



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GILSON PACÍFICO DA COSTA

CÍRCULOS NOTÁVEIS NO TRIÂNGULO

CAMPINA GRANDE
2021

GILSON PACÍFICO DA COSTA

CÍRCULOS NOTÁVEIS NO TRIÂNGULO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE - PB

2021

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

C837c Costa, Gilson Pacífico da.
Círculos notáveis no triângulo [manuscrito] / Gilson Pacifico da Costa. - 2021.
60 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso validValue(\$value, \$mensagem, \$newValue = false, \$subvalue = false, \$subvalueAttribute = false) (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.

"Orientação : Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Geometria plana. 2. Círculos notáveis. 3. Triângulos. I.

Título

21. ed. CDD 516.22

GILSON PACÍFICO DA COSTA

CÍRCULOS NOTÁVEIS NO TRIÂNGULO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovado em: 29/10/2021

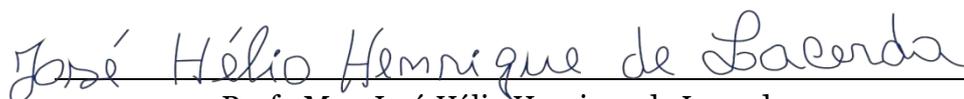
BANCA EXAMINADORA



Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas(Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba(UEPB)



Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho
Universidade Estadual da Paraíba(UEPB)



Prof. Me. José Hélio Henrique de Lacerda
Universidade Federal da Paraíba(UFPB)

Dedico este trabalho à Deus, agradeço a Ele pelo dom da vida, pois sem Ele eu não estaria aqui escrevendo estas palavras.

AGRADECIMENTOS

Neste momento tão importante, quero agradecer primeiramente a Deus pela grande oportunidade de concluir o curso, pois sem a ajuda Dele jamais conseguiria chegar até onde cheguei. Entre idas e voltas para a universidade o Senhor me guardou de todo mal e concedeu grandes livramentos.

Sou grato a minha esposa por estar ao meu lado todo este período que duraram quase 5 anos, e ser compreensiva quando necessário, quando tivemos que renunciar muitas vezes de estarmos juntos, para que eu pudesse estudar.

Agradeço aos meus pais que me incentivaram desde o começo para que com dedicação concluísse o curso. Sou grato a todos meus familiares e amigos pelo apoio, em particular, aos meus colegas de curso que acabaram tornando-se amigos, Jefferson Alves e Lucas Eduardo, que desde o início, em união, sempre nos ajudávamos.

Agradeço também a minha professora e orientadora Dra. Luciana Roze de Freitas por ter aceitado o desafio de orientar-me neste trabalho, pela força e dedicação, em que com o nosso melhor conseguimos realizá-lo.

Por fim, com imensa satisfação, sou grato também aos professores José Hélio, Joelson Pimentel, Conceição Vieira, Emanuela Régia, ao qual fui monitor das duas últimas, e aos demais professores meus sinceros agradecimentos por todo conhecimento que foi transmitido, para que, assim, me tornasse um professor.

“A matemática é o alfabeto no qual Deus escreveu o universo”.

Galileu Galilei

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre alguns círculos notáveis no triângulo. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica, onde buscamos reunir resultados envolvendo alguns círculos que estão associados aos elementos de um triângulo e que apresentam propriedades interessantes. O estudo aborda vários conteúdos da geometria plana, assim como, apresenta alguns conceitos e resultados sobre círculos que são pouco explorados nos cursos básicos de geometria. Para melhor compressão, utilizamos recursos tecnológicos tais como, o *GeoGebra* e o *OpenBoard* a fim de descrever as construções geométricas. O trabalho apresenta inicialmente um contexto histórico sobre a geometria e o círculo dos nove pontos, em seguida, abordamos uma teoria que serve para melhor compreensão dos círculos notáveis e, por fim, incluímos um capítulo com aplicações onde abordamos alguns problemas acerca do conteúdo estudado.

Palavras-chave: Geometria plana. Círculos notáveis. Triângulos.

ABSTRACT

This work presents a study of some notable circles in the triangle. This is a bibliographical research, where we seek to gather results involving some circles that are associated with the elements of a triangle and that have interesting properties. The study covers several contents of plane geometry, as well as presents some concepts and results about circles that are little explored in basic geometry courses. To better compress, use technological resources such as GeoGebra and OpenBoard in order to define them as geometric constructions. The work presents a historical context about geometry and the nine-point circle, then we approach a theory that serves to better understand the remarkable circles and, finally, we include a chapter with applications where we address some problems related to the studied content.

Keywords: Plane geometry. Remarkable circles. Triangles.

LISTA DE FIGURAS

3.1	Circunferência e círculo	16
3.2	Raio.....	17
3.3	Cordas.....	17
3.4	Diâmetro	17
3.5	Arco	18
3.6	Arco capaz	18
3.7	Setor circular.....	19
3.8	Ângulo central	19
3.9	Coroa circular	19
3.10	Reta tangente	20
3.11	Ângulo inscrito	21
3.12	Propriedades das tangentes por um ponto exterior	21
3.13	Triângulo	22
3.14	Congruência de triângulos	23
3.15	Caso de congruência LAL	24
3.16	Caso de congruência ALA	24
3.17	Caso de congruência LLL	24
3.18	Caso de congruência LAAo	25
3.19	Caso de congruência CH	25
3.20	Altura.....	26
3.21	Mediana	26
3.22	Mediatriz.....	26
3.23	Bissetriz	27
3.24	Ortocentro	27
3.25	Baricentro	28
3.26	Circuncentro	28
3.27	Incentro.....	28
4.1	Circunferência inscrita em um triângulo	30
4.2	Circunferência circunscrita em um triângulo	31
4.3	Três circunferências ex-inscritas em um triângulo	32
4.4	Circunferência ex-inscrita em um triângulo	33
4.5	Bissetriz interna e bissetriz externa em um triângulo	33
4.6	Circunferência dos nove pontos 01	34
4.7	Circunferência dos nove pontos 02	35
4.8	Centro da circunferência dos nove pontos	36

4.9	Tangência das circunferências ex-incritas e dos nove pontos	37
4.10	Ponto de Lemoine	38
4.11	Circunferência de Lemoine	39
4.12	Circunferência de Taylor	40
5.1	Alguns segmentos notáveis do triângulo ABC	41
5.2	Relação entre incentro e ex-incentro do triângulo ABC 01	43
5.3	Relação entre incentro e ex-incentro do triângulo ABC 02	43
5.4	Relação entre incentro e ex-incentro do triângulo ABC 03	44
5.5	Relação entre incentro e ex-incentro do triângulo ABC 04	45
5.6	Simétricos do ortocentro e circunferência circunscrita 01	45
5.7	Simétricos do ortocentro e circunferência circunscrita 02	46
5.8	Simétricos do ortocentro e circunferência circunscrita 03	46
5.9	Construção da circunferência inscrita 01	47
5.10	Construção da circunferência inscrita 02	48
5.11	Construção da circunferência inscrita 03	48
5.12	Construção da circunferência inscrita 04	49
5.13	Construção da circunferência circunscrita 01	49
5.14	Construção da circunferência circunscrita 02	50
5.15	Construção da circunferência circunscrita 03	50
5.16	Construção da circunferência dos nove pontos 01	51
5.17	Construção da circunferência dos nove pontos 02	51
5.18	Construção da circunferência dos nove pontos 03	52
5.19	Construção da circunferência dos nove pontos 04	52
5.20	Construção da circunferência dos nove pontos 05	53
5.21	Construção da circunferência dos nove pontos 06	53
5.22	Construção da circunferência dos nove pontos 07	54
5.23	Construção da circunferência dos nove pontos 08	54
5.24	Construção da circunferência dos nove pontos 09	55
5.25	Construção da circunferência dos nove pontos 10	55
5.26	Construção da circunferência de Taylor 01	56
5.27	Construção da circunferência de Taylor 02	56
5.28	Construção da circunferência de Taylor 03	57
5.29	Construção da circunferência de Taylor 04	57
5.30	Construção da circunferência de Taylor 05	58

LISTA DE SÍMBOLOS E NOTAÇÕES

π	Pi
α	Alfa
Γ	Gama
\sphericalangle	Ângulo
\in	Pertence
$=$	Igual
\perp	Perpendicular
\parallel	Paralelo
\Rightarrow	Implica
\Leftrightarrow	Se, e somente se
\triangle	Triângulo
\hat{A}	Ângulo A
\widehat{AB}	Arco AB
\overleftrightarrow{BC}	Reta BC
\equiv	Congruência
AB	Segmento de reta AB
\overline{AB}	Medida do segmento de reta AB
ABC	Triângulo com vértices A , B e C
LAL	Lado, ângulo, lado
ALA	Ângulo, lado, ângulo
LLL	Lado, lado, lado
LAAo	Lado, ângulo, ângulo oposto
CH	Cateto-hipotenusa

SUMÁRIO

	Página
1	INTRODUÇÃO 12
2	CONTEXTO HISTÓRICO 13
2.1	Geometria 13
2.2	Círculo dos nove pontos 14
3	TEORIA PRELIMINAR 16
3.1	Circunferência e círculo 16
3.1.1	Conceitos preliminares 16
3.1.2	Elementos 16
3.2	Triângulos 21
3.2.1	Definição e classificações de triângulos 21
3.2.2	Congruência de triângulos 23
3.2.3	Pontos notáveis de um triângulo 25
4	CÍRCULOS NOTÁVEIS 30
4.1	Circunferência inscrita 30
4.2	Circunferência circunscrita 31
4.3	Circunferência ex-inscrita 31
4.4	Circunferência dos nove pontos 34
4.5	Circunferência de Lemoine 37
4.6	Circunferência de Taylor 39
5	APLICAÇÕES 41
5.1	Alguns resultados 41
5.2	Construção geométrica com régua e compasso 47
5.2.1	Circunferência inscrita 47
5.2.2	Circunferência circunscrita 49
5.3	Construção geométrica no <i>GeoGebra</i> 50
5.3.1	Circunferência dos nove pontos 51
5.3.2	Circunferência de Taylor 55
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS 59
	REFERÊNCIAS 59

1 INTRODUÇÃO

No estudo da geometria plana encontramos alguns elementos associados ao triângulo que apresentam importantes propriedades. Esses elementos são chamados elementos notáveis de um triângulo. Os mais comuns são os pontos notáveis, onde os mais conhecidos são: o baricentro, o ortocentro, o incentro e o circuncentro. No entanto, existem outros elementos notáveis do triângulo que são pouco explorados nos cursos básicos de geometria plana, a exemplo de retas, círculos e triângulos notáveis. Este trabalho trata-se de uma pesquisa bibliográfica onde o objetivo principal é reunir resultados envolvendo alguns círculos que estão associados aos elementos de um triângulo e que apresentam propriedades interessantes.

O estudo aborda vários conteúdos da geometria plana, como circunferência, círculos e triângulos. Ao longo do trabalho, definimos cada uma dessas figuras, apresentamos seus elementos, classificações e alguns resultados.

Atualmente, é cada vez mais comum fazer uso de recursos tecnológicos como auxílio didático, independente de qual seja a área de estudo, por isto, fizemos uso dessas ferramentas tão importantes para descrever as construções geométricas. Um deles foi o *software GeoGebra*, o qual nos possibilita uma combinação entre álgebra e geometria, e, nos dá a oportunidade de construir gráficos matemáticos precisos, sejam circunferências, retas, polígonos, entre outros. Com ele, construímos a maioria das figuras contidas neste trabalho. Um outro *software* utilizado foi o *OpenBoard*, o qual nos possibilita realizar diferentes tipos de construções, mais precisamente utilizando as equivalentes a régua e compasso. Com isso, construímos as circunferências inscrita e circunscrita no triângulo de modo bastante detalhado e com eficácia.

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, sendo este da introdução. Em seguida, temos um capítulo contendo o contexto histórico sobre a geometria e o círculo dos nove pontos. O terceiro capítulo aborda a teoria preliminar sobre circunferência, círculos e triângulos que é necessária para uma melhor compreensão do capítulo seguinte, o qual apresenta os círculos notáveis que abordamos neste trabalho. Por fim, temos um capítulo com aplicações e construções geométricas, onde abordamos alguns resultados relativos a circunferências e triângulos e detalhamos passo a passo a construção de alguns círculos utilizando os recursos tecnológicos que servem como ferramenta para o ensino e aprendizagem, assim como, nos auxilia para a visualização das figuras.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

Neste capítulo, vamos apresentar um breve histórico sobre o estudo da geometria, ou seja, destacar como foi a sua origem e os principais matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento. Em seguida, falamos dos círculos, em particular, do círculo de nove pontos.

2.1 Geometria

O conhecimento que se tem atualmente sobre a geometria é bastante avançado, porém, nem sempre foi assim. Apesar do significado da palavra geometria ser medida de terra, não temos a certeza de sua origem. Já na Grécia Antiga, Heródoto (484-425 a.C.) e Aristóteles (384-322 a.C.) tinham pensamentos distintos a respeito disto:

Herótoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a geometria que tinham em mente tinha raízes mais antigas. Heródoto mantinha que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terra após cada inundação anual no vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria. (BOYER, 1974, p. 4).

É possível considerar as duas teorias, visto que os geômetras egípcios eram às vezes chamados de “esticadores de corda”, pois as cordas eram usadas tanto para traçar as bases de templos bem como para realinhar demarcações apagadas de terras.

Os registros históricos que possuímos hoje sobre a geometria são em maior quantidade dos egípcios e babilônicos, em comparação aos indianos e chineses. Estes últimos usavam materiais muito perecíveis, como fibra de entrecasca de árvore e bambu, enquanto que, os egípcios usavam pedras e papiros e os babilônios utilizavam tábulas de argila cozida, que são imperecíveis.

A noção de distância foi, sem dúvida, um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos. Assim, como a medida de terra, que fez com que houvesse uma noção de figuras geométricas simples, como quadrados, retângulos e triângulos. Outros conceitos como vertical, paralela e perpendicular foram surgindo por meio das construções de muros e moradias.

Muitas observações do cotidiano devem ter levado o homem a diversas concepções, de círculos, pois existiam inúmeros fatos, como o contorno do sol e da lua, o arco-íris, o corte transversal de um tronco de árvore, entre outros. De acordo com registro feitos pelos babilônios em tábuas de argila, é possível notar que a geometria estava bastante relacionada com a prática, pois entre os anos de 2000 a 1600 a.C., eles sabiam calcular diversas áreas, como a dos retângulos, triângulos retângulos e isósceles (e talvez de um

triângulo qualquer), e trapézio retângulo. O cálculo de volumes de alguns sólidos já era familiarizado, pois sabiam a capacidade de um paralelepípedo retângulo e um prisma reto com base trapezoidal. A circunferência de um círculo era tomada como sendo o triplo do diâmetro e a área do círculo como um doze avos da área do quadrado construído sobre um lado de comprimento igual à circunferência do círculo (ambas medidas corretas para $\pi = 3$); assim, o volume de um cilindro circular reto era obtido fazendo-se o produto da base pela altura. O volume de um tronco de cone ou de pirâmide quadrangular aparece incorretamente como o produto da altura pela semi-soma das bases. O Teorema de Pitágoras também já era conhecido, desde cerca de 2000 a.C. É importante ressaltar que a grande pirâmide de Giseh, cuja construção primorosa envolveu geometria prática, foi erguida em cerca de 2900 a.C.

Um dos argumentos bastante utilizados na geometria desde a antiguidade é a dedução, a qual essencialmente começou-se por Tales de Mileto¹ (624-546 a.C.) na primeira metade do século VI a.C. Ele baseava-se em raciocínios lógicos e não em intuição e experimentação. Considerado como continuador da sistematização da geometria iniciada por Tales, Pitágoras² (570-495 a.C.) contribuiu bastante para o desenvolvimento da geometria. Diante de toda sua inteligência, ele era admirado por várias pessoas que faziam questão de ouvir seus ensinamentos. Com isto, foi criada uma escola, a qual ficou conhecida como Escola Pitagórica.

Um dos grandes contribuintes para o desenvolvimento da geometria no século III a.C. foi Euclides de Alexandria³, o qual ficou bastante conhecido e obteve grande respeito por seu trabalho produzido. De acordo com (EVES, 1992):

Então, por volta do ano 300 a.C., Euclides produziu sua obra memorável, os Elementos, uma cadeia dedutiva de 465 proposições compreendendo de maneira clara e harmoniosa geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega. (EVES, 1992, p. 9).

