



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS I  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RICARDO ARAÚJO LEITE VIANA

INTRODUZINDO OS CONCEITOS BÁSICOS DO CÁLCULO  
DIFERENCIAL NO ENSINO MÉDIO UMA PROPOSTA POSSÍVEL

Campina Grande  
2021

Ricardo Araújo Leite Viana

**INTRODUZINDO OS CONCEITOS BÁSICOS DO CÁLCULO  
DIFERENCIAL NO ENSINO MÉDIO UMA PROPOSTA POSSÍVEL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**Orientadora:** Prof. Ma. Katia Suzana Medeiros Graciano

**Campina Grande  
2021**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

V614i Viana, Ricardo Araújo Leite.  
Introduzindo os conceitos básicos do cálculo diferencial no ensino médio [manuscrito] : uma proposta possível / Ricardo Araujo Leite Viana. - 2021.  
95 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.

"Orientação : Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano , Departamento de Matemática - CCT."

1. Cálculo diferencial. 2. Noções intuitivas. 3. Ensino médio. I. Título

21. ed. CDD 515.33

RICARDO ARAUJO LEITE VIANA

**INTRODUZINDO OS CONCEITOS BÁSICOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL  
NO ENSINO MÉDIO UMA PROPOSTA POSSÍVEL**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Departamento de  
Matemática do Centro de Ciência e  
Tecnologia da Universidade Estadual  
da Paraíba, como requisito parcial à  
obtenção do título de Licenciado em  
Matemática.

Aprovada em: 18/10/2021.

**BANCA EXAMINADORA**

*Katia Suzana Medeiros Graciano*

Profa. Ma. Katia Suzana Medeiros Graciano (Orientadora)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

*Castor da Paz Filho*

Prof. Me. Castor da Paz Filho  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

*José Hélio Henrique de Lacerda*

Prof. Dm. José Hélio Henrique de Lacerda  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Este trabalho é dedicado aos grandes amores da minha vida, minha mãe Maria Saete, minha esposa Hilaiana Viana e o meu filho Enrico Emanuel que sempre me apoiaram e incentivaram a não desistir dos meus propósitos.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sempre estar presente em minha vida, me fortalecendo e me capacitando em todos os momentos, e por ter me concedido mais uma vitória.

A minha esposa Hilaiana Viana e meu filho Enrico Emanuel, por todo apoio, suporte e incentivo, pela compreensão de muitas ausências, que necessitei para concluir esta jornada. Bem como todos os meus familiares que também fizeram parte dessa trajetória.

A minha mãe por todo amor e carinho dedicado durante toda minha vida, e principalmente pelas orações de sempre.

Agradeço muito a minha orientadora, Prof. Ma. Katia Suzana Medeiros Graciano, por ter aceitado o convite para orientar meu trabalho, e por toda confiança em mim depositada.

Aos professores da UEPB que contribuíram para minha formação acadêmica, que com dedicação e amor, compartilharam um pouco do seu conhecimento. Em especial os professores Aldo Trajano, José Elias, José Ginaldo, José Hélio, Weiller Felipe.

Aos meus amigos de graduação que me ajudaram a prosseguir mesmo nos momentos mais difíceis, que estarão para sempre em minha memória: Pedro Amorim, Paulo Ricardo e Isis Lima.

### **Epígrafe**

”A gravidade explica os movimentos dos planetas, mas não pode explicar quem colocou os planetas em movimento. Deus governa todas as coisas e sabe tudo que é ou que pode ser feito.”

*Isaac Newton*

## RESUMO

O cálculo diferencial e integral é um das ferramentas matemáticas mais importantes na história da humanidade. Sua descoberta e desenvolvimento ao longo dos tempos tem contribuído para a evolução de diversas outras ciências. O presente trabalho tem o objetivo de ressaltar essa importante parcela da história da matemática, além de discutir a possibilidade de ser implementada a introdução das noções intuitivas do cálculo no Ensino Médio, visto que o seu ensino tem se restringido a cursos da Educação Superior. Em diversos estudos tem se destacado algumas dificuldades dos cursos de cálculo do Ensino Superior, tais como: o alto índice de reprovações e evasão dos alunos desta disciplina, a proposta de incluir os fundamentos do cálculo no Ensino Médio seria uma forma de mitigar estes problemas. Este trabalho trata-se de uma pesquisa bibliográfica das noções intuitivas de limites e derivadas, e o estudo das aplicações destes conceitos em funções de 1º e 2º grau, fazendo uma contextualização de problemas do cotidiano de diversas disciplinas e conteúdos da educação básica, com o objetivo de explorar sua aplicabilidade em sala de aula. No final é apresentado algumas propostas de abordagens de aplicações de limites e derivadas, concluindo de forma positiva a possibilidade de introdução destes conceitos no Ensino Médio de forma satisfatória.

**Palavras-chave:** Cálculo Diferencial. Noções Intuitiva. Ensino Médio.



## ABSTRACT

Differential and integral calculus is one of the most important mathematical tools in history of mankind. Its discovery and development over time has contributed to the evolution of several other sciences. The present work has the objective of highlighting this important part of the history of mathematics, in addition to discussing the possibility of implementing the introduction of the intuitive notions of calculus in High School, since its teaching has been restricted to Higher Education courses. In several studies, some difficulties of higher education calculus courses have been highlighted, such as: the high rate of failure and evasion of students in this discipline, the proposal to include the fundamentals of calculus in High School would be a way to mitigate these problems. This work is a bibliographical research of the intuitive notions of limits and derivatives, and the study of the applications of these concepts in 1st and 2nd degree functions, making a contextualization of everyday problems in different disciplines and contents of the basic education, with the aim of exploring its applicability in the classroom. At the end, some proposals of approaches to the application of limits and derivatives are presented, concluding in a positive way the possibility of introducing these concepts in High School in a satisfactory way.

**Keywords:** Differential calculation. Intuitive Notions. High school.

# Lista de Figuras

1	Paradoxo da Dicotomia . . . . .	16
2	Paradoxo da Flecha . . . . .	16
3	Área do segmento de parábola . . . . .	18
4	Função $f(x)$ definida no intervalo aberto contendo $a$ . . . . .	28
5	Gráfico da função $f(x) = x - 2$ . . . . .	30
6	Gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x - 1$ . . . . .	31
7	Gráfico da função $f(x) =  x - 1 $ . . . . .	32
8	Gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ . . . . .	33
9	Função contínua . . . . .	34
10	Função descontínua . . . . .	34
11	Gráfico da função $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{Para } x < 2 \\ x - 2, & \text{Para } x \geq 2 \end{cases}$ . . . . .	35
12	Gráfico da função do exemplo 7 . . . . .	37
13	Gráfico da função $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ . . . . .	41
14	Gráfico da função $f(x) = \frac{2x - 5}{x + 8}$ . . . . .	43
15	Gráfico da função $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{4x^2 - 2}$ . . . . .	44
16	Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}$ . . . . .	45
17	Gráfico da declividade de uma reta em relação ao eixo das abscissas . . . . .	51
18	Gráfico da reta secante a curva . . . . .	52
19	Gráfico da variação da inclinação da reta $r$ . . . . .	53
20	Gráfico da função $y = x^2 - 2x + 1$ e reta tangente $m(x_0) = 2x_0 - 2$ . . . . .	55
21	Gráfico da função $y = 2x^2 + 3$ e reta tangente em $P(1,5)$ . . . . .	56
22	Gráfico da função $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{se } x < 2 \\ 7 - x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ . . . . .	59
23	Círculo dividido em quatro partes iguais . . . . .	66
24	Círculo dividido em quatro partes iguais . . . . .	66
25	Círculo dividido em diversas partes iguais . . . . .	67
26	Círculo dividido em infinitas partes iguais . . . . .	67
27	Cálculo da circunferência a partir do retângulo . . . . .	67

28	Polígonos inscritos na circunferência . . . . .	68
29	Polígonos inscritos se aproximando da área da circunferência . . . . .	68
30	Divisão sucessiva de um quadrado . . . . .	69
31	Chapa metálica . . . . .	69
32	Ponto máximo e ponto mínimo de uma função do 2 <sup>o</sup> grau . . . . .	73
33	Gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ . . . . .	74
34	Máximos e Mínimos de uma função qualquer . . . . .	74
35	Gráfico da função $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$ . . . . .	77
36	Gráfico da função $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 - 1$ . . . . .	78
37	Caixa de alumínio . . . . .	80
38	Gráfico da função $V(x) = (20 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot x$ . . . . .	82
39	Lata cilíndrica . . . . .	82
40	Distância percorrida até o barco . . . . .	85
41	Figura geométrica que representa o percurso . . . . .	85
42	Gráfico da função $T_t(x) = \frac{1}{10} \cdot (8 - 2x + 5\sqrt{x^2 + 9})$ . . . . .	89

# Lista de Tabelas

1	Função $f(x) = (x - 2)$ para valores de $x$ menores que 3 . . . . .	29
2	Função $f(x) = (x - 2)$ para valores de $x$ maiores que 3 . . . . .	30
3	Função $f(x) = (x^2 + 2x - 1)$ para valores de $x$ menores que 1 . . . . .	30
4	Função $f(x) = (x^2 + 2x - 1)$ para valores de $x$ maiores que 1 . . . . .	30
5	Função $f(x) =  x - 1 $ para valores de $x$ menores que 1 . . . . .	31
6	Função $f(x) =  x - 1 $ para valores de $x$ maiores que 1 . . . . .	31
7	Função $f(x) = \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}\right)$ para valores de $x$ menores que 2 . . . . .	33
8	Função $f(x) = \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}\right)$ para valores de $x$ maiores que 2 . . . . .	33
9	Função $g(x)$ para valores de $x$ menores que 2 . . . . .	36
10	Função $g(x)$ para valores de $x$ maiores que 2 . . . . .	36
11	Função $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ para valores de $x$ positivos . . . . .	40
12	Função $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ para valores de $x$ negativos . . . . .	40
13	Função $f(x) = \frac{2x - 5}{x + 8}$ para valores de $x$ tendendo a $+\infty$ . . . . .	42
14	Função $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{4x^2 - 2}$ para valores de $x$ tendendo a $-\infty$ . . . . .	44
15	Função $f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}$ para valores de $x \rightarrow -1^-$ . . . . .	45
16	Função $f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}$ para valores de $x \rightarrow -1^+$ . . . . .	45
17	Varição do espaço percorrido pelo tempo . . . . .	48
18	Varição do espaço percorrido pelo tempo no intervalo de 0 a 1 . . . . .	49
19	Varição do espaço percorrido pelo tempo no intervalo entre 0,8 a 1,1 . . . . .	49
20	Valor da Área da chapa de acordo com a expansão de $x$ . . . . .	70
21	Valor da Área da chapa de acordo com a retração de $x$ . . . . .	70

## SUMÁRIO

	Página
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> <span style="float: right;"><b>13</b></span>
<b>2</b>	<b>UM PANORAMA HISTÓRICO DO CÁLCULO</b> <span style="float: right;"><b>15</b></span>
<b>2.1</b>	<b>O CÁLCULO NA ANTIGUIDADE</b> . . . . . 15
2.1.1	MÉTODO DA EXAUSTÃO . . . . . 17
<b>2.2</b>	<b>A EVOLUÇÃO DO CÁLCULO A PARTIR DO SÉCULO XVII</b> . 18
<b>2.3</b>	<b>ISAAC NEWTON X GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ</b> . 19
2.3.1	Isaac Newton (1642– 1727) . . . . . 19
2.3.2	Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) . . . . . 20
2.3.3	A POLÊMICA PATERNIDADE DO CÁLCULO . . . . . 21
<b>2.4</b>	<b>IDADE CONTEMPORÂNEA</b> . . . . . 23
<b>2.5</b>	<b>O ENSINO DE CÁLCULO NO BRASIL</b> . . . . . 24
<b>2.6</b>	<b>É POSSÍVEL INTRODUIR O CONTEÚDO DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO?</b> . . . . . 25
<b>3</b>	<b>LIMITE</b> <span style="float: right;"><b>28</b></span>
<b>3.1</b>	<b>DEFINIÇÃO FORMAL</b> . . . . . 28
<b>3.2</b>	<b>NOÇÃO INTUITIVA</b> . . . . . 28
3.2.1	CONTINUIDADE . . . . . 33
3.2.2	LIMITES LATERAIS . . . . . 35
3.2.3	PROPRIEDADES DE LIMITES . . . . . 38
<b>3.3</b>	<b>LIMITES NO INFINITO</b> . . . . . 40
<b>3.4</b>	<b>LIMITE INFINITO</b> . . . . . 44
<b>4</b>	<b>DERIVADA</b> <span style="float: right;"><b>47</b></span>
<b>4.1</b>	<b>DEFINIÇÃO FORMAL</b> . . . . . 47
<b>4.2</b>	<b>VELOCIDADE E ACELERAÇÃO</b> . . . . . 47
4.2.1	VELOCIDADE ESCALAR INSTANTÂNEA . . . . . 48
4.2.2	ACELERAÇÃO ESCALAR INSTANTÂNEA . . . . . 50
4.2.3	TAXA DE VARIAÇÃO FUNÇÃO DE 1º GRAU OU COEFICI- ENTE ANGULAR DA RETA . . . . . 51
4.2.4	A RETA TANGENTE (INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA) . . 52
4.2.5	DERIVADA DE UMA FUNÇÃO . . . . . 56
4.2.6	CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DERIVÁVEIS . . . . . 59
4.2.7	REGRAS DE DERIVAÇÃO . . . . . 60
4.2.8	DERIVADA DE UMA CONSTANTE . . . . . 60

4.2.9	DERIVADA DE UMA POTÊNCIA . . . . .	60
4.2.10	DERIVADA DO PRODUTO DE UMA CONSTANTE POR UMA FUNÇÃO . . . . .	61
4.2.11	DERIVADA DA SOMA . . . . .	61
4.2.12	DERIVADO DO PRODUTO DE DUAS FUNÇÕES . . . . .	61
4.2.13	DERIVADA DE UM QUOCIENTE DE FUNÇÕES . . . . .	62
4.3	FUNÇÃO COMPOSTA . . . . .	62
4.3.1	REGRA DA CADEIA . . . . .	63
5	APLICAÇÕES . . . . .	66
5.1	APLICAÇÕES DE LIMITES . . . . .	66
5.2	APLICAÇÕES DE DERIVADAS . . . . .	73
5.2.1	PONTO MÁXIMO E PONTO MÍNIMO DE UMA FUNÇÃO DO 2º GRAU . . . . .	73
5.2.2	MÁXIMOS E MÍNIMOS DE UMA FUNÇÃO QUALQUER (TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA) . . . . .	74
5.2.3	CRITÉRIO DA PRIMEIRA DERIVADA . . . . .	75
5.2.4	TESTE DA SEGUNDA DERIVADA . . . . .	77
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	93
	REFERÊNCIAS . . . . .	94

## 1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho faremos um pesquisa bibliográfica onde analisaremos algumas possibilidades de abordagem do Cálculo Diferencial no Ensino Médio de maneira intuitiva, contextualiza e interdisciplinar, aprofundando a aplicabilidade dos conceitos do cálculo principalmente em problemas já trabalhados na educação básica.

Não nos surpreende que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral tem sido um desafio para os alunos do Ensino Superior. Não podemos deixar de ressaltar o nível de dificuldade que os alunos enfrentam ao iniciarem a disciplina, geralmente no primeiro período dos cursos de exatas, pois muitas destas dificuldades são resultados de deficiências trazidas do início de sua vida acadêmica, isto é, desde o Ensino Básico. Com isso causando inúmeras falhas para serem corrigidas no Ensino Superior, provocando assim altos índices de reprovações e evasões na disciplina.

Isto nos leva a questionar, quais as origens e os fatores que contribuem para estas dificuldades? O que poderíamos fazer para mitigar tais deficiências? Em resposta para tais questionamentos muitos pesquisadores sugerem o ensino de cálculo já no Ensino Médio, com o objetivo de facilitar o entendimento do conteúdo além de sua aplicabilidade na resolução de problemas. O Professor Nílson José Machado, da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, autor de vários livros didáticos e paradidáticos afirma que:

“Até hoje, no Brasil e no mundo, quase todas as tentativas de ensinar cálculo na escola básica falharam. Tais fracassos não deveriam nos surpreender, pois essas tentativas não passaram de uma antecipação do modo como o cálculo é ensinado na universidade, e o problema é que nem na universidade o curso de introdução ao cálculo funciona bem. Como poderia funcionar bem no ensino médio?” (Entrevista Blog Imaginário Puro, 28/Outubro/2015)

Então não seria uma contradição? Se no Ensino Superior o aluno vai mal no curso de cálculo, como poderá ir bem num curso de introdução ao cálculo no ensino médio, quando ele sabe menos? O professor Machado acredita que o melhor jeito de corrigir esse problema é justamente no Ensino Médio, onde o estudante conheceria as ideias mais importantes do cálculo por meio tão somente de funções simples, especialmente as funções polinomiais. Pretendemos neste trabalho, abordar as questões e aplicações basicamente com funções polinomiais, para facilitar assim a compreensão dos conceitos básicos de limites e derivadas. Demonstrar que um estudante com conhecimentos das principais ideias do cálculo, saberá usá-las para, por exemplo, esboçar o gráfico de funções polinomiais. Mostrar que o estudante conhecendo as principais ideias intuitivas do cálculo no Ensino Médio terá os requisitos necessários para desenvolver ideias mais elaboradas. Salientar que o mesmo sabendo empregá-las no estudo das funções polinomiais, estará apto para se sair bem no curso universitário de introdução ao cálculo.

O trabalho está dividido em seis capítulos, da seguinte forma:

O capítulo 2, é dedicado a um panorama histórico do desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral ao longo do tempo, no capítulo 3 é iniciado a fundamentação teórica com as definições formais e intuitivas de Limites, com uso de construções de tabelas e gráficos de funções do 1° e 2° grau.

O capítulo 4, é dado continuidade a fundamentação teórica com a definição de Derivadas, associando aos conceitos de taxa de variação e relacionando-os com a teoria de velocidade e aceleração instantânea, no capítulo 5 temos algumas proposta de abordagens das aplicações de limites e derivadas em problemas já trabalhados naturalmente no Ensino Médio. O capítulo 6 é apresentada a conclusão do trabalho.



## 2 UM PANORAMA HISTÓRICO DO CÁLCULO

A história de uma forma geral, tem um papel fundamental em nossas vidas, através dela conseguimos compreender a evolução de tudo que encontramos a nossa volta, com a matemática não seria diferente, com o estudo da História da Matemática se pode analisar a construção das noções básicas dos conceitos matemáticos, com isso o aluno revive suas descobertas e aumenta a sua compreensão do conteúdo sem a necessidade de memorização de suas definições, assumindo assim um papel fundamental no ensino aprendizagem da matemática. Discorreremos a seguir alguns fatos históricos que contribuíram para a descoberta e desenvolvimento do Cálculo no mundo. É inegável a contribuição do Cálculo Diferencial e Integral no desenvolvimento humano e nas descobertas que influenciaram e ainda influenciam diretamente na vida das pessoas, se tornando assim uma das mais importantes criações matemáticas de todos os tempos, contribuindo com várias áreas do conhecimento, tais como: a física, química, biologia, estatística entre outras. Newton e Leibniz frequentemente são citados como os inventores do Cálculo Diferencial e Integral. Entretanto, alguns dos problemas que deram origem ao estudo das ideias centrais do cálculo foram desenvolvidos por alguns matemáticos que viveram antes de Newton e Leibniz. Abordaremos neste capítulo o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral desde os primeiros problemas que deram origem ao seu estudo até os dias atuais.

