a se-quência $(1, 1, 2, 2, 3, 3, ...)$ é crescente. É claro que $(2, 3, 2, 3, ...)$ não é monótona, pois não satisfaz nenhum dos casos da definição logo acima.*

Proposição 2.10 *Seja (M, d) um espaço métrico. Toda sequência estritamente crescente (ou crescente) cujo conjunto dos termos é limitado superiormente, converge para o supremo desse conjunto.*

Demonstração:

Suponhamos (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $x_1 < x_2 < \ldots < l$ e seja $p = \sup\{x_n; n = 1, 2, \ldots\}$. Provaremos que $\lim x_n = p$.

Dado $\varepsilon > 0$, não se pode ter $x_n \leq p - \varepsilon$ para todo índice n pois isto significaria a existência de um limite superior do conjunto $\{x_n\}$ menor do que p. Donde, para um certo índice r tem-se $p - \varepsilon < x_r \leq p$ e, daí, $p - \varepsilon < x_n < p + \varepsilon$ para todo $n \geq r$, ou seja, $n \geq r \Longrightarrow |x_n - p| < \varepsilon$.

Isto garante a nossa afirmação de que $\lim x_n = p$.

□

Observação 2.3 *A demonstração para um caso de uma sequência crescente é análoga. Também análoga a demonstração para o caso das sequências decrescentes (ou estritamente decrescente). Aqui a sequência deve ser limitada inferiormente e, o limite da sequência será o seu ínfimo.*

Definição 2.18 *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) de pontos de M é chamada* ***sequência de Cauchy*** *se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice r tal que:*

$$m, n \geq r \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Exemplo 2.21 *A sequência (x_n) definida em $\mathbb{R}$, com $x_n = \frac{1}{n}$, é de Cauchy.*

De fato, dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $r\frac{\varepsilon}{2} > 1$, ou seja, $\frac{1}{r} < \frac{\varepsilon}{2}$. Então

$$m, n \geq r \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

pois,

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

e, como $m, n \geq r \Longrightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{r}$ e $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{r}$, temos

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{r} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja,

$$m, n \geq r \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy.

Proposição 2.11 *Toda sequência convergente de um espaço métrico,(M, d), é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração:

Se (x_n) é uma sequência convergente de M e, se $\lim x_n = p$, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice r tal que:

$$n \geq r \Longrightarrow d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como porém

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, p) + d(p, x_n),$$

então

$$m, n \geq r \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

□

Proposição 2.12 *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço vetorial normado E. Então existe uma bola de centro no vetor nulo que contém todos os termos da sequência.*

Demonstração:

Tomando $\varepsilon = 1$ existe um índice r tal que:

$$m, n \geq r \Longrightarrow d(x_m, x_n) = ||x_m - x_n|| < 1.$$

Em particular $||x_m - x_r|| < 1$, para todo $m \geq r$. Mas

$$||x_m|| = ||x_m - x_r + x_r|| \leq ||x_m - x_r|| + ||x_r||.$$

Portanto, para todo $m \geq r$

$$||x_m|| < 1 + ||x_r||.$$

Seja $\lambda > \max\{||x_1||, \cdots, ||x_{r-1}||, 1 + ||x_r||\}$. Então, para todo índice n

$$d(x_n, 0) = ||x_n|| < \lambda,$$

o que prova que $x_n \in B(0.\lambda), \forall n \geq 1$.

□

Proposição 2.13 *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço métrico M. Se existe uma subsequência de (x_n) que converge para $p \in M$, então $\lim\, x_n = p$.*

Demonstração:

Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)$ uma subsequência conforme o enunciado. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice n_k tal que:

$$n_i \geq n_k \Longrightarrow d(x_{n_i}, p) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, sendo (x_n) sequência de Cauchy, existe um índice s tal que:

$$m, n \geq s \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sendo $t = \max\{n_k, s\}$, considerando um índice $n_j > t$, temos então que:

$$n \geq t \Longrightarrow d(x_n, p) \leq d(x_n, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, p) < \varepsilon$$

o que garante a convergência de (x_n) para p.

□

Proposição 2.14 *Toda sequência de Cauchy (x_n) em $\mathbb{R}$ converge para um ponto $p \in \mathbb{R}$.*

Demonstração:

Devido a Proposição 2.12 existe $k > 0$ tal que $|x_n| < k, \forall n \geq 1$, o que nos permite concluir a existência, para cada índice $m \geq 1$, de

$$y_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, \ldots\}.$$

Assim, é claro que

$$y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq \cdots \leq k$$

e, pela Proposição 2.10, (y_n) converge para $p = \sup\{y_n; n = 1, 2, \ldots\}$ que é um ponto de $\mathbb{R}$. Mostremos que $\lim x_n = p$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe um índice r tal que:

$$n \geq r \Longrightarrow |y_n - p| < \frac{\varepsilon}{3}$$

e, como, (x_n) é de Cauchy, existe um índice s de maneira que:

$$m, n \geq s \Longrightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Seja $t > \max\{r, s\}$. Levando em conta que

$$y_t = \inf\{x_t, x_{t+1}, \cdots\}$$

existe $j \geq t$ para o qual se tem $y_t \leq x_j < y_t + \frac{\varepsilon}{3}$ e, portanto,

$$|x_j - y_t| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim, para todo $n > t$ temos:

$$|x_n - p| \leq |x_n - x_j| + |x_j - y_t| + |y_t - p| < \varepsilon$$

e de onde $\lim x_n = p$.

$\square$

Definição 2.19 *Um espaço métrico M é chamado **completo** se toda sequência de Cauchy desse espaço converge para um ponto de M.*

Exemplo 2.22 *Como vimos na Proposição 2.14, temos que $\mathbb{R}$ é completo pois toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ converge para um ponto de $\mathbb{R}$.*

2.6 Funções Contínuas

O tema central da Topologia é a ideia de função contínua, pois ela estabelece os fatos e conceitos topológicos essenciais à Análise (Lima, 2010).

Definição 2.20 *Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f : M \to N$ se diz **contínua** no ponto $p \in M$ se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que*

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Dizer que f é contínua significa que f é contínua em todos os pontos de M.

Exemplo 2.23 *As aplicações lipschitzianas são aplicações $f : M \to N$ para as quais existe uma constante $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y), \forall x, y \in M$. As aplicações lipschitzianas são contínuas pois, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, por definição temos que: $d(x, p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) \leq cd(x, p) < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$ para qualquer $p \in M$.*

Exemplo 2.24 *As contrações fracas são aplicações $f : M \to N$ tais que*

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in M$. Toda contração fraca é uma aplicação contínua pois, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, então $d(x,p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) \leq d(x,p) < \delta = \varepsilon$ para todo $p \in M$.