Após a criação dos Elementos de Euclides, o desenvolvimento da geometria foi enorme, e dificilmente se poderia superestimá-lo. Com isto, a geometria sobre planos ou objetos em três dimensões, baseados nos postulados de Euclides, foi nomeada de geometria euclidiana.

2.2 Círculo dos nove pontos

O círculo que passa pelos pés das alturas de qualquer triângulo passa também pelos pontos médios dos lados, bem como pelos pontos médios dos segmentos que unem os

¹Tales de Mileto foi um filósofo, matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo da Grécia Antiga, considerado, por alguns, o primeiro filósofo ocidental. De ascendência fenícia, nasceu em Mileto, antiga colônia grega, na Ásia Menor, atual Turquia.

²Pitágoras foi um filósofo e matemático grego jônico creditado como fundador do movimento chamado Pitagorismo.

³Euclides foi um professor, matemático platônico e escritor grego, muitas vezes referido como o “Pai da Geometria”.

vértices ao ortocentro do triângulo.

Este teorema foi enunciado e demonstrado por Brianchon (1783-1864) e Poncelet (1788-1867) em um trabalho publicado em 1821. O círculo é conhecido hoje como o Círculo dos Nove Pontos. Entretanto, a história do teorema é um pouco confusa, pois o círculo dos nove pontos é também chamado “Círculo de Euler” e “Círculo de Feuerbach”.

Em 1804, Bevan propôs como problema a demonstração de um teorema que envolvia o círculo dos nove pontos. O problema foi resolvido, em 1806 por Butterworth, que propôs e resolveu um outro problema relacionado, dando, no contexto, a impressão de que ele sabia que o círculo em estudo passava pelos nove pontos.

As vezes, o teorema é atribuído a Euler de forma errada, visto que ele demonstrou, em 1765, que o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo são colineares, desde assim a reta que passa por esses pontos ficou conhecida como reta de Euler. Acontece que o centro do círculo dos nove pontos está na reta de Euler e é ponto médio do segmento que tem por extremidades o ortocentro e o circuncentro. Porém, não há nenhuma certeza de que Euler conhecesse o círculo dos nove pontos. Sendo assim, é possível que a gênese desse teorema tenha partido de Feuerbach, pois:

Feuerbach, demonstrou, em um trabalho publicado em 1822, que o círculo que passa pelos pés das alturas de um triângulo passa também pelos pontos médios dos lados, e acrescentou: este círculo é tangente internamente ao círculo inscrito e tangente externamente aos três círculos ex-inscritos do triângulo — “talvez o mais belo teorema da Geometria Elementar que tenha sido descoberto desde o tempo de Euclides”. É por isso que o círculo dos nove pontos é também conhecido como círculo de Feuerbach, apesar de o autor ter localizado apenas seis de seus pontos. (PINHEIRO, 2021, p. 1).

O destino do teorema foi igual ao de muitos outros: ignorado inicialmente, depois redescoberto várias vezes. Entre os anos de 1828 a 1911 houveram bastante tentativas de demonstrá-lo. Por exemplo, Steiner⁴ o enunciou, sem demonstração, porém, achou os três pontos que faltavam. Terquem⁵ o demonstrou completamente. Salmon⁶ e Casey⁷ provaram a parte relativa às tangências. Muitas outras demonstrações foram publicadas, culminando com Sawayama, que apresentou nove demonstrações, possivelmente, todas de forma excepcional.

⁴Jakob Steiner (Utzenstorf, 18 de março de 1796 — Berna, 1 de abril de 1863) foi um matemático suíço que trabalhou principalmente na área de geometria.

⁵Terquem (16 de junho de 1782 - 6 de maio de 1862) foi um matemático francês. Ele é conhecido por seus trabalhos em geometria e por fundar duas revistas científicas, uma das quais foi a primeira revista sobre história da matemática.

⁶O reverendo George Salmon (Dublin, 25 de setembro de 1819 — Dublin, 22 de janeiro de 1904) foi um matemático e teólogo inglês.

⁷John Casey (12 de maio de 1820 - 03 de janeiro de 1891) era um geômetra irlandês respeitado. É conhecido pelo teorema de Casey, uma extensão do teorema de Ptolomeu que trata de um círculo tangente a quatro outros círculos. Ele contribuiu para o campo da geometria euclidiana com várias novas abordagens e provas.

3 TEORIA PRELIMINAR

Este capítulo está dividido em dois tópicos, os quais iremos abordar os conceitos preliminares e resultados fundamentais sobre circunferência e círculo e, em seguida, sobre triângulos. Apesar disso, é essencial que o leitor tenha um prévio conhecimento básico de geometria plana, para que, assim, possamos compreender os próximos capítulos.

As demonstrações dos resultados apresentados podem ser encontradas nas referências (MUNIZ, 2013) e (BARBOSA, 1985).

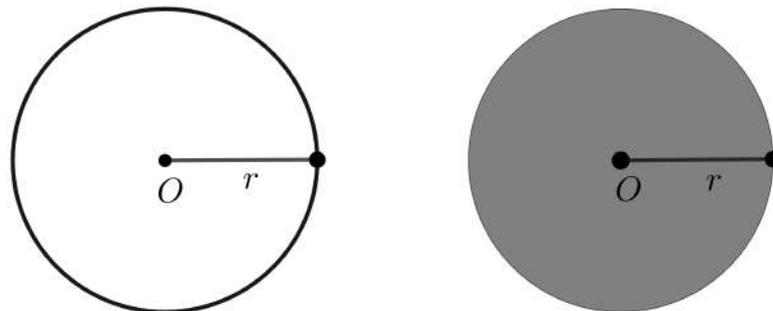
3.1 Circunferência e círculo

Nesta seção falamos a respeito de circunferência e círculo, apresentando os conceitos e os seus elementos.

3.1.1 Conceitos preliminares

Dados um ponto O em um plano e um número real $r > 0$, define-se a circunferência de centro O e raio r como sendo o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto O é igual a r . Já o círculo de centro O e raio r é a reunião da circunferência com seu interior, isto é, o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto O é menor ou igual a r .

Figura 3.1 – Circunferência e círculo



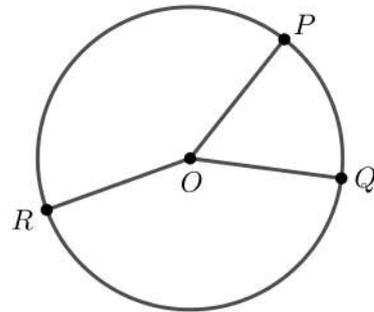
Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

3.1.2 Elementos

A seguir, apresentamos alguns elementos de uma circunferência.

- i) **Raio:** é qualquer segmento que une um ponto da circunferência ao seu centro. Na Figura 3.2, os segmentos OP , OQ e OR são raios da circunferência. A palavra raio designa tanto o segmento como a sua medida.

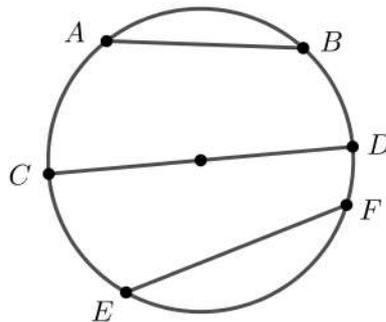
Figura 3.2 – Raio



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

- ii) **Corda:** é qualquer segmento de reta que liga dois pontos da circunferência. Na Figura 3.3, temos representadas as cordas AB , CD e EF .

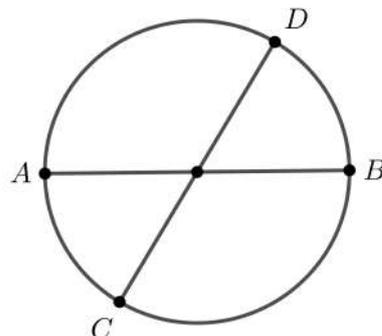
Figura 3.3 – Cordas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

- iii) **Diâmetro:** é uma corda da circunferência que contém o centro. Sendo assim, o diâmetro é a maior corda em uma circunferência e sua medida é igual ao dobro do raio. Temos os diâmetros AB e CD na Figura 3.4.

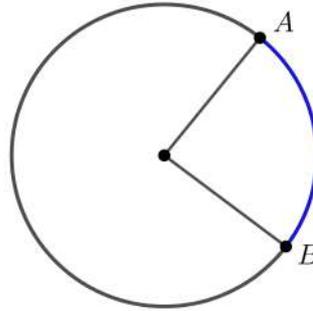
Figura 3.4 – Diâmetro



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

- iv) **Arco:** considerando A e B dois pontos distintos sobre uma circunferência. A porção da circunferência delimitada pelos pontos A e B é chamada de arco da circunferência. O arco será denotado por \widehat{AB} .

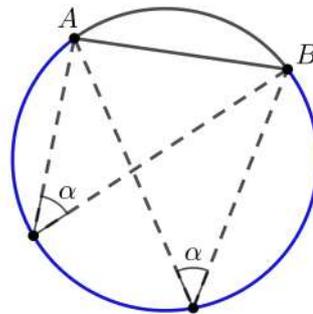
Figura 3.5 – Arco



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

- v) **Arco capaz:** dado um segmento de reta AB e um ângulo α , chamamos arco capaz de α em relação a AB ao lugar geométrico¹ dos pontos situados no mesmo semiplano determinado pela reta \overleftrightarrow{AB} sob os quais se vê o segmento AB segundo o ângulo α . Tal lugar geométrico é um arco de circunferência que contém os pontos A e B .

Figura 3.6 – Arco capaz

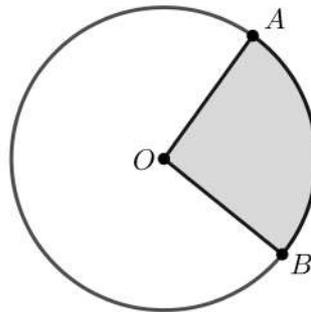


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

- vi) **Setor circular:** é a parte limitada por dois raios distintos de um círculo.

¹Lugar Geométrico da propriedade P é o conjunto de todos os pontos que possuem essa propriedade.

Figura 3.7 – Setor circular

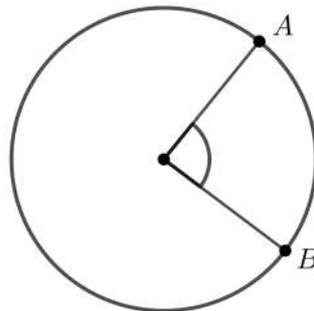


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

- vii) **Ângulo central:** é um ângulo cujo vértice é o centro de um círculo, e os lados são dois raios.

Na Figura 3.8, o ângulo central determina um arco, cuja medida é igual a medida do próprio ângulo central.

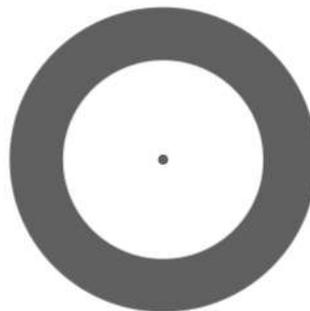
Figura 3.8 – Ângulo central



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

- viii) **Coroa circular ou anel:** é uma figura geométrica limitada por dois círculos concêntricos de raios distintos.

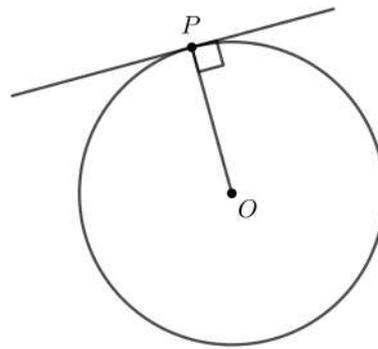
Figura 3.9 – Coroa circular



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

- ix) **Reta tangente:** Uma reta tangente a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência em um único ponto. Na Figura 3.10, o ponto P é conhecido como ponto de tangência ou ponto de contato. Se uma reta é tangente a uma circunferência no ponto P , então é perpendicular ao raio OP .

Figura 3.10 – Reta tangente



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

- x) **Comprimento ou perímetro:** é a medida de uma circunferência no qual é obtido pela seguinte fórmula:

$$C = 2\pi r$$

em que r é o raio da circunferência e π é aproximadamente 3,14.

- xi) **Semicírculo:** é a porção da circunferência delimitada pelos extremos de um diâmetro.
 xii) **Área:** é todo o espaço ocupado pelo círculo e é dada pela fórmula:

$$A = \pi r^2$$

em que r é o raio do círculo.

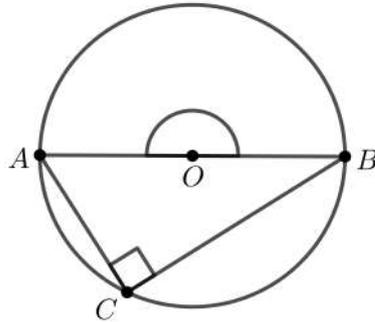
- xiii) **Ângulo inscrito:** é um ângulo cujo vértice é um ponto do círculo e cujos lados são duas cordas do mesmo.

A proposição a seguir é conhecida como o teorema do ângulo inscrito, o qual nos auxilia em demonstrações posteriores.

Proposição 3.1. Se AB e AC são cordas de um círculo de centro O , então a medida do ângulo inscrito $\angle BAC$ é igual a metade da medida do ângulo central $\angle BOC$ correspondente.

Diante desse resultado, é possível observar que um ângulo que subtende um diâmetro mede 90° . Na Figura 3.11, o ângulo $\widehat{AOB} = 180^\circ$, assim, $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

Figura 3.11 – Ângulo inscrito



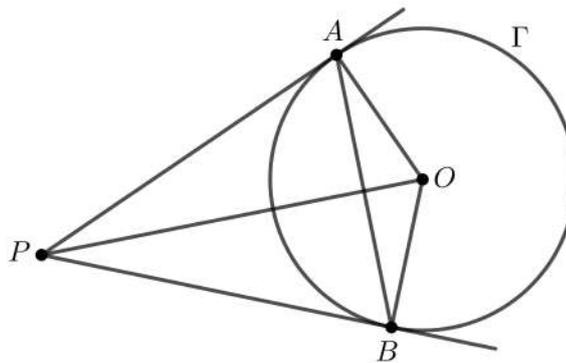
Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

A seguir, temos uma proposição que estabelece duas propriedades bastante úteis das tangentes traçadas a um círculo a partir de um ponto exterior ao mesmo.

Proposição 3.2. Sejam Γ um círculo de centro O e P um ponto exterior ao mesmo. Se $A, B \in \Gamma$ são tais que \overleftrightarrow{PA} e \overleftrightarrow{PB} são tangentes a Γ , então:

- (a) $\overline{PA} = \overline{PB}$.
- (b) \overleftrightarrow{PO} é a mediatriz de AB .
- (c) \overleftrightarrow{PO} é a bissetriz dos ângulos $\angle AOB$ e $\angle APB$.
- (d) $\overleftrightarrow{PO} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

Figura 3.12 – Propriedades das tangentes por um ponto exterior



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

3.2 Triângulos

Nesta seção, falamos a cerca dos triângulos, apresentando a definição, assim como, as classificações e os pontos notáveis do mesmo.

3.2.1 Definição e classificações de triângulos

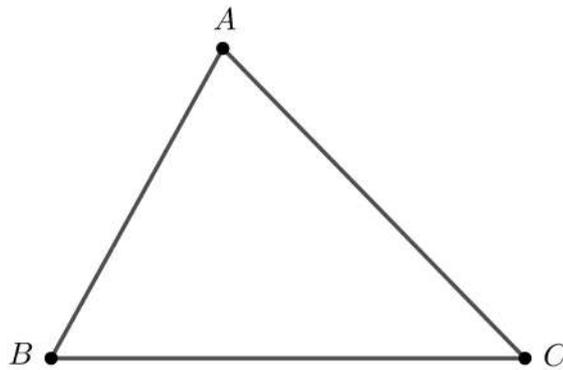
Os triângulos são figuras geométricas planas que são formados por três segmentos de retas ligados dois a dois sem se cruzarem em qualquer ponto. Eles contém: três lados,

três vértices, três ângulos internos e três ângulos externos. Vejamos o que significa cada um desses:

- **Lados:** são segmentos de reta que se encontram apenas em suas extremidades;
- **Vértices:** são os pontos de encontro entre os lados do triângulo;
- **Ângulos internos:** são ângulos formados por dois lados consecutivos de um triângulo que ficam em seu interior;
- **Ângulos externos:** são os ângulos formados por um lado qualquer do triângulo e um prolongamento do lado consecutivo a ele.