### 2.1 O CÁLCULO NA ANTIGUIDADE

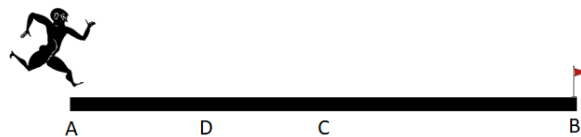
Neste período não tivemos grandes avanços no Cálculo, essa época foi marcada por algumas ideias que serviram como ponto de partida para a formação de alguns conceitos utilizados posteriormente, como por exemplo, as curvas, os infinitesimais, tangentes e o método da exaustão, sendo assim introduzidas algumas ideias do cálculo integral, embora não tenha havido um desenvolvimento de forma rigorosa e sistemática. O Cálculo é resultante de um longo processo de desenvolvimento, iniciado com a geometria grega, com intuito de estabelecer áreas de figuras com formas irregulares, volumes de sólidos e o estudo do movimento dos corpos e de sua velocidade instantânea, bem como o inverso, o cálculo das distâncias percorridas conhecida sua velocidade a cada momento. Foram os gregos da escola pitagórica (cerca de 550 a.C.) que deram os primeiros passos das ideias básicas do cálculo na tentativa de resolução de problemas geométricos, estes matemáticos influenciaram as próximas gerações com seus métodos de resolução, inovadores para a época, como por exemplo, Zenão de Eléa (cerca de 450 a.C.) que foi um dos primeiros filósofos a propor problemas baseados no conceito de infinito. Zenão ficou conhecido pela produção de paradoxos sobre a impossibilidade do movimento. Não se sabe ao certo quantos paradoxos foram formulados, mas Zenão escreveu um livro que continha 40 paradoxos. Ele era discípulo de Parmênides, que foi um dos principais filósofos da

antiguidade cujos estudos eram embasados sobre a ontologia do ser, a razão e à lógica. Eves aborda dois desses paradoxos em seu livro, vejamos:

Dicotomia: “se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes de alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, ad initum. Segue-se, então, que o movimento jamais alcançará.” (EVES, 2004. p. 418)

Analisando geometricamente o paradoxo da dicotomia podemos observar que, se um objeto A caminha em direção ao objeto B, porém antes que chegue ao final o objeto A precisa passar pela metade do caminho, ou seja, pelo ponto C. Mas para que o objeto A se desloque para o objeto C, A precisa passa pela metade do caminho entre A e C, ou seja, o ponto D. E assim por diante, sempre vai existir uma distância entre dois pontos. Com base nesse fundamento, Zenão acreditava que o que acreditávamos ser movimento espacial era imaginação, para ele o mundo era estático. Logo, esse movimento vai ser infinito conforme a Figura 1.

Figura 1 – Paradoxo da Dicotomia



Fonte: <https://www3.unicentro.br/petfisica/2017/09/21/paradoxo-da-dicotomia/>

Flecha: “se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isso verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move.” (EVES, 2004. p. 418)

Neste paradoxo também temos um argumento da impossibilidade do movimento, observando uma flecha a ser lançada em direção ao alvo, Zenão percebe que a cada momento à flecha ocupa um espaço diferente e que seu percurso pode ser infinitamente divisível em segmentos menores. O que podemos perceber e que esses paradoxos são argumentos bastante abstratos e meramente lógicos.

Figura 2 – Paradoxo da Flecha



Fonte: <https://forumdediscursus.wordpress.com/antiga-2/tudo-parado/>

Hoje sabemos que o conceito de limite era o que faltava para a compreensão absoluta destes e outros paradoxos.

### 2.1.1 MÉTODO DA EXAUSTÃO

Até este momento era utilizado o método da exaustão para cálculo de áreas de figuras planas, vários gregos deram suas contribuições, que mais tarde, foram aprimoradas por Arquimedes (287 à 212 a.C.) que aperfeiçoou o método para a prática da integração. O método é assim denominado porque as áreas eram medidas por aproximações sucessivas e crescentes até que cobrissem a figura considerada.

Nas civilizações antigas, a Geometria possuía grandes aplicabilidades nas atividades do cotidiano, principalmente nas partições e medições de terras. Com o passar do tempo, os gregos começaram a se questionar sobre áreas e volumes, e esperavam que a matemática desse uma resposta imediata para estes problemas. Entretanto o cálculo de tais grandezas não havia se formalizado para a maioria das formas geométricas.

Neste período já era conhecido o cálculo das áreas de figuras planas estruturadas por retas, conforme já mencionamos anteriormente, porém não se tinha conhecimento para determinar a área de figuras curvas. Então os gregos iniciaram uma busca intensa para uma fórmula geral de quadratura, esta busca foi apontada como uma lenta corrida em direção ao cálculo. Com ela encontraram como solução para o problema, à aproximação da figura curva com polígonos inscritos, o que chamaram de Método da Exaustão, uma utilização do conceito de limite por meio de uma sequência infinita. Através desse e de outros procedimentos os gregos foram considerados como os maiores matemáticos durante este século.

Atribui-se o desenvolvimento do Método da Exaustão a Eudoxo de Cnido (408 - 355 a.C.) e esse método pode ser considerado como resposta aos paradoxos de Zenão. Ele que permitiu que uma grandeza pudesse ser fragmentada constantemente, tendo como base a seguinte proposição:

**Proposição do Método da Exaustão:** Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.

A principal contribuição deste método para o desenvolvimento do cálculo, a princípio, foi calcular a área do círculo através de polígonos regulares inscritos; à medida que se aumenta o número de lados do polígono nos aproximamos da área do círculo. A partir do Método da Exaustão, Arquimedes também apresentou sua contribuição para o desenvolvimento do cálculo, utilizando os procedimentos feitos por Eudoxo, porém de maneira mais elaborada.

Mais tarde ele introduziu algumas das contribuições mais significativas feitas na Grécia, usou o método da exaustão para calcular a área sob o arco de uma parábola utilizando a soma de uma série infinita, mostrou que a área de um segmento de parábola é  $\frac{4}{3}$  da

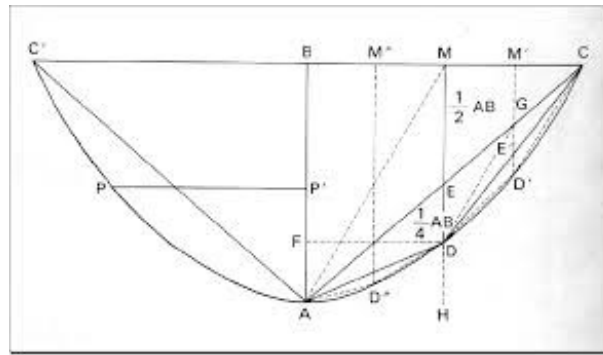
área de um triângulo de mesma base e vértice. Assim, constrói-se uma sequência infinita de triângulos partindo de um triângulo com área  $A$  e adicionando repetidamente novos triângulos entre os existentes e a parábola, até chegar a;

$$A, A + \frac{1}{4}, A + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, A + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}, \dots$$

Assim, área do segmento de parábola é, portanto:

$$A\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots\right) = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4}n = \frac{4}{3}A$$

Figura 3 – Área do segmento de parábola



Fonte: <https://repositorio.unesp.br>

Assim podemos perceber que a quadratura da parábola é um dos precursores da integral definida e o método de exaustão é um ponto fundamental para desenvolvimento do conceito de limite.

## 2.2 A EVOLUÇÃO DO CÁLCULO A PARTIR DO SÉCULO XVII

Nesse período houve um reavivamento do desenvolvimento matemático, a atividade dos matemáticos se estenderam por muitos campos. No começo, a revitalização foi através dos escritos antigos, porém, os estudiosos começaram a adquirir mais confiança sobre as suas próprias observações.

Como nos séculos XVII e XVIII a maioria dos matemáticos eram também físicos, assim sendo, é natural que os primeiros estudos estavam associados aos fenômenos físicos.

“[...] o movimento dos planetas e a queda dos corpos na terra, o funcionamento das máquinas, o fluxo dos líquidos, a expansão dos gases, forças físicas tais como o magnetismo e a eletricidade, o voo, o crescimento das plantas e animais, a propagação das epidemias e a flutuação dos lucros. A matemática tornou-se o estudo dos números, da forma, do movimento, da mudança e do espaço” (DEVLIN, 2010, p. 24-25).

O Cálculo apoiado pela Geometria Analítica, foi o maior instrumento matemático desenvolvido no século XVII. Ele se mostrou notavelmente poderoso e eficiente para atacar

problemas sem soluções em tempos anteriores. Foi sua ampla e surpreendente aplicabilidade que atraiu grande parte dos pesquisadores em Matemática da época, resultando daí uma enorme produção de artigos, no entanto, poucos preocupavam-se com os fundamentos dos assuntos, que eram bastante insatisfatórios.

Os processos empregados eram frequentemente justificados com argumento de que eles funcionavam. E só perto do fim do século XVIII, quando muitos absurdos e contradições tinham sido expostos na Matemática, sentiu-se que era essencial examinar as bases da análise para dar-lhes uma fundamentação lógica rigorosa. O cuidadoso esforço que se seguiu, visando a essa fundamentação, foi uma reação ao emprego descontrolado da intuição e do formalismo do século anterior. A tarefa se mostrou difícil, ocupando em suas várias ramificações, a maior parte dos 100 anos seguintes. (EVES, 2011. p. 462).

Este século foi muito importante para o surgimento do Cálculo, onde grandes estudiosos, como Cavalieri, Keple, Torricelli, Wallis, Pascal, Descartes e Fermat, preparavam o caminho, para que Newton e Leibniz chegassem ao desenvolvimento mais aprimorado do Cálculo.

### 2.3 ISAAC NEWTON X GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ

Não há como falar sobre a evolução do Cálculo Diferencial e Integral, sem mencionar dois grandes matemáticos que contribuíram efetivamente para desenvolvimento desta que é considerada a mais importante ferramenta matemática de todos os tempos.

“A invenção do Cálculo foi o evento singular mais importante da Matemática desde que Euclides reunira a estrutura da geometria clássica em seus elementos, 2000 anos antes. Ela mudaria para sempre o modo como os matemáticos pensam e trabalham, e seus métodos poderosos afetariam todos os ramos da ciência, pura e aplicada.” (MAOR, 2008, p. 109).

Da mesma forma é impossível deixar de mencionar a disputa entre Newton e Leibniz no que se refere a autoria dos resultados que mais tarde viria a ser a base do Cálculo moderno.

#### 2.3.1 Isaac Newton (1642– 1727)

Físico inglês que iniciou sua trajetória pela matemática lendo obras de diversos matemáticos, e assim acabou criando a sua própria matemática, para provar que a sua teoria física sobre a gravitação universal e a força centrípeta estava correta.

Inicialmente descobriu o teorema do binômio generalizado, depois acabou inventando o método dos fluxos, assim era como ele chamava o Cálculo Diferencial.

O método dos fluxos, a descoberta mais importante, embora publicado em 1736, já havia sido escrito em 1671, e antes disso, em 1669, Newton já comunicara a essência do método a Barrow. (EVES, 2004).

De acordo com Eves, nas conclusões de Newton,

[...] “uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de fluxo de fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por  $y$ , então o fluxo desse fluente era denotado por  $\dot{y}$ . Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava fluxo principal, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal.”[...] (EVES, 2004, p. 439).

Eves afirma ainda que Newton tratou de dois tipos de problemas com o método dos fluxos:

1° - Considerando uma relação entre alguns fluentes, buscou uma relação envolvendo esses fluentes e seus fluxos, que é o que hoje chamamos de diferenciação.

2° - Estudou a relação inversa: considerando a relação entre os fluentes e seus fluxos, buscou encontrar uma relação envolvendo apenas os fluentes. É o processo de diferenciação.

Newton encontrou diversas e importantes aplicações para o método dos fluxos: determinou máximos e mínimos, tangentes e curvas, curvatura de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas; aplicando também a muitas quadraturas e retificações de curvas.

“Newton não foi o primeiro a diferenciar ou a integrar, nem a ver a relação entre essas operações no teorema fundamental do cálculo. Sua descoberta consistiu na consolidação desses elementos num algoritmo geral aplicável a todas as funções, sejam algébricas sejam transcendentess.” (BOYER, 2010, p. 274).

### 2.3.2 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Cientista alemão considerado o último sábio que obteve o conhecimento universal, criou o seu cálculo entre 1673 e 1676. Leibniz declarou que ao ler a carta *Traite des sinus du quart de cercle*, de Amos Dettonville (pseudônimo sob o qual Pascal escrevia nos anos finais de sua vida), sobre os indivisíveis, percebeu que:

“... a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das diferenças das ordenadas e das abscissas, quando essas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam da soma dos retângulos infinitamente finos que formam a área.” (BOYER, 2010, p. 276).

Leibniz foi o primeiro a utilizar o símbolo de integral, um S alongado, derivado da primeira letra da palavra *summa*, (soma), tendo feito isso em 29 de outubro de 1675, com o objetivo de indicar uma soma de indivisíveis. “Algumas semanas depois ele já escrevia diferenciais e derivadas como fazemos hoje, assim como escrevia e para integrais.” (EVES, 2004, p. 443).

Para achar tangentes fez uso do *calculus differentialis* e para encontrar quadraturas utilizou o *calculus summatorius* ou *calculus integralis*, de onde se originou a nomenclatura atualmente utilizada. (BOYER, 2010).

Seu primeiro artigo sobre o cálculo diferencial foi publicado em 1684, onde Leibniz define  $dx$  como um intervalo finito e arbitrário e  $dy$  pela proporção  $dy : dx = y : \text{subtangente}$ . (EVES, 2004).

Em 1686 Leibniz fez outra importante publicação, onde enfatizou a relação inversa entre derivação e diferenciação no teorema fundamental do cálculo. Ele deduziu muitas das regras da diferenciação que atualmente são utilizadas nos cursos de cálculo. Como exemplo, a fórmula da derivada enésima do produto de duas funções, que é conhecida como regra de Leibniz.

Eves afirma que Leibniz;

“...tinha uma sensibilidade muito grande para a forma matemática e discernia com clareza as potencialidades de um simbolismo bem engendrado. Sua notação para o cálculo mostrou-se muito feliz e, inquestionavelmente, é mais conveniente e flexível do que a de Newton”. Eves (2004, p. 443- 444)

### 2.3.3 A POLÊMICA PATERNIDADE DO CÁLCULO

Durante as viagens que fez pela Europa Leibniz estabeleceu contato com diversos matemáticos importantes da época. Ele estudou matemática e física com Christian Huygens em Paris, em 1672 e esteve com Hooke e Boyle em Londres no ano de 1673. Na mesma ocasião ele adquiriu diversos livros sobre matemática, inclusive os trabalhos de Barrow, com quem manteve extensa correspondência, retornando para Paris Leibniz realizou importantes contribuições na área do cálculo.

Leibniz considerava suas variáveis  $x$  e  $y$  como valores assumidos sobre sequências de valores infinitamente próximos, enquanto Newton tratava as variáveis como funções do tempo. Ele introduziu a noção de  $dx$  e  $dy$  como diferenças entre valores próximos dentro destas sequências. Leibniz sabia que podia calcular a inclinação da tangente como  $\frac{dy}{dx}$  mas não usou este fato como definição da reta tangente.

Para Newton a integração consistia de se encontrar fluentes para um dado fluxo e, desta forma, estava implícito que a diferenciação e a integração se complementariam como operações inversas.

Leibniz usava a integração como uma soma, de forma muito similar àquela usada por Cavalieri. Ele também se sentia à vontade com o uso dos infinitesimais  $dx$  e  $dy$ , enquanto Newton usava outra notação  $(x, y)$  que representavam velocidades finitas. Nem Leibniz nem Newton pensavam em termos de funções e sim em termos dos gráficos envolvidos. Para Newton o cálculo era formado por operações geométricas enquanto Leibniz fez maior progresso na direção da análise. Ele tinha consciência de que a definição e adoção de uma

boa notação era de fundamental importância e se dedicou com esforço a esta questão, por outro lado Newton, parecia escrever mais para si mesmo do que para um público geral, não se atendo ao formalismo das demonstrações, e como consequência, tendia a usar uma notação que variava a cada momento. A notação de Leibniz,  $\frac{d}{dx}$  enfatizava o aspecto de operador da derivação, o que se revelou muito importante para o progresso posterior do cálculo. Seus resultados foram publicados em 1684 e 1686 sob o nome de *Calculus Summatorius*. O nome moderno, cálculo integral, só apareceu como sugestão Jacob Bernoulli, em 1690.

No início de 1676 Newton escreveu uma carta para Leibniz, enviada por meio de Oldenburg. Nesta carta, que demorou para chegar ao destino, Newton apresentava uma lista de suas conclusões sem muitos detalhes a cerca dos métodos utilizados. Leibniz respondeu imediatamente sem perceber que houvera demora tão grande no recebimento daquela carta. Por sua vez Newton acreditou que Leibniz tivera seis semanas para elaborar sua resposta, aperfeiçoando suas considerações sobre o cálculo com base em sua própria carta. Percebendo o descontentamento do colega Leibniz compreendeu que deveria publicar sem atraso uma descrição completa de seus próprios métodos. Uma segunda carta foi enviada a Leibniz em outubro de 1676 onde Newton, ainda mantendo o tom cortês, sugeria que seus métodos e operações haviam sido plagiados. Leibniz respondeu dando mais detalhes sobre os fundamentos de seu cálculo diferencial e integral, incluindo a regra para a derivação de uma função composta.

Embora Newton reclamasse que Leibniz não havia resolvido nenhum novo problema é inegável que seus métodos e formalismo foram vitais para o desenvolvimento posterior do cálculo. Cabe lembrar que Leibniz nunca considerou a derivada como um limite, um conceito só desenvolvido mais tarde com o trabalho de d'Alembert. Em 1684 Leibniz publicou em detalhes seu método sobre o cálculo diferencial em um jornal denominado *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus. . . in Acta Eruditorum*. Neste artigo ele usa a notação hoje familiar de  $df$  para a diferencial de uma função, as regras para a derivação de potências, produtos e quocientes de funções. No entanto nem todas as demonstrações estavam presentes. Em 1686 Leibniz publicou um novo artigo sobre o cálculo integral.

O método dos fluxos de Newton foi desenvolvido em 1671 porém permaneceu não publicado até 1736, com a tradução para o inglês de John Colson. Este atraso na publicação, em grande parte motivado pela relutância de Newton em aceitar a exposição e críticas dos colegas matemáticos foi o responsável pelo conflito e disputas com Leibniz.

Grande parte das atividades científicas de Leibniz em seus últimos anos de vida estava relacionada com esta disputa sobre a invenção do cálculo. Em 1711 um artigo na *Transactions of the Royal Society of London* o acusava de plágio. Este artigo, bem como os demais ataques, partiam de partidários de Newton e não dele próprio, diretamente. Em sua defesa Leibniz argumentou que não tivera contato com o cálculo dos fluxos até



o conhecimento da obra de Wallis. Em resposta Keill afirmou que a carta enviada por Newton através de Oldenburg continha indicações claras de seu método. Em carta para a Royal Society Leibniz pediu uma retratação, o que motivou a formação de um comitê para julgar a questão. O comitê, formado pelo próprio Newton, julgou a questão sem dar a Leibniz o direito de defesa emitindo parecer favorável a Newton. O relatório final, escrito por Newton, atribuía a ele a autoria do cálculo. Leibniz publicou um panfleto anônimo, intitulado *Charta Volans*, onde narrava sua versão dos fatos e se utilizava, em sua defesa, de um erro de Newton sobre derivadas de segunda ordem e ordens superiores. Mais uma vez os partidários de Newton vieram a público em sua defesa mas Leibniz se recusou a levar adiante o debate. Ao receber correspondência de Newton, Leibniz respondeu com uma descrição detalhada de sua descoberta do cálculo diferencial.

A defesa apaixonada da posição de Newton e a recusa em adotar a terminologia e notação de Leibniz fizeram com que os progressos do cálculo fossem retardados na Inglaterra, enquanto na Europa continental os seguidores de Leibniz promoviam um rápido avanço da ciência.

## 2.4 IDADE CONTEMPORÂNEA

Esse período tem início com a Revolução Francesa e prossegue até os dias atuais, nesta fase o cálculo foi abordado de uma maneira mais rigorosa, conceitos como continuidade, função, séries, limites, derivadas e integrais adquiriram fundamento e precisão. Alguns matemáticos se destacaram nesta fase, tais como Cauchy, Riemann e Weierstrass.

August Louis Cauchy (1789 – 1857) nasceu em Paris no ápice da Revolução. Autor de quase 800 artigos matemáticos, Cauchy fez contribuições na Teoria das Funções de Variável Complexa, em 1829 em seu *Leçons sur le calcul différentiel*, deu a primeira definição de função complexa. Aprimorou a definição de D’Alembert sobre limites: Quando valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a acabar diferindo dele por tão pouco quanto se queira, esse último chama-se o limite dos outros todos. (BOYER, 1996, p.355)

A definição de limite atribuída a Cauchy foi aperfeiçoada posteriormente pelo alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897): “uma função  $f(x)$  tem por limite o valor  $L$  no ponto  $x = x_0$  se, dado  $\varepsilon$  tão pequeno quanto se queira, existir  $\delta > 0$  tal que, para todo  $0 < |x - x_0| < \delta$ ,  $|f(x) - L| < \varepsilon$ ” (GARBI, 2009, p.299)

Weierstrass foi autor de vários teoremas, que atualmente encontramos em todos os livros de cálculo, tendo elaborado o Teorema dos Extremos onde afirma que toda função contínua num intervalo fechado  $[a, b]$  assume um máximo e um mínimo em  $[a, b]$ . Também foi responsável pelo Teorema conhecido como Bolzano-Weierstrass, segundo o qual toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) atuou em diversas áreas da Matemática entre

elas a Análise, Topologia, Geometria e Teoria dos Números. Sua tese de doutorado foi sobre Teoria das Funções de Variável Complexa, desenvolvendo a chamada equação de Cauchy-Riemann. Reconhecido pelo refinamento da definição de integral, Riemann considerou uma curva limitada por certo intervalo e a área que esta formava com o eixo das abcissas. Para calcular tal área dividiu-a em retângulos cada vez menores, utilizando a aproximação da soma das áreas destes retângulos para encontrar a integral, atualmente chamada de Integral de Riemann, ou seja, ele desenvolveu a expressão:  $\int_a^b f(x) dx$  para calcular a integral, a área sob a curva  $y = f(x)$ , com  $f(x)$  contínua num intervalo  $[a, b]$ .