Proposição 2.15 *Uma função $f : M \to N$ é contínua no ponto $p \in M$ se, e somente se, dada uma bola $B_N(f(p), \varepsilon)$ existe uma bola $B_M(p, \delta)$ tal que $f(B_M(p,\delta)) \subset B_N(f(p), \varepsilon)$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Dada a bola $B_N(f(p), \varepsilon)$, existe, por hipótese, $\delta > 0$ tal que $d(x,p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon$.

Considerando a bola $B_M(p, \delta)$ mostremos que sua imagem direta está contida em $B_N(f(p), \varepsilon)$. De fato, se $y \in f(B_M(p,\delta))$, então $y = f(x)$, com $x \in B_M(p, \delta)$. Logo $d(x,p) < \delta$ e, com isso, $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Assim $y = f(x) \in B_N(f(p), \varepsilon)$.

($\Leftarrow$) Seja $y = f(x) \in N$ tal que $y \in f(B_M(p,\delta))$, logo $x \in B_M(p,\delta)$, ou seja, $d(x,p) < \delta$. Como $f(B_M(p,\delta)) \subset B_N(f(p), \varepsilon)$, temos $y \in B_N(f(p), \varepsilon)$ o que implica $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Portanto, $d(x,p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon$, isto é, f é contínua no ponto $p \in M$.

□

Proposição 2.16 *Uma função $f : M \to N$ é contínua num ponto $p \in M$ se, e somente se, o fato de uma sequência (x_n) de pontos de M convergir para p acarretar que $(f(x_n))$ converge para $f(p)$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja $B = B(f(p), \varepsilon)$ onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário. Da Proposição 2.15 vem que existe $\delta > 0$ de tal maneira que: $f(B(p,\delta)) \subset B$.

Mas como $x_n \to p$, existe um índice r tal que, para todo índice $n \geq r$, se tem $x_n \in B(p, \delta)$. Daí segue que $f(x_n) \in f(B(p,\delta))$ e, portanto, que $f(x_n) \in B$ para qualquer índice $n \geq r$ o que prova então que $f(x_n) \to f(p)$.

($\Leftarrow$) Pela Proposição 2.15, se f não fosse contínua em p, existiria um $\varepsilon > 0$ tal que $f(B(p,\delta)) \not\subset B(f(p), \varepsilon)$, para todo $\delta > 0$. Assim em particular:

$$\begin{aligned} f(B(p,1)) &\not\subset B(f(p), \varepsilon) \\ f(B(p, \frac{1}{2})) &\not\subset B(f(p), \varepsilon) \\ f(B(p, \frac{1}{3})) &\not\subset B(f(p), \varepsilon), \ldots \end{aligned}$$

e portanto, para cada $n \geq 1$ existe $x_n \in M$ tal que $x_n \in B\left(p, \frac{1}{n}\right)$ e $f(x_n) \notin B(f(p), \varepsilon)$. Donde a sequência $(x_1, x_2, ...) \to p$ ao passo que $(f(x_1), f(x_2), ...) \not\to f(p)$, o que contradiz a hipótese.

□

Proposição 2.17 *Dada a função $f : M \to N$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *f é contínua;*

b) *Para todo $q \in N$ e todo $\lambda > 0, f^{-1}(B(q, \lambda))$ é um subconjunto aberto de M;*

c) *Para todo aberto G do espaço $N, f^{-1}(G)$ é um aberto de M;*

d) *Para todo subconjunto fechado F do espaço do espaço $N, f^{-1}(F)$ é um subconjunto fechado de M.*

Demonstração:

a) $\Rightarrow$ b) Dado $p \in f^{-1}(B(q, \lambda))$, então $f(p) \in B(q, \lambda)$ e, portanto, pela Proposição 2.1.2 existe $\varepsilon > 0$ de maneira que $B(f(p), \varepsilon) \subset B(q, \lambda)$. Mas sendo f contínua pela Proposição 2.15 existe então $\delta > 0$ tal que $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \varepsilon)$. Como porém $B(p, \delta) \subset f^{-1}(f(B(p, \delta)))$, então $B(p, \delta) \subset f^{-1}(B(f(p), \varepsilon)) \subset f^{-1}(B(q, \lambda))$. Assim todo ponto $p \in f^{-1}(B(q, \lambda))$ é ponto interior de $f^{-1}(B(q, \lambda))$ e, portanto, $f^{-1}(B(q, \lambda))$ é aberto.

b) $\Rightarrow$ c) Se G é aberto em N, então $G = \cup B_i$, onde (B_i) é a família das bolas abertas contidas em G. Daí $f^{-1}(G) = f^{-1}(\cup B_i) = \cup f^{-1}(B_i)$ e, como cada $f^{-1}(B_i)$ é aberto, o mesmo ocorre com $f^{-1}(G)$.

c) $\Rightarrow$ d) Sendo F fechado em N, então $G = F^c$ é aberto. Daí $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ é aberto em M, por hipótese. Logo, seu complementar, $f^{-1}(F)$, é subconjunto fechado em M.

d) $\Rightarrow$ a) Seja p um ponto arbitrário de M. Para $\varepsilon > 0$ qualquer, seja $B = B(f(p), \varepsilon)$. Então B^c é um fechado em N que não contém $f(p)$ e, portanto, $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ é um fechado de M que não contém p. Logo $f^{-1}(B)$ é aberto e $p \in f^{-1}(B)$. Tomando então $\delta > 0$ de maneira que $B_1 = B(p, \delta) \subset f^{-1}(B)$ teremos que $f(B_1) \subset f(f^{-1}(B)) \subset B$ e, portanto, pela Proposição 2.15, f é contínua em todo ponto $p \in M$.

$\square$

Proposição 2.18 *Sejam $f : M \to N$ e $g : N \to P$ funções contínuas nos pontos $p \in M$ e $f(p) \in N$, respectivamente. Então $g \circ f : M \to P$ é contínua no ponto p.*

Demonstração:

Dada uma bola $B_2 = B((g \circ f)(p), \varepsilon) = B(g(f(p)), \varepsilon)$, a continuidade de g garante que existe uma bola $B_1 = B(f(p), \lambda)$ tal que $g(B_1) \subset B_2$. Considerando agora a bola B_1, como f é contínua em p, existe $B = B(p, \delta)$ de maneira que $f(B) \subset B_1$. Desta inclusão decorre que $g(f(B)) = (g \circ f)(B) \subset g(B_1)$ e portanto $(g \circ f)(B) \subset B_2$. Logo, pela Proposição 2.15, $g \circ f$ é contínua.