Na Figura 3.13, temos uma representação de um triângulo, cujos vértices são A , B e C . O triângulo será denotado por ABC .

Figura 3.13 – Triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

De acordo com as medidas de seus lados, podemos classificar os triângulos de diferentes tipos:

- **Escaleno:** triângulo que possui todos os lados com medidas diferentes;
- **Isósceles:** triângulo que possui dois lados com medidas iguais;
- **Equilátero:** triângulo que possui três lados com medidas iguais.

A soma dos lados de um triângulo é chamado de perímetro, e a metade de um perímetro é chamado de semiperímetro.

Há outro tipo de classificação possível para os triângulos, neste caso, refere-se às medidas de seus ângulos, os quais são:

- **Acutângulo:** triângulo que possui todos os ângulos com medidas menores que 90° ;

- **Retângulo:** triângulo que possui um ângulo com medida igual a 90° ;
- **Obtusângulo:** triângulo que possui um ângulo com medida superior a 90° .

Finalizamos esta subseção com uma propriedade muito importante dos triângulos isósceles.

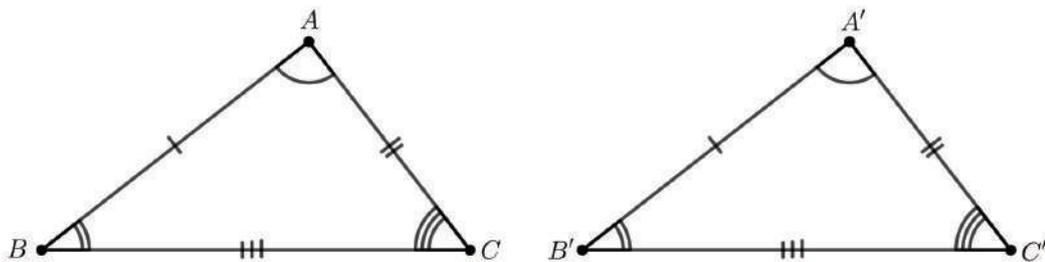
Proposição 3.3. Um triângulo ABC é isósceles de base BC se, e somente se, $\widehat{B} = \widehat{C}$.

A seguir, vejamos como dois triângulos podem ser congruentes.

3.2.2 Congruência de triângulos

Dois triângulos são denominados congruentes se tem ordenadamente congruentes os três lados e os três ângulos. Na Figura 3.14, temos uma congruência de triângulos.

Figura 3.14 – Congruência de triângulos



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

$$\text{Indicamos: } \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \text{ se } \begin{cases} AB \cong A'B' \\ AC \cong A'C' \\ BC \cong B'C' \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

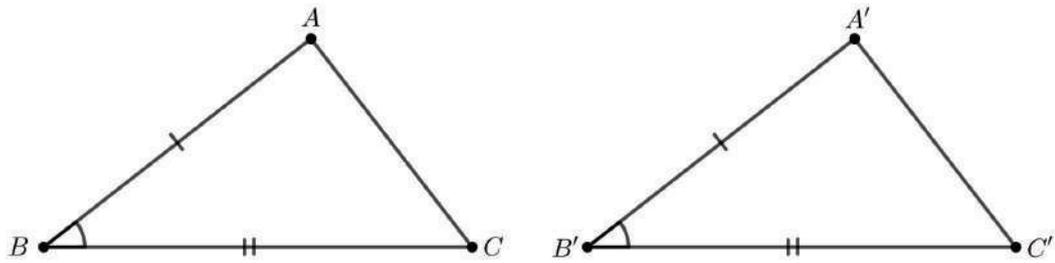
Casos de congruência

A seguir, vejamos alguns critérios para estabelecer a congruência de triângulos.

i) Caso LAL

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre esses dois lados, então eles são congruentes. A seguir, na Figura 3.15, temos um exemplo de congruência pelo caso LAL.

Figura 3.15 – Caso de congruência LAL

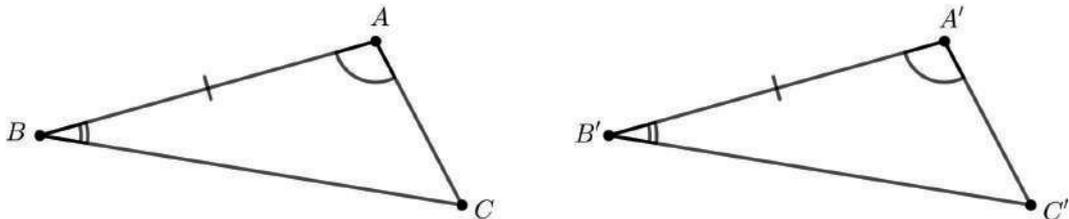


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

ii) Caso ALA

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois ângulos e o lado adjacente a esses ângulos, então eles são congruentes. Os triângulos ABC e $A'B'C'$ (Figura 3.16) são congruentes pelo caso ALA.

Figura 3.16 – Caso de congruência ALA

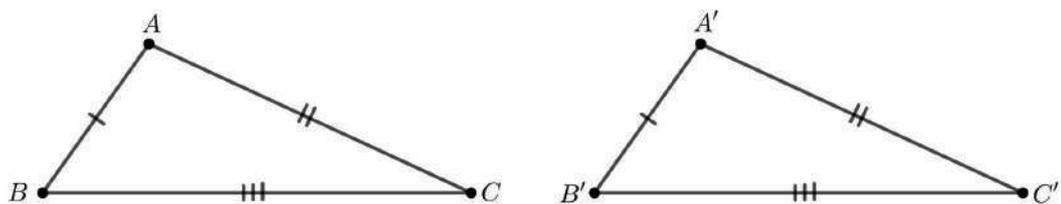


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

iii) Caso LLL

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então eles são congruentes. Na Figura 3.17, temos um exemplo desse caso de congruência.

Figura 3.17 – Caso de congruência LLL

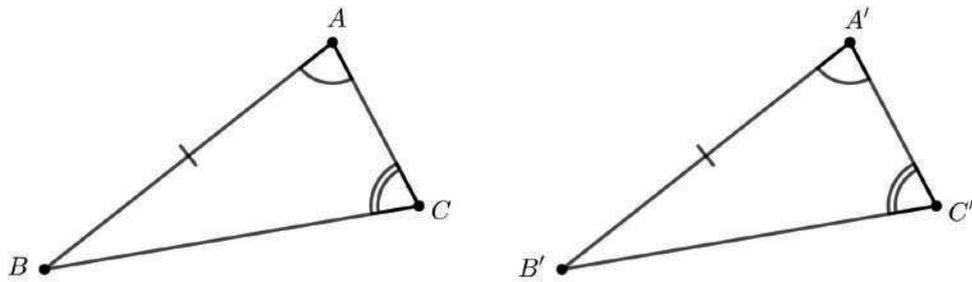


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

iv) Caso LAAo

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes. Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da Figura 3.18 são congruentes pelo caso LAAo.

Figura 3.18 – Caso de congruência LAAo

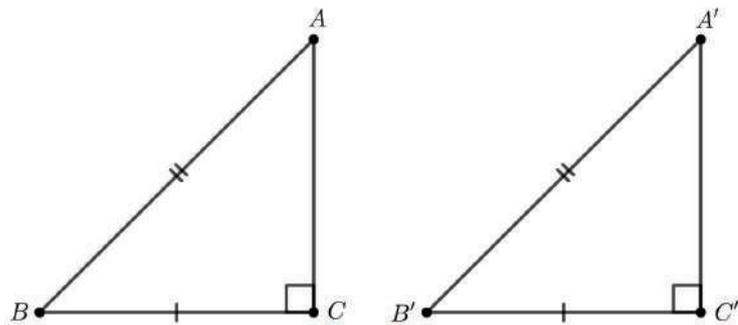


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

v) Caso especial CH

Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então eles são congruentes. Na Figura 3.19, temos um exemplo desse caso de congruência.

Figura 3.19 – Caso de congruência CH



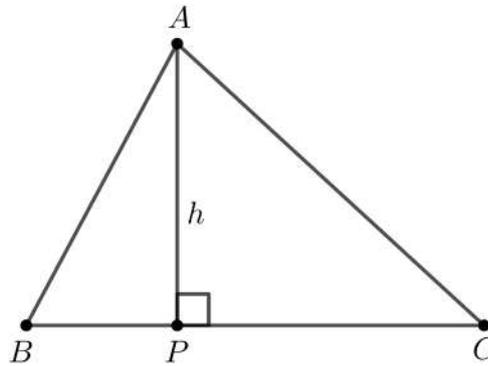
Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

3.2.3 Pontos notáveis de um triângulo

Agora, vamos apresentar os elementos do triângulo e observar, através de figuras, suas características.

- i) **Altura:** é um segmento de reta que liga um vértice ao lado oposto e é perpendicular ao lado oposto. Na Figura 3.20, o ponto P é chamado de pé da altura do triângulo ABC .

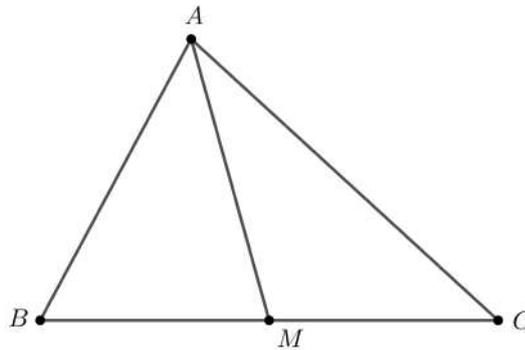
Figura 3.20 – Altura



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

- ii) **Mediana:** é um segmento de reta que liga um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a este vértice.

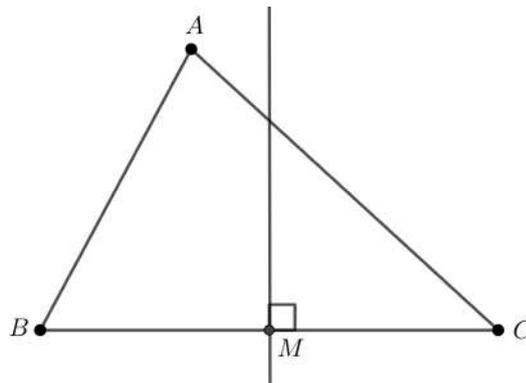
Figura 3.21 – Mediana



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

- iii) **Mediatriz:** é uma reta perpendicular a um lado do triângulo e que passa pelo ponto médio.

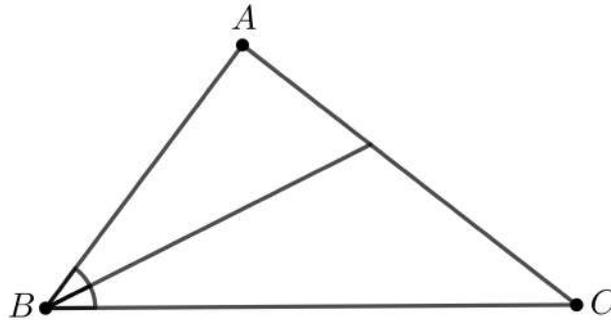
Figura 3.22 – Mediatriz



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

- iv) **Bissetriz:** é um segmento de reta com origem em um dos vértices do triângulo com a outra extremidade no lado oposto a esse vértice. Além disso, ela divide ao meio o ângulo correspondente ao vértice.

Figura 3.23 – Bissetriz



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

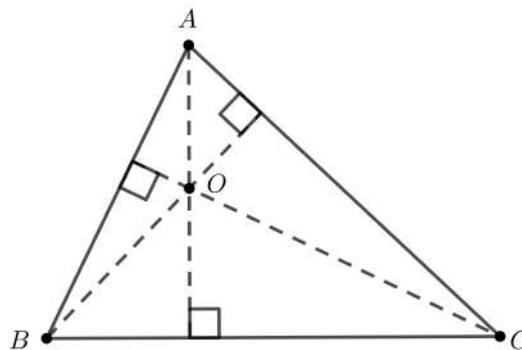
Observação 3.1. A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a AB passando pelo seu ponto médio. A mediatriz é um lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e B . Assim, se P pertence a mediatriz do segmento AB , então $PA = PB$.

Observação 3.2. A bissetriz de um ângulo é uma semirreta interna, traçada a partir do seu vértice, e que o divide em dois ângulos congruentes. A bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados do ângulo.

Os triângulos, de modo geral, possuem pontos notáveis que seguem em decorrência de alguns elementos. Vejamos, a seguir, os principais pontos notáveis de um triângulo.

- i) **Ortocentro:** é o ponto O de encontro das três alturas de um triângulo.

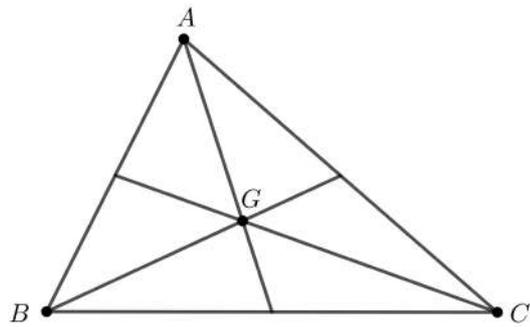
Figura 3.24 – Ortocentro



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

- ii) **Baricentro:** é o ponto G de encontro das três medianas de um triângulo.

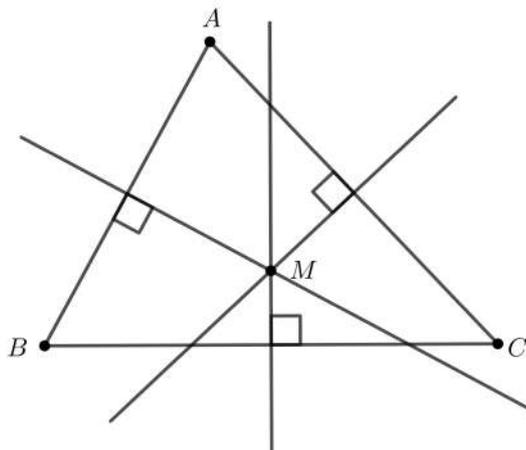
Figura 3.25 – Baricentro



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

iii) **Circuncentro:** é o ponto M de encontro das três mediatrizes de um triângulo.

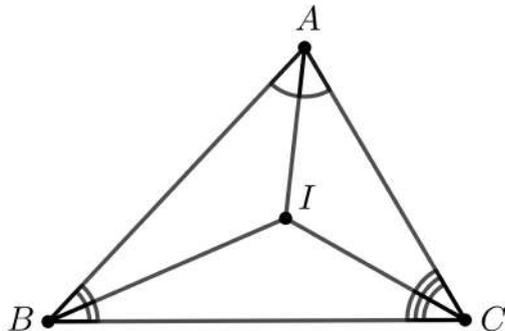
Figura 3.26 – Circuncentro



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

iv) **Incentro:** é o ponto I de encontro das três bissetrizes internas de um triângulo.

Figura 3.27 – Incentro



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Para finalizarmos este capítulo, vejamos dois resultados importantes, um deles envolvendo alguns pontos notáveis de um triângulo e o outro a respeito do teorema da base média.

Teorema 3.1. Se M , G e O são respectivamente o circuncentro, o baricentro e o ortocentro de um triângulo ABC , então:

- (a) $\overline{AO} = 2\overline{MP}$, onde P é o ponto médio de BC .
- (b) O , G e M são colineares, com $G \in OM$ e $\overline{OG} = 2\overline{GM}$.