À medida que foram se desenvolvendo outras ciências tais como da Física, Estatística, Economia, Ciências da Computação e das tecnologias em geral, o Cálculo foi se aprimorando, criando forma, tornando-se o que hoje conhecemos nos livros como Cálculo Diferencial e Integral.

## 2.5 O ENSINO DE CÁLCULO NO BRASIL

O ensino da matemática no Brasil sofreu muitas modificações ao longo dos anos, com as mudanças ocorridas na educação de forma geral. Após a expulsão dos jesuítas o ensino passou pela primeira mudança, surgiram aulas de disciplinas isoladas que não possuíam um planejamento e nem professores com formação específica. Estas aulas eram denominadas “aulas régias” que, apesar do fracasso do modelo e de não atingirem muitas pessoas, modificou os conteúdos escolares incluindo novas disciplinas como, por exemplo, aritmética e à álgebra. Também, nesta época, foram criadas novas escolas, mas não incluíam ainda o ensino da matemática.

Mais tarde, em 1837, foi criada a primeira escola secundária pública no Rio de Janeiro, o Colégio Pedro II. Neste momento, aconteceu a primeira mudança na matemática foram incluídas as disciplinas aritmética, geometria e álgebra nos programas das oito séries que faziam parte do ensino desta época. A primeira alteração significativa no ensino brasileiro ocorreu em 1890, quando o primeiro ministro Benjamin Constant decretou a eliminação de disciplinas tradicionais, como por exemplo; latim e grego, e incluiu o ensino da matemática abstrata e concreta. A partir daí, o Cálculo Diferencial e Integral passou a compor os conteúdos ensinados.

Em 1931, houve a reforma Francisco Campos, que dividiu o ensino em dois ciclos: o fundamental, com duração de cinco anos, e o complementar, com duração de dois anos. O ensino complementar preparava para o ingresso no ensino superior e era dividido em três modalidades: o pré-jurídico, pré-médico e pré-politécnico. O ensino de Cálculo figurava no pré-médico e pré-politécnico, com noções de limite e derivada. Com a Reforma Capanema, que aconteceu entre 1935 e 1945, o então ministro da Educação e Saúde, Gustavo Capanema alterou novamente a estrutura do ensino secundário, que transformou o curso complementar em dois outros cursos: Clássico e Científico e ambos com duração de três anos, nos programas para os cursos Clássicos e Científicos da Reforma Capanema

não aparece nenhuma referência ao conteúdo do Cálculo Integral, nem mesmo para o curso Científico, que possui um grupo maior de assuntos em matemática em relação ao curso Clássico. Há apenas referência de dois assuntos: os estudos de variações e das derivadas.

Somente em 1951, o conteúdo de integrais e primitivas retornam oficialmente aos programas de ensino. Mas, a partir de 1960, começou no Brasil o movimento da matemática moderna, que já acontecia em outros países. O objetivo deste movimento era aproximar o ensino das escolas com a pesquisa, contribuindo assim para o desenvolvimento tecnológico. Para isso, passou a ser implantado mais rigor e formalismo na exposição dos conteúdos. Foi proposta a inclusão de conteúdos que consideraram importantes, bem como a retirada de outros. Foi neste momento que o cálculo começou a ser retirado das escolas secundárias, segundo Ávila;

“...não haveria mesmo espaço para tanta coisa nos programas, já que o rigor e formalismo exigiam o ensino da teoria dos conjuntos e vários detalhamentos axiomáticos que toma tempo.” Ávila (1991, p.2)

A retirada do cálculo foi contraditória a um movimento que pregava a modernização do ensino da matemática, uma vez que o cálculo sempre foi o que há de mais moderno. E devido à sua aplicabilidade em diversas áreas vem, desde sua descoberta, contribuindo para o desenvolvimento tecnológico e científico.

Assim sendo seguiremos uma análise sobre a possibilidade da inserção do estudo do cálculo no ensino médio, visto que historicamente isto seria possível.

## **2.6 É POSSÍVEL INTRODUIR O CONTEÚDO DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO?**

Esta realmente é uma pergunta pertinente, visto que, o ensino médio é de fato a última etapa da Educação Básica, onde os alunos estão sendo preparados para uma vida acadêmica mais intensa ao ingressar em um curso superior. Se pensarmos no ensino do cálculo com todo seu formalismo, sua simbologia, seus teoremas e definições rigorosas, a resposta a este questionamento seria de pronto negativa, pois esses conteúdos repletos de detalhes, exigem conhecimentos específicos que ainda não são dominados por um estudante nesta fase de sua escolaridade. Entretanto, se analisarmos a correlação dos conteúdos ensinados no ensino médio, vemos a possibilidade da inserção das ideias geradoras do Cálculo no Ensino Médio, junto com conteúdos já existentes, abordando assim os aspectos intuitivos de cada tópico, se não, vejamos alguns exemplos:

- A noção de limite, pode ser inserida junto com o estudo de sequências, soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, ou ainda, no estudo das funções exponenciais, observando assim o comportamento da função para valores muito grandes ou muito pequenos do seu domínio, e até mesmo na representação decimal das dízimas periódicas.

- Na álgebra, a variação de grandezas e a trigonometria, temas pouco trabalhado nas escolas, poderiam ser incluídas as noções de derivada, dada sua aplicação como taxa de variação. Este assunto poderia, inclusive, ser trabalhado já no primeiro ano junto com as funções de 1° e 2° grau.
- Já o conceito de integral seria facilmente trabalhado junto com o cálculo de áreas e as derivadas como taxa de variação instantânea, ambos em conjunto com o estudo de funções.

Avila (1991, p.4) afirma que:

“gasta-se muito tempo para introduzir uma extensa nomenclatura contradomínio, função inversa, função composta, função injetiva, sobrejetiva, num esforço de poucos resultados práticos. É antipedagógico introduzir conceitos que não estejam sendo solicitados no desenvolvimento da disciplina”.

Esta afirmação vem de encontro às orientações dos PCNs, que diz:

É importante evitar detalhamentos ou nomenclaturas excessivos. Por exemplo, se o único caso de funções inversas que os alunos verão no Ensino Médio forem as funções exponencial e logaritmo, não há necessidade de todo o estudo sobre funções injetoras, sobrejetoras e inversíveis, assim como se o foco do estudo estiver na análise de gráficos e nas aplicações da função logarítmica, podemos questionar por que estudar cologaritmos, característica e mantissa.(PCN+, 2002, p.120).

Machado (2015) exemplifica a questão da reorganização dos conteúdos e do que realmente contribui para a formação do aluno:

[...] na escola, tratamos os polinômios do nível da técnica fatoração de polinômios, divisão de polinômios, etc. Tudo técnica. Ninguém entende bem o que está fazendo, ou por que aquilo é importante. Contudo, as funções polinomiais são as mais fáceis de estudar com as ideias de cálculo, e um curso de cálculo simples, focando em polinômios, daria ao aluno a justificativa para estudar muitas outras ideias e técnicas de um jeito mais natural.(MACHADO, 2015, p.1)

Machado (2015) sugere a seguinte abordagem como exemplo:

O professor começa com a ideia mais simples, que é de integral, e com as funções mais simples, que são funções polinomiais de primeiro grau. Depois ele trabalha a ideia de derivada. E depois, a de equação diferencial. Assim, sempre trabalhando apenas com funções de grau 1, o professor passa as ideias mais importantes do cálculo. Isso dá para fazer em poucas horas.(MACHADO, 2015, p.1)

Observa-se, então, que a inclusão do Cálculo no Ensino Médio é possível a partir de uma organização e otimização dos programas de ensino e de um olhar sob novas perspectivas do professor para o que é ensinado nesta fase. É preciso entender que a construção do conhecimento matemático envolve a formação e percepção das ideias que o fundamentam.

Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, generalizar para muitas outras ações necessárias à sua formação. (PCNs+, 2002, p.111)

Assim finalizamos este capítulo, onde fizemos análise histórica do desenvolvimento do cálculo desde a antiguidade até os dias atuais, destacamos ainda a importância da contribuição que os matemáticos Newton e Leibniz tiveram para a evolução dos conceitos do cálculo. No próximo capítulo veremos os conceitos básicos de limite de forma intuitiva e contextualizada.

### 3 LIMITE

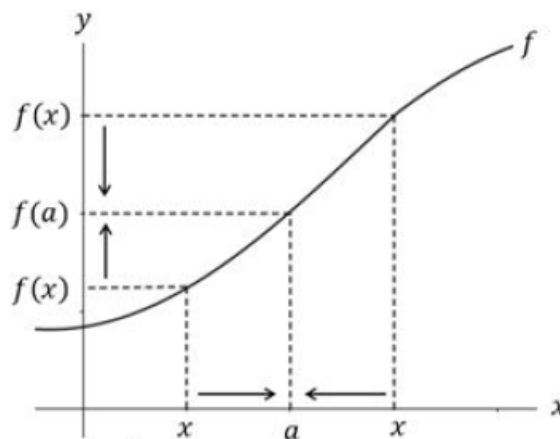
Neste capítulo abordaremos a definição formal de limites e suas propriedades, fazendo um comparativo com a abordagem das noções intuitivas como uma metodologia usada para o Ensino Médio, para isso mostraremos exemplos de sucessões numéricas utilizando tabelas e gráficos que auxiliarão na visualização e compreensão destes limites.

#### 3.1 DEFINIÇÃO FORMAL

Seja  $f(x)$  uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número  $a$ , mesmo que  $f(x)$  não esteja definida em  $a$ . Dizemos que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$  é  $L$  e escrevemos;

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Figura 4 – Função  $f(x)$  definida no intervalo aberto contendo  $a$



Fonte: <https://www.infoescola.com/matematica/limites/>

Se para todo número  $\varepsilon > 0$  existe um número  $\delta > 0$ , tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta$ .

#### 3.2 NOÇÃO INTUITIVA

A ideia intuitiva de limite está ligada a diversos princípios, dentre eles a de tendência, dizer que  $x$  tende a um certo valor  $a$ , do domínio de uma função, significa que os valores de  $x$  se aproximam de  $a$ .

Dizer que o limite de uma função  $f$ , quando  $x$  tende a  $a$  (Notação:  $x \rightarrow a$ ), é igual a  $L$ , significa que, quando os valores de  $x$  se aproximam de  $a$ , os valores  $f(x)$  aproximam-se de  $L$ . Denota-se;

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

No livro “Cálculo A” de 2007 Flemming e Gonçalves exemplificam a noção intuitiva de limites com as seguintes sucessões:

i) 1, 2, 3, 4, 5...

ii)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

iii) 1, 0, -1, -2, -3, ...

iv)  $1, \frac{3}{2}, 3, \frac{5}{4}, 5, \frac{7}{6}, 7, \dots$

Na sucessão (i), os termos tornam-se cada vez maiores sem atingir um limite. Dado um número real qualquer, por maior que seja, podemos sempre encontrar, na sucessão, um termo maior. Dizemos então que os termos dessa sucessão tendem para o infinito ou que o limite da sucessão é infinito. Denota-se  $x \rightarrow +\infty$ .

Na sucessão (ii) os termos crescem, mas não ilimitadamente. Os números aproximam-se cada vez mais do valor 1, sem nunca atingirem esse valor. Denota-se  $x \rightarrow 1$ .

Na sucessão (iii) analogamente a sucessão (i), dizemos que  $x \rightarrow -\infty$

Já na sucessão (iv) os termos oscilam sem tender para um limite.

Com estes exemplos tivemos um noção intuitiva de tendência das sucessões, uma base fundamental para compreensão e o estudo dos limites.

A seguir, ampliaremos os conceitos intuitivos de Limites, analisando alguns exemplos que podem ser introduzidos no Ensino Médio.

**Exemplo 1.** Observe o cálculo do valor da função  $f(x) = x - 2$  para  $x = 3$ . Ora  $f(3) = 1$ , o que significa que o ponto  $(3, 1)$  pertence ao gráfico de  $f(x)$ . Portanto se estudarmos os valores de  $f$  quando  $x$  assumir valores próximos de 3, porém diferente de 3, teremos assim intuitivamente o valor do limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a 3.

**Solução:**

Logo, vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 2)$ .

Tabela 1 – Função  $f(x) = (x - 2)$  para valores de  $x$  menores que 3

$x$	2	2,3	2,5	2,99	...
$y$	0	0,3	0,5	0,99	...

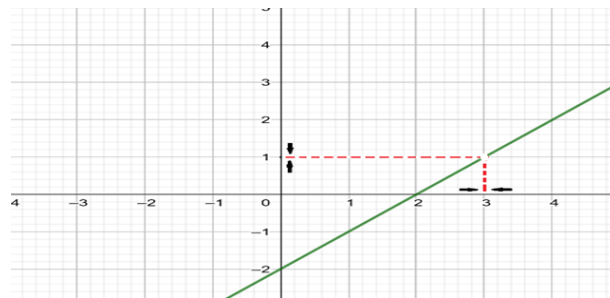
Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 2 – Função  $f(x) = (x - 2)$  para valores de  $x$  maiores que 3

$x$	3,5	3,2	3,01	3,001	...
$y$	1,5	1,2	1,01	1,001	...

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Graficamente temos:

Figura 5 – Gráfico da função  $f(x) = x - 2$ 

Fonte: Autoria Própria (2021)

Podemos concluir com base nas tabelas e no gráfico da função que, quando  $x$  tende a 3, tanto por valores menores quanto por valores maiores que 3,  $f(x)$  aproxima-se de 1, e isso é o que significa limite, em outras palavras,  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) = 1$ .

É importante observar que  $f(3) = 3 - 2 = 1$ , ou seja,  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) = f(3)$ .

**Exemplo 2.** Calcule o  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 1)$ , usando a noção intuitiva. Construindo as tabelas para os valores da função  $f(x) = x^2 + 2x - 1$ , temos:

**Solução:**

Observe,

Tabela 3 – Função  $f(x) = (x^2 + 2x - 1)$  para valores de  $x$  menores que 1

$x$	0,5	0,7	0,8	0,99	...
$y$	0,25	0,89	1,24	1,9601	...

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

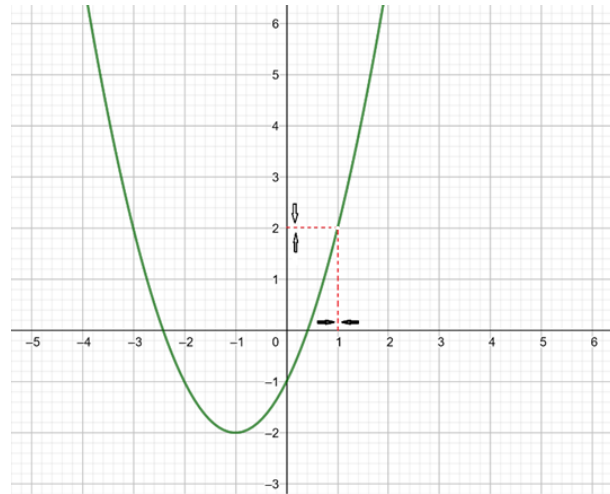
Tabela 4 – Função  $f(x) = (x^2 + 2x - 1)$  para valores de  $x$  maiores que 1

$x$	1,3	1,2	1,01	1,001	...
$y$	3,29	2,84	2,0401	2,004	...

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Esboçando o gráfico temos:



Figura 6 – Gráfico da função  $f(x) = x^2 + 2x - 1$ 

Fonte: Autoria Própria (2021)

Podemos observar que, quando os valores de  $x$  se aproximam de 1, tanto pela direita quanto pela esquerda do número 1,  $f(x)$  aproxima-se de 2 logo,  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 1) = 2$ . Notemos que,  $f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2$ , ou seja,  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 1) = f(1)$ .

**Exemplo 3.** Calcule o  $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1|$ , usando a noção intuitiva. Construindo as tabelas para os valores da função  $f(x) = |x - 1|$ , temos:

**Solução:**

Observe,

Tabela 5 – Função  $f(x) = |x - 1|$  para valores de  $x$  menores que 1

$x$	0,7	0,8	0,9	0,999	...
$y$	0,3	0,2	0,1	0,001	...

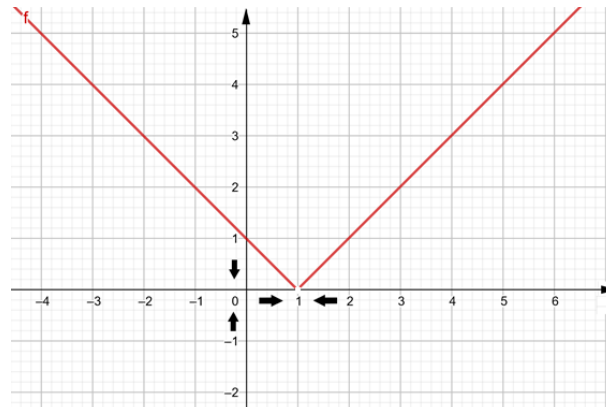
Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 6 – Função  $f(x) = |x - 1|$  para valores de  $x$  maiores que 1

$x$	1,3	1,2	1,01	1,001	...
$y$	0,3	0,2	0,01	0,001	...

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Esboçando o gráfico, temos:

Figura 7 – Gráfico da função  $f(x) = |x - 1|$ 

Fonte: Autoria própria (2021)

Observando as tabelas e o gráfico da função podemos concluir que, quando os valores de  $x$  se aproximam de 1, seja pelos valores maiores ou menores que 1,  $f(x)$  se aproxima de 0, logo podemos afirmar que o  $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1| = 0$ , note também que  $f(1) = |1 - 1| = 0$ , ou seja,  $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1| = f(1)$ .

Notemos que nos três exemplos vistos até o momento, os limites das funções quando  $x$  tende a um determinado valor  $a$  ( $x \rightarrow a$ ), foi exatamente o valor numérico das funções no ponto  $a$ , ou seja,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Porém isso não é uma regra, veremos a seguir um exemplo de função racional em que o limite do denominador é zero num determinado ponto, bem como o numerador neste mesmo ponto, denotando assim uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ .

**Exemplo 4.** Calcule o  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \right)$ , usando a noção intuitiva.

**Solução:**

Inicialmente observe que o número 2 não pertence ao domínio  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ , pois quando  $x = 2$  temos  $f(2) = \frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 2}{2^2 - 4} = \frac{0}{0}$ . Porém podemos calcular o limite da função, pois o limite é definido para valores de  $x$  próximos de 2, ou seja, para  $x \neq 2$ . Assim sendo, podemos fazer uso de artifícios matemáticos, como por exemplo fatoração de polinômios, para calcularmos este limite, com isso saímos da indeterminação mencionada acima, vejamos;

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)}{(x + 2)} = \frac{1}{4}$$

Vejamos a construção da tabela de  $f(x)$ :

Tabela 7 – Função  $f(x) = \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}\right)$  para valores de  $x$  menores que 2

$x$	1,7	1,8	1,9	1,999	...
$y$	0,19	0,21	0,23	0,249	...

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

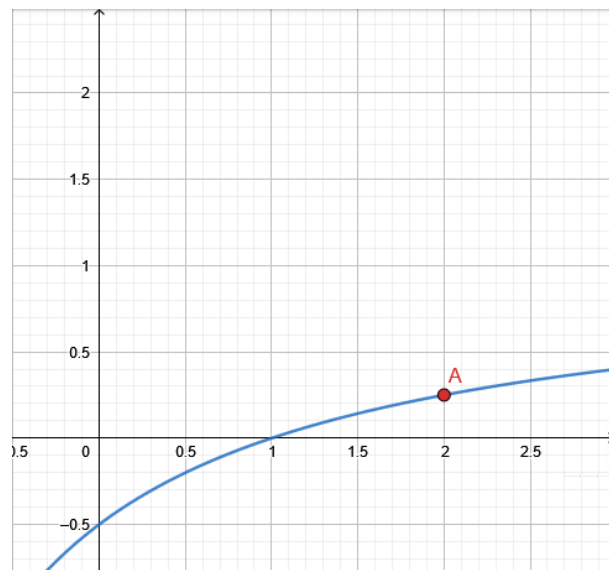
Tabela 8 – Função  $f(x) = \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}\right)$  para valores de  $x$  maiores que 2

$x$	2,3	2,2	2,01	2,001	...
$y$	0,30	0,28	0,2518	0,25018	...