$\square$

2.7 Funções Uniformemente Contínuas

Definição 2.21 *Se M e N são espaços métricos, uma função $f : M \to N$ se diz* ***uniformemente contínua*** *se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que*

$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Exemplo 2.25 *As aplicações lipschitzianas $f : M \to N$ são uniformemente contínuas. De fato, se $c > 0$ é a constante de Lipschitz de f, então $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y), \forall x, y \in M$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, então*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y) < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

para quaisquer $x, y \in M$. As contrações fracas são todas uniformemente contínuas, pois são lipschitzianas com $c = 1$.

Definição 2.22 *Uma aplicação $f : M \to N$ é dita contração se existe um número real k, $0 \leq k < 1$, tal que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \forall x, y \in M$. Como toda contração é uma aplicação lipschitziana, tem-se que esta é uniformemente contínua.*

2.8 Transformações Lineares

Definição 2.23 *Sejam E e F espaços vetoriais sobre o mesmo corpo K. Uma* ***transformação linear*** *$T : E \to F$ é definida através das seguintes condições:*

- *$T(u + v) = T(u) + T(v)$;*
- *$T(\alpha u) = \alpha T(u)$.*

para quaisquer $u, v \in E$ e para todo $\alpha \in K$.

Note que, considerando $u + (-v) = u - v$, então valem as seguintes propriedades:

$$T(-u) = -T(u) \quad \text{e} \quad T(u - v) = T(u) - T(v)$$

para quaisquer $u, v \in E$.

Observação 2.4 *Ao longo do texto aparecerá o termo operador linear que é uma transformação linear de um espaço vetorial nele mesmo, ou seja, uma transformação que tenha domínio igual ao contradomínio.*

Exemplo 2.26 *Dado um espaço vetorial normado E, cada escalar $\alpha \neq 0$ determina uma homotetia $h_\alpha : E \to E$ definida por $h_\alpha(x) = \alpha x, \forall x \in E$. E a homotetia é linear pois:*

$$h_\alpha(u + v) = \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v = h_\alpha(u) + h_\alpha(v)$$
$$h_\alpha(\lambda u) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u) = \lambda h_\alpha(u)$$

para todo $u, v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.19 *Se E e F são espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{R}$ e, se $T : E \to F$ é uma transformação linear, então são equivalentes as afirmações:*

a) T *é contínua;*

b) T *é contínua na origem;*

c) Existe um número real $k > 0$ *tal que* $||T(u)|| \leq k||u||$*, para qualquer* $u \in E$*;*

d) T *é lipschitziana.*

Demonstração:

a) $\Rightarrow$ b) É imediata pois se T é contínua então é contínua em todos os pontos, inclusive na origem.

b) $\Rightarrow$ c) Como T é contínua na origem e, como $T(0) = 0$, tomando $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ de maneira que $||u|| < \delta \Rightarrow ||T(u)|| < 1$.

Tomemos $k \in \mathbb{R}$ de maneira que $\frac{1}{\delta} < k$. Assim, dado um vetor u qualquer, não nulo, de E, o vetor $\frac{u}{k||u||} = \frac{1}{k||u||}u$ tem norma igual a $\frac{1}{k}$, portanto menor que δ. Daí:

$$\left|\left|T\left(\frac{u}{k||u||}\right)\right|\right| < 1.$$

Da linearidade de T e da propriedade (n_2) da Definição 2.5 decorre então que:

$$\frac{1}{k||u||}||T(u)|| < 1 \Longrightarrow ||T(u)|| \leq k||u||$$

para qualquer vetor $u \neq 0$ de E. Se $u = 0$ temos a igualdade $||T(0)|| = k||0||$.

c) $\Rightarrow$ d) A constante de Lipschitz de T é o próprio k : dados $u, v \in E$,

$$||T(u) - T(v)|| = ||T(u - v)|| \leq k||u - v||.$$

d) $\Rightarrow$ a) Como já vimos, no exemplo 2.23, toda aplicação lipschitziana é contínua.

$\square$

Definição 2.24 *O conjunto formado por transformações lineares contínuas de* E *em* F *denota-se por* $\mathcal{L}(E, F)$.

Observação 2.5 *O conjunto* $\mathcal{L}(E, F)$ *é um espaço vetorial e que, como será mostrado no próximo resultado, também é normado.*

Proposição 2.20 *Sejam* E *e* F *espaços normados. Então:*

1. $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ *define uma norma em* $\mathcal{L}(E, F)$.
2. $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ *para todos* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *e* $x \in E$.

Demonstração:

- Primeiramente note que $\|T(x)\| \geq 0$ e, então,

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \geq 0.$$

No caso de $\|T\| = 0$, então $\sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| = 0$; logo $\|T(x)\| = 0$ para todo $\|x\| \leq 1$. Agora, para todo $x \neq 0$, temos

$$\|T(x)\| = \|x\| \cdot \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \|x\| \cdot 0 = 0.$$

Por fim, para $x = 0$, então $T(x) = 0$; isto é, $T \equiv 0$.

Perceba agora que

$$\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\alpha T(x)\| = |\alpha| \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| = |\alpha|\|T\|$$

Por conseguinte para mostrar que é válida a desigualdade triangular temos

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(T_1 + T_2)(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} (\|T_1(x) + T_2(x)\|) \leq$$
$$\leq \sup_{\|x\|\leq 1} (\|T_1(x)\| + \|T_2(x)\|) \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_1(x)\| + \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_2(x)\| = \|T_1\| + \|T_2\|.$$

- Como $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|$, logo $\|T(x)\| \leq \|T\|$ para todo $\|x\| = 1$. Sendo $x \neq 0$, então $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$. Assim,

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|T\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|}\|T(x)\| \leq \|T\| \Rightarrow \|T(x)\| \leq \|T\|.\|x\|, \forall x \in E.$$

□

2.9 Conjuntos Convexos

Definição 2.25 *Seja E um espaço vetorial normado. Dados $u, v \in E$ o segmento de reta de extremos u e v, que se indica por $[u, v]$, é o seguinte subconjunto de E :*

$$[u, v] = \{(1 - t)u + tv; t \in I\}$$

onde $I = [0, 1]$. Um subconjunto $L \subset E$ se diz ***convexo*** *quando, para quaisquer $u, v \in L$, vale a inclusão $[u, v] \subset L$.*

Exemplo 2.27 (Bola Aberta) *Dados $x, y \in B(p, \varepsilon)$, temos*

$$\begin{aligned} ||tx + (1-t)y - p|| &= ||tx - tp + y - ty - p + tp|| = \\ = ||t(x-p) + (1-t)(y-p)|| &\leq ||t(x-p)|| + ||(1-t)(y-p)|| = \\ = |t|||x-p|| + |1-t|||y-p|| &< |t|\varepsilon + |1-t|\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $tx + (1-t)y \in B(p, \varepsilon)$ e sendo assim $B(p, \varepsilon)$ é um convexo.