Teorema 3.2. Seja ABC um triângulo qualquer. Se MN é a base média de ABC relativa a BC , então $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}$. Reciprocamente, se pelo ponto médio M do lado AB traçarmos a paralela ao lado BC , então tal reta intersecta o lado AC em seu ponto médio N . Ademais, em um qualquer dos casos acima, temos

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}.$$

4 CÍRCULOS NOTÁVEIS

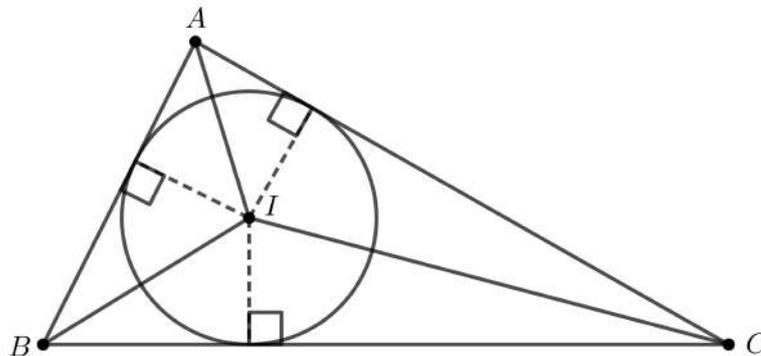
Neste capítulo falamos a respeito de alguns círculos notáveis associados a um triângulo, a saber, inscrito, circunscrito, ex-inscrito, dos nove pontos, de Lemoine e de Taylor. Todo triângulo admite um círculo inscrito e um círculo circunscrito, o que não acontece com outros polígonos e, nas seções seguintes apresentamos sobre tais círculos.

4.1 Circunferência inscrita

Na geometria plana, a circunferência inscrita em um triângulo é a maior circunferência contida no triângulo. Esta circunferência é tangente aos três lados do triângulo. O centro da circunferência inscrita é chamado de incentro, que é ponto de encontro das bissetrizes do triângulo.

Proposição 4.1. Todo triângulo admite uma única circunferência contida no mesmo e tangente a seus lados. Tal circunferência é dita inscrita no triângulo e seu centro é o incentro do mesmo.

Figura 4.1 – Circunferência inscrita em um triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Demonstração: Seja ABC um triângulo e I seu incentro. Como I é o ponto de interseção das bissetrizes, temos que I equidista dos lados AB , BC e AC do triângulo (ver *Observação 3.2*). Chamamos de r tal distância em comum, consequentemente, a circunferência de centro I e raio r está contida em ABC e tangencia seus lados.

A circunferência inscrita é única. De fato, o centro de uma circunferência que é tangente aos lados de ABC deve equidistar dos mesmos. Portanto, o centro pertence as bissetrizes dos lados de ABC , donde coincide com o ponto de interseção das mesmas, que é o incentro I . O raio da circunferência é a distância de I aos lados, logo é igual a r .

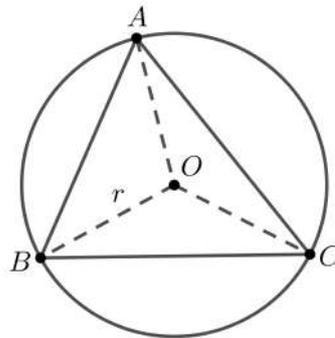
■

4.2 Circunferência circunscrita

Nesta seção, vamos definir e apresentar os resultados acerca da circunferência circunscrita em um triângulo.

Proposição 4.2. Todo triângulo admite uma única circunferência passando pelos seus vértices. Tal circunferência é dita circunscrita ao triângulo e seu centro é o circuncentro do mesmo.

Figura 4.2 – Circunferência circunscrita em um triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Demonstração: Seja ABC um triângulo de circuncentro O . Sendo O o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo, temos (ver *Observação 3.1*):

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}.$$

Chamamos de r a medida em comum. Assim, a circunferência de centro O e raio r passa pelos vértices ABC . Desse modo, provamos a existência de uma circunferência que passa pelos vértices ABC do triângulo.

A unicidade decorre do seguinte fato, o centro de uma circunferência que passa pelos vértices de ABC deve equidistar dos mesmos. Portanto, o centro pertence às mediatrizes dos lados de ABC , donde coincide com o ponto de interseção das mesmas, que é o circuncentro O . Por fim, o raio da circunferência, sendo a distância de O aos vértices, é igual a r . ■

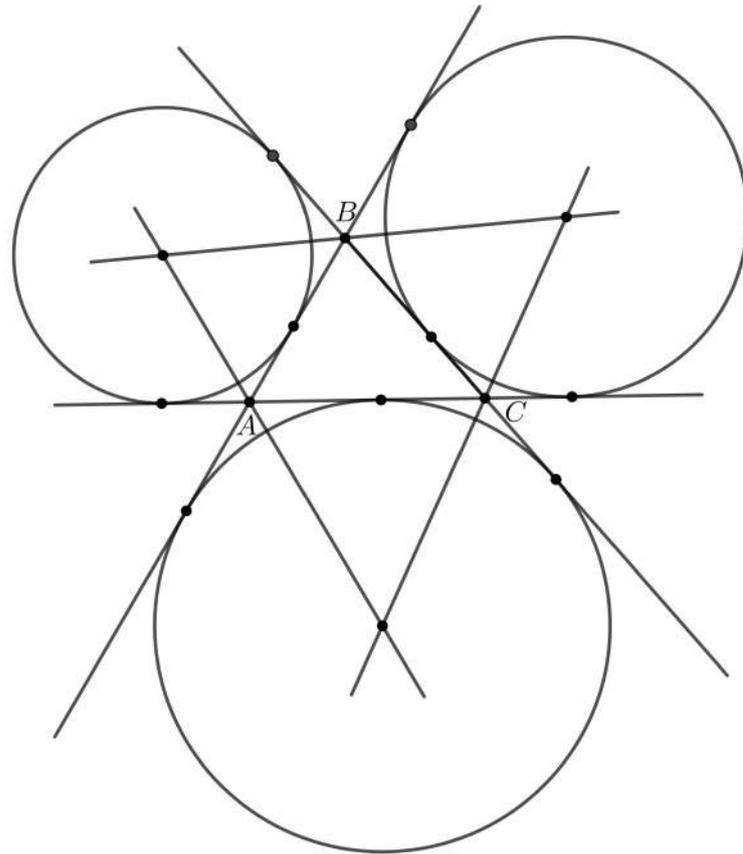
4.3 Circunferência ex-inscrita

Uma circunferência é dita ex-inscrita a um triângulo se ela for tangente a um dos lados do triângulo e aos prolongamentos dos outros dois. O centro de uma circunferência ex-inscrita é denominado de ex-incentro. Assim, dado um triângulo ABC , existem três circunferências ex-inscritas a ele:

- uma tangente ao lado BC e aos prolongamentos dos lados AB e AC ;

- uma tangente ao lado AB e aos prolongamentos dos lados CB e CA ;
- uma tangente ao lado CA e aos prolongamentos dos lados BA e BC .

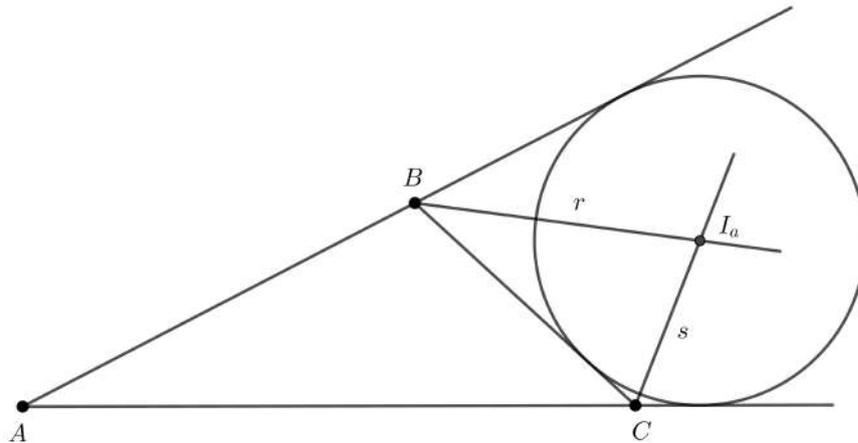
Figura 4.3 – Três circunferências ex-inscritas em um triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Proposição 4.3. Em todo triângulo ABC , existe uma única circunferência tangente ao lado BC e aos prolongamentos dos lados AB e AC . Tal circunferência é a circunferência ex-inscrita ao lado BC e seu centro é o ex-incentro de ABC relativo a BC (ou ao vértice A).

Figura 4.4 – Circunferência ex-inscrita em um triângulo



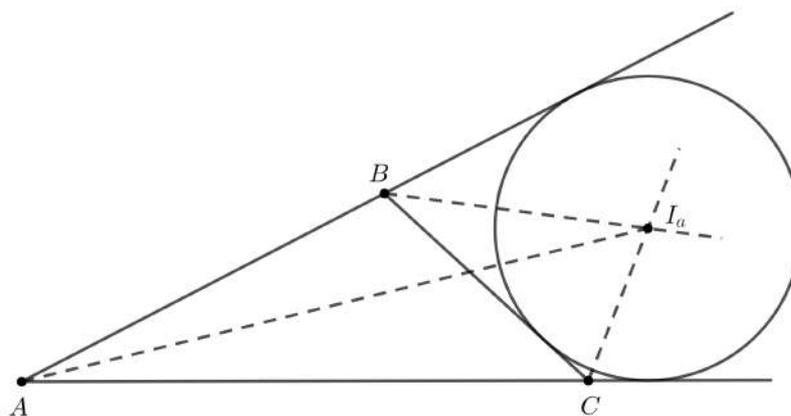
Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Demonstração: Sejam r e s as bissetrizes externas dos vértices B e C do triângulo ABC e I_a seu ponto de interseção. Como $I_a \in r$ e r é bissetriz, segue que $d(I_a, \overleftrightarrow{BC}) = d(I_a, \overleftrightarrow{AB})$. Do mesmo modo, uma vez que $I_a \in s$, concluímos que $d(I_a, \overleftrightarrow{BC}) = d(I_a, \overleftrightarrow{AC})$. Logo, $d(I_a, AB) = d(I_a, AC)$, ou seja, I_a está na bissetriz do ângulo \widehat{A} , e equidista dos lados AB e AC . Denotando por r_a a distância comum de I_a às retas suportes dos lados, segue que, a circunferência de centro I_a e raio r_a tangencia BC e os prolongamentos de AB e AC . A unicidade é provada de forma análoga às proposições 4.1 e 4.2. ■

Uma consequência imediata da demonstração da proposição anterior é o seguinte corolário.

Corolário 4.1. Em todo triângulo, a bissetriz interna relativa a um vértice concorre com as bissetrizes externas relativas aos outros dois vértices no ex-incentro.

Figura 4.5 – Bissetriz interna e bissetriz externa em um triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Demonstração: De acordo com a demonstração da proposição anterior, I_a equidista de AB e AC , logo pertence a bissetriz do ângulo A . ■

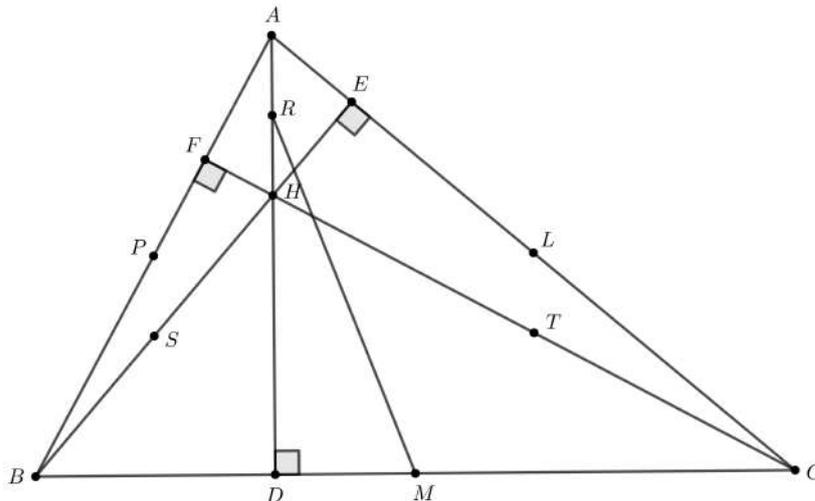
4.4 Circunferência dos nove pontos

A seguir, vamos definir e apresentar os resultados acerca da circunferência dos nove pontos.

Teorema 4.1. Os pés das alturas de um triângulo, os pontos médios do três lados e os pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro estão sobre uma circunferência chamada circunferência dos nove pontos.

Demonstração: Seja um triângulo ABC . Na Figura 4.6, os pontos L, M e P são os pontos médios dos lados do triângulo, D, E e F são os pés das alturas e H o ortocentro. Vamos denotar por R, S e T os pontos médios dos segmentos AH, BH e CH , respectivamente.

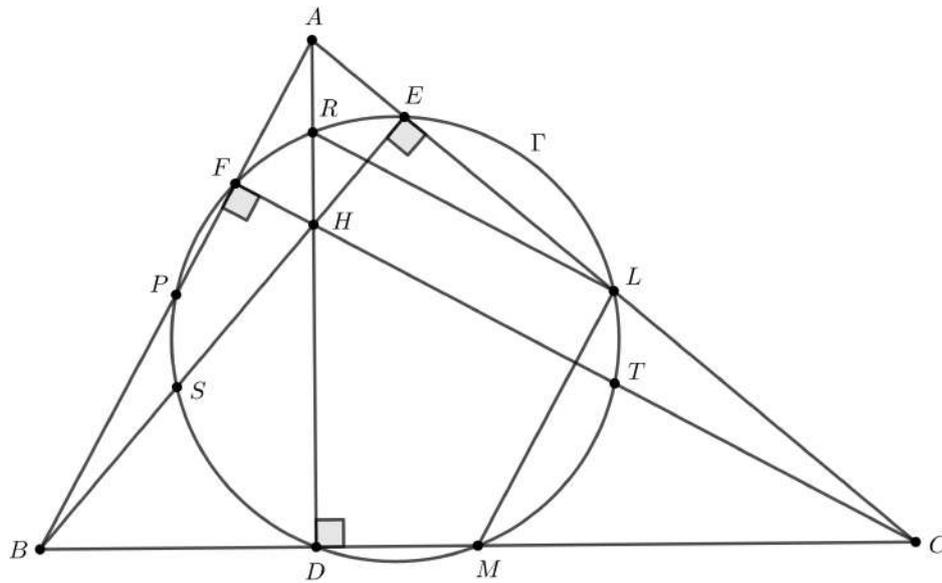
Figura 4.6 – Circunferência dos nove pontos 01



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Primeiramente, vamos provar que D e R pertencem a circunferência que passa pelos pontos M, L e P . Para isso, consideremos RM um diâmetro de uma circunferência Γ . É fácil ver que $D \in \Gamma$, pois como o ângulo $\widehat{RDM} = 90^\circ$, segue-se que, D pertence a semicircunferência de diâmetro RM (ver Proposição 3.1).

Figura 4.7 – Circunferência dos nove pontos 02



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Agora, notemos que L , M e R são os pontos médios de AC , BC e AH , respectivamente. Pelo teorema da base média, temos que, $AB \parallel LM$ e $RL \parallel HC$, assim, $\widehat{BFC} = \widehat{RLM} = 90^\circ$. Logo, L pertence a Γ e, de forma análoga, podemos concluir que P pertence a Γ . Desta forma, concluímos que R, D, P, L e M pertencem a Γ . De maneira análoga, é possível provar que S e E pertencem a circunferência que passa por P, L e M , bem como T e F também pertencem.

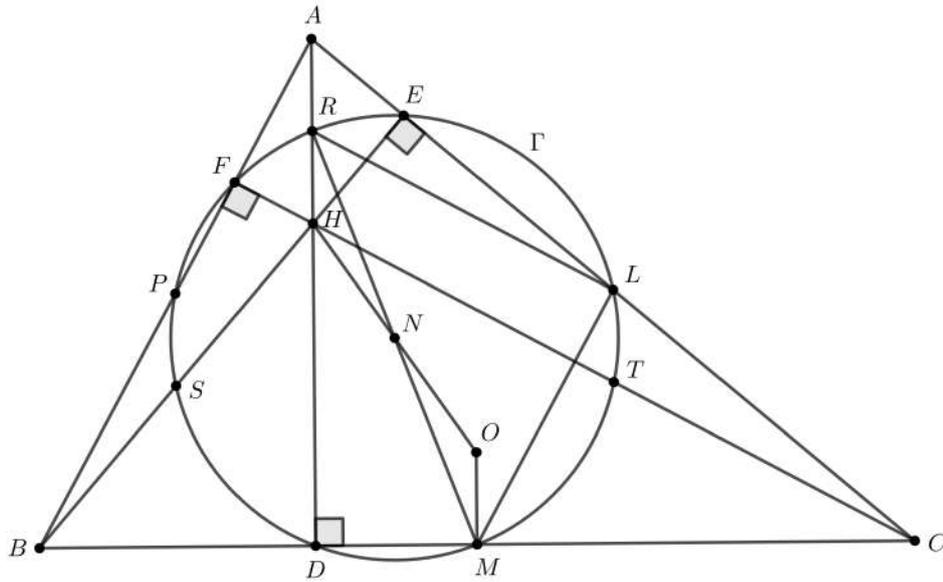
Portanto, os pontos M, L, P, D, E, F, R, S e T estão sobre uma mesma circunferência. ■

Como consequência da demonstração anterior têm-se os seguintes corolários.