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Graficamente temos:

Figura 8 – Gráfico da função  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$



Fonte: Autoria própria (2021)

Podemos concluir portanto que  $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}\right) = \frac{1}{4}$ .

### 3.2.1 CONTINUIDADE

No exemplo 4 podemos observar que o limite da função não se dá exatamente em  $f(2)$ , até porquê, o 2 não pertence ao domínio de  $f(x)$ , no entanto este limite se define nas proximidades dele, ou seja, na vizinhança do ponto  $x = 2$ . O que se opõe aos exemplos anteriores, nestes exemplos temos o que chamamos de funções contínuas. No Ensino médio é comum ouvir que para descobrirmos se uma função é contínua basta esboçar seu gráfico e verificar se o mesmo não possui interrupções, ou a grosso modo, verificar se durante a

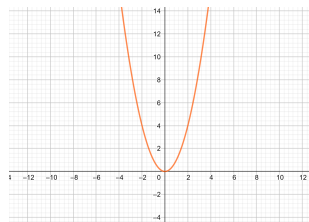
construção do gráfico da função não retiramos o lápis do papel, assim como vimos nos três primeiros exemplos.

Por outro lado, a função descontínua é aquela em que, em algum momento durante o desenho do gráfico, teremos de afastar a ponta do grafite de um ponto, para continuarmos a partir de outro, como podemos observar no gráfico da figura 8.

Vale ressaltar ainda que para uma função ser considerada contínua, todos os seus pontos precisam pertencer ao domínio da função, e o limite da função precisa existir, ou seja, uma função é dita contínua em um ponto  $a$ , se o  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

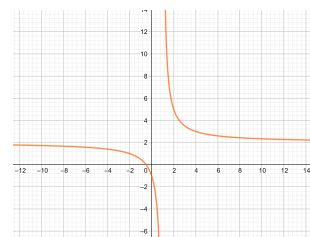
A seguir temos outros exemplos de gráficos de funções contínuas e descontínuas:

Figura 9 – Função contínua



Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 10 – Função descontínua



Fonte: Autoria própria (2021)

Vejamos os seguintes exemplos onde verificamos a descontinuidade das funções:

**Exemplo 5.** Verifique o ponto de descontinuidade e o limite quando  $x$  tende a 2 da seguinte função.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

**Solução** Observe que o 2 não faz parte do domínio da função, ou seja, se adotarmos  $x = 2$ , a função  $f$  não está definida neste ponto, já que substituindo teríamos:

$$f(2) = \frac{(2)^2 - 3 \cdot 2 + 2}{2 - 2} = \frac{4 - 6 + 2}{0} = \frac{0}{0}$$

Portanto a função  $f(x)$  é descontínua no ponto  $x = 2$ .

Por sua vez, o  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \right)$  é;

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1$$

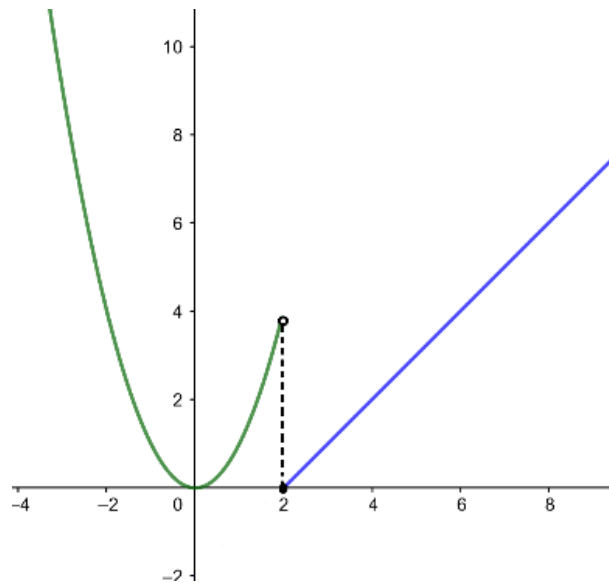
Vimos que é possível obter este limite, mesmo tendo uma indeterminação na função, visto que o cálculo do limite dá-se para valores de  $x$  próximos de 2, ou seja, para  $x \neq 2$ . Assim sendo, podemos obter o resultado acima.

**Exemplo 6.** Verifique o ponto de descontinuidade da seguinte função:

$$g(x) = \begin{cases} \text{Para } x < 2; g(x) = x^2; \\ \text{Para } x \geq 2; g(x) = x - 2. \end{cases}$$

Observe na figura a seguir que exatamente no ponto 2 temos o salto no gráfico da função.

Figura 11 – Gráfico da função  $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{Para } x < 2 \\ x - 2, & \text{Para } x \geq 2 \end{cases}$



Fonte: Autoria própria (2021)

Portanto o ponto  $x = 2$  é o ponto de descontinuidade de  $g(x)$ , adiante veremos que o limite desta função quando  $x$  tende a 2 não existe, pois seus limites laterais são diferentes.

### 3.2.2 LIMITES LATERAIS

Até o exemplo 6, mesmo com saltos e descontinuidades, os limites das funções sempre tendiam a um certo valor  $L$ , quando  $x$  tendia a um certo valor  $a$ , independentemente dos valores assumidos por  $x$  na vizinhança de  $a$ , ou seja, os limites sempre existiam. Porém existem situações, como na função do exemplo 6 em que além da descontinuidade, temos uma mudança na tendência de  $f(x)$ , quando nos aproximamos de  $x = 2$  pela esquerda ou pela direita. Vejamos as tabelas de construção do gráfico da figura 11.

$$g(x) = \begin{cases} \text{Para } x < 2; g(x) = x^2; \\ \text{Para } x \geq 2; g(x) = x - 2. \end{cases}$$

Tabela 9 – Função  $g(x)$  para valores de  $x$  menores que 2

$x$	1,7	1,8	1,9	1,999	...
$y$	2,89	3,24	3,61	3,996	...

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 10 – Função  $g(x)$  para valores de  $x$  maiores que 2

$x$	2,3	2,2	2,01	2,001	...
$y$	0,3	0,2	0,01	0,001	...

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Observe que quando  $x$  tende a 2 pela esquerda, ou seja,  $x < 2$  então  $g(x) = x^2$ , logo temos;

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4$$

Por outro lado temos que quando  $x$  tende a 2 pela direita, ou seja,  $x \geq 2$  então  $g(x) = x - 2$ , logo temos;

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$$

Conforme o gráfico da figura 11 desta função podemos observar este salto.

Portanto temos que, os limites  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  que são denominados limites laterais de  $f(x)$ , à esquerda e à direita respectivamente, são diferentes pois podemos constatar nas tabelas bem como no gráfico da função que quando  $x$  se aproxima de 2 pela esquerda  $f(x)$  tende para 4, por outro lado, quando  $x$  se aproxima de 2 pela direita  $f(x)$  tende a 0, o que nos leva a afirmar portanto que dada uma função  $f$ , o  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  só existe se existirem e forem iguais os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

Vejamos portanto alguns exemplos de limites laterais:

**Exemplo 7.** Seja  $h(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{Para } x < 2 \\ 2, & \text{Para } x = 2 \\ 9 - x^2, & \text{Para } x > 2 \end{cases}$ , determine se existem  $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$  e

$\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ . Esboce o gráfico da função.

**Solução**

Se  $x > 2$ , então  $h(x) = 9 - x^2$ .

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (9 - x^2) = 9 - 4 = 5$$

Se  $x < 2$ , então  $h(x) = x^2 + 1$ .

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 4 + 1 = 5$$

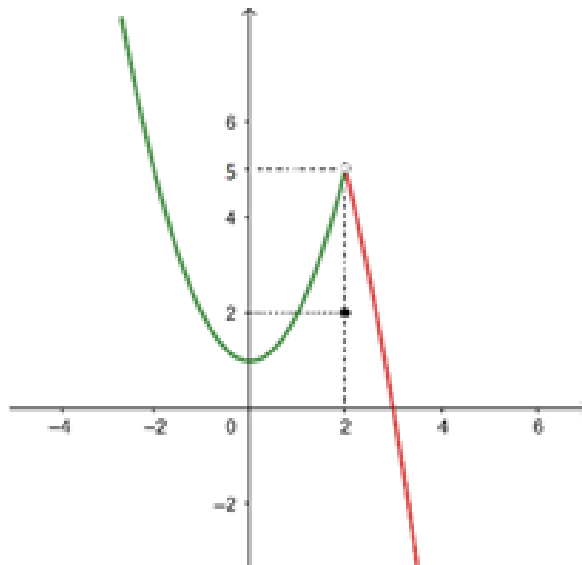
Portanto como,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = 5,$$

Podemos concluir que  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$  existe e é igual a 5.

Graficamente temos,

Figura 12 – Gráfico da função do exemplo 7



Fonte: Autoria própria (2021)

**Exemplo 8.** Dada a função  $f(x) = (1 + \sqrt{x-3})$ , determine  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ .

### Solução

Observe que a função dada só é definida para  $x \geq 3$ , logo podemos concluir que não existe  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ .

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (1 + \sqrt{x-3}) \\ &= 1 + \sqrt{3-3} \\ &= 1 + 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

Por fim podemos concluir com estes resultados que o  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  não existe, pois os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$  não existe, não são iguais.

### 3.2.3 PROPRIEDADES DE LIMITES

Se os limites abaixo existem, e  $c$  é um número real qualquer, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

- I.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x);$
- II.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x);$
- III.  $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x);$
- IV.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$
- V.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)},$  desde que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0;$
- VI.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n,$  para qualquer inteiro  $n$  positivo;
- VII.  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)};$

Vejamos a seguir alguns exemplos utilizando as propriedades operatórias dos limites:

**Exemplo 9.** Encontre os limites utilizando as propriedades operatórias de limites:

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x + 5)$



**Solução:**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x + 5) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= 2^2 + 3 \cdot 2 + 5\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x + 5) = 15.$$

b.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x - 5}{x^3 - 7} \right)$

**Solução**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x - 5}{x^3 - 7} \right) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 5)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 7)} \\ &= \frac{3 - 5}{3^3 - 7}\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x - 5}{x^3 - 7} \right) = -\frac{1}{10}.$$

c.  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \sqrt{x^4 - 4x + 1} \right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \left( \sqrt{x^4 - 4x + 1} \right) &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} (x^4 - 4x + 1)} \\ &= \sqrt{(-2)^4 - 4 \cdot (-2) + 1}\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left( \sqrt{x^4 - 4x + 1} \right) = 5.$$

### 3.3 LIMITES NO INFINITO

A partir deste momento passaremos a analisar funções que se aproximam cada vez mais de um número  $L$ , quando o  $x$  tende cada vez mais para um número suficientemente grande. Seja  $f(x)$  uma função definida no intervalo  $(a, \infty)$  então denotamos;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

Como o símbolo  $\infty$  não representa um número, não podemos efetuar as operações de limites assim como fazemos com números reais.

Podemos analisar intuitivamente melhor com as tabelas e o gráfico da função;

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

Se não vejamos;

Tabela 11 – Função  $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$  para valores de  $x$  positivos

$x$	1	2	3	4	5	6	...
$y$	0	0,5	0,666	0,75	0,8	0,833	...

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 12 – Função  $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$  para valores de  $x$  negativos

$x$	-1	-2	-3	-4	-5	-6	...
$y$	2	1,5	1,333	1,25	1,2	1,166	...

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Graficamente temos,

Observando as tabelas e o gráfico da função concluímos que esta função tende a 1 quando  $x$  tende para o infinito, ou seja,  $f(x) \rightarrow 1$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

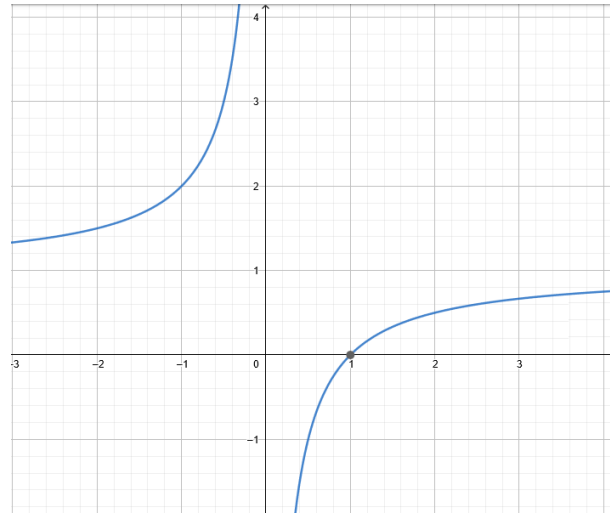
**Teorema 3.1.** *Se  $n$  é um número inteiro positivo, então:*

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

*Demonstração.* Vamos demonstrar o item (i). Devemos provar que, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $A > 0$ , tal que;

Figura 13 – Gráfico da função  $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$



Fonte: Autoria própria (2021)

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon \text{ sempre que } x > A.$$

O exame da desigualdade que envolve  $\varepsilon$  nos sugere a escolha de  $A$ .

As seguintes desigualdades são equivalentes:

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{|x|^n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{|x|^n}} < \sqrt[n]{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{|x|} < \sqrt[n]{\varepsilon}$$

$$|x| > \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$$

A última desigualdade nos sugere fazer

$$A = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}.$$

Temos que

$$x > A \Rightarrow \left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

e, desta forma,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

□

A demonstração do item (ii) se faz de forma análoga.

A seguir veremos exemplos onde utilizaremos este teorema:

**Exemplo 10.** Determine o  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x - 5}{x + 8} \right)$ :

**Solução:** Neste caso teremos a indeterminação  $\frac{\infty}{\infty}$ , devemos então utilizar algum artifício matemático para nos livrarmos desta indeterminação, para tal, se dividirmos ambos os membros de  $f(x) = \frac{2x - 5}{x + 8}$  por  $x$  teremos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\frac{2x - 5}{x}}{\frac{x + 8}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2 - \frac{5}{x}}{1 + \frac{8}{x}} \right)$$

Agora utilizando as propriedades operatórias do limite bem como o teorema citado acima teremos:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x}} = \frac{2 - 5 \cdot 0}{1 + 8 \cdot 0} = 2$$

Se construirmos a tabela e o gráfico de  $f(x)$  para analisarmos intuitivamente o que calculamos acima teremos;

Tabela 13 – Função  $f(x) = \frac{2x - 5}{x + 8}$  para valores de  $x$  tendendo a  $+\infty$

$x$	1	2	3	...	20	...	100	...	1000	...
$y$	-0,333	-0,1	0,09	...	1,25	...	1,8	...	1,98	...

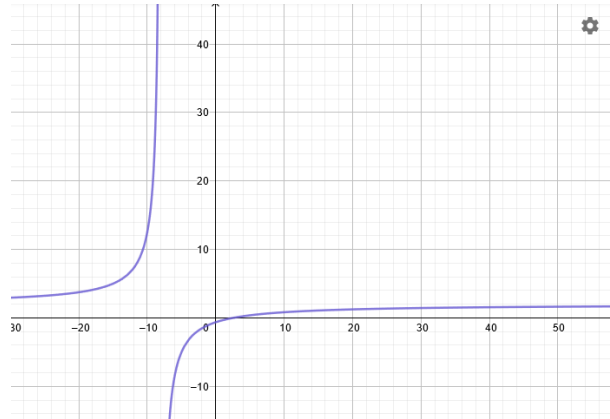
Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Graficamente temos:

Ao analisarmos a tabela e o gráfico de  $f(x)$  podemos concluir que, quanto mais o  $x$  aumenta positivamente, mais o  $y$  se aproxima de 2, conforme obtemos através do cálculo do limite de  $f(x)$ .

**Exemplo 11.** Determine o  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x^2 + 5}{4x^2 - 2} \right)$ .

Figura 14 – Gráfico da função  $f(x) = \frac{2x - 5}{x + 8}$



Fonte: Autoria própria (2021)

**Solução:** Novamente teremos a indeterminação  $\frac{\infty}{\infty}$ , portanto devemos nos livrar dela, neste caso dividiremos ambos os membros de  $f(x)$  por  $x^2$ , assim teremos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\frac{2x^2 + 5}{x^2}}{\frac{4x^2 - 2}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2 + \frac{5}{x^2}}{4 - \frac{2}{x^2}} \right)$$

Agora utilizando as propriedades operatórias do limite e o teorema teremos:

$$\begin{aligned} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 + \frac{5}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 4 - \frac{2}{x^2} \right)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + 5 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 4 - 2 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{2 + 5 \cdot 0}{4 - 2 \cdot 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Construindo a tabela e o gráfico de  $f(x)$ , teremos:

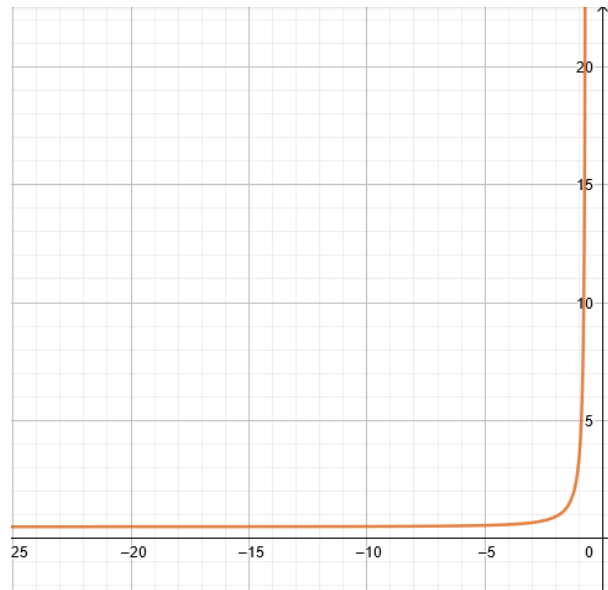
Tabela 14 – Função  $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{4x^2 - 2}$  para valores de  $x$  tendendo a  $-\infty$

$x$	-1	-2	-3	...	-20	-21	-22	...
$y$	3,5	0,93	0,68	...	0,5037	0,5034	0,5031	...

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Esboçando o gráfico temos:

Figura 15 – Gráfico da função  $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{4x^2 - 2}$



Fonte: Autoria própria (2021)

Mais uma vez analisando a tabela e o gráfico de  $f(x)$  podemos concluir que, quanto mais o  $x$  aumenta negativamente, mais o  $y$  se aproxima de  $\frac{1}{2}$ , conforme obtemos através do cálculo do limite de  $f(x)$ .

### 3.4 LIMITE INFINITO

Nesta seção analisaremos o comportamento de funções em que, quando o  $x$  se aproxima cada vez mais de um determinado número  $a$ ,  $f(x)$  cresce ilimitadamente, em outras palavras, podemos tomar  $f(x)$  tão grande quanto desejarmos, tomando para  $x$  valores bastante próximos do número  $a$ .

Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 12.** Determine o  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{(x+1)^2} \right)$ .

**Solução:** Lembrando que o  $x$  tende para o  $-1$  com números suficientemente próximos, já que, se o  $x$  assumisse exatamente o valor de  $-1$ , teríamos  $\frac{1}{(-1+1)^2} = \frac{1}{0}$   $\nexists$ , o que não

seria possível pois não faz sentido. Assim analisando este caso através dos limites laterais temos:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \frac{1}{(x+1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \frac{1}{(x+1)^2} \right) = +\infty$$

Construindo as tabelas de  $f(x)$ , teremos:

Tabela 15 – Função  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$  para valores de  $x \rightarrow -1^-$

$x$	-3	-2	-1,5	-1,25	-1,1	-1,01	-1,001	...
$y$	0,25	1	4	16	100	10.000	1.000.000	...

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

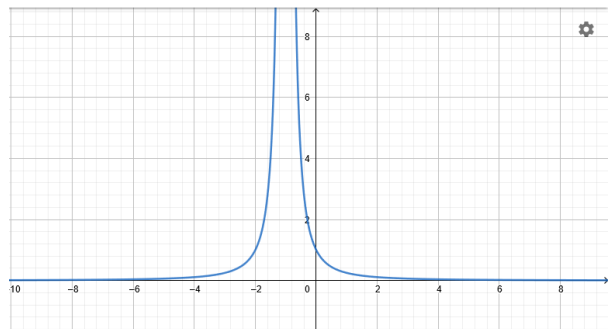
Tabela 16 – Função  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$  para valores de  $x \rightarrow -1^+$

$x$	0	-0,5	-0,75	-0,9	-0,99	-0,999	...
$y$	1	4	16	100	10.000	1.000.000	...