Definição 2.26 *Sejam A_1 e A_2 dois subconjuntos convexos de E. O* ***conjunto soma*** *destes conjuntos é um conjunto de pontos tal que*

$$A_1 + A_2 = \{x \in E | x = a_1 + a_2, a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}.$$

Agora provemos que essa soma necessariamente também vai ser um subconjunto convexo de E. Tomemos A_1 e A_2 não vazios, pois no caso de subconjuntos vazios o resultado é imediato. Sejam $x, y \in A_1 + A_2$ e $t \in [0,1]$. Com base na definição, $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$ com $x_1, y_1 \in A_1$ e $x_2, y_2 \in A_2$. Consideremos $z = tx + (1-t)y$ de modo que

$$z = t(x_1 + x_2) + (1-t)(y_1 + y_2) = tx_1 + (1-t)y_1 + tx_2 + (1-t)y_2$$

Tomando $z_1 = tx_1 + (1-t)y_1 \in A_1$ e $z_2 = tx_2 + (1-t)y_2 \in A_2$, obtemos que $A_1 + A_2$ é convexo.

Definição 2.27 *Seja A um convexo de E e $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar arbitrário. A* ***multiplicação de um escalar por um conjunto convexo*** *é dada por*

$$\alpha A = \{x \in E | x = \alpha y, y \in A\}$$

Agora provemos que essa multiplicação necessariamente também vai ser um conjunto convexo. Tomemos A não vazio, pois se fosse vazio αA também seria. Sejam $x, y \in A$ e $t \in [0,1]$. Tomando $x = \alpha a_1$ e $y = \alpha a_2$, com $a_1, a_2 \in A$. Consequentemente temos, se $z = tx + (1-t)y$, então

$$z = t(\alpha a_1) + (1-t)(\alpha a_2) = \alpha[ta_1 + (1-t)a_2] = \alpha a, \text{ onde } a \in A.$$

de modo que $z \in \alpha A$. Sendo assim, αA é convexo.

Exemplo 2.28 *Seja E um espaço normado. Então vale que $B(-b, r) = -B(b, r)$, para quaisquer $b \in E$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$.*

Pela definição de bola aberta e de multiplicação de um escalar por um conjunto convexo, temos:

$$B(-b, r) = \{x \in E; ||x - (-b)|| = ||x + b|| < r\}$$

e

$$-B(b, r) = \{x \in E; x = -y, y \in B(b, r)\}.$$

($\Rightarrow$) Tomando $x = -y \in B(-b, r)$, temos $||x + b|| = ||-y + b|| = ||b - y|| = ||y - b||$. Com isso temos que se $x \in B(-b, r)$, então $y \in B(b, r)$. Usando novamente da igualdade $x = -y$, obtemos $x \in -B(b, r)$.

($\Leftarrow$) Se $x \in -B(b, r)$, com $x = -y$, então $y \in B(b, r)$. Logo $||y - b|| < r$ e, como $d(y, b) = d(b, y)$, então temos $||y - b|| = ||b - y||$. Uma vez que $x = -y$ então $||b + x|| = ||x + b|| < r$.

Portanto, como $B(-b, r) \subset -B(b, r)$ e $-B(b, r) \subset B(-b, r)$ concluímos que $B(-b, r) = -B(b, r)$.

Proposição 2.21 *Seja E um espaço vetorial normado e A um conjunto convexo de E. Então $A + A = 2A$.*

Demonstração:

Note que, por definição, temos que $2A \subset A + A$, pois $2A = \{x \in E | x = 2y, y \in A\}$ e, como $x = 2y = y + y$, então $x \in A + A$. Por outro lado, se $x, y \in A$, pela convexidade de A, temos $z = \frac{1}{2}(x + y) \in A$. Logo

$$x + y = 2\left[\frac{1}{2}(x + y)\right] = 2z \in 2A.$$

Portanto, $A + A \subset 2A$ e, com isso, $A + A = 2A$.

□

Proposição 2.22 *Sejam E e F espaços vetoriais normados e, $T : E \to F$ uma transformação linear. Se A é um conjunto convexo de E, então $T(A)$ é um conjunto convexo de F.*

Demonstração:

Dados $T(x_1), T(x_2) \in T(A)$ com $x_1, x_2 \in A$ então, $t \in [0, 1]$, tem-se que $tx_1 + (1 - t)x_2 \in A$. Logo, da linearidade de T tem-se

$$tT(x_1) + (1 - t)T(x_2) = T(t(x_1) + (1 - t)t(x_2)) \in T(A).$$

Portanto $T(A)$ é convexo.

□

Proposição 2.23 *Seja E um espaço normado e A um convexo de E então $\overline{A}$ também é convexo.*

Demonstração:

Seja $x, y \in \overline{A}$, onde $x = \lim x_n$ e $y = \lim y_n$ com $x_n, y_n \in A$. Então

$$tx + (1 - t)y = \lim[tx_n + (1 - t)y_n]$$

e, portanto

$$tx + (1 - t)y \in \overline{A}$$

para todo $t \in [0, 1]$.

□

3 TEOREMA DE BAIRE E ALGUMAS APLICAÇÕES

O Teorema de Baire é relevante para inúmeras áreas matemáticas pois seu resultado acarreta na demonstração de vários teoremas. O teorema tem esse nome pois seu desenvolvimento foi feito pelo matemático René-Louis Baire na sua tese intitulada de "Sur les fonctions de variable réelles" (Sobre as funções de variáveis reais) em 1899.

Antes de demonstrar o Teorema de Baire apresentamos a definição de conjunto magro e também o Teorema de Cantor[1].

A demonstração do Teorema de Baire, enunciado e demonstrado a seguir, se encontra em (Lima, 2007).

A seguir, apresentaremos uma classe de conjuntos que não têm significância de um certo sentido no espaço métrico que os contém. É um conceito semelhante ao conjunto de medida nula que existe no Análise.