Corolário 4.2. O segmento RM é um diâmetro da “circunferência dos nove pontos”.

Corolário 4.3. O centro da circunferência dos nove pontos é o ponto médio do segmento formado pelo ortocentro e pelo circuncentro do triângulo.

Figura 4.8 – Centro da circunferência dos nove pontos

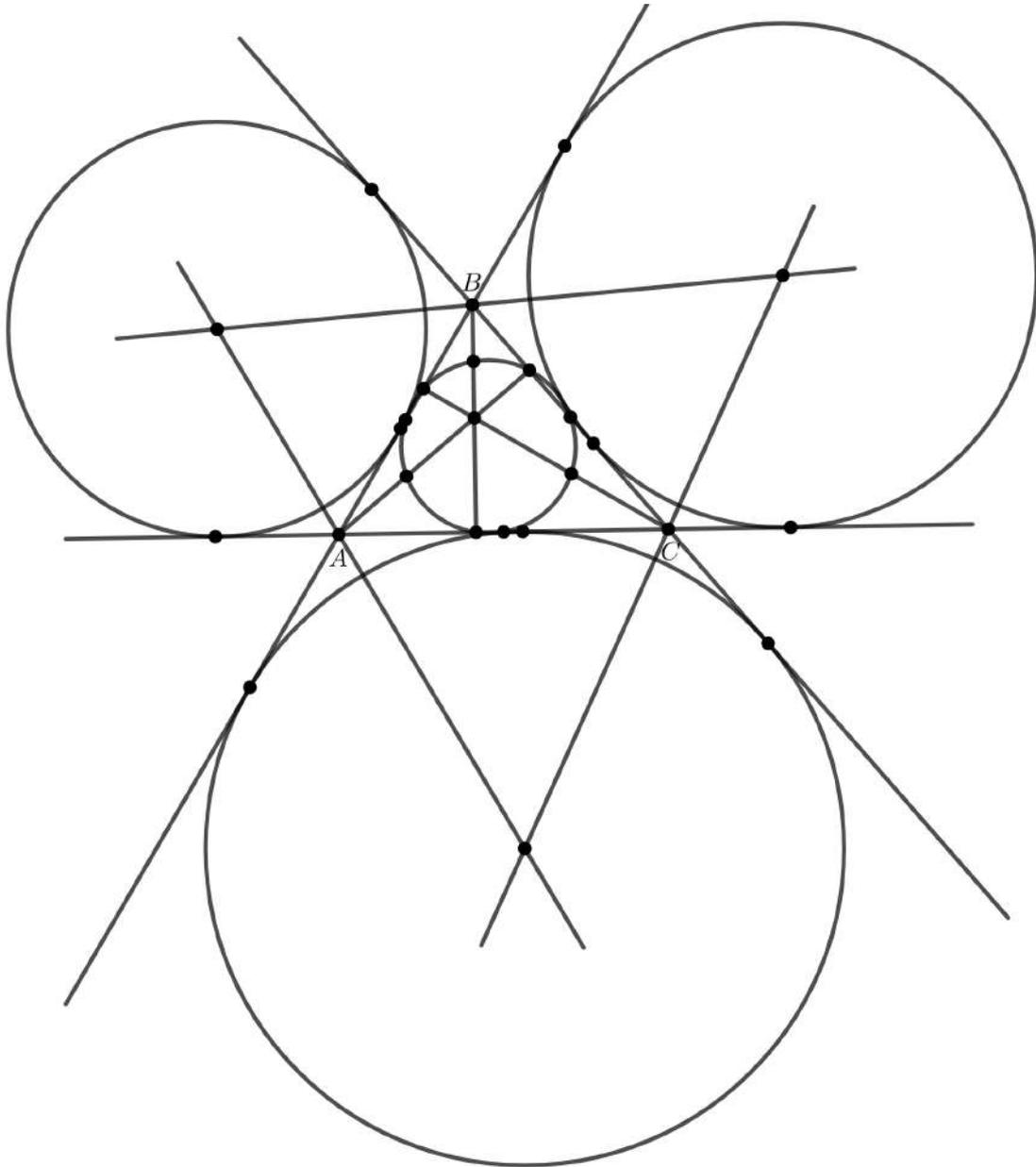


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Demonstração: Seja O o circuncentro do triângulo ABC , considere RM um diâmetro da circunferência dos nove pontos e seja N a interseção de RM e OH . Como R é ponto médio de AH , então $\overline{RH} = \overline{OM}$ (ver teorema 3.1). Além disso, $AH \parallel OM$. Logo, $\widehat{OMN} = \widehat{HRN}$, e sendo $\widehat{MNO} = \widehat{RNH}$, pois são ângulos opostos pelo vértice, temos a seguinte congruência $\triangle RHN \cong \triangle NOM$, pelo caso LAAo e, assim, $\overline{RN} = \overline{NM}$ e $\overline{HN} = \overline{ON}$, como queríamos. ■

Por fim, o círculo dos nove pontos é tangente às três circunferências ex-inscritas, isto pode ser visto na Figura 4.9.

Figura 4.9 – Tangência das circunferências ex-incritas e dos nove pontos



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

4.5 Circunferência de Lemoine

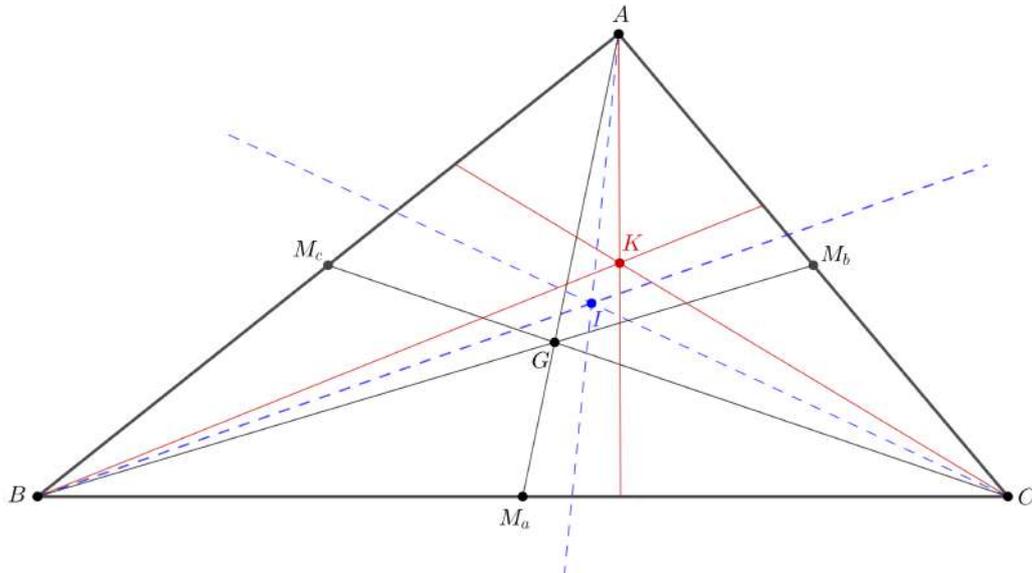
Nesta seção, temos a finalidade de abordar a circunferência de Lemoine. Para isso, é necessário, primeiramente, falarmos de um conceito anterior que é o ponto de Lemoine.

Definição 4.1. Consideremos as três medianas de um triângulo concorrendo no baricentro G . As três simedianas¹ correspondentes intersectam-se no chamado “ponto de Lemoine”.

¹As simedianas são três linhas geométricas particulares associadas a cada triângulo. Elas são construídas tomando uma mediana do triângulo e refletindo a linha sobre a bissetriz do ângulo correspondente. O ângulo formado pela simediana e a bissetriz do ângulo tem a mesma medida que o ângulo entre a mediana e a bissetriz do ângulo, mas está do outro lado da bissetriz do ângulo.

Na Figura 4.10, o ponto G é o baricentro e I o incentro do triângulo ABC . As simedianas concorrem no ponto K conhecido como ponto de Lemoine.

Figura 4.10 – Ponto de Lemoine

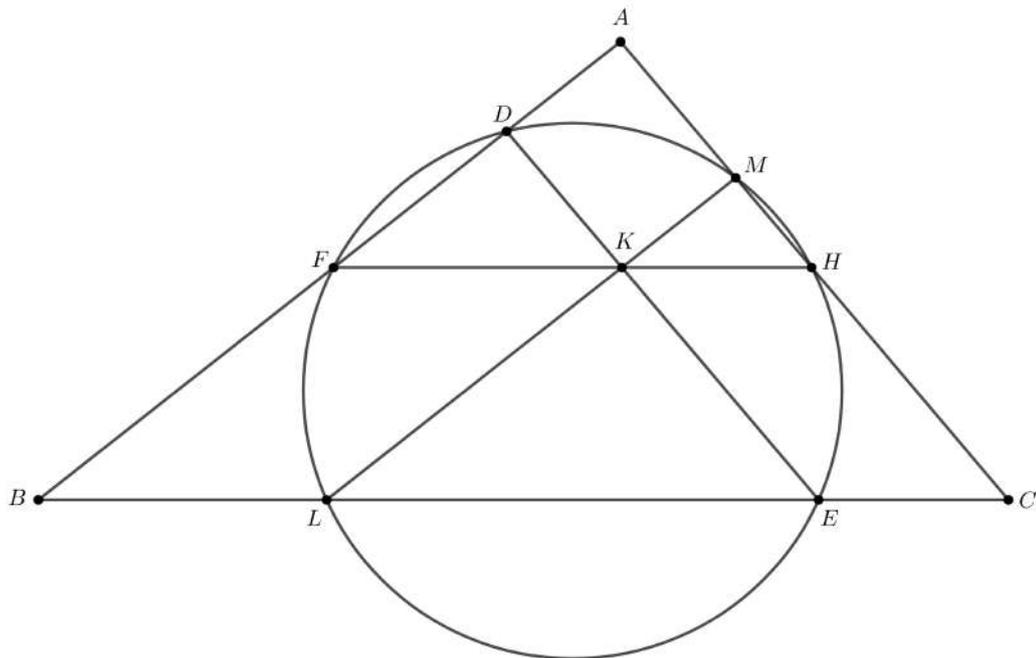


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

De posse desse resultado, agora podemos falar a respeito da circunferência de Lemoine.

Teorema 4.2. Pelo ponto K da interseção das simedianas em um triângulo ABC , traçemos paralelas aos lados do triângulo. Os seis pontos onde as linhas paralelas cruzam os lados pertencem a mesma circunferência, que pertence ao que chamamos de círculo de Lemoine.

Figura 4.11 – Circunferência de Lemoine



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em (LACHLAN, 1893).

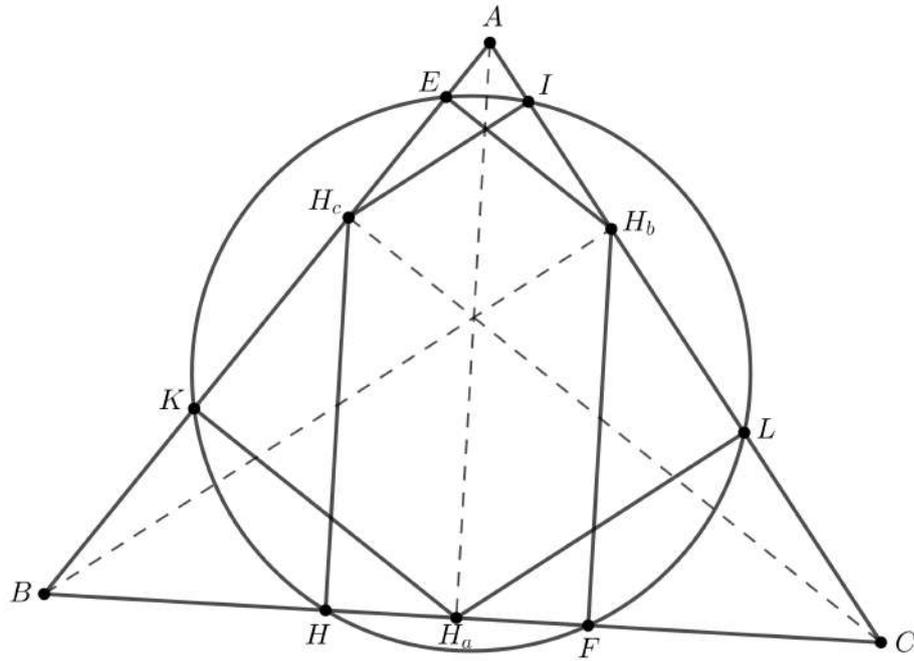
4.6 Circunferência de Taylor

Para concluir esta seção, vejamos a seguir, a definição e a representação gráfica da circunferência de Taylor.

Teorema 4.3. A partir dos pés das alturas de um triângulo ABC , traçamos segmentos perpendiculares aos outros dois lados do triângulo, tais segmentos intersectam os lados em seis pontos que pertencem a mesma circunferência, a qual pertence ao chamado Círculo de Taylor.

Na Figura 4.12, os pontos H_a , H_b e H_c são os pés das alturas do triângulo em relação aos vértices A , B e C , respectivamente. Os pontos L e K , E e F , I e H são as interseções dos segmentos perpendiculares aos lados do triângulo traçados a partir dos pontos H_a , H_b e H_c , respectivamente.

Figura 4.12 – Circunferência de Taylor



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em (TAYLOR, 1883).

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo, vamos fazer uso de conhecimentos e resultados adquiridos anteriormente. Demonstramos algumas proposições e fizemos construções geométricas dos círculos notáveis citados no trabalho.

5.1 Alguns resultados

Proposição 5.1. Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e semi-perímetro p . Sejam D , E e F os pontos onde a circunferência inscrita em ABC tangencia os lados BC , CA e AB , respectivamente, e suponha ainda que a circunferência ex-inscrita a BC tangencia tal lado em M e os prolongamentos de AC e AB , respectivamente, em N e P .

Então:

$$(a) \overline{AF} = \overline{AE} = p - a, \overline{BD} = \overline{BF} = p - b \text{ e } \overline{CD} = \overline{CE} = p - c.$$

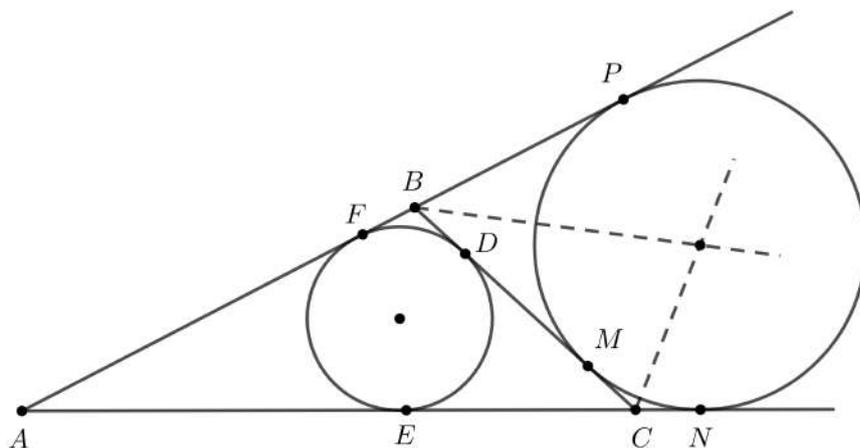
$$(b) \overline{AN} = \overline{AP} = p.$$

$$(c) \overline{BM} = \overline{BP} = p - c, \overline{CM} = \overline{CN} = p - b.$$

$$(d) \overline{EN} = \overline{FP} = a.$$

(e) O ponto médio de BC também é o ponto médio de DM .