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Observe o gráfico de  $f(x)$ .

Figura 16 – Gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$



Fonte: Autoria própria (2021)

Analisando o comportamento de  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$  através do gráfico e das tabelas acima, observamos intuitivamente que quando  $x$  está próximo de  $-1$ ,  $f(x)$  cresce ilimitadamente, nos levando ao mesmo resultado dos limites laterais analisados anteriormente. Podemos destacar ainda um teorema que será de grande utilidade na análise dos limites infinitos.

**Teorema 3.2.** *Se  $n$  é um número inteiro positivo qualquer, então:*

$$i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

*Demonstração.* Vamos demonstrar o item (i). Devemos mostrar que para qualquer  $A > 0$ , existe um  $\delta > 0$ , tal que;

$$\frac{1}{x^n} > A$$

sempre que  $0 < x < \delta$ .

Trabalhamos com a desigualdade que envolve  $A$  obtemos uma pista para a escolha de  $\delta$ . Como  $x > 0$ , as desigualdades abaixo são equivalentes:

$$\frac{1}{x^n} > A$$

$$x^n < \frac{1}{A}$$

$$x < \sqrt[n]{\frac{1}{A}}$$

Assim escolhemos  $\delta = \sqrt[n]{\frac{1}{A}}$ , temos  $\frac{1}{x^n} > A$  sempre que  $0 < x < \delta$ .

□

**Exemplo 13.** Determine os limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ , utilizando o teorema 2 (i).

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$ , utilizando o teorema 2 (ii).

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = +\infty$ , utilizando o teorema 2 (ii).

Destá forma finalizamos o capítulo 3 onde abordamos os principais conceitos de limite, fizemos um comparativo da definição formal e a visão intuitiva deste conteúdo através de tabelas e gráficos basicamente de funções polinomiais. A seguir veremos os conceitos de derivada de forma também contextualizada e interdisciplinar.



## 4 DERIVADA

Neste capítulo abordaremos os conceitos de derivadas, através de uma abordagem intuitiva de forma que seja possível introduzir estes conceitos no Ensino Médio.

O conceito de derivada está diretamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função, a qual está presente no cotidiano das pessoas, através, por exemplo, da taxa de crescimento de uma população, da taxa de crescimento ou decréscimo econômico de um país, da taxa de mortalidade infantil, variação das temperaturas, velocidade a qual os corpos e objetos se movimentam, ou seja, calcular a derivada, é calcular a rapidez que tal acontecimento varia. Desta forma podemos concluir que tal conteúdo pode ser abordado em diversas disciplinas do Ensino Médio, tais como a Física, Biologia, Geografia além de obviamente a Matemática, dando margem para uma interdisciplinaridade do conteúdo. Para entendermos como isso se dá, inicialmente vejamos a definição formal da derivada de uma função em um ponto:

### 4.1 DEFINIÇÃO FORMAL

Se uma função  $f$  é definida em um intervalo aberto contendo o ponto  $x_0$ , então a derivada de  $f$  em  $x_0$ , denotada por  $f'(x_0)$ , é dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

se este limite existir.

Onde  $\Delta x$  seria uma pequena variação em  $x$ , próximo de  $x_0$ , ou seja, sendo  $x = x_0 + \Delta x$  (pois  $\Delta x = x - x_0$ ) a derivada de  $f$  em  $x_0$  pode também se expressa por:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

Onde  $f'(x_0)$  é a notação utilizada para derivada.

### 4.2 VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

Velocidade e aceleração são conceitos naturalmente conhecidos por todos, quando dirigimos um carro, podemos medir a distância percorrida num certo intervalo de tempo. O velocímetro marca, a cada instante a velocidade, se pisarmos no acelerador ou no freio, podemos perceber que a velocidade mudar, sentimos a aceleração. Podemos mostrar que a velocidade e a aceleração podem ser calculados através de limites.

#### 4.2.1 VELOCIDADE ESCALAR INSTANTÂNEA

A velocidade também pode ser definida para um determinado instante de tempo, a esta velocidade damos o nome de, Velocidade Escalar Instantânea, é a velocidade escalar média para um intervalo de tempo muito pequeno. Pode parecer um pouco estranho estar citando conceitos da física para definir Derivada, porém como já mencionado anteriormente ela está diretamente relacionada com a taxa de variação instantânea, e a velocidade escalar é uma dessas variações que podemos analisar para melhor compreender os conceitos de derivação.

Podemos citar como exemplo, o valor indicado por um velocímetro de um carro, num certo instante, este valor representa a velocidade escalar instantânea.

Para determinarmos a velocidade de um carro em um instante, devemos calcular a velocidade média correspondente a intervalos de tempo cada vez menores ( $\Delta t$  tendendo a zero:  $\Delta t \rightarrow 0$ ), fazendo com que esses intervalos incluam o instante considerado. Por esse processo, a velocidade média que se obtém aproxima-se de um valor que coincide com a velocidade instantânea. Da física temos que a velocidade média é dado pela seguinte função:

$$Vm = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Para obtermos a velocidade escalar instantânea faremos uso do limite nesta função, com valores de tempo cada vez mais próximo do zero como já mencionamos anteriormente. Assim, a velocidade escalar instantânea  $v$  será definida por:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} Vm = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Para melhor compreensão vamos ver um exemplo prático.

**Exemplo 14.** Um carro percorrendo uma estrada tem suas posições variam com o tempo conforme os dados da tabela abaixo:

Tabela 17 – Variação do espaço percorrido pelo tempo

Tempo (s)	0	1	2	3	4	5
Desloc. (m)	0	7	15	21	32	42

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Como podemos obter a velocidade escalar instantânea do carro? Solução: Através dos dados da Tabela 17 podemos calcular a velocidade média, a partir da razão entre o espaço percorrido e o intervalo de tempo que foi gasto para percorrer este espaço, entre o

instante  $t = 0s$  e  $t = 1s$ , função já apresentada anteriormente, vejamos;

$$V_m = \frac{\text{Espaço Percorrido}}{\text{Tempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7 - 0}{1 - 0} = 7 \Rightarrow \mathbf{Vm = 7m/s}$$

Se analisarmos esta velocidade com mais precisão, ou seja, calculando uma velocidade média no intervalo de  $0s$  à  $1s$ , teremos:

Tabela 18 – Variação do espaço percorrido pelo tempo no intervalo de 0 a 1

Tempo (s)	0	0,25	0,5	0,75	1
Desloc. (m)	0	1,1	3,5	6,32	7

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Agora se calcularmos a velocidade média no intervalo de  $0,75s$  à  $1s$  teremos:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7 - 6,321}{1 - 0,75} = \frac{0,68}{0,25} \Rightarrow \mathbf{Vm=2,72 m/s}$$

Medidas ainda mais precisas do movimento, permitem o cálculo de velocidades médias em intervalos menores. Digamos que o deslocamento do carro foi medido a cada  $0,1s$  e que os valores próximos a  $t = 1s$  estão na tabela a seguir:

Tabela 19 – Variação do espaço percorrido pelo tempo no intervalo entre 0,8 a 1,1

Tempo (s)	0,8	0,9	1	1,1
Desloc. (m)	6,6	6,85	7	7,25

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Calculando a velocidade média no intervalo de  $t = 1s$  à  $t = 1,1s$ , temos:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7,25 - 7}{1,1 - 1} = \frac{0,25}{0,1} \Rightarrow \mathbf{Vm = 2,5m/s}$$

Podemos concluir que a medida que diminuimos os intervalos de tempo teremos mais precisão nas medidas dos deslocamentos, porém mesmo assim ainda não teremos a velocidade escalar instantânea no instante  $t = 1s$ . Intuitivamente temos que quanto menor o intervalo, ou seja, quanto mais este intervalo se aproxima de zero, mais próxima à velocidade média fica da velocidade instantânea.

Portanto para obtermos a velocidade escalar instantânea temos que recorrer aos conceitos de limite, vejamos;

Suponha que  $S$  seja uma função de  $t$ , onde  $S$  representa o espaço percorrido, ou seja,  $S = S(t)$ . Se  $t$  variar de um valor  $t_0$  até um valor  $t_1$ , representaremos esta variação de  $t$ ,

que também é chamada de incremento de  $t$ , por  $\Delta t = t_1 - t_0$ , e a variação de  $S$  é dada por  $\Delta s = S(t_1) - S(t_0)$ .

O quociente das diferenças, dado por  $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{S(t_1) - S(t_0)}{t_1 - t_0}$ , é dito taxa de variação média de  $S$  em relação a  $t$ , no intervalo  $(t_0, t_1)$ . O limite destas taxas médias de variação, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , é chamado de velocidade escalar instantânea de  $S$  em relação a  $t$ , em  $t = t_0$ . Assim, temos:

$$\text{Velocidade Escalar Instantânea} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_1) - S(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}.$$

Porém;

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0)$$

Portanto, a taxa de variação instantânea (Velocidade Escalar Instantânea) de uma função em um ponto é dada pela sua derivada neste ponto.

#### 4.2.2 ACELERAÇÃO ESCALAR INSTANTÂNEA

A aceleração instantânea é a que corresponde a um instante dado, o conceito de aceleração é introduzido de maneira análoga ao da velocidade.

Também temos que,  $V$  seja uma função de  $t$ , onde  $V$  representa a velocidade média, ou seja,  $V = V(t)$ . Se  $t$  variar de um valor  $t_0$  até um valor  $t_1$ , representaremos esta variação de  $t$ , que também é chamada de incremento de  $t$ , por  $\Delta t = t_1 - t_0$ , e a variação de  $V$  é dada por  $\Delta v = V(t_1) - V(t_0)$ .

Assim teremos também que o quociente das diferenças, dado por  $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{V(t_1) - V(t_0)}{t_1 - t_0}$ , é dito taxa de variação média de  $V$  em relação a  $t$ , no intervalo  $(t_0, t_1)$ . O limite destas taxas médias de variação, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , é chamado de aceleração escalar instantânea de  $V$  em relação a  $t$ , em  $t = t_0$ . Assim, temos:

$$\text{Aceleração Escalar Instantânea} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t_1) - V(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t_0 + \Delta t) - V(t_0)}{\Delta t}.$$

Porém;

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t_0 + \Delta t) - V(t_0)}{\Delta t} = V'(t_0)$$

Portanto, a taxa de variação instantânea (Aceleração Escalar Instantânea) de uma função em um ponto é dada pela sua derivada neste ponto.

No próximo capítulo, veremos outros exemplos de aplicações da derivada como taxa de variação.

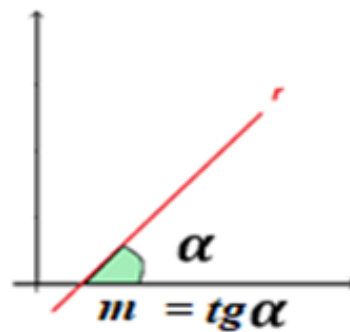
#### 4.2.3 TAXA DE VARIAÇÃO FUNÇÃO DE 1º GRAU OU COEFICIENTE ANGULAR DA RETA

O coeficiente angular ou taxa de variação é a medida que caracteriza a declividade de uma reta em relação ao eixo das abscissas de um plano cartesiano. Temos que uma função do 1º grau respeita a seguinte lei de formação  $y = mx + n$  (equação da reta), onde  $m$  e  $n$  são números reais e  $m \neq 0$ . Sabemos que a taxa de variação da função é dada pela seguinte expressão:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ com } h \neq 0.$$

Graficamente temos:

Figura 17 – Gráfico da declividade de uma reta em relação ao eixo das abscissas



Fonte: Autoria própria (2021)

**Exemplo 15.** Calcule o coeficiente da função (Eq. da Reta)  $f(x) = 2x + 3$ :

**Solução:**

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{[2 \cdot (x+h) + 3] - (2x + 3)}{h} \\ &= \frac{2x + 2h + 3 - 2x - 3}{h} = \frac{2h}{h} \end{aligned}$$

$$m = 2$$

Observe que podemos obter diretamente a taxa de variação da função (Eq. da Reta), identificando o valor do coeficiente  $m$ , neste caso o 2.

**Exemplo 16.** Por exemplo, nas funções seguintes a taxa de variação é dada por:

a)  $f(x) = -5x + 10$ , taxa de variação  $m = -5$

b)  $f(x) = 10x + 52$ , taxa de variação  $m = 10$

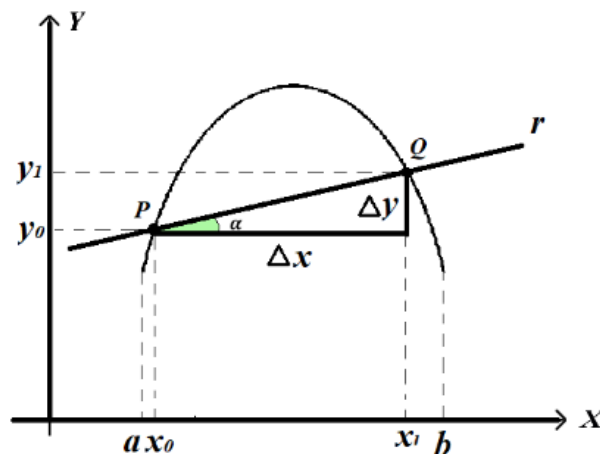
#### 4.2.4 A RETA TANGENTE (INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA)

A derivada de uma função  $f$  em um ponto  $P$  fornece o coeficiente angular ou inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto  $P(x_0, y_0)$ .

Assim, seja uma curva  $y = f(x)$  definida no intervalo  $(a, b)$ , se conhecermos um ponto  $P(x_0, y_0)$ , então a equação da reta tangente  $r$  à curva em  $P$  é dada por  $y - y_0 = m(x - x_0)$ , onde  $m$  é o coeficiente angular ou inclinação da reta. Portanto, basta conhecer o coeficiente angular  $m$  da reta e um de seus pontos, para conhecermos a sua equação.

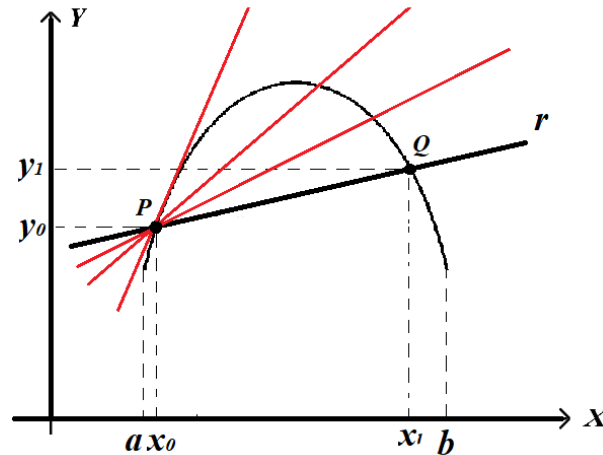
Agora vejamos como obter  $m$  para que  $r$  seja tangente à curva em  $P$ , para isso considere um outro ponto arbitrário pertencente a curva por exemplo  $Q(x_1, y_1)$ , de tal modo que a reta que passa pelos pontos  $P$  e  $Q$  seja secante a curva  $y = f(x)$ , conforme a figura 18;

Figura 18 – Gráfico da reta secante a curva



Fonte: Autoria própria (2021)

Suponhamos agora que, mantendo o ponto  $P$  fixo, e o ponto  $Q$  se mova sobre a curva em direção a  $P$ , variando assim a inclinação da reta  $r$ , a medida em que o ponto  $Q$  se aproxima do ponto  $P$  a reta  $r$  se aproxima de uma reta tangente a curva no ponto  $P$ , logo se os pontos  $P$  e  $Q$  forem coincidentes então  $r$  será tangente a curva, conforme podemos observar na figura 19.

Figura 19 – Gráfico da variação da inclinação da reta  $r$ 

Fonte: Autoria própria (2021)

Logo a inclinação da reta tangente à curva no ponto  $P$  será dada por:

$$\begin{aligned} m(x) &= \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

quando este limite existir.

Fazendo  $x_1 = x_0 + \Delta x$  podemos reescrever o limite da seguinte forma:

$$\begin{aligned} m(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

Conhecendo a inclinação da reta tangente à curva no ponto  $P$ , podemos obter a equação da reta  $r : y - y_0 = m(x - x_0)$  no ponto  $P$  conforme já vimos anteriormente, e esta inclinação ou coeficiente angular ( $m$ ) será a derivada da função no ponto  $x_0$ , conforme também já mencionamos. Logo se o limite existir, a função  $f$  é dita derivável em  $x_0$ .

Vejam alguns exemplos de como calcular a inclinação da reta tangente, consequentemente a derivada das curvas nos pontos  $P$ .

**Exemplo 17.** Encontre a inclinação da reta tangente  $[f'(x_0)]$  à curva  $y = x^2 - 2x + 1$  no ponto  $P(x_0, y_0)$ .

**Solução:**

$$\text{Sabendo que } m(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

Se

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

então

$$f(x_0) = x_0^2 - 2x_0 + 1$$

e

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= (x_0 + \Delta x)^2 - 2(x_0 + \Delta x) + 1 \\ &= x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 2x_0 - 2\Delta x + 1 \end{aligned}$$

Assim temos,

$$\begin{aligned} m(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 2x_0 - 2\Delta x + 1 - (x_0^2 - 2x_0 + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x^2) - 2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (2x_0 + \Delta x - 2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x - 2) \end{aligned}$$

Assim,

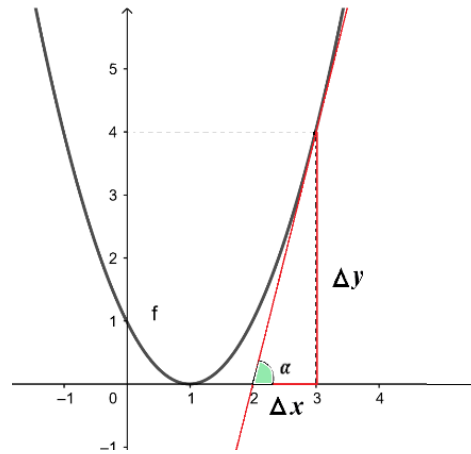
$$m(x_0) = 2x_0 - 2$$

Portanto a inclinação da reta tangente  $[f'(x_0)]$  à curva  $y = x^2 - 2x + 1$  no ponto  $P(x_0, y_0)$  é  $m(x_0) = 2x_0 - 2$ .

Se  $x_0 = 3$  teremos graficamente:



Figura 20 – Gráfico da função  $y = x^2 - 2x + 1$  e reta tangente  $m(x_0) = 2x_0 - 2$



Fonte: Autoria própria (2021)

Observe que,

$$tg(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m(3) = 2 \cdot 3 - 2$$

$$tg(\alpha) = 4$$

Portanto fica claro que a derivada da curva é igual a tangente do ângulo formado pela reta e o eixo das abscissas.