Definição 3.1 *Um subconjunto X de um espaço métrico M diz-se* ***magro*** *em M quando é uma reunião enumerável, $X = \cup X_n$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\overset{\circ}{\overline{X_n}} = \emptyset$.*

Observação 3.1 *Os conjuntos magros podem ser chamados de conjuntos de primeira categoria, mas essa terminologia ficou em desuso. Assim como os conjuntos não magros eram chamados de conjuntos de segunda categoria.*

Exemplo 3.1 *O conjunto $\mathbb{Q}$ é magro em $\mathbb{R}$. De fato, sabemos que o conjunto dos números racionais é enumerável , ou seja, $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$. Note que $\mathbb{Q}$ é uma reunião enumerável e para cada $x \in \mathbb{Q}$, tem-se $\overset{\circ}{\overline{\{x\}}} = \emptyset$.*

Exemplo 3.2 *O conjunto de Cantor K é um subconjunto fechado do intervalo $[0, 1]$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo. Retira-se do intervalo $[0, 1]$ seu terço médio aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Depois retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Sobrando $\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Em seguida, repete-se o procedimento de retirar os terço médio aberto desses quatro intervalos e assim continua repetindo o procedimento indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor. Agora, se indicarmos os intervalos abertos omitidos como $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$, teremos $K = [0, 1] - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, logo K é fechado em $[0, 1]$ e consequentemente em $\mathbb{R}$. Note que K não contém nenhum intervalo aberto logo $\overset{\circ}{K} = \emptyset$. Sendo assim, K é um fechado com interior vazio e portanto magro na reta $\mathbb{R}$.*

Teorema 3.1 (Teorema de Cantor) *Um espaço métrico M é completo se, e somente se, para toda sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ de subconjuntos fechados não vazios $F_n \subset M, \forall n \in \mathbb{N}$, com $\lim\limits_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$, existe um ponto $p \in M$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \{p\}$.*

[1]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (3 de março de 1845 – 6 de janeiro de 1918) foi um matemático alemão conhecido por ter elaborado a moderna teoria dos conjuntos.

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Temos, por hipótese, que M é completo e; seja (F_n) uma sequência como descrita no enunciado. Agora, como F_n é não vazio, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in F_n$. Note que (x_n) é uma sequência em M tal que $m, n > n_0$ tem-se que $x_m, x_n \in F_{n_0}$. Além disso, para todo $\varepsilon > 0$ existe um n_1 tal que diam$(F_{n_1}) < \varepsilon$, logo $m, n > n_1$ acarreta que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Com isso, a sequência (x_n) é uma sequência de Cauchy em M. Portanto, seja $p = \lim(x_n) \in M$. Dado um $z \in \mathbb{N}$, temos que $x_n \in F_z, \forall n \geq z$. Logo $p = \lim x_n \in \overline{F_z}$, para todo $z \in \mathbb{N}$ e, como F_z fechado, para todo $z \in \mathbb{N}$, então $p \in F_z$, para todo $z \in \mathbb{N}$; daí $p \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Note que, o fato de p ser o único elemento dessa interseção é garantida pois caso houvesse um ponto $q \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n, p \neq q$, teríamos que $d(p, q) \leq$ diam(F_n), para todo $n \in \mathbb{N}$, o que não é válido pois passando ao limite na desigualdade tem-se $\lim d(p, q) \leq \lim \text{diam}(F_n) = 0$ e como $p \neq q$ então $d(p, q) \neq 0$ assim como o seu limite.

($\Longleftarrow$) Por outro lado, temos por hipótese, que toda sequência decrescente de subconjuntos fechados não vazios cujos os diâmetros tendem a zero tem como interseção único ponto de M e, provaremos que M é completo. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Agora, tomemos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}, \forall n \in \mathbb{N}$; logo podemos afirmar que $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$. Note que $(\overline{X_n})$ é uma sequência decrescente de fechados não vazios. Além disso, temos $\lim\limits_{n\to\infty} \text{diam}\,(X_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \text{diam}\,(\overline{X_n}) = 0$ sendo que, a primeira igualdade ocorre por X_n ser fechado e a segunda igualdade porque a sequência é de Cauchy. Além disso, existe um $p \in M$ tal que $\cap \overline{X_n} = \{p\}$. Como $p \in \overline{X_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então pela Proposição 2.9 para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência (x_{n_k}) em X_n, a qual é subsequência de (x_n). Como (x_n) é de Cauchy, pela Proposição 2.13 temos $\lim x_n = p$ e; portanto M é completo.

$\square$

Teorema 3.2 (Teorema de Baire) *Seja M um espaço métrico completo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Todo conjunto magro em M tem interior vazio;*

2. *Se $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M e tem interior vazio, então $\overset{\circ}{F} = \emptyset$;*

3. *Se (A_n) é uma família enumerável de subconjuntos abertos e densos em M, então $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em M.*

Demonstração:

Inicialmente, demonstramos que as afirmações são realmente equivalentes.

$(1) \Rightarrow (2)$ Nossa hipótese é que todo conjunto magro em M tem interior vazio. Então, seja F um subconjunto magro de M. Por definição de conjunto magro, $F = \cup F_n$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\overset{\circ}{\overline{F_n}} = \emptyset$. Agora, supondo que F_n seja fechado, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\overline{F_n} = F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tendo vista que todo $\overset{\circ}{\overline{F_n}} = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$ então $\overset{\circ}{\overline{F_1}} \cup \overset{\circ}{\overline{F_2}} \cup \cdots = \emptyset$. Agora pela Proposição 2.5 tem-se $\overline{\overset{\circ}{F_1 \cup F_2 \cup \cdots}} = \emptyset$, ou seja, $\overset{\circ}{\overline{\cup F_n}} = \emptyset$. Como $\overline{F_n} = F_n$, então $\overset{\circ}{\cup F_n} = \emptyset$. Portanto, $\overset{\circ}{F} = \emptyset$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $F_n = {A_n}^c$, com A_n sendo denso e aberto em M. Agora, seja $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ e $\overset{\circ}{F} = \emptyset$ pela Proposição 2.7. Como $F_n = {A_n}^c$, então $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} {A_n}^c$. Logo, $\overset{\circ}{F} = \overset{\circ}{\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} {A_n}^c\right)} = \overset{\circ}{\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c}$. Tendo vista que, por hipótese, $\overset{\circ}{F} = \emptyset$ tem-se $\overset{\circ}{\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c} = \emptyset$ porém, pela a Proposição 2.7, concluímos que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em M.

$(3) \Rightarrow (1)$ Pela Proposição 2.7, temos $\overset{\circ}{\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c} = \emptyset$. O que implica que $\overset{\circ}{\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} {A_n}^c\right)} = \emptyset$.

Como A_n é aberto, então ${A_n}^c$ é fechado. Logo, pela Proposição 2.5, $\overline{\overset{\circ}{\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} {A_n}^c\right)}} = \emptyset$, ou seja, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} {A_n}^c$ é magro em M.