Figura 5.1 – Alguns segmentos notáveis do triângulo ABC



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Demonstração:

(a) Denotando $\overline{AE} = \overline{AF} = x$, $\overline{BD} = \overline{BF} = y$ e $\overline{CD} = \overline{CE} = z$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ z + x = b \end{cases} .$$

Somando ordenadamente essas igualdades, obtemos:

$$2x + 2y + 2z = 2p \Rightarrow 2(x + y + z) = 2p \Rightarrow x + y + z = p.$$

Sabemos que, $y + z = a$. Assim,

$$x + y + z = p \Rightarrow x + a = p \Rightarrow x = p - a.$$

Analogamente, obtemos: $y = p - b$ e $z = p - c$.

(b) Sendo $\overline{AN} = \overline{AP} = u$, temos

$$\begin{aligned} 2u &= \overline{AN} + \overline{AP} \\ &= (\overline{AC} + \overline{CN}) + (\overline{AB} + \overline{BP}) \\ &= (\overline{AC} + \overline{AB}) + (\overline{CN} + \overline{BP}). \end{aligned}$$

Notemos que, $\overline{CN} = \overline{CM}$ e $\overline{BP} = \overline{BM}$. Daí,

$$\begin{aligned} 2u &= (b + c) + (\overline{CM} + \overline{BM}) \\ &= b + c + \overline{BC} = a + b + c \\ &= 2p. \end{aligned}$$

Portanto, $u = p$.

(c) É claro que $\overline{BM} = \overline{BP}$, e $\overline{CM} = \overline{CN}$. Por outro lado,

$$\overline{BP} = \overline{AP} - \overline{AB} = p - c \quad \text{e} \quad \overline{CN} = \overline{AN} - \overline{AC} = p - b.$$

(d) Façamos a prova de que $\overline{EN} = a$ (provar que $\overline{FP} = a$ é análogo). Notemos que,

$$\overline{EN} = \overline{AN} - \overline{AE}.$$

Pelos itens (a) e (b), sabemos que, $\overline{AE} = p - a$ e $\overline{AN} = p$. Logo,

$$\overline{EN} = p - (p - a) = a.$$

(e) Basta provar que $\overline{CM} = \overline{BD}$. Dos itens (a) e (c), temos que:

$$\overline{BD} = p - b \quad \text{e} \quad \overline{CM} = p - b.$$

Logo, $\overline{CM} = \overline{BD}$.

■

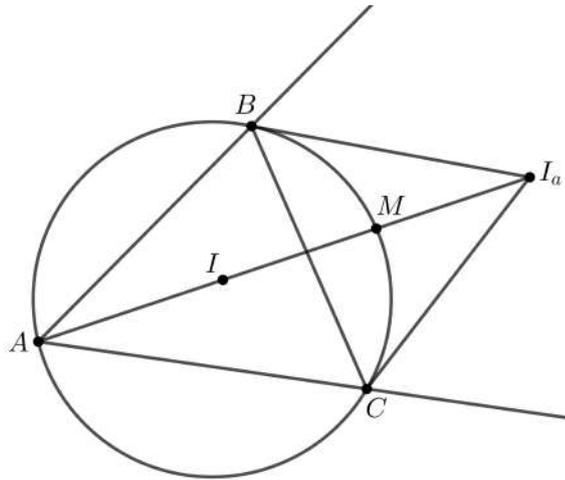
Vejam agora, um resultado que fornece outra relação entre o incentro e os ex-

incentros de um triângulo.

Proposição 5.2. Seja ABC um triângulo qualquer, I seu incentro, I_a seu ex-incentro relativo a BC e M o ponto onde a circunferência circunscrita a ABC intersecta o segmento II_a . Então, M é o ponto médio do arco \widehat{BC} que não contém A e

$$\overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MI} = \overline{MI_a}.$$

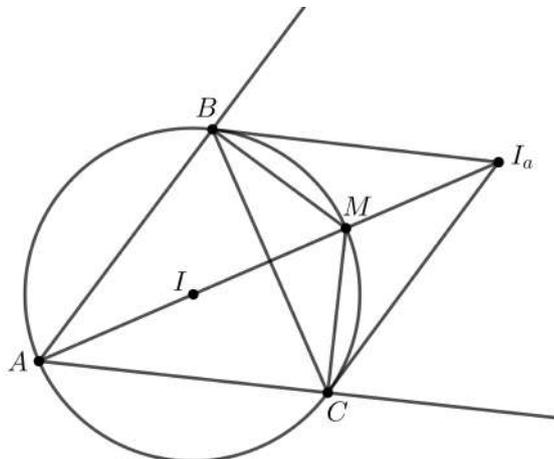
Figura 5.2 – Relação entre incentro e ex-incentro do triângulo ABC 01



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Demonstração: Notemos que os pontos I e I_a pertencem a bissetriz do ângulo \widehat{A} (ver Corolário 4.1). Como $M\widehat{AB} = M\widehat{AC} = \frac{1}{2}\widehat{A}$, segue do teorema do ângulo inscrito (ver Proposição 3.1) que os arcos \widehat{MB} e \widehat{MC} que não contêm A são iguais e, portanto, M é seu ponto médio.

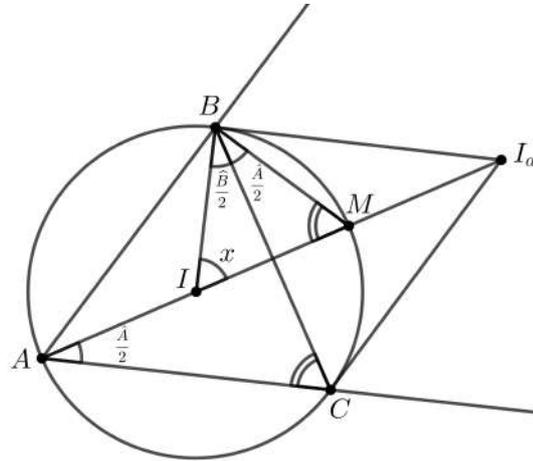
Figura 5.3 – Relação entre incentro e ex-incentro do triângulo ABC 02



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Agora, vamos provar que $\overline{MB} = \overline{MC}$, para isso, observando os ângulos $M\widehat{C}B$ e $M\widehat{B}C$ são iguais, pois subtendem arcos de mesma medida, logo BMC é isósceles de base BC e, portanto, $\overline{MB} = \overline{MC}$.

Figura 5.4 – Relação entre incentro e ex-incentro do triângulo ABC 03



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Agora, provemos que $\overline{MB} = \overline{MI}$. Para isso, notemos que $B\widehat{M}I = B\widehat{C}A$ e $C\widehat{B}M = C\widehat{A}M$, pois subtendem ao mesmo arco. Agora, $I\widehat{B}M = I\widehat{B}C + C\widehat{B}M = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}$, pois IB pertence a bissetriz do ângulo \widehat{B} .

Seja $x = B\widehat{I}M$, assim, temos:

$$x + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{C} = 180^\circ. \quad (5.1)$$

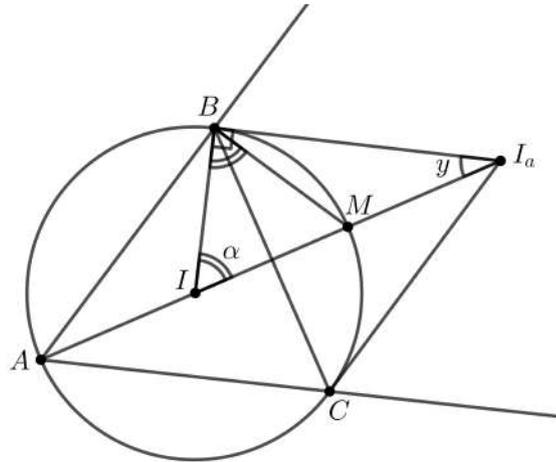
Sabemos que, no triângulo ABC a soma dos ângulos internos é 180° , assim,

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B}. \quad (5.2)$$

Logo, substituindo (5.2) em (5.1), obtemos:

$$x + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} + 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ \Rightarrow x = \widehat{A} + \widehat{B} - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} \Rightarrow x = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}.$$

Assim, $M\widehat{B}I = M\widehat{I}B$ e, por conseguinte, o triângulo IBM é isósceles de base IB . Portanto, $\overline{MB} = \overline{MI}$.

Figura 5.5 – Relação entre incentro e ex-incentro do triângulo ABC 04

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

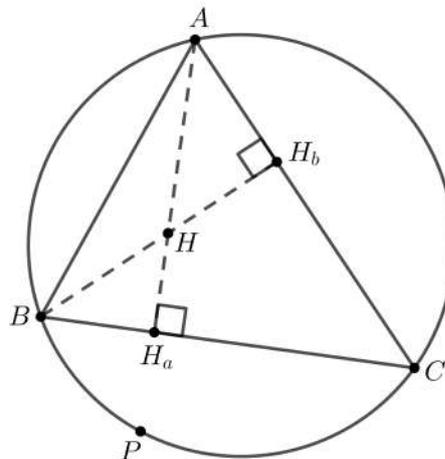
Por fim, vamos provar a igualdade $\overline{MB} = \overline{MI_a}$. Considere α o ângulo \widehat{I} no triângulo BII_a , sabemos que $\widehat{BI_aI} = 90^\circ$ pois o ângulo entre uma bissetriz interna e a externa é 90° . Temos:

$$\alpha + 90^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y = 90^\circ - \alpha.$$

Observe que, $\widehat{MI_aB} = 90^\circ - \alpha$, logo, o triângulo BMI_a é isósceles de base BI_a . Portanto, $\overline{MB} = \overline{MI_a}$. ■

Proposição 5.3. Prove que, em todo triângulo, os simétricos do ortocentro em relação às retas suportes dos lados do triângulo estão situados sobre a circunferência circunscrita ao mesmo.

Figura 5.6 – Simétricos do ortocentro e circunferência circunscrita 01

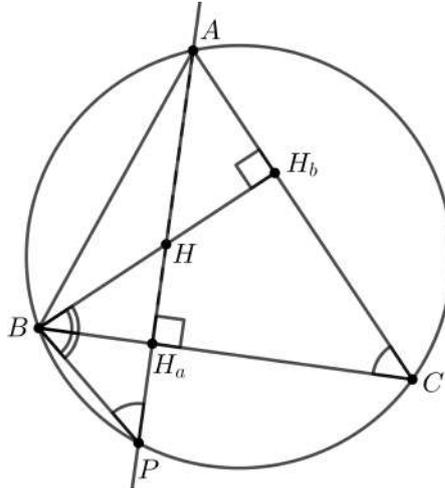


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Demonstração: Sejam ABC um triângulo qualquer, H seu ortocentro e H_a o pé da

altura relativa a A . Como $\overleftrightarrow{HH_a} \perp \overleftrightarrow{BC}$, basta mostrarmos que, considerando P o ponto de interseção da reta \overleftrightarrow{AH} com a circunferência circunscrita a ABC , vamos ter que $\overline{PH_a} = \overline{HH_a}$, ou seja, P é simétrico de H com relação a BC .

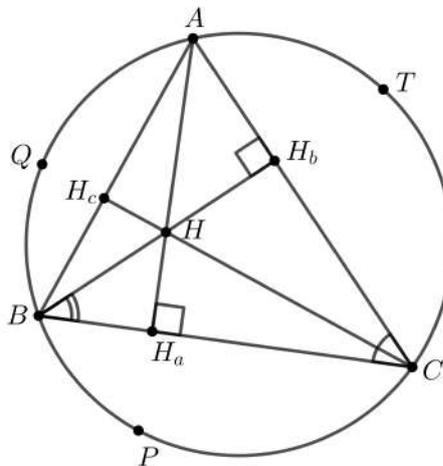
Figura 5.7 – Simétricos do ortocentro e circunferência circunscrita 02



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Notemos que, pelo teorema do ângulo inscrito, os ângulos $\widehat{ACB} = \widehat{APB}$, pois subtendem o mesmo arco. Considere H_b o pé da altura relativa a B , nos triângulos BH_aP e $BH_bC = 90^\circ - \widehat{C}$, temos: $\widehat{H_aBP} = \widehat{H_bBC}$, pois são ângulos complementares. Logo, pelo caso ALA os triângulos $H_aBP \cong H_aBH$. Portanto, $\overline{HH_a} = \overline{H_aP}$ e, conseqüentemente, o ponto P é simétrico ao ortocentro.

Figura 5.8 – Simétricos do ortocentro e circunferência circunscrita 03



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Os pontos Q e T são provados de forma análoga.

■

5.2 Construção geométrica com régua e compasso

Nesta seção, vamos descrever os passos para a construção com régua e compasso das circunferências inscrita e circunscrita. Para isso, utilizamos o *OpenBoard*, que trata-se de um *software* de quadro interativo gratuito e de código aberto compatível com qualquer projetor e dispositivo apontador. A versão utilizada para as construções feitas neste trabalho foi *OpenBoard*1.5.4. O mesmo pode ser baixado através do link: <https://openboard.ch/download.en.html>

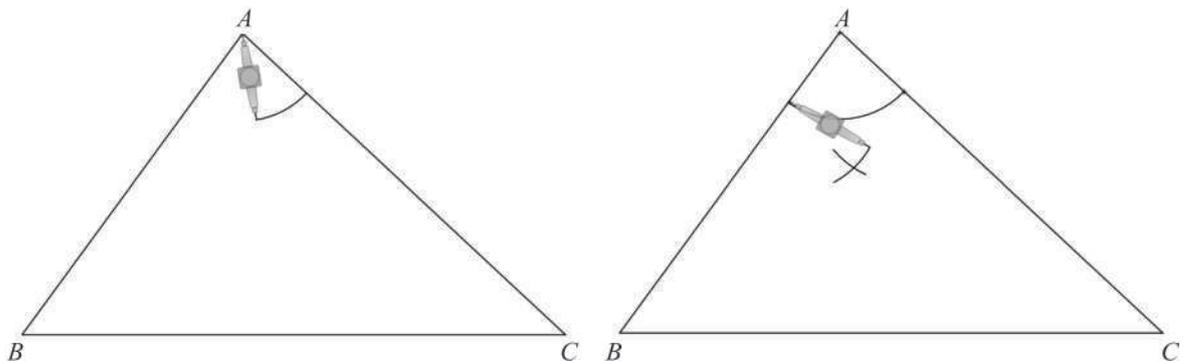
Considerando um triângulo qualquer ABC , vamos fazer as construções das seguintes circunferências.

5.2.1 Circunferência inscrita

Para construir as bissetrizes dos vértices do triângulo, vamos seguir os seguintes passos:

1. Fixa a ponta seca do compasso em A e traça um arco de um lado ao outro lado do triângulo;
2. Traçar arcos com a ponta seca fixa na interseção dos lados com o arco feito anteriormente;

Figura 5.9 – Construção da circunferência inscrita 01



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

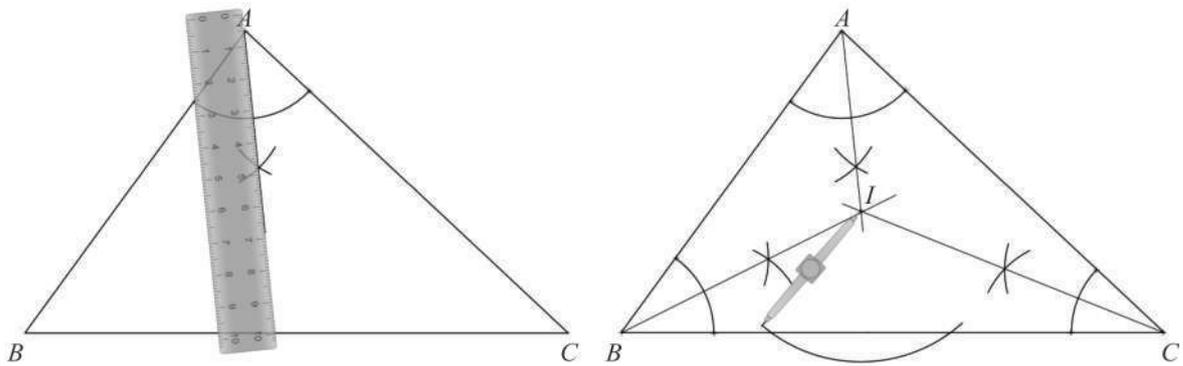
O ponto de interseção dos arcos é ponto da bissetriz do vértice.