**Exemplo 18.** Encontre a equação da reta tangente à curva  $y = 2x^2 + 3$  no ponto  $P(1, 5)$ .

**Solução**

Inicialmente vamos encontrar a inclinação  $[f'(x_0)]$  da curva  $y$  em  $P(1, 5)$ , vejamos;

$$\begin{aligned} m(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x_0 + \Delta x)^2 + 3 - (2x_0^2 + 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3 - 2x_0^2 - 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x_0 + 2\Delta x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Com isso,

$$m(x_0) = 4x_0$$

então

$$m(1) = 4 \cdot 1 = 4.$$

Com estes dados podemos escrever a equação da reta tangente a curva  $y = 2x^2 + 3$  em  $P(1,5)$  da seguinte forma;

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

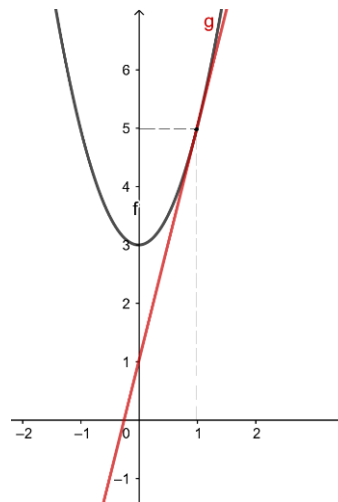
$$y - 5 = 4(x - 1).$$

ou ainda,

$$y = 4x + 1.$$

Graficamente temos:

Figura 21 – Gráfico da função  $y = 2x^2 + 3$  e reta tangente em  $P(1,5)$



Fonte: Autoria própria (2021)

#### 4.2.5 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

A derivada de uma função  $y = f(x)$  é a função denotada por  $f'(x)$ , tal que seu valor em qualquer  $x \in D(f)$  (Domínio de  $f$ ) é dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Dizemos que um função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

Vejamos alguns exemplos de cálculo da derivada de uma função:

**Exemplo 19.** Obtenha a derivada da função constante  $f(x) = C$ .

### Solução

Se  $f(x) = C$  uma função constante, então teremos graficamente uma reta paralela ao eixo das abscissas, e portanto seu coeficiente angular será zero. Logo, se  $f(x) = C$  então  $f'(x) = 0$ . Podemos também verificar a derivada de  $f(x)$  através da definição de limite, se não vejamos;

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C}{\Delta x} \Rightarrow f'(x) = 0$$

**Exemplo 20.** Dado  $f(x) = x$ , encontre  $f'(x)$  usando a definição:

### Solução

Pela definição temos;

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 1.$$

**Exemplo 21.** Dado  $f(x) = x^2$ , encontre  $f'(2)$  usando a definição:

### Solução

Pela definição temos;

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x)$$

$$f'(x) = 2x.$$

Logo,

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4.$$

**Exemplo 22.** : Dado  $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ , determine  $f'(x)$  usando a definição:

**Solução:** Pela definição temos;

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(x-2+\Delta x)}{(x+3+\Delta x)} - \frac{(x-2)}{(x+3)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(x+3)(x-2+\Delta x) - (x+3+\Delta x)(x-2)}{(x+3+\Delta x)(x+3)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+3)(x-2+\Delta x) - (x+3+\Delta x)(x-2)}{(x+3+\Delta x)(x+3) \cdot \Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + x\Delta x + 3\Delta x - 6 - x^2 - x\Delta x - x + 2\Delta x + 6}{(x+3+\Delta x)(x+3) \cdot \Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5\Delta x}{(x+3+\Delta x)(x+3) \cdot \Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5}{(x+3+\Delta x)(x+3)} \\ f'(x) &= \frac{5}{(x+3)^2}. \end{aligned}$$

#### 4.2.6 CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DERIVÁVEIS

Se  $f(x)$  é contínua em  $x_0$  isso não implica a existência de  $f'(x)$ , porém a função ser derivável em  $x_0$ , ou seja, se  $f'(x_0)$  existe então  $f(x)$  é contínua em  $x \rightarrow 0$ . Então para que  $f(x)$  seja contínua em  $x_0$  as três condições a seguir devem ser satisfeitas:

- i)  $f(x_0)$  deve existir;
- ii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  deve existir;
- iii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Exemplo 23.** Seja a função definida por  $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{se } x < 2 \\ 7 - x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ , mostre que  $f$  é contínua em 2.

##### Solução

- i)  $f(2) = 7 - 2 = 5$ ,  $f(2)$  existe;
- ii)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (7 - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) \end{aligned}$$

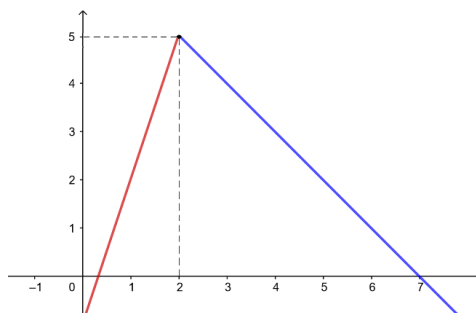
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5, \text{ existe;}$$

- iii)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 5$ .

Logo  $f(x)$  é contínua em 2, pois satisfaz as três condições, podemos verificar também no gráfico da figura 22.

Graficamente,

Figura 22 – Gráfico da função  $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{se } x < 2 \\ 7 - x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$



Fonte: Autoria própria (2021)

Até então, vimos o cálculo da derivada de uma função partindo de sua definição, o que muitas vezes se torna muito trabalhoso dependendo da função que estivermos verificando, para tanto, veremos a seguir algumas regras que nos fornecerá ferramentas que facilitarão nossos cálculos da derivada a partir de agora.

#### 4.2.7 REGRAS DE DERIVAÇÃO

A fim de facilitar o uso das derivadas, serão apresentadas, a seguir, algumas regras e propriedades que permitem calcular a derivada de algumas funções elementares sem aplicação direta da definição. Visto que, a ideia de abordagem para o Ensino Médio, é de que sejam utilizadas as regras de dedução intuitiva. Deixaremos de lado as demonstrações formais destas regras.

#### 4.2.8 DERIVADA DE UMA CONSTANTE

No exemplo 19 já havíamos verificado a derivada de um função constante, no entanto neste momento vamos formalizar como uma regra de derivação, vejamos:

A função constante  $f(x) = C$  possui o gráfico como sendo uma reta paralela ao eixo  $x$  com  $y = c$ . Sendo assim, a taxa de inclinação é zero. Donde concluí-se que;

$$f'(C) = 0$$

#### 4.2.9 DERIVADA DE UMA POTÊNCIA

Este caso também já abordamos nos exemplos 20 e 21, porém agora o formalizamos também como uma regra de derivação, da seguinte forma:

Sendo  $n$  um número inteiro positivo e  $f(x) = x^n$ , assim temos que;

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Refazendo os exemplos 20 e 21 utilizando esta regra teremos:

Seja  $f(x) = x$ , a derivada de  $f(x)$  será:

Note que

$$f(x) = x^1,$$

logo  $f'(x)$  é:

$$f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$$

Agora seja,

$$f(x) = x^2$$

logo  $f'(x)$  é;

$$f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$$

Podemos concluir que os cálculos das derivadas utilizando a regra da potência são mais diretos e mais fáceis do que utilizar a definição de derivada.

#### 4.2.10 DERIVADA DO PRODUTO DE UMA CONSTANTE POR UMA FUNÇÃO

Sejam  $f$  uma função e  $C$  uma constante e  $g$  a função definida por  $g(x) = C \cdot f(x)$ . Se  $f'(x)$  existe, então;

$$g'(x) = C \cdot f'(x)$$

**Exemplo 24.** Se  $f(x) = 8x^2$ , então  $f'(x) = 8 \cdot 2x^{2-1} = 16x$

#### 4.2.11 DERIVADA DA SOMA

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções e  $h$  a função definida por  $h(x) = f(x) + g(x)$ . Se  $f'(x)$  e  $g'(x)$  existem, então;

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

**Exemplo 25.** Seja  $f(x) = 3x^4 + 8x + 5$ , então:

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 + 8 \cdot 1 + 0 = 12x^3 + 8$$

#### 4.2.12 DERIVADO DO PRODUTO DE DUAS FUNÇÕES

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções deriváveis, a derivada do produto  $f(x) \cdot g(x)$  será expressa por;

$$f'[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

**Exemplo 26.** Seja  $f(x) = (2x^3 - 1)(x^4 + x^2)$ , então:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (2x^3 - 1)' \cdot (x^4 + x^2) + (2x^3 - 1) \cdot (x^4 + x^2)' \\
&= (3 \cdot 2x^2 - 0) \cdot (x^4 + x^2) + (2x^3 - 1) \cdot (4x^3 + 2x) \\
&= 6x^2 + (x^4 + x^2) + 8x^6 + 4x^4 - 4x^3 - 2x \\
&= 6x^6 + 6x^4 + 8x^6 + 4x^4 - 4x^3 - 2x \\
f'(x) &= 14x^6 + 10x^4 - 4x^3 - 2x
\end{aligned}$$

#### 4.2.13 DERIVADA DE UM QUOCIENTE DE FUNÇÕES

Sejam  $f$  e  $g$  funções e  $h$  a função definida por  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , onde  $g(x) \neq 0$ . Se  $f'(x)$  e  $g'(x)$  existem, então;

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

**Exemplo 27.** Encontre  $f'(x)$  sendo  $f(x) = \frac{2x^4 - 3}{x^2 - 5x + 3}$ .

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x^4 - 3)' \cdot (x^2 - 5x + 3) - (2x^4 - 3) \cdot (x^2 - 5x + 3)'}{(x^2 - 5x + 3)^2} \\
&= \frac{8x^3 \cdot (x^2 - 5x + 3) - (2x^4 - 3) \cdot (2x - 5)}{(x^2 - 5x + 3)^2} \\
f'(x) &= \frac{4x^5 - 30x^4 + 24x^3 + 6x - 15}{(x^2 - 5x + 3)^2}
\end{aligned}$$

#### 4.3 FUNÇÃO COMPOSTA

Sejam duas funções deriváveis  $f$  e  $g$  onde  $y = g(u)$  e  $u = f(x)$ . Considerando para todo  $x$  tal que  $f(x)$  está no domínio de  $g$ , podemos escrever  $y = g(u) = g(f(x))$ , isto é, podemos considerar a função composta  $(g \circ f)(x)$  (Notação para função composta  $g[f(x)]$ ).

**Exemplo 28.** Dadas as funções  $f(x) = 2x^3$  e  $g(x) = 2x + 3x^2$ , então:

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= 2 \cdot (2x^3) + 3 \cdot (2x^3)^2 \\
&= 4x^3 + 12x^6
\end{aligned}$$



Por outro lado pode definir  $f(g(x))$  como;

$$f(g(x)) = 2.(2x + 3x^2)^3, (\text{Denota-se } (f \circ g)(x))$$

Como isto podemos apresentar a derivada das função compostas, para isso faremos uso da regra da cadeia, que definiremos a seguir.

#### 4.3.1 REGRA DA CADEIA

A regra da Cadeia é utilizada para o cálculo da derivada de uma função composta. Vejamos a composição (fog) para calcularmos a sua derivada é necessário que ambas as funções  $f$  e  $g$  sejam deriváveis, e suas derivadas sejam conhecidas para que assim, apliquemos de fato a Regra da Cadeia, que nada mais é do que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Nota: Onde dy, dx e du são outras notações para derivada e lê-se:

$$\frac{dy}{dx}, \text{ derivada de } y \text{ em relação a } x$$

$$\frac{dy}{du}, \text{ derivada de } y \text{ em relação a } u$$

$$\frac{du}{dx}, \text{ derivada de } u \text{ em relação a } x$$

Para melhor compreendermos vejamos um exemplo.

**Exemplo 29.** Observe a seguinte função  $y = (x^2 + 5x + 2)^7$ , determine  $\frac{dy}{dx}$ .

**Solução:** Vimos que podemos escrever a função como  $y = g(u)$ , onde  $u = x^2 + 5x + 2$ , assim pela regra da cadeia teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Daí;

$$y = u^7$$

Logo,

$$\frac{dy}{du} = 7u^6$$

Já a

$$\frac{du}{dx}$$

Será;

$$\frac{du}{dx} = 2x + 5$$

Logo teremos;

$$\frac{dy}{dx} = 7(x^2 + 5x + 2)^6 \cdot (2x + 5)$$

**Exemplo 30.** Dada a função  $y = \left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^5$ , aplicando a regra da cadeia, temos:

**Solução:** Podemos escrever  $y = u^5$ , onde  $u = \left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)$ , aplicando a regra da cadeia, teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Observe que;

$$\frac{dy}{du} = 5u^4$$

Por outro lado temos;

$$\frac{du}{dx} = \frac{(3x+2)' \cdot (2x+1) - (3x+1) \cdot (2x+1)'}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{3 \cdot (2x+1) - (3x+1) \cdot 2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{6x+3-6x-2}{(2x+1)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

Portanto;

$$\frac{dy}{dx} = 5 \left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^4 \cdot \frac{1}{(2x+1)^2}$$

Nos dois últimos capítulos abordamos de forma intuitiva a introdução dos conceitos de limites e derivadas de um jeito que possamos aplicá-los para alunos do Ensino Médio. Na sequência apresentaremos algumas aplicações destes conceitos para que os mesmos possam ser melhor fixados e contextualizado de forma a facilitar o aprendizado.

## 5 APLICAÇÕES

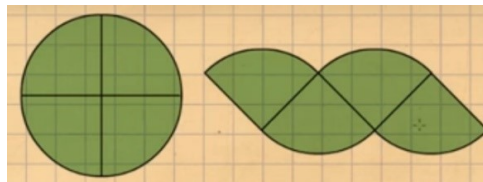
Sabe-se que o mundo é regido por leis naturais e relações sociais que possibilitam um amplo espaço pedagógico para o desenvolvimento de grande parte dos conteúdos matemáticos de forma contextualizada. Pode parecer que alguns conteúdos não tem aplicação clara e imediata nos problemas do cotidiano, o que talvez crie certo desapontamento. Mas, na verdade, as aplicações ocorrem como resultado da evolução e desenvolvimento desses conceitos. O mesmo acontece com o Cálculo Diferencial, que tem importância especial em virtude da grande aplicabilidade em diversos campos das ciências, tais como: problemas da física, biologia, química, modelagem matemática, arquitetura, geologia, engenharia e economia, entre outros. Vejamos alguns desses exemplos na prática.

### 5.1 APLICAÇÕES DE LIMITES

A seguir, encontram-se resumidamente descritas algumas propostas de abordagens para introduzir os conceitos de limite de uma forma intuitiva no Ensino Médio.

**PROPOSTA 1:** A partir do experimento onde Eudoxo fez uso do método da exaustão, para calcular a área de uma circunferência, podemos introduzir a ideia intuitiva de limite. Para isso, considere uma circunferência dividida em quatro partes iguais, em seguida reagrupamos estas partes conforme a figura 23.

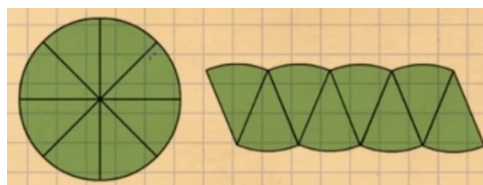
Figura 23 – Círculo dividido em quatro partes iguais



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=dNHAgYyCpTYlist=LLindex=9>

Eudoxo não conseguiu concluir muita coisa com esta figura, logo ele decidiu dividir o mesmo círculo em oito partes iguais, reagrupando também conforme figura 24.

Figura 24 – Círculo dividido em oito partes iguais

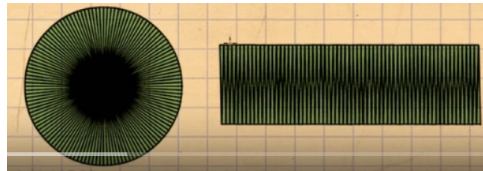


Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=dNHAgYyCpTYlist=LLindex=9>

Mesmo assim não foi possível chegar a um conclusão a cerca do cálculo da área desta circunferência.

Porém, Eudoxo continuou dividindo esta circunferência em partes iguais diversas vezes e as reagrupou de modo a se aproximar da figura 25.

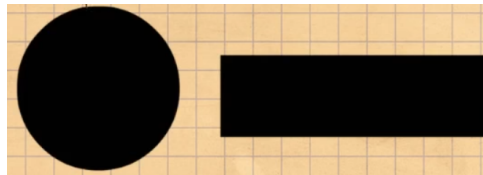
Figura 25 – Círculo dividido em diversas partes iguais



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=dNHAgYyCpTYlist=LLindex=9>

Como isso ele pode observar que as partes reagrupadas lado a lado se aproximava cada vez mais de um retângulo, logo se ele continuasse dividindo a circunferência infinitamente em partes iguais e reagrupando estas partes lado a lado chegaria em algo que se aproximava cada vez mais de um retângulo, conforme a figura 26.

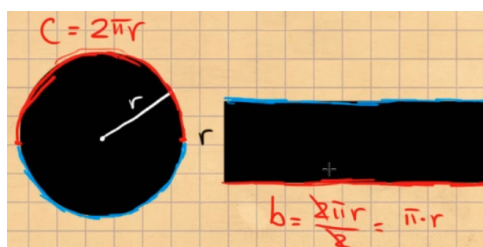
Figura 26 – Círculo dividido em infinitas partes iguais



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=dNHAgYyCpTYlist=LLindex=9>

Desta forma ele fez mais algumas observações, viu que cada seguimento que ligava o centro da circunferência a sua borda externa era exatamente o raio dessa circunferência, logo a altura do retângulo seria a mesma medida do raio, sabendo que a medida da circunferência vale  $C = 2\pi \cdot r$ , então a base deste retângulo seria a metade da circunferência, logo a base mede  $b = \frac{C}{2} = \frac{2\pi \cdot r}{2} = \pi \cdot r$ , assim de posse destes dados Eudoxo pode calcular a área do retângulo, conseqüentemente obteve assim a área da circunferência, observe a figura 27.

Figura 27 – Cálculo da circunferência a partir do retângulo



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=dNHAgYyCpTYlist=LLindex=9>

Daí tem-se que a área em questão seria:

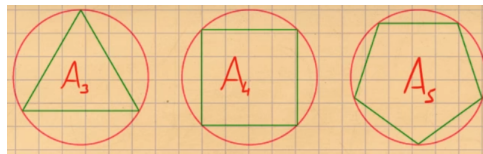
$$\text{Área Circunferência} = \text{Área do Retângulo}, \text{ ou seja, } A_c = b \cdot r$$

ou melhor:

$$A_c = \pi \cdot r \cdot r \Rightarrow A_c = \pi \cdot r^2$$

Podemos ter ainda um outra abordagem para este mesmo problema, vejamos; Imagine os seguintes polígonos inscritos na circunferência conforme figura 28:

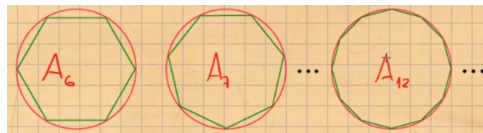
Figura 28 – Polígonos inscritos na circunferência



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=dNHAgYyCpTYlist=LLindex=9>

Repare que a medida em que aumentamos o número de lados do polígono inscrito, a área do Polígono se aproxima da área da circunferência, veja a figura 29:

Figura 29 – Polígonos inscritos se aproximando da área da circunferência



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=dNHAgYyCpTYlist=LLindex=9>

Daí podemos concluir que a área da circunferência pode ser obtida por:

$$A_c = \lim_{l \rightarrow \infty} A_l$$

onde:  $l$  seria o número de lados do polígono inscrito.

Esta também foi uma das formas que o Eudoxo encontrou para obter a área da circunferência, claro que no período dele ainda não havia as notações para o limite conforme utilizamos hoje em dia, porém a noção intuitiva que ele teve contribuiu para que no futuro outros matemáticos pudessem formalizar estas notações.

**PROPOSTA 2:** Considere a seguinte situação, seja um quadrado conforme a figura 30:

Figura 30 – Divisão sucessiva de um quadrado



Fonte: Autoria própria (2021)

Se hachurarmos a metade do quadrado, teremos então  $\frac{1}{2}$  do quadrado +  $\frac{1}{2}$  do quadrado = 1. Em seguida se hachurarmos uma dessas metades também na metade, assim teremos,  $\frac{1}{2}$  do quadrado +  $\frac{1}{4}$  do quadrado +  $\frac{1}{4}$  do quadrado = 1, se repetirmos esse processo  $n$  vezes, ficaremos com a seguinte PG;

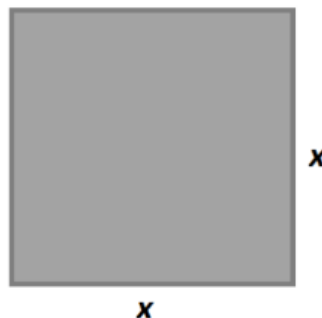
$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

Considere a sequência  $S_n$ , com termo geral dado por  $a_n = \frac{1}{2^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Podemos observar que à medida em que  $n$  cresce indefinidamente, o valor de  $a_n = \frac{1}{2^n}$ , ou seja, a medida em branco, fica cada vez menor, mais próximo de zero, assim conforme  $n$  aumenta, o valor da sequência tende a zero. Matematicamente, isso significa dizer que, quando  $n$  tende ao infinito, o limite dessa sequência é igual a zero, isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ . Por outro lado observe que, a área hachurada vai preenchendo quase todo o quadrado, ou seja, a área hachurada vai se aproximando de 1 ou tendendo a 1, sem no entanto, assumir este valor, matematicamente temos,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ .

**PROPOSTA 3:** : Considere o seguinte situação na área da física: Seja a chapa metálica da figura 31, em expansão e retração, se comportando conforme as tabelas 20 e 21:

Figura 31 – Chapa metálica



Fonte: Autoria própria (2021)

$$A(x) = x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} A(x) = 9$$

Tabela 20 – Valor da Área da chapa de acordo com a expansão de x

Valor x	2,8	2,9	2,99	2,999	2,9999	2,99999
Área	7,84	8,41	8,9401	8,994001	8,99940001	8,9999400001

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 21 – Valor da Área da chapa de acordo com a retração de x

Valor x	3,2	3,1	3,01	3,001	3,0001	3,00001
Área	10,24	9,61	9,0601	9,006001	9,00060001	9,0000600001

Fonte: Fonte: Autoria própria (2021)

Podemos observar que a medida em que a referida chapa vai esquentando haverá uma expansão da sua área, ao passo que, ao ser resfriada teremos uma retração, este comportamento pode ser verificado nas tabelas acima, se não vejamos. Vamos analisar a principio a expansão tabela 20, observe que inicialmente temos um medida de  $2,8\text{cm}$  de lado e área de  $7,84\text{cm}^2$ , a medida em que a chapa é esquentada há uma dilatação do metal aumentando os lados do quadrado e conseqüentemente sua área também aumentará, podemos constatar ainda que, a medida em que os lados da chapa se aproxima de  $3\text{cm}$  por valores menores do que 3 a área da chapa se aproxima de  $9\text{cm}^2$ , por outro lado ao analisarmos a tabela 21, quando a chapa está sendo resfriada e portanto sofrendo um retração de suas medidas, temos também a área da chapa se aproximando de  $9\text{cm}^2$ , com valores dos lados da chapa se aproximando de  $3\text{cm}$  com valores ligeiramente maiores. Assim matematicamente temos:

$$\lim_{x \rightarrow 3} A(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 = 9$$

Concluimos por tanto que, quando os lados da chapa se aproximam de  $3\text{cm}$ , sua área tenderá a  $9\text{cm}^2$ .