Agora provaremos o Teorema de Baire[2] demonstrando a terceira afirmação. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ subconjuntos abertos densos no espaço métrico completo M. Queremos mostrar que $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso; ou seja, pela Proposição 2.6, que toda bola aberta $B_1 = B(p_1, \varepsilon)$ em M contenha algum ponto de A.

Como A_1 é aberto e denso, então pela Proposição 2.6 temos que $B_1 \cap A_1$ também é aberto e não vazio. Logo, podemos tomar $B_2 = B(p_2, \frac{1}{2}\varepsilon)$ tal que $B_2 \subset B_1 \cap A_1$ e que também seu fêcho esteja nessa interseção, isto é, $\overline{B_2} \subset B_1 \cap A_1$. Agora, como A_2 é aberto e denso, $A_2 \cap B_2$ é aberto e não vazio. Logo, existe um $p_3 \in M$ tal que $B_3 = B(p_3, \frac{1}{3}\varepsilon) \subset A_2 \cap B_2$, com $\overline{B_3} \subset A_2 \cap B_2$. Utilizando do mesmo raciocínio, teremos a sequência $\overline{B_1} \supset \overline{B_2} \supset \ldots \supset \overline{B_n} \supset \ldots$, com $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \cap A_n$ e diam $(B_n) \to 0$.

Pelo o Teorema 3.1, existe um $x \in M$ tal que $\cap \overline{B_n} = \{x\}$. Note que na relação $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \cap A_n$ o ponto x pertence a todos os A_n e também a B_1. Portanto, $x \in B_1 \cap A$ como queríamos provar.

$\square$

O resultado a seguir é importante pois será utilizado nas aplicações desse capítulo.

Corolário 3.2.1 *Seja M um espaço métrico completo. Se $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M, então existe pelo menos um n tal que $\overset{\circ}{F_n} \neq \emptyset$.*

Demonstração:

De fato, se fosse $\overset{\circ}{F_n} = \emptyset$, para todo n, então satisfaria o Teorema de Baire. Logo a reunião dos F_n teria interior vazio em M, o que é um absurdo pois a reunião dos F_n é o próprio M.

$\square$

[2] René-Louis Baire (21 de janeiro de 1874 – 5 de julho de 1932) foi um matemático francês, notável por seus trabalhos sobre continuidade de funções, os números irracionais e o conceito de limite.

Observação 3.2 *(Lima, 2007, p.191) afirma que*

> *"O Teorema de Baire é um fato topológico: refere-se a abertos, fechados, fêchos e interiores. Portanto continua válido se substituirmos a métrica do espaço completo M por outra equivalente, mesmo que com isto se perca a completeza".*

3.1 Teorema de Banach-Steinhaus

O Teorema de Banach-Steinhaus, também chamado de Princípio de Limitação Uniforme, garante a existência de uma família de operadores lineares que seja uniformemente limitada. O teorema foi demonstrado em 1927 pelos matemáticos S. Banach e H. Steinhaus[3].

Segundo (Ciesielski, 2010) este Teorema é considerado um dos três pilares da Analise Funcional.

A demonstração desse teorema e dos próximos está em (Botelho, 2012).

Teorema 3.3 (Teorema de Banach-Steinhaus) *Sejam E e F espaços normados, em que E é completo e, seja $(T_i)_{i\in I}$ uma família de operadores lineares contínuos de E em F. Se para cada $x \in E$ existe $C_x < \infty$ tal que*

$$\sup_{i\in I} ||T_i(x)|| < C_x,$$

então existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{i\in I} ||T_i||_{\mathcal{L}(E,F)} < C.$$

Demonstração:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $A_n = \left\{x \in E; \sup_{i\in I} ||T_i(x)|| \leq n\right\}$; ou seja, $A_n = \{x \in E; ||T_i(x)|| \leq n, \forall i \in I\}$. Colocando A_n como interseções temos $A_n = \bigcap_{i\in I}\{x \in E; ||T_i(x)|| \leq n\}$.

Note que se trata de interseções de fechados pois tendo vista que T_i é contínuo por hipótese, então $\{x \in E; ||T_i(x)|| \leq n\} = (||.|| \circ T_i)^{-1}([0, n])$ é fechado pela Proposição 2.17.

Provemos agora que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. De fato, é claro que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset E$ pois $A_n \subset E$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, dado $x \in E$, como $\sup_{i\in I} ||T_i(x)|| < C_x$, tomando $n > C_x$ segue que $\sup_{i\in I} ||T_i(x)|| < n$, o que implica que $x \in A_n$. Portanto, $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Logo, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Pelo Teorema de Baire podemos afirmar que algum A_n possui interior não vazio. Considerando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que A_{n_0} tenha interior não vazio, sejam $a \in \overset{\circ}{A}_{n_0}$ e $r > 0$ tais que

$$B(a, r) = \{x \in E; ||x - a|| \leq r\} \subseteq \overset{\circ}{A}_{n_0}.$$

Seja $y \in E$ com $||y|| \leq 1$. Se $x = a + ry$, então $||x - a|| = ||ry|| \leq r$, portanto, $x \in B(a, r) \subset \overset{\circ}{A}_{n_0}$.

[3]Wladyslaw Hugo Dyonizy Steinhaus (14 de janeiro de 1887 — 25 de fevereiro de 1972) foi um matemático polonês devotado à análise funcional.

Pela linearidade de T_i e usando a desigualdade triangular, temos

$$||T_i(x-a)|| = ||T_i(x) - T_i(a)|| \leq ||T_i(x)|| + ||T_i(a)|| \leq n_0 + n_0 = 2n_0, \forall i \in I.$$

Logo, $||T_i(ry)|| = ||T_i(x-a)|| \leq 2n_0$, ou seja,$||rT_i(y)|| \leq 2n_0$. Daí,

$$||T_i(y)|| \leq \frac{2n_0}{|r|}, \forall i \in I \text{ e } \forall y \in E, \text{com } ||y|| \leq 1.$$

Desse modo, $\sup\limits_{i\in I}\{\sup\limits_{y\in B(0,1)}\{||T_i(y)||\}\} \leq \frac{2n_0}{r}$ o que pela Proposição 2.20 é equivalente a $\sup\limits_{i\in I}||T_i|| \leq \frac{2n_0}{r}$. Sendo assim, tomando $C = \frac{2n_0}{r}$ concluímos a demonstração.

$\square$

3.2 Teorema da Aplicação Aberta

O Teorema da Aplicação Aberta estabelece a possibilidade de um operador linear limitado ser aberto. Este teorema foi publicado em 1932 pelo matemático Stefan Banach[4] no livro "Théorie des Opérations Linéaires"(Teoria das Operações Lineares).

Para a demonstração do Teorema da Aplicação Aberta é necessário o seguinte lema.