3. Com a régua, traçar a bissetriz do vértice A ;
4. O procedimento é análogo para os demais vértices;

O ponto I de interseção das bissetrizes é o incentro do triângulo.

5. Fixa a ponta seca do compasso no ponto I , traça um arco em um dos lados do triângulo, tal que intersecta em dois pontos;

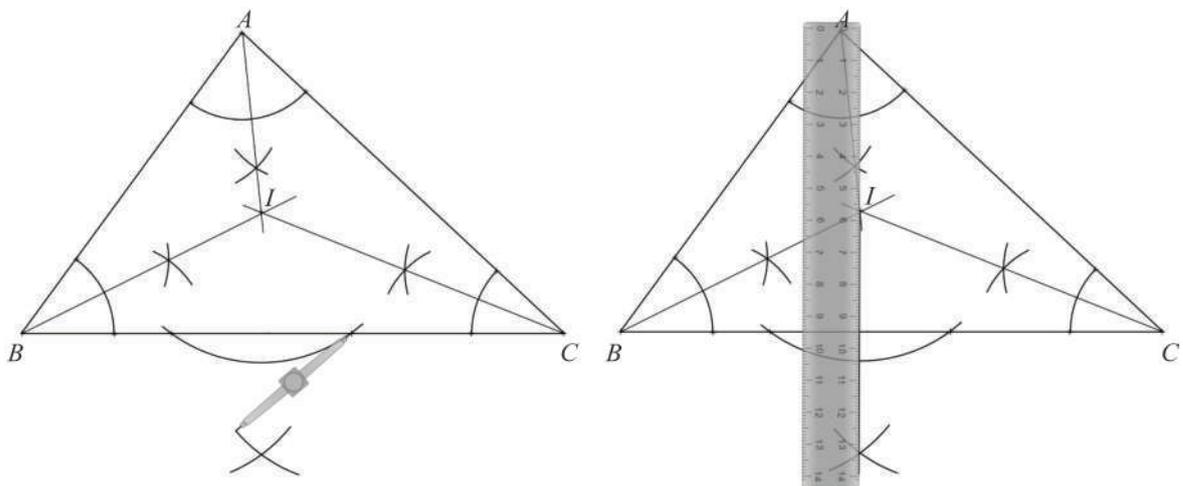
Figura 5.10 – Construção da circunferência inscrita 02



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

6. Fixa a ponta seca do compasso no ponto de interseção construído no item anterior, e traça um arco com abertura qualquer;
7. Com mesma abertura do compasso, fixa a ponta seca na interseção no outro ponto com o lado do triângulo, e faz outro arco;
8. Com a régua, traça um segmento entre o ponto de interseção dos arcos e o ponto I . Este segmento é perpendicular ao lado do triângulo;

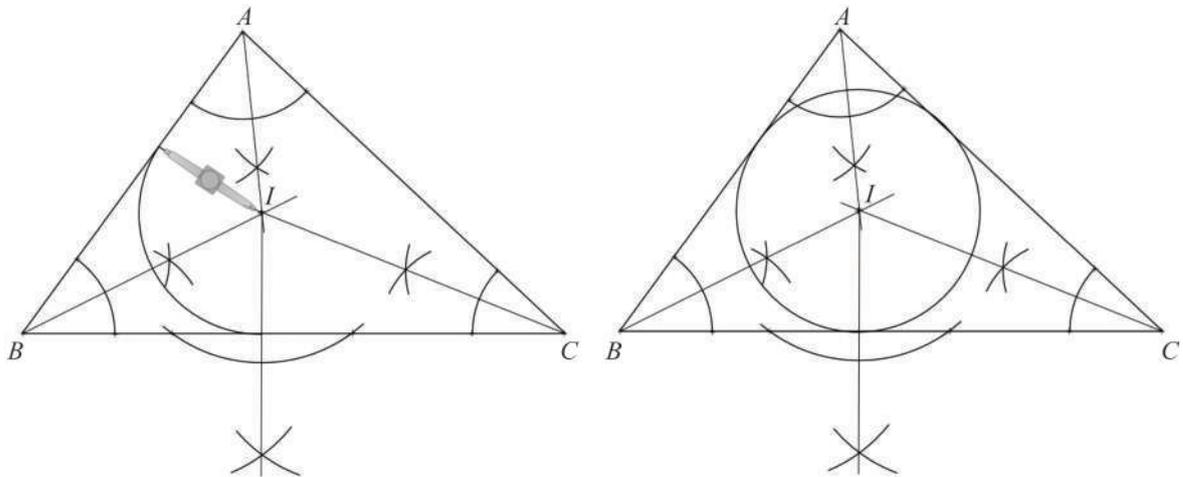
Figura 5.11 – Construção da circunferência inscrita 03



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

9. Centra o compasso no ponto I e com abertura até a interseção do segmento perpendicular com o lado do triângulo, construir a circunferência inscrita.

Figura 5.12 – Construção da circunferência inscrita 04



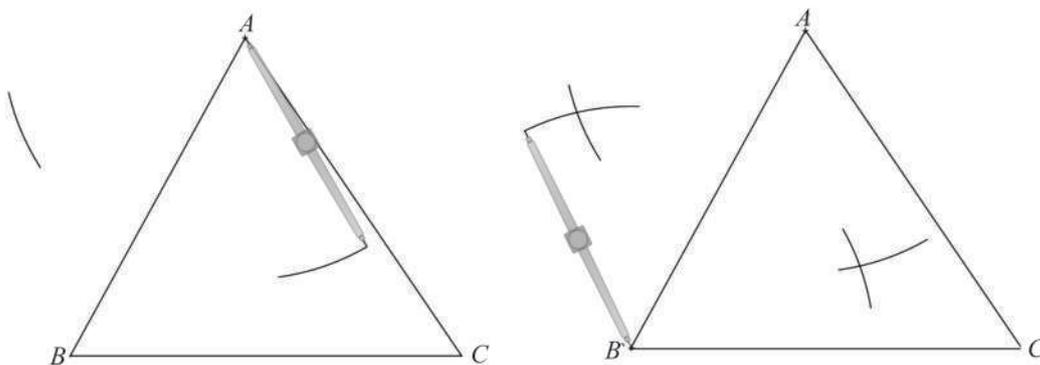
Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

5.2.2 Circunferência circunscrita

Para construir as mediatrizes, vamos aos seguintes passos:

1. Fixa a ponta seca do compasso em A , com abertura maior que a metade de \overline{AB} , traçar um arco em cima e outro embaixo. Mesmo procedimento fixando a ponta seca em B ;

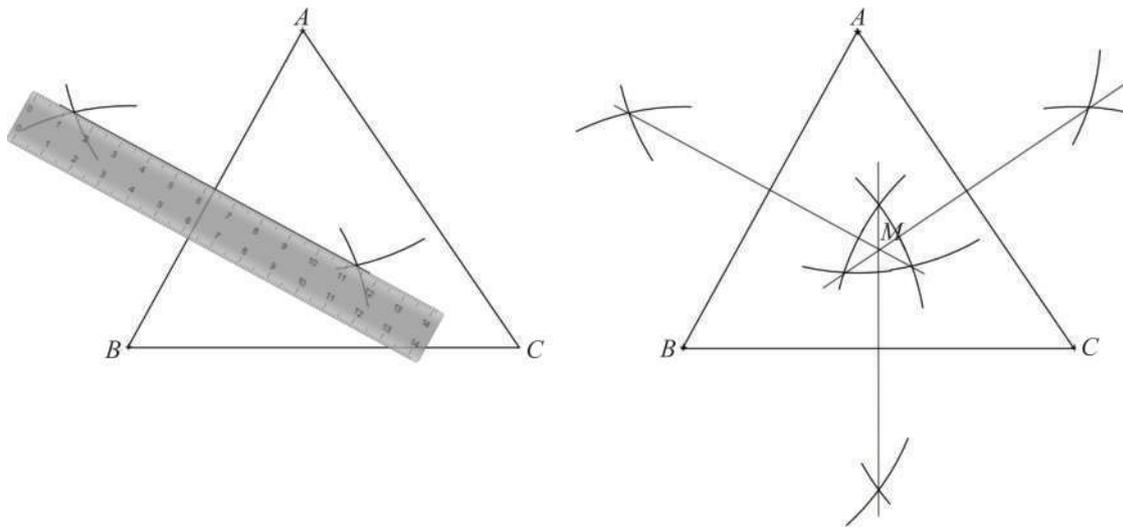
Figura 5.13 – Construção da circunferência circunscrita 01



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

2. Com a régua, traçar a mediatriz de AB , ligando os pontos de interseção dos arcos;
3. De modo análogo, traçar as mediatrizes dos demais segmentos;

Figura 5.14 – Construção da circunferência circunscrita 02

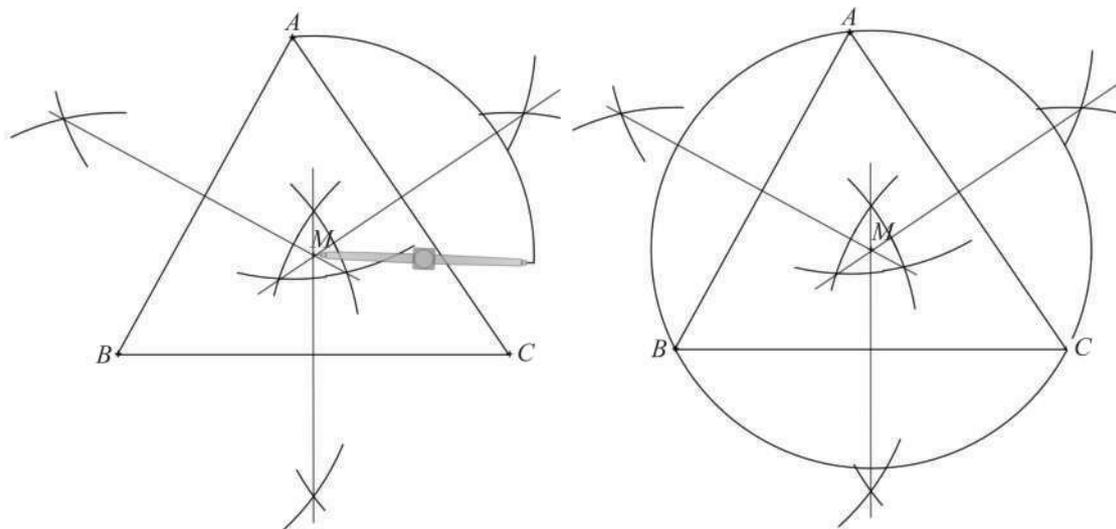


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

O ponto M de interseção das mediatrizes é o centro da circunferência circunscrita.

- Com a ponta seca na interseção das mediatrizes e abertura do compasso até um dos vértices, construir a circunferência circunscrita.

Figura 5.15 – Construção da circunferência circunscrita 03



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

5.3 Construção geométrica no *GeoGebra*

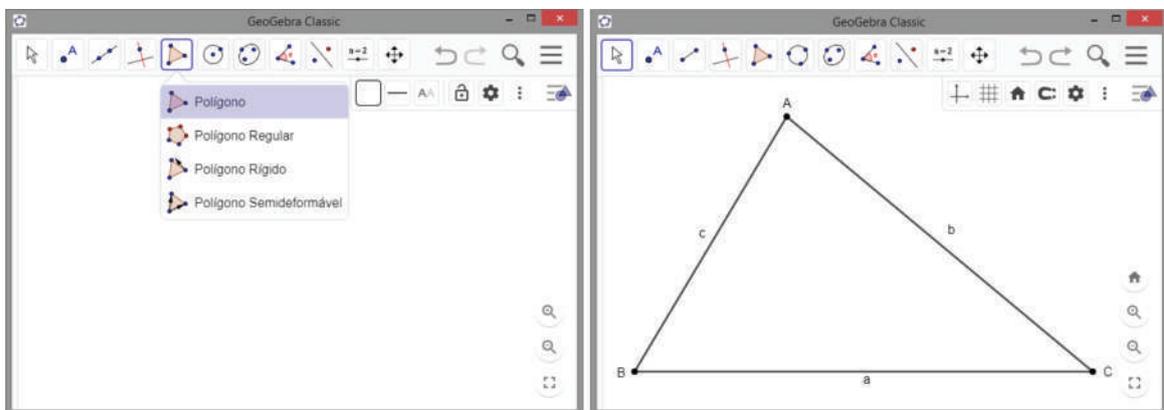
Neste momento, iremos detalhar gradualmente como são realizadas as construções geométricas das circunferências de nove pontos e de Taylor através do *GeoGebra*. Trata-se de um *software* de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra

em uma única GUI. Sua distribuição é livre, nos termos da GNU General Public License, e é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas. A versão utilizada para as construções feitas neste trabalho foi *GeoGebra Classic for Desktop*. O mesmo pode ser baixado através do link: <https://www.geogebra.org/download?lang=pt>.

5.3.1 Circunferência dos nove pontos

1. Abra o *Software GeoGebra* e ative a opção *Polígono*, clique em três pontos distintos e, em seguida, no ponto inicial para criar um triângulo qualquer;

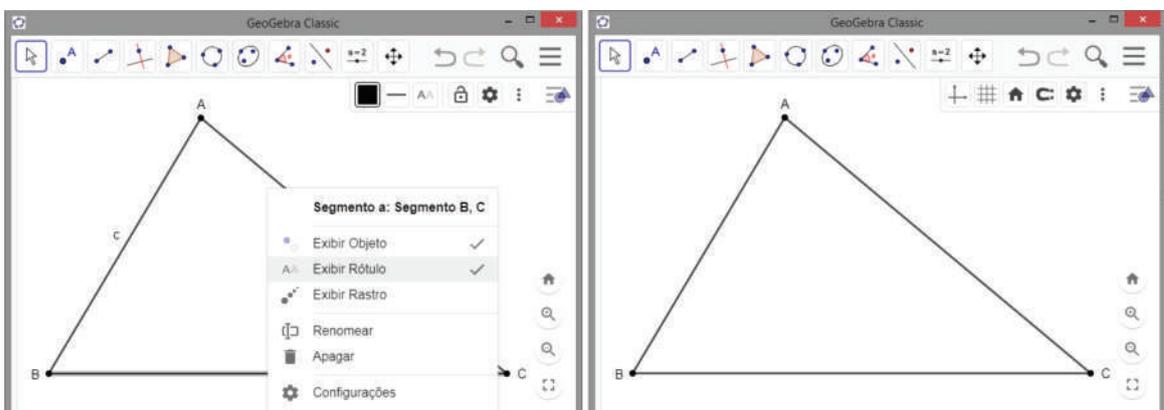
Figura 5.16 – Construção da circunferência dos nove pontos 01



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

2. Clique com o botão direito sobre cada um dos lados do triângulo e desative a opção *Exibir Rótulo*, para ocultar os rótulos dos lados do triângulo;

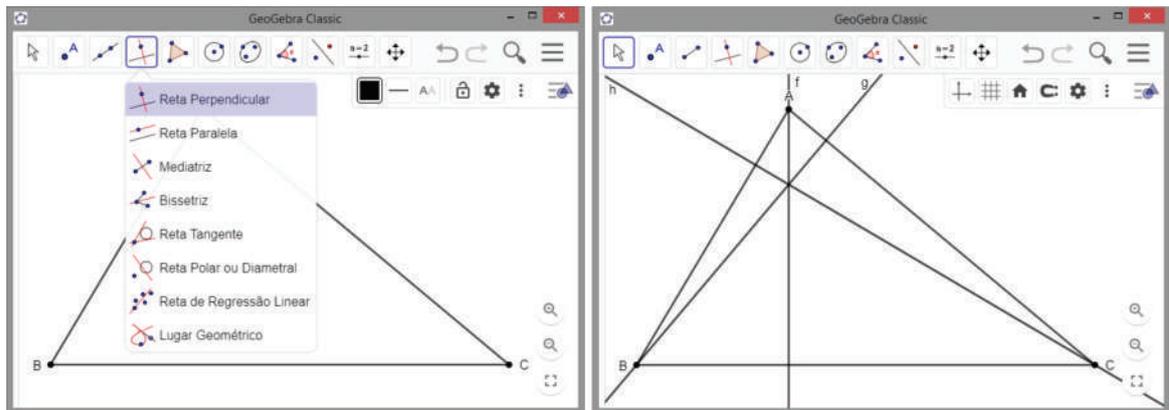
Figura 5.17 – Construção da circunferência dos nove pontos 02