**PROPOSTA 4:** Ainda na área da física, vejamos o seguinte problema:

Suponha que uma partícula se desloca sobre uma reta de acordo com a função horária  $S(t) = 2 - t + t^2$ . Sabendo que o deslocamento é dado em metros e o tempo em segundos, determine:

- i) A velocidade média da partícula entre os instantes  $t_0 = 2$  e  $t_1 = 2 + h$ .



ii) A velocidade instantânea da partícula no instante  $t = 2$ .

**SOLUÇÃO:**

i) Seja  $V_m(h)$  a velocidade média da partícula entre os instantes  $t_0 = 2$  e  $t_1 = 2 + h$

$$\begin{aligned} V_m(h) &= \frac{S(t_1) - S(t_0)}{h} \\ &= \frac{S(2+h) - S(2)}{h} \\ &= \frac{2 - 2 - h + 4 + 4h + h^2 - 2 + 2 - 4}{h} \\ &= \frac{h^2 + 3h}{h} \end{aligned}$$

$$V_m(h) = (h + 3) \text{ m/s.}$$

ii) A velocidade instantânea da partícula é o limite da velocidade média  $V_m(h)$ , quando  $h$  tende a zero, isto é, a velocidade instantânea em  $t = 2$  é dada por:

$$\lim_{h \rightarrow 0} V_m = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 3) = 3 \text{ m/s}$$

**PROPOSTA 5:** Considere o seguinte problema na área da economia:

Em uma indústria de medicamentos o custo para produzir um determinado produto é dado por:

$$C(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x < 40 \\ 0,4x + 24, & \text{se } x > 40 \end{cases}$$

Para obtermos o custo de produção deste produto temos que calcular os limites laterais de  $C(x)$ , assim temos:

Para  $x \rightarrow 40^-$  temos :

$$\lim_{x \rightarrow 40^-} 2x = 2 \cdot 40 = 80$$

Para  $x \rightarrow 40^+$  temos :

$$\lim_{x \rightarrow 40^+} (0,4x + 24) = 0,4 \cdot 40 + 24 = 40$$

Logo podemos concluir que o custo de produção deste medicamento será de 80 Reais para produzir menos de 40 unidades, ao passo que, para produzir mais de 40 unidades teremos um custo de 40 Reais, ou seja, se a quantidade produzida for menor os custos serão maiores. Com relação a continuidade desta função, podemos concluir que ela não é contínua pois os limites laterais são divergentes.

**PROPOSTA 6:** Ainda na área da economia, vejamos o seguinte problema:

Considere a seguinte situação hipotética, o montante de imposto de renda  $T(x)$  devido por uma pessoa física que recebeu  $x$  reais é modelado pela seguinte função:

$$T(x) = \begin{cases} 0,15x, & \text{se } 0 \leq x < 25.000,00 \\ 3750 + 0,25 \cdot (x - 25000), & \text{se } 25.000,00 \leq x < 60.000,00 \end{cases}$$

Estude a continuidade do imposto de renda  $T = T(x)$  e verifique se a renda de um contribuinte é sensivelmente diferente se sua receita é ligeiramente inferior ou superior a 25.000,00 Reais.

**SOLUÇÃO:** Para verificarmos a continuidade da função temos que calcular os limites laterais de  $T(x)$ , assim temos:

Para  $x \rightarrow 25000^-$  temos :

$$\lim_{x \rightarrow 25000^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 25000^-} 0,15x = 0,15 \cdot 25.000 = 3.750,00$$

Para  $x \rightarrow 25000^+$  temos :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 25000^+} [3750 + 0,25(x - 25000)] &= \\ &= 3750 + 0,25 \cdot (25000 - 25000) \\ &= 3.750,00 \end{aligned}$$

Podemos concluir que esta função é contínua, pois os limites laterais existem e são iguais. Conclui-se ainda que quando a renda do contribuinte é levemente inferior a 25.000,00 Reais, o valor do imposto será 3.750,00 Reais , já quando é levemente supe-

rior a 25.000,00 Reais o imposto devido também será de 3.750,00 Reais, ou seja, não há mudanças.

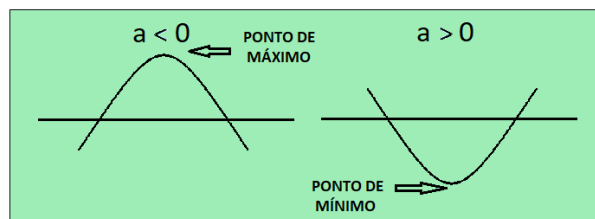
## 5.2 APLICAÇÕES DE DERIVADAS

Após o estudo das regras de derivação, estamos aptos a estudar suas aplicações com maior profundidade. Muitos problemas práticos requerem minimizar um custo ou maximizar um área por exemplo, ou ainda de alguma forma, encontrar a melhor saída de uma situação. Algumas das aplicações mais relevantes do Cálculo Diferencial, são os problemas de otimização, como a própria descrição diz, devemos encontrar uma maneira otimizada de fazer alguma coisa. Esses problemas podem ser reduzidos a encontrar os valores de máximo e mínimo de uma função. Vamos primeiramente relembrar o que seria o ponto de máximo e o ponto mínimo de uma função do 2º grau, vistos no Ensino Médio.

### 5.2.1 PONTO MÁXIMO E PONTO MÍNIMO DE UMA FUNÇÃO DO 2º GRAU

Toda expressão na forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais, sendo  $a \neq 0$ , é denominada função do 2º grau. A representação gráfica de uma função do 2º grau é dada através de uma parábola, que pode ter a concavidade voltada para cima ou para baixo, conforme podemos observar na figura 32.

Figura 32 – Ponto máximo e ponto mínimo de uma função do 2º grau



Fonte: Autoria própria (2021)

Considere o seguinte exemplo:

**Exemplo 31.** Seja a função  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ , calcule o vértice e verifique se a função possui ponto de máximo ou de mínimo.

**SOLUÇÃO:** Podemos verificar que  $a > 0$ , então a parábola possui concavidade voltada para cima, logo possuindo ponto mínimo. Calculando as coordenadas do vértice da parábola, temos:

Se  $a = 1$ ,  $b = -2$  e  $c = 1$ , logo;

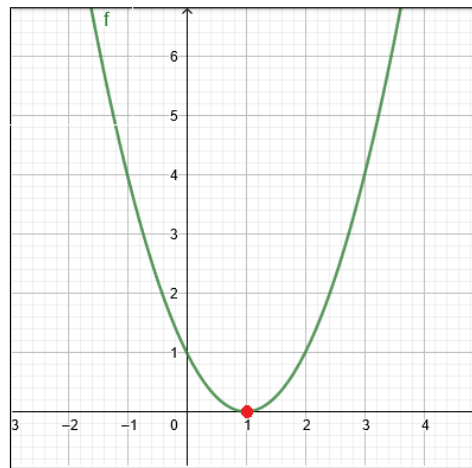
$$Xv = \frac{-b}{2.a} = -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} = 1$$

e

$$v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{4 - 4}{4} = 0$$

Portanto temos um vértice de coordenadas  $(1,0)$ .

Figura 33 – Gráfico da função  $f(x) = x^2 - 2x + 1$

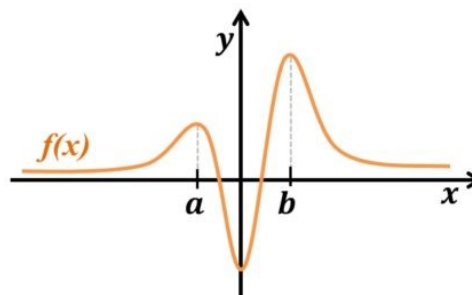


Fonte: Autoria própria (2021)

### 5.2.2 MÁXIMOS E MÍNIMOS DE UMA FUNÇÃO QUALQUER (TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA)

Intuitivamente podemos dizer que os pontos de Máximos e Mínimos de uma função são os valores de picos e de depressões da função. Vejamos o gráfico a seguir;

Figura 34 – Máximos e Mínimos de uma função qualquer



Fonte: [www.dicasdecalculo.com.br/conteudos/derivadas/aplicacoes-de-derivadas/maximo-minimo](http://www.dicasdecalculo.com.br/conteudos/derivadas/aplicacoes-de-derivadas/maximo-minimo)

Observando o gráfico podemos identificar que os valores  $f(a)$  e  $f(b)$  são valores de

máximo local e  $f(0)$  é valor de mínimo local. Ainda mais, podemos dizer que o ponto  $f(b)$  é um máximo absoluto e  $f(0)$  é o valor de mínimo absoluto, pois  $f(b)$  é o maior valor de  $f$  e  $f(0)$  é o menor valor de  $f$ , ou seja;

$$f(0) \leq f(x) \leq f(b)$$

Mas como podemos encontrar estes pontos em uma função qualquer que não se conheça o gráfico?

Observamos que nos pontos de máximos e de mínimos de uma função com intervalos infinitos encontram-se os pontos críticos (pontos de inflexão). Assim, quando derivamos e igualamos a zero, encontramos estes pontos.

$$f'(x) = 0$$

No entanto, nem todo ponto de inflexão é um ponto de máximo ou mínimo, assim devemos fazer o estudo do sinal da função antes e depois dos pontos encontrados, pois o sinal deve mudar.

O Estudo do sinal da função consiste em avaliar o comportamento da função ao longo do domínio, ou seja, descrever onde ela é crescente, decrescente e os pontos de inflexão. Para realizar este estudo utilizamos os conhecimentos de derivada, uma vez que a derivada descreve a inclinação da reta tangente. Assim, quando tem-se:

$f'(x) > 0$ , a inclinação é positiva então a função é crescente.

$f'(x) < 0$ , a inclinação é negativa então a função é decrescente.

$f'(x) = 0$ , a inclinação é nula então a função está nos pontos de inflexão.

### 5.2.3 CRITÉRIO DA PRIMEIRA DERIVADA

Seja  $f$  uma função derivável, possuindo um ponto crítico  $x = c$ , isto é,  $f'(c) = 0$ .

- Se a derivada de  $f$  é positiva à esquerda de  $x = c$  e é negativa à direita de  $x = c$ , então  $x = c$  é um ponto de máximo para  $f$ .
- Se a derivada de  $f$  é negativa à esquerda de  $x = c$  e é positiva à direita de  $x = c$ , então  $x = c$  é um ponto de mínimo para  $f$ .

**Exemplo 32.** Dada a função  $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$ , faça o estudo da função.

**SOLUÇÃO:** Inicialmente devemos derivar a função  $f(x)$ . Como se trata de um polinômio podemos aplicar a derivada da potência em cada termo, onde obtém-se:

$$f'(x) = 6x^2 - 3x - 3$$

Em seguida encontrando os pontos de inflexão, pontos onde a derivada é igual a zero, ou seja, onde a inclinação da reta tangente é nula.

$$f'(x) = 6x^2 - 3x - 3 = 0$$

Como se trata de uma equação do segundo grau pode-se encontrar as raízes, onde temos:

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -\frac{1}{2}$$

Isto quer dizer que os pontos  $x_1$  e  $x_2$  da função  $f(x)$  não são crescentes nem decrescentes, conhecidos os pontos de inflexão, devemos determinar onde a função  $f(x)$  é crescente e decrescente.

Para isso devemos encontrar onde a função é crescente,  $f'(x) > 0$ , e decrescente,  $f'(x) < 0$ , assim:

Para  $f'(x) > 0$ , temos;

$$6x^2 - 3x - 3 > 0$$

Note que pode-se escrever na forma do produto das raízes da diferença como:

$$6(x-1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$$

Assim temos que a função é crescente em:

$$x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 1$$

Analogamente, pode-se encontrar onde ela é decrescente,  $f'(x) < 0$ .

$$6(x-1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) < 0$$

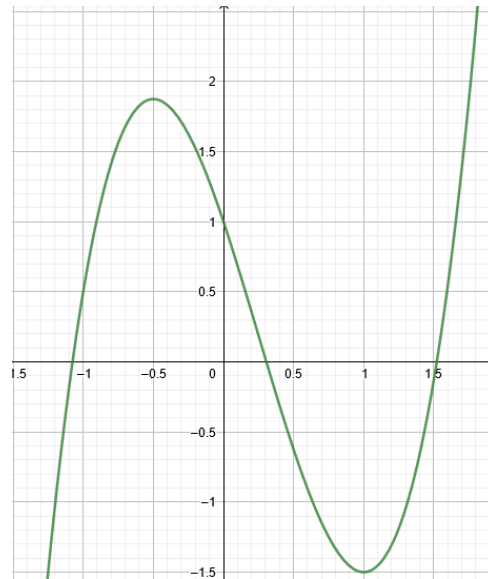
Assim temos que a função é decrescente em:

$$-\frac{1}{2} < x < 1$$

Podemos perceber portanto que os pontos de inflexão são pontos de máximo local em  $x = -\frac{1}{2}$  e mínimo local em  $x = 1$ .

Através do gráfico da função podemos observar melhor o seu comportamento.

Figura 35 – Gráfico da função  $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$



Fonte: Autoria própria (2021)

Podemos perceber portanto que os pontos de inflexão são pontos de máximo local em  $x = -\frac{1}{2}$  e mínimo local em  $x = 1$ .

Até o momento vimos que é possível dizer se determinado ponto crítico é máximo ou mínimo relativo utilizando o teste da primeira derivada. Para isso vimos que é necessário fazermos o estudo do sinal da primeira derivada. Um trabalho relativamente difícil, no entanto pode ser mais conveniente em alguns casos aplicarmos um outro método para estabelecermos as mesmas conclusões, chamado Teste da Segunda Derivada.

#### 5.2.4 TESTE DA SEGUNDA DERIVADA

Seja  $P$  um número crítico de  $f(x)$  tal que  $f'(P) = 0$  e  $f'(x)$  exista em um intervalo aberto  $I$  contendo  $P$ . Suponha que  $f''(P)$  existe, assim;

- $f''(P) < 0$ , então  $f$  tem um valor máximo relativo em  $P$
- $f''(P) > 0$ , então  $f$  tem um valor mínimo relativo em  $P$

**Exemplo 33.** Seja  $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 - 1$ , encontre os valores de máximos e mínimos relativos de  $f$ , caso existam.

**SOLUÇÃO:** Inicialmente devemos encontrar os pontos críticos, como  $f$  é derivável, os pontos estes são pontos tais que  $f'(x) = 0$ . Assim;

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 - 3x^2 + 2x \\ &= x(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

Fazendo  $f'(x) = 0$ , teremos:

$$x(x-1)(x-2) = 0$$

Lodo os pontos de abscisa  $x = 0$ ,  $x = 1$  e  $x = 2$  são os pontos críticos de  $f$ . Agora utilizando o método da segunda derivada, classificamos tais pontos, vejamos;

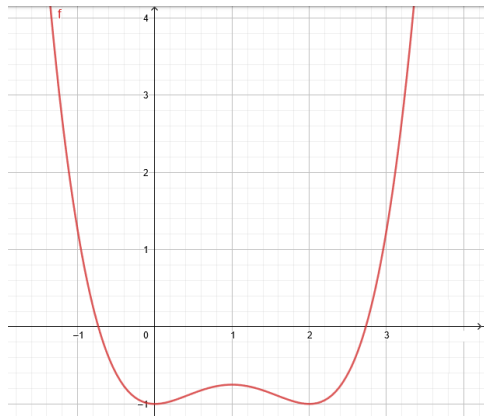
$$f''(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

Analisando os pontos críticos na segunda derivada temos:

- $f''(0) = 2 > 0$ , ou seja,  $x = 0$  é um ponto de mínimo relativo
- $f''(1) = -1 < 0$ , ou seja,  $x = 1$  é um ponto de máximo relativo
- $f''(2) = 2 > 0$ , ou seja,  $x = 2$  é um ponto de mínimo relativo

Graficamente temos;

Figura 36 – Gráfico da função  $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 - 1$



Fonte: Autoria própria (2021)

Na sequência, abordaremos resumidamente algumas propostas, desta vez de aplicações de derivadas, para introdução destes conceitos de forma intuitiva no Ensino Médio.

**PROPOSTA 7:** Considere a seguinte situação na área da física: Suponha que uma bola foi deixada cair do posto de observação de uma torre, 450 m acima do solo. Sabendo que a equação do movimento é modelada por  $S = f(t) = 4,9t^2$ , calcule:

- i) Qual a velocidade da bola após 5s?
- ii) Com qual velocidade a bola chega ao solo?

**SOLUÇÃO:** Supondo que a velocidade média seja calculada em intervalos cada vez menores  $[a, a+h]$ , ou seja, fazendo  $h$  tender a 0. Assim sendo podemos definir velocidade



(ou velocidade instantânea)  $V(a)$  no instante  $t = a$  como sendo o limite dessas velocidades médias, como isso teremos:

$$V(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Em outras palavras, temos que a velocidade no instante  $t = a$  é igual à inclinação da reta tangente em um ponto  $P$ , o que já sabemos isso é a derivada de  $S'$ . Inicialmente usaremos a equação do movimento  $S = f(t) = 4,9t^2$  para encontrarmos a velocidade  $V(a)$  após a segundos, vejamos;

$$\begin{aligned} V(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4,9(a+h)^2 - 4,9a^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4,9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4,9(2ah + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4,9(2a + h) \end{aligned}$$

$$V(t) = 9,8a = S'$$

Logo,

- i) A velocidade após 5s é  $v(5) = 9,8 \cdot 5 = 49 \text{ m/s}$ .
- ii) Sabendo que o posto de observação está a 450 m de altura, a bola vai atingir o solo em  $t_1$  quando  $S(t_1) = 450\text{m}$ , isto é;

$$4,9t_1^2 = 450$$

Assim,

$$t_1^2 = \frac{450}{4,9}$$

Ou ainda,

$$t_1 = \sqrt{\frac{450}{4,9}} \cong 9,6 \text{ s}$$

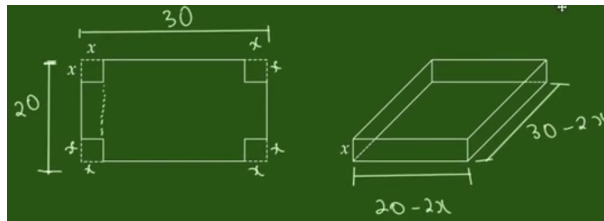
Portanto, a velocidade que a bola atinge o solo é;

$$V(t_1) = 9,8 \cdot t_1 = 9,8 \cdot 9,6 \cong 94 \text{ m/s}$$

**PROPOSTA 8:** Considere a seguinte situação na área da otimização geométrica:

De uma chapa de alumínio, com dimensões de  $30 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$  conforme figura 37, serão recortados quatro quadrados de lado medindo  $x \text{ cm}$ . Em seguida, a chapa será dobrada de modo que forme uma caixa. Determine o valor de  $x$  para que o volume dessa caixa seja o máximo possível.