Lema 3.4 *Sejam E e F espaços normados, com E completo e, $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Se existirem $R, r > 0$ tais que*

$$\overline{T(B_E(0,R))} \supset B_F(0,r)$$

então

$$T(B_E(0,R)) \supset B_F\left(0, \frac{r}{2}\right).$$

Demonstração:

Por hipótese temos $\overline{T(B_E(0,R))} \supset B_F(0,r)$. Sabendo que uma bola aberta é convexa e que a aplicação T de uma bola aberta continua sendo convexa, o que é garantido pelo o Exemplo 2.27 e pela Proposição 2.22, respectivamente; além disso, pela Definição 2.27 e Proposição 2.23, temos $a\overline{M} = \overline{aM}$, com $a \in \mathbb{R}_+$, podemos afirmar que $\overline{T(B_E(0,aR))} \supset B_F(0,ar), \forall a \in \mathbb{R}_+$.

Com isso, tomando $a = \frac{1}{2}$ resulta $\overline{T\left(B_E\left(0, \frac{R}{2}\right)\right)} \supset B_F\left(0, \frac{r}{2}\right)$. Logo, dado $y \in B_F(0, \frac{r}{2})$ então $y \in \overline{T\left(B_E\left(0, \frac{R}{2}\right)\right)}$. Note que se $y \in \overline{T\left(B_E\left(0, \frac{R}{2}\right)\right)}$ implica que $y \in T\left(B_E\left(0, \frac{R}{2}\right)\right)$, sendo assim existe um $x_1 \in B_E\left(0, \frac{R}{2}\right)$ tal que $||y - Tx_1|| < \frac{r}{4}$; ou seja, $y \in B_E\left(0, \frac{R}{4}\right)$. Agora tomando $a = \frac{1}{4}$, temos que existe um $x_2 \in B_E\left(0, \frac{R}{4}\right)$ tal que $||(y - Tx_1) - Tx_2|| < \frac{r}{8}$.

Utilizando do mesmo raciocínio, por indução, temos que para cada $m = 1, 2, ..., n$ existe um $x_m \in B\left(0, \frac{r}{2^m}\right)$ tal que

$$||y - Tx_1 - \ldots - Tx_n|| < \frac{r}{2^{n+1}}. \tag{3.1}$$

[4]Stefan Banach (30 de março de 1892 — 31 de agosto de 1945) foi um matemático polonês e sua principal contribuição foi a moderna análise funcional.

Assim, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{2^n} = R$. Como E é completo, por hipótese e pela Definição 2.19, então (x_n) converge para um $x \in E$. Portanto, $\|x\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = R$.

Com isso, note que $x \in B_E(0, R)$ e fazendo $n \to \infty$ em (3.1) temos $\|y - Tx\| \leq 0$, isto é, $y = Tx$. Logo, temos $y \in T(B_E(0, R))$ o que conclui a demonstração.

□

Antes do Teorema da Aplicação Aberta é necessário definir o que é uma aplicação aberta.

Definição 3.2 *Sejam E e F espaços métricos. Se diz que uma aplicação $f : E \to F$ é aberta se a imagem de todo aberto de X por f é um aberto de Y.*

Observação 3.3 *Muito semelhante a Proposição 2.17 entretanto tratando-se da continuidade de uma função. Onde diz que a imagem inversa por f de todo aberto de N é um aberto de M.*

Teorema 3.5 (Teorema da Aplicação Aberta) *Sejam E e F espaços vetoriais normados completos e $T : E \to F$ um operador linear, contínuo e sobrejetivo. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, se T é bijetiva, então T^{-1} é contínua.*

Demonstração:

Tomemos $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_E(0, n)$, como T é sobrejetivo, então $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_E(0, n))$. Agora, tendo vista que se A é convexo, então $\overline{A}$ também é. Temos que $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_E(0, n))}$.

Pelo o Teorema de Baire, existe um n_0 natural tal que $F = \overline{T(B_E(0, n_0))}$ tem interior não-vazio. Assim, existe uma bola de centro $p \in F$ e raio $\varepsilon > 0$, tal que $B_F(p, \varepsilon) \subset \overline{T(B_E(0, n_0))}$.

Agora utilizando do Exemplo 2.28, tem-se que $\overline{T(B_E(0, n_0))} = -\overline{T(B_E(0, n_0))}$. Daí $B_F(-p, \varepsilon) = -B_F(p, \varepsilon) \subset -\overline{T(B_E(0, n_0))} = \overline{T(B_E(0, n_0))}$.

Podemos afirmar que se $x = (b + \frac{1}{2}x) + (-b + \frac{1}{2}x)$ então

$$B_F(0, 2r) \subset B_F(b, r) + B_F(-b, r) \subset \overline{T(B_E(0, n_0))} + \overline{T(B_E(0, n_0))}.$$

Como $\overline{T(B_E(0, n_0))}$ é convexo, pela Proposição 2.21 temos

$$\overline{T(B_E(0, n_0))} + \overline{T(B_E(0, n_0))} = 2\overline{T(B_E(0, n_0))}.$$

Com isso, obtemos $B_F(0, 2r) \subset 2\overline{T(B_E(0, n_0))}$; ou seja, $B_F(0, r) \subset \overline{T(B_E(0, n_0))}$.

Utilizando o Lema 3.4 temos $T(B_E(0, n_0)) \supset B_F(0, \beta)$ para $\beta = \frac{r}{2}$. Sabendo que é válido $T(B_E(0, cn_0)) \supset B_F(0, c\beta)$ para $c \in \mathbb{R}_+$. Logo, $T(B_E(x, cn_0)) \supset B_F(Tx, c\beta)$ para todo $x \in E$ e todo escalar c.

Seja $B_E(x, cn_0) = x + B_E(0, cn_0)$ para toda bola em E, logo aplicando T temos $T(B_E(x, cn_0)) = Tx + T(B_E(0, cn_0)) \supset Tx + B_F(0, c\rho) = B_F(T_x, c\beta)$.

Para concluir a demonstração, basta provar que $T(U)$ é aberto em F para cada U aberto em E. Sejam $x \in U$ e $c > 0$ tais que $B_E(x, cn_0) \subset U$. Portanto temos que $T(U) \supset T(B_E(x, cn_0)) \supset B_F(Tx, c\beta)$ e $T(U)$ é aberto.

□

3.3 Teorema do Gráfico Fechado

Assim como o Teorema da Aplicação Aberta, o Teorema do Gráfico fechado foi publicado em 1932 no livro "Théorie des Opérations Linéaires" por Stefan Banach. O interessante desse teorema é que ele é necessário para que um operador linear fechado em um espaço completo seja limitado.

Antes de apresentar o Teorema de Gráfico Fechado se faz necessário enunciar duas definições.

Definição 3.3 *Sejam E e F espaços normados e $T : E \to F$ um operador linear. Definimos o gráfico de T como o conjunto*

$$G(T) = \{(x, y) : x \in E \text{ e } y = T(x)\} = \{(x, T(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F.$$

Definição 3.4 *Se $G(T)$ é um subespaço fechado em $E \times F$, dizemos que T é uma aplicação fechada.*

Teorema 3.6 (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam E e F espaços vetoriais normados completos e $T : E \to F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado em $E \times F$.*

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Seja T contínuo. Sendo $f : E \times F \to \mathbb{N}, f(x, y) = ||y - T(x)||$, pela Definição 3.3 temos $G(T) = \{(x, y) \in E \times F; ||y - T(x)|| = 0\}$ e que $G(T) = f^{-1}(\{0\})$. Como T é contínuo por hipótese, então f é contínua pois f é composta de funções contínuas. E f sendo contínuo, $f^{-1}(\{0\})$ é fechado pois é imagem inversa através da função contínua f do fechado $\{0\}$, como diz a Proposição 2.17.

($\Longleftarrow$) Agora sendo $G(T)$ fechado e tomando $||(x, y)|| = ||x|| + ||y||$ como sendo a norma no espaço $E \times F$. Seja a seguinte aplicação $\pi : G(T) \to E$ definida por $\pi(x, T(x)) = x$.

Note que π é contínua pois $||\pi(x, T(x))|| = ||x|| \leq ||x|| + ||T(x)|| = ||(x, T(x))||$ e a Proposição 2.19 nos garante a continuidade.

Por fim, utilizando o Teorema da Aplicação Aberta, π^{-1} é um operador contínuo. Assim existe $C > 0$ tal que $||\pi^{-1}(x)|| = ||(x, T(x))|| \leq C||x||$ para todo $x \in E$. Portanto,

$$||T(x)|| \leq ||T(x)|| + ||x|| = ||(x, T(x))|| \leq C||x||$$

para todo $x \in E$. Logo, T é contínuo.

□

4 CONCLUSÃO

O trabalho está dividido em duas partes. Na primeira parte foram apresentados todos os conceitos, propriedades e definições exigidas na segunda parte. Nesta o objetivo principal do trabalho foi alcançado com a demonstração do Teorema de Baire e a explicação de sua importância em algumas aplicações.

Dentro dessa primeira parte foram vistas definições que apesar de simples, têm um papel importante para a compreensão do assunto como um todo. Por exemplo, a definição de distância foi uma das primeiras definições mas esteve presente em todo o trabalho, como na definição de bolas, funções contínuas e entre outras. Em especial, as noções de Topologia foram essenciais pois o Teorema de Baire refere-se a abertos, fechados, fêchos e interiores.

Na segunda parte, demonstramos o Teorema de Baire e, com ele, provamos os outros três teoremas. No Teorema de Banach-Steinhaus, o corolário do Teorema de Baire foi utilizado para tomar um ponto numa bola tal que esse ponto também estivesse no interior de um subconjunto e, por meio da linearidade e desigualdade triangular, além de outros resultados, foi demonstrado o Teorema de Banach-Steinhaus.

No Teorema da Aplicação Aberta o corolário do Teorema Baire foi utilizado para que num determinado conjunto fechado contivesse uma bola qualquer e, através de resultados da convexidade de conjuntos, foi possível demonstrar o Teorema da Aplicação Aberta.

No caso do Teorema do Gráfico Fechado, o resultado foi usado de forma indireta pois foi utilizado o Teorema da Aplicação Aberta para mostrar que a transformação linear era contínua.

Como já relatado, a escolha do tema foi feita após um estudo realizado no PIBIC e, além do tema ser importante e abrangente, ele possibilita o aprofundamento tanto na Topologia como também Análise. Tendo esse trabalho como ponto de partida para futuras pesquisas.

REFERÊNCIAS

Botelho, G. (2012). *Fundamentos de analise funcional*. SBM, Rio de Janeiro.

Ciesielski, Krzysztof; Moslehian, M. (2010). Some remarks on the history of functional analysis. *Annalsof Functional Analysis*.

Domingues, H. H. (1982). *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*. Atual Editora, Editora da Universidade de São Paulo.

Lima, E. L. (2007). *Espacos Métricos*. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro.

Lima, E. L. (2010). *Curso de Análise*. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: Impa.

ANEXO A- EXISTÊNCIA DE UM RACIONAL E IRRACIONAL ENTRE DOIS REAIS

Teorema 4.1 (Teorema de Arquimedes) *Dado $x > 0$ em $\mathbb{R}$, então para qualquer $y \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $nx > y$.*

Demonstração:

Suponhamos $nx \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí $n \leq \frac{y}{x}$ para todos os números naturais n e o conjunto $\mathbb{N}$ seria limitado superiormente. Este absurdo garante então o teorema de Arquimedes.

$\square$

Proposição 4.1 *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se $a < b$, então existe um número racional r tal que $a < r < b$.*

Demonstração:

Vamos supor inicialmente $a > 0$. Devido ao Teorema 4.1 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(b-a) > 1$, ou seja, $nb > na + 1$. Consideremos o conjunto $L = \{m \in \mathbb{N}; m > na\}$. Devido novamente ao Teorema 4.1 o conjunto L não é vazio e como $L \subset \mathbb{N}$ existe o mínimo de L. Indicando por p esse mínimo temos $p > na$ e $p - 1 \leq na$. Assim:

$$nb > na + 1 \geq p > na$$

e daí $a < \frac{p}{n} < b$. O número $r = \frac{p}{n}$ é racional e satisfaz o exigido.

Se $a = 0$, então $0 < \frac{b}{2} < b$ e tomando $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{b}{2} < r < b$ estará concluída a demonstração neste caso.

Se $a < 0 < b$ recaímos diretamente em considerações anteriores. Se $a < 0 = b$ ou $a < b < 0$, tomando um número racional r tal que $|b| < r < |a|$, então

$$a < -r < b.$$

$\square$

Proposição 4.2 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x < y$. Então, existe $z \in \mathbb{I}$ tal que $x < z < y$.*

Demonstração:

Como x, y são reais, considere os números reais: $\frac{x}{\sqrt{2}}$ e $\frac{y}{\sqrt{2}}$. Como $x < y$, segue que $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$. Pela Proposição 4.1, segue que existe um $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}},$$

e então

$$x < r\sqrt{2} < y,$$

onde $z = r\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, como queríamos mostrar.

$\square$