Figura 37 – Caixa de alumínio



Fonte: [https://www.youtube.com/watch?v=n8q5qCa\\_N5Q&list=LLindex=9](https://www.youtube.com/watch?v=n8q5qCa_N5Q&list=LLindex=9)

**SOLUÇÃO:** Observar que o valor de  $x$  varia em um intervalo de  $[0,10]$ , e que com esta caixa temos um paralelepípedo, e para calcularmos este volume temos:

$$V(x) = \text{Área da Base} \cdot \text{Altura}$$

Logo,

$$\begin{aligned} V(x) &= (20 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot x \\ &= (600 - 100x + 4x^2) \cdot x \\ &= 4x^3 - 100x^2 + 600x \end{aligned}$$

Agora vamos achar os pontos críticos de  $V(x)$ , para isso fazemos  $V'(x) = 0$ ;

$$V'(x) = 12x^2 - 200x + 600$$

Fazendo  $V'(x) = 0$ , temos;

$$12x^2 - 200x + 600 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º teremos:

$$x_1 = \frac{25 + 5\sqrt{7}}{3} \cong 12,74$$

e

$$x_2 = \frac{25 - 5\sqrt{7}}{3} \cong 3,92$$

Como por construção temos que o  $x$  está no intervalo  $[0,10]$ , então o nosso ponto crítico será:

$$x_2 = 3,92$$

Porém não é possível determinarmos se este ponto é de máximo ou de mínimo, assim para determinarmos o ponto de máximo devemos fazer o teste da segunda derivada, observando que para  $x$  ser máximo temos que ter;

$$V''(x) < 0$$

Assim temos,

$$V''(x) = 24x - 200$$

Observe que,

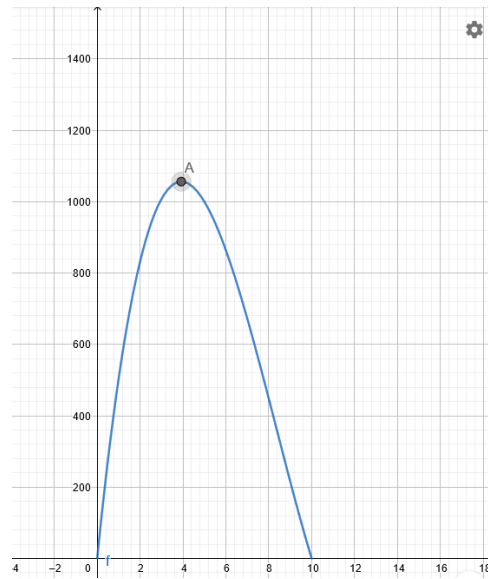
$$V''(3,92) = 24 \cdot 3,92 - 200 = -105,92 < 0$$

Portanto o valor de  $x$  para que o volume dessa caixa seja o máximo possível é:

$$x = 3,92$$

Analisando graficamente temos:

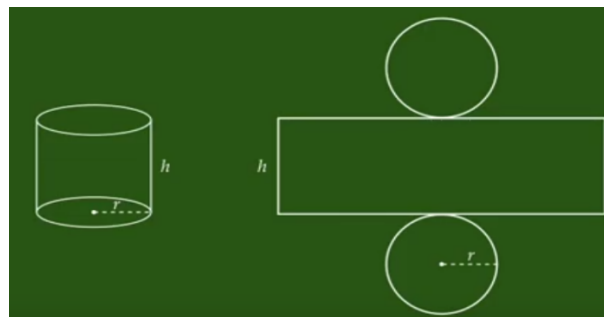
Figura 38 – Gráfico da função  $V(x) = (20 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot x$



Fonte: Autoria própria (2021)

**PROPOSTA 9:** Considere a seguinte situação, ainda na área da otimização geométrica: Deseja-se projetar uma lata cilíndrica para conter 300 ml de um determinado líquido. Determine o raio da base  $r$  e a altura  $h$  que minimiza a quantidade de material necessário para fabricar essa lata. Lembrando que o volume do cilindro é dado por:  $V_c = \pi r^2 \cdot h$ ; e a área do cilindro é  $A_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ .

Figura 39 – Lata cilíndrica



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=B8BwZwXpB4Y>

**SOLUÇÃO:** Sabendo que 1 ml corresponde a  $1 \text{ cm}^3$ .

Com isso temos  $V = 300 \text{ ml} \Rightarrow V = 300 \text{ cm}^3$ ;

Daí,

$$\pi r^2 h = 300$$

Isolando  $h$  teremos;

$$h = \frac{300}{\pi r^2}$$

Substituindo  $h$  em  $A$ , teremos;

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{300}{\pi r^2} \end{aligned}$$

$$A = 2\pi r^2 + \frac{600}{r}$$

Logo a área total da lata será;

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{600}{r}$$

Derivando esta função teremos;

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{600}{r^2}$$

Agora calculando o ponto crítico,  $A'(r) = 0$ , ou seja;

$$4\pi r - \frac{600}{r^2} = 0$$

$$\frac{4\pi r^3 - 600}{r^2} = 0$$

$$4\pi r^3 - 600 = 0$$

$$r^3 = \frac{600}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$$

Fazendo o teste da segunda derivada teremos;

$$A''(r) = 4\pi + \frac{1200}{r^3}$$

Para que a área da lata seja mínima temos que,  $A''(r) > 0$ , ou seja;

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right) > 0$$

$$4\pi + \frac{1200}{\left(\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right)^3} > 0$$

$$4\pi + \frac{1200}{\frac{150}{\pi}} > 0$$

$$12\pi > 0$$

Logo,  $A''\left(\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right) > 0$ , assim temos que  $r$  será um ponto de mínimo.

Portanto,

$$h = \frac{300}{\pi r^2}$$

$$= \frac{300}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right)^2} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right)}{\left(\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right)}$$

$$= \frac{300 \left(\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right)}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right)^3}$$

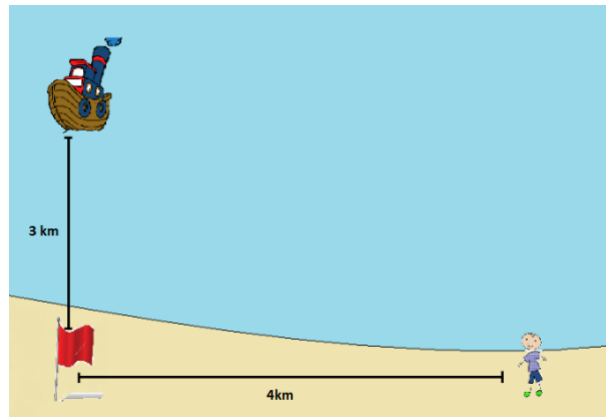
$$= \frac{300 \left(\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\right)}{150}$$

$$h = 2\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$$

**PROPOSTA 10:** Ainda na área da otimização geométrica vejamos mais um exemplo:

Um garoto está na areia da praia a 4 km de uma bandeira vermelha, porém ele quer chegar até um barco que está a 3 km da praia, na altura da bandeira, conforme figura 40. Se o garoto corre a 5 km/h e nada a 2 km/h, qual caminho levará ele até o barco de forma mais rápida?

Figura 40 – Distância percorrida até o barco

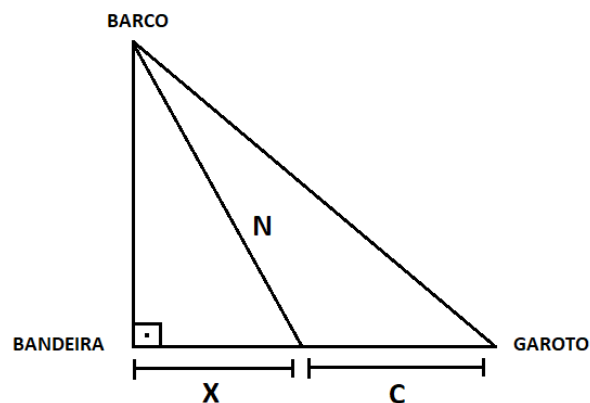


Fonte: Autoria própria (2021)

**SOLUÇÃO:** : Podemos observar que o garoto tem várias possibilidades para chegar até o barco, por exemplo, ele pode nadar na diagonal diretamente até o barco, ou correr um pouco e depois nadar, ou ainda correr toda a distância até a bandeira e depois nadar até o barco, no entanto o problema nos propõe que este percurso seja feito no menor tempo possível tendo em vista a velocidade em que o garoto corre e nada, para isso devemos seguir os seguintes passos:

**PASSO 1:** Encontrar a função que modele este deslocamento, ou seja, encontrar um função que determine o tempo em função de um determinada variável. Inicialmente vamos traduzir o nosso percurso em um figura geométrica para facilitar a nossa interpretação, observe a figura 41.

Figura 41 – Figura geométrica que representa o percurso



Fonte: Autoria própria (2021)

Onde:

$C$  = Distância que o garoto corre

$X$  = O que restou para os 4 km

$N$  = Distância que o garoto nada

Note que,

$$C = 4 - X$$

$$N^2 = X^2 + 3^2$$

$$N = \sqrt{x^2 + 9}$$

Observe que a função que buscamos é a do tempo necessário para completarmos o percurso, ou seja, o tempo total que será;

$$T_t = T_C + T_N$$

Note que;

$$Vm = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Logo;

$$\Delta T = \frac{\Delta S}{Vm}$$

Assim teremos;

$$T_t = \frac{C}{5} + \frac{N}{2}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} T_t(x) &= \frac{4 - X}{5} + \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{2} \\ &= \frac{2(4 - x) + 5\sqrt{x^2 + 9}}{10} \end{aligned}$$

$$T_t(x) = \frac{1}{10} \cdot (8 - 2x + 5\sqrt{x^2 + 9})$$



**PASSO 2:** Devemos derivar a função  $T_t$  em relação a  $x$ , então temos;

$$T_t'(x) = \frac{1}{10} \cdot \left( -2 + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 9}} \right)$$

**PASSO 3:** Devemos encontrar os pontos críticos, para isso:  $T_t'(x) = 0$

$$\frac{1}{10} \cdot \left( -2 + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 9}} \right) = 0$$

$$\frac{5x}{\sqrt{x^2 + 9}} = 2$$

$$\left( \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 9}} \right)^2 = 2^2$$

$$\frac{25x^2}{x^2 + 9} = 4$$

$$4x^2 + 36 = 25x^2$$

$$25x^2 - 4x^2 = 36$$

$$21x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{\frac{12}{7}} \cong 1,31 \text{ km}$$

**Obs.:** Como o  $x$  trata-se de um valor de distância ele só pode assumir valores positivos, logo o único ponto crítico existente é  $x \cong 1,31 \text{ km}$ .

**PASSO 4:** Devemos verificar se  $x$  é um ponto de mínimo, para isso usaremos o teste da primeira derivada;

**Para  $x < 1,31$ , usando  $x = 1$ , por exemplo:**

$$\begin{aligned} T_t'(1) &= \frac{1}{10} \cdot \left(-2 + \frac{5x}{x^2 + 9}\right) \\ &= \frac{1}{10} \cdot \left(-2 + \frac{5}{\sqrt{10}}\right) \end{aligned}$$

$$T_t'(1) \cong -0,042$$

**Para  $x > 1,31$ , usando  $x = 2$ , por exemplo:**

$$\begin{aligned} T_t'(2) &= \frac{1}{10} \cdot \left(-2 + \frac{5}{\sqrt{x^2 + 9}}\right) \\ &= \frac{1}{10} \cdot \left(-2 + \frac{10}{\sqrt{13}}\right) \end{aligned}$$

$$T_t'(2) \cong 0,077$$

Logo podemos observar que para valores menores do que  $x$ ,  $T_t'(x)$  assume valores negativos, por outro lado para valores maiores do que  $x$ ,  $T_t'(x)$  assume valores positivos, isso nos garante portanto que  $x \cong 1,31$  é um ponto de mínimo.

Agora precisamos verificar se  $x \cong 1,31$  é um ponto de mínimo local ou global, para isso temos o último passo.

**PASSO 5:** Teste dos extremos, para isso devemos identificar inicialmente qual o domínio da nossa função; Observe que  $Dm$  de  $T_t(x) = ]0; 4[$ , pois o  $x$  só poderá variar dentro deste intervalo.

Agora para sabermos se nosso ponto crítico é global, devemos testar o limite dos extremos do domínio da função, assim teremos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{10} \cdot (8 - 2x + 5\sqrt{x^2 + 9}) \right] = \frac{23}{10} = 2,3 \text{ hs}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left[ \frac{1}{10} \cdot (8 - 2x + 5\sqrt{x^2 + 9}) \right] = \frac{25}{10} = 2,5 \text{ hs}$$

Verificando agora se  $x \cong 1,31$  é menor do que os extremos calculados, temos:

$$T_t(1,31) = \frac{1}{10} \cdot (8 - 2 \cdot 1,31 + 5\sqrt{1,31^2 + 9})$$

$$T_t(1,31) \cong 2,17 \text{ hs}$$

Podemos observar então que  $T_t(1,31) \cong 2,17 \text{ hs}$  é menor que os valores encontrados nos extremos, logo  $x \cong 1,31$  é um mínimo global, ou seja, é o menor valor que ao substituímos em  $T_t(x)$  obteremos o menor tempo para o percurso.

Assim temos;

$$C = 4 - X$$

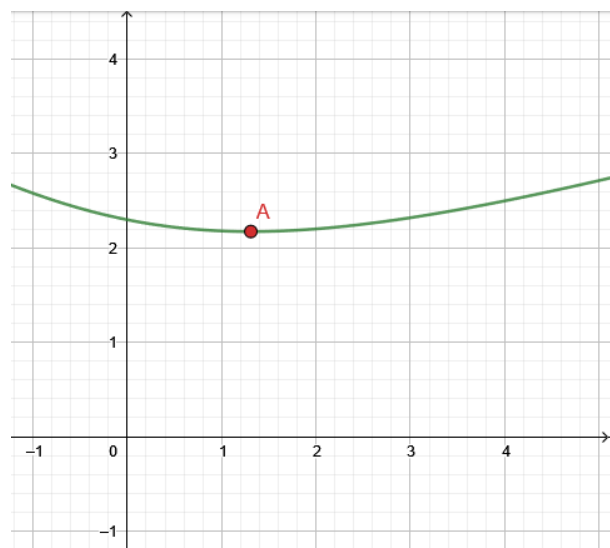
$$C = 4 - 1,31 = 2,69 \text{ km}$$

$$N = \sqrt{x^2 + 9}$$

$$N = \sqrt{1,31^2 + 9} = 3,27 \text{ km}$$

Portanto para que o garoto chegue ao barco com menor tempo ele deve correr 2,69 km e nadar 3,27 km. Analisando graficamente temos:

Figura 42 – Gráfico da função  $T_t(x) = \frac{1}{10} \cdot (8 - 2x + 5\sqrt{x^2 + 9})$



Fonte: Autoria própria (2021)

**PROPOSTA 11:** Na área da economia vejamos um exemplo de maximização de lucros:

Uma empresa determina que  $x$  unidades de seu produto podem ser vendidas a  $P$  dólares a unidade, onde  $x = 1000 - p$ . Sendo o custo de produção de  $x$  unidades diárias modelado pela seguinte função,  $C(x) = 3000 + 20x$ . Determine:

- i) A função receita  $R(x)$
- ii) A função lucro  $L(x)$
- iii) Supondo que a capacidade máxima de produção é de 500 unidades por dia, determine quantas unidades a empresa deve produzir e vender por dia para maximizar seu lucro
- iv) O lucro máximo
- v) Preço unitário para obter o lucro máximo

**SOLUÇÃO:**

- i) Sabendo que a receita de uma empresa é dado por:  $R(x) = p \cdot x$ , onde  $p$  é o preço do produto e o  $x$  o número de unidades vendidas.

Note que as unidades do produto é dado na questão, que é:  $x = 1000 - p$ , isolando o preço temos:

$$p = 1000 - x$$

Assim teremos;

$$R(x) = (1000 - x) \cdot x$$

$$R(x) = 1000x - x^2$$

- ii) Sabendo que a função lucro é dada pela receita menos o custo de produção, ou seja;

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

Note que a questão nos fornece a função custo:  $C(x) = 3000 + 20x$

Daí teremos;

$$L(x) = 1000x - x^2 - 3000 + 20x$$

Logo a função lucro será:

$$L(x) = -x^2 + 980x - 3000$$

- iii) A questão pede para maximizarmos o lucro, para isso de posso da função lucro  $L(x)$ , devemos achar então o seu ponto de máximo.

Note que o ponto de máximo da função deve estar no intervalo  $0 < x < 500$ , já que a capacidade máxima de produção é de 500 unidades.

Inicialmente vamos encontrar os pontos críticos da função, para isso devemos fazer  $L'(x) = 0$ .

$$L'(x) = -2x + 980$$

$$-2x + 980 = 0$$

$$x = 490$$

Logo o máximo local da nossa função é 490.

Agora através da segunda derivada devemos analisar se esse  $x$  encontrado também é um máximo global.

Assim temos;

$$L''(x) = -2$$

Logo pelo teste da segunda derivada podemos observar que  $L''(x) < 0$ , então  $x = 490$  é o ponto de máximo da função.

Portanto o número de unidades que a empresa deve produzir para obter o maior lucro diário deve ser de 490.

- iv) Para obtermos o lucro máximo é só aplicarmos  $x = 490$  em  $L(x)$ , assim teremos;

$$L(x) = -x^2 + 980x - 3000$$

$$L(x) = -(490)^2 + 980 \cdot 490 - 3000$$

$$L(x) = 237.100 \text{ Dólares}$$

v) Temos que;

$$p = 1000 - x$$

Logo,

$$p = 1000 - 490$$

$$p = 510 \text{ Dólares}$$

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer deste trabalho mostramos a importância da introdução das noções intuitivas do Cálculo no Ensino Médio, com a finalidade de demonstrar a real possibilidade de desenvolver metodologias práticas para que sejam aplicadas de forma contextualizadas e interdisciplinar, em vários ramos das ciências, assim como também os conceitos de limites e derivadas por meios de questões já trabalhadas na Educação Básica, proporcionando assim um maior suporte para os futuros alunos de cursos superiores, possibilitando um contato prévio com a disciplina de Cálculo no Ensino Médio, buscando reduzir os índices de evasões e reprovações. Destacamos ainda, como se deu o processo histórico, que constituiu no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral ao longo do tempo e as mudanças no currículo das escolas de educação básicas do Brasil, onde o mesmo não é mais trabalhado.

Observamos no decorrer do trabalho que a abordagem dos conceitos de limites podem ser naturalmente associados aos conceitos de funções já trabalhados principalmente no 1º ano do Ensino Médio de forma concomitantes, já os conceitos de derivada podem perfeitamente ser associados as definições de taxa de variação, velocidade e aceleração instantânea sendo assim possível a contextualização do tema na resolução de vários problemas de aplicação, como na Física, na Geometria, na Economia entre outros, proporcionando assim uma melhor compreensão destes assuntos, preparando o aluno para encarar a disciplina de Cálculo em todos os cursos de exatas no Ensino Superior.

E por fim desejamos despertar uma discussão em torno desta temática, instigando a pesquisa a respeito desta possibilidade e assim constatarmos na prática os possíveis benefícios desta proposta de ensino.

## REFERÊNCIAS

- [1] AUTORIA. Dicas de Cálculo. [N.a.]. Disponível em: <https://www.dicasdecalculo.com.br/conteudos/derivadas/aplicacoes-de-derivadas/maximo-minimo-funcao/>. Acesso em: 5 set. 2021.
- [2] AVILA, G. **O Ensino do Cálculo no Segundo Grau**. In: Revista do Professor de Matemática, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991.
- [3] BONJORNO, Regina A. **Física Fundamental**. São Paulo: FTD, 1999.
- [4] BOYER, Carl B.. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- [5] DEVLIN, K. **O gene da Matemática**. 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2010.
- [6] DISCURSUS. A filosofia e seus meios. [N.a.]. Disponível em: <https://forumdediscursus.wordpress.com/antiga-2/tudo-parado/>. Acesso em: 14 mar. 2021.
- [7] HERMES ANTÔNIO PEDROSO. REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA. [N.a.]. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/122615/ISSN2177-5095-2013-03-01-13.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 20 mar. 2021.
- [8] EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.
- [9] FLEMMING, Diva Marília. **Cálculo A: Funções, Limite, derivação, integração**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- [10] GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- [11] GUILHERME, A. **A história do Cálculo**. Phyllos.net (Site). Disponível em: <https://www.phylos.net/2017-12-18/a-historia-do-calculo/>. Acesso em: 21 jan. 2021.
- [12] JOSÉ ROBERTO LESSA. Info Escola. [N.a.]. Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/limites/>. Acesso em: 29 mar. 2021.
- [13] MACHADO, N. J. **Cálculo no ensino médio: já passou da hora**. Imaginário puro (site). Disponível em: <https://imaginariopuro.wordpress.com/2015/10/28/calculo-no-ensino-medio-japassou-da-hora/>. Acesso em: 15 jun. 2021.
- [14] MAOR, Eli. **A história de um número**. Tradução de Jorge Calife. 4<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.



- [15] MATEMÁTICA. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, p. 111 e 120
- [16] MATHEUS HENRY. Unicentro. 2017. Disponível em: <https://www3.unicentro.br/petfisica/2017/09/21/paradoxo-da-dicotomia/>. Acesso em: 13 mar. 2021.
- [17] RAFAEL PROCOPIO. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO, LIMITES E HISTÓRIA. 2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=dNHAgYyCpTY>. Acesso em: 23 ago. 2021.