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

3. Ative a opção *Reta Perpendicular* para criar as alturas do triângulo em relação a cada vértice, clique em um vértice e depois no lado oposto;

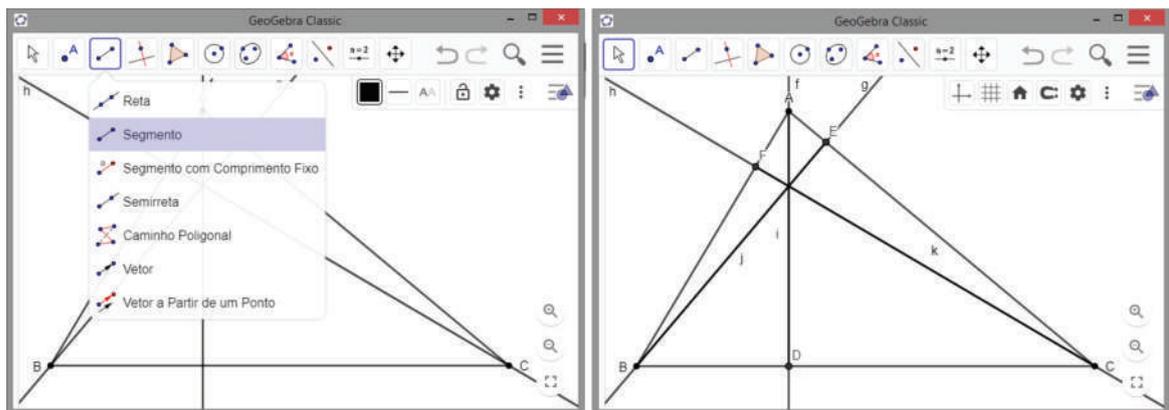
Figura 5.18 – Construção da circunferência dos nove pontos 03



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

4. Ative a opção *Segmento* para criar apenas os segmentos das alturas do triângulo, clicando no vértice do triângulo e depois no pé da altura;

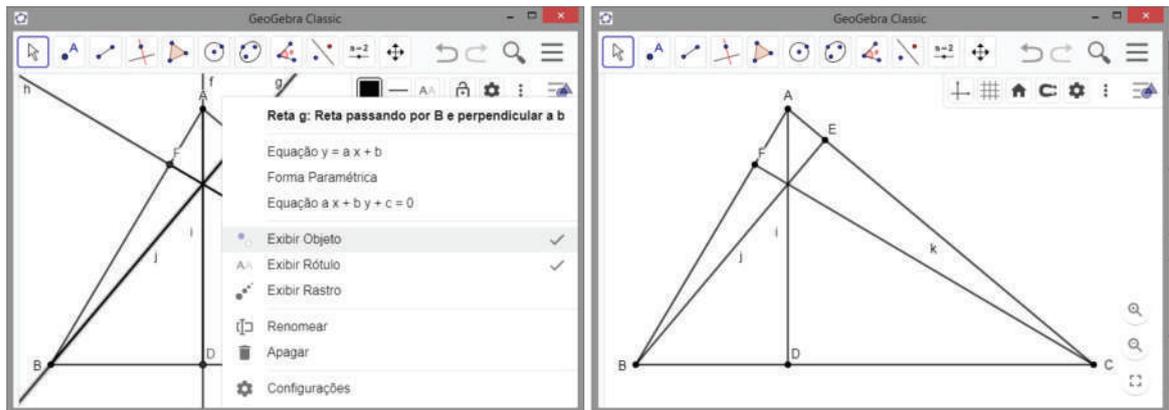
Figura 5.19 – Construção da circunferência dos nove pontos 04



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

5. Clique com o botão direito em cima das retas perpendiculares, podemos ocultá-las, desmarque a opção *Exibir Objeto*;

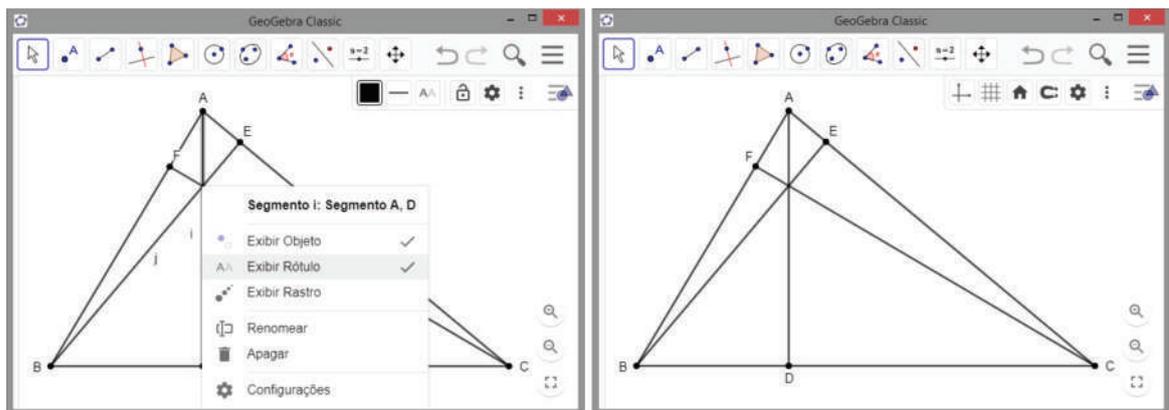
Figura 5.20 – Construção da circunferência dos nove pontos 05



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

6. Ocultar os rótulos dos segmentos de retas, clique com o botão direito sobre os segmentos e, desmarque a opção *Exibir Rótulo*;

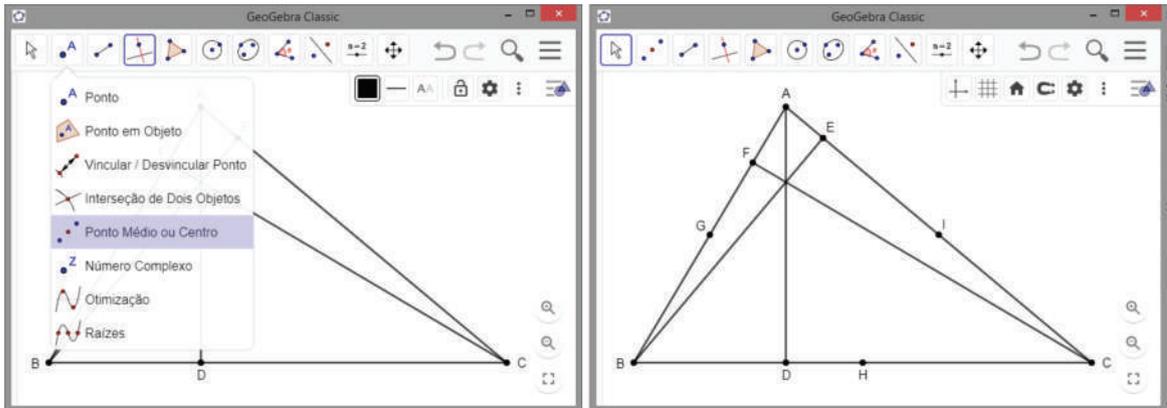
Figura 5.21 – Construção da circunferência dos nove pontos 06



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

7. Ative a opção *Ponto Médio ou Centro* para localizar os pontos médios dos segmentos do triângulo, clicando nos vértices do triângulo dois a dois;

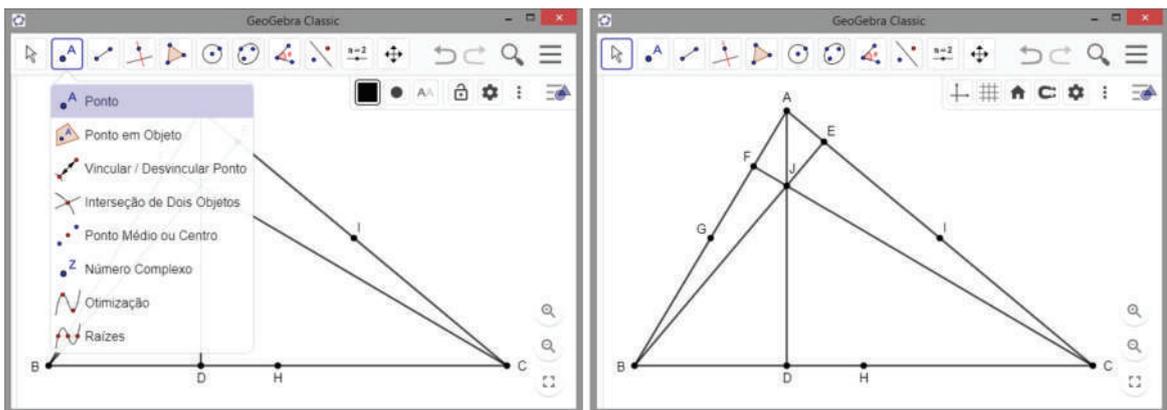
Figura 5.22 – Construção da circunferência dos nove pontos 07



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

8. Ative a opção *Ponto*, e clique na interseção das alturas para marcar o ortocentro do triângulo;

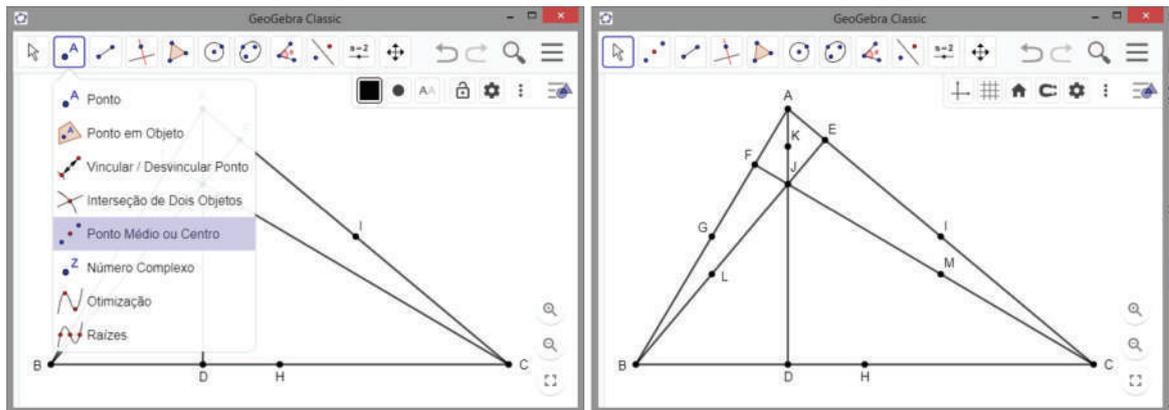
Figura 5.23 – Construção da circunferência dos nove pontos 08



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

9. Ative a opção *Ponto Médio ou Centro* para localizar os pontos médios, agora, dos segmentos dos vértices até o ortocentro do triângulo.

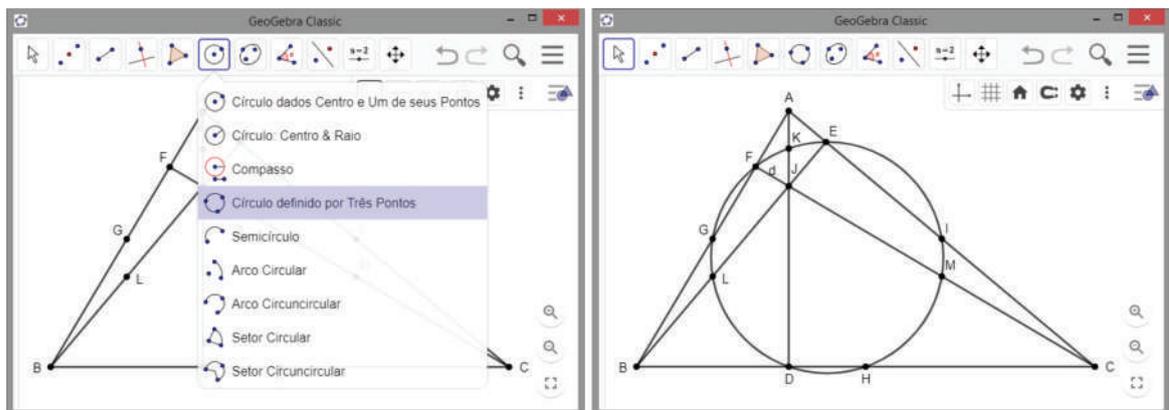
Figura 5.24 – Construção da circunferência dos nove pontos 09



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

10. Por fim, para construir o círculo dos 9 pontos, ative a opção *Círculo definido por Três Pontos*, e clique em três pontos quaisquer construídos nos lados do triângulo.

Figura 5.25 – Construção da circunferência dos nove pontos 10

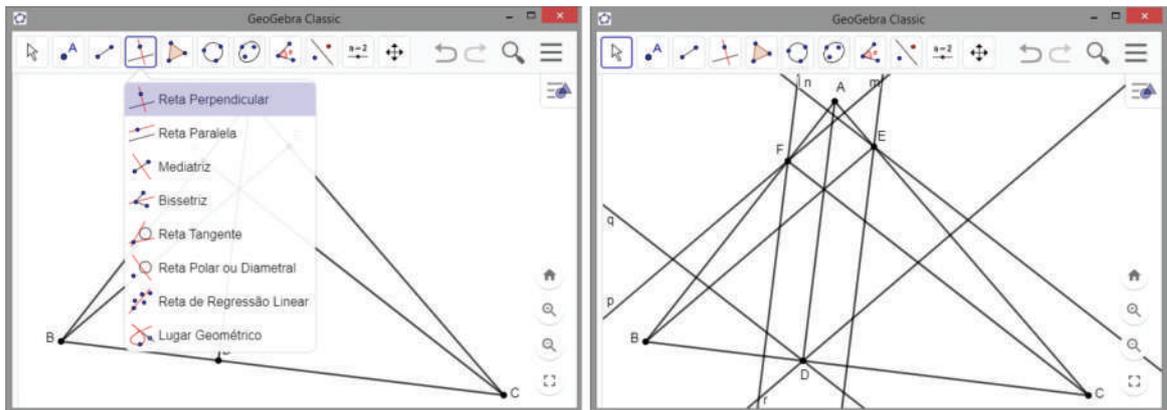


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

5.3.2 Circunferência de Taylor

1. Para construir um triângulo e as suas alturas, siga os mesmos passos de 1 a 6 do item anterior.
2. Ative a opção *Reta Perpendicular* para criar retas perpendiculares a partir dos pés das alturas e perpendicular aos outros dois lados do triângulo;

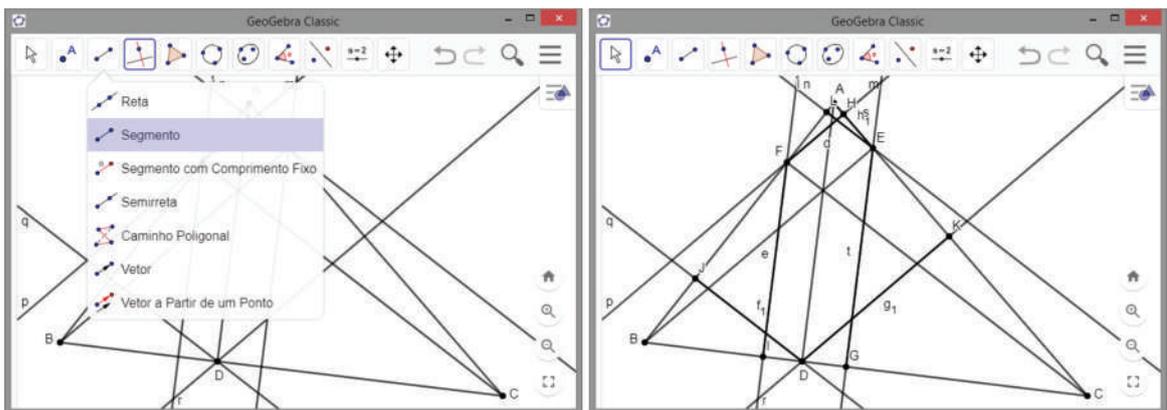
Figura 5.26 – Construção da circunferência de Taylor 01



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

3. Ative a opção *Segmento* para construir os segmentos a partir dos pés das alturas e perpendiculares aos outros dois lados do triângulo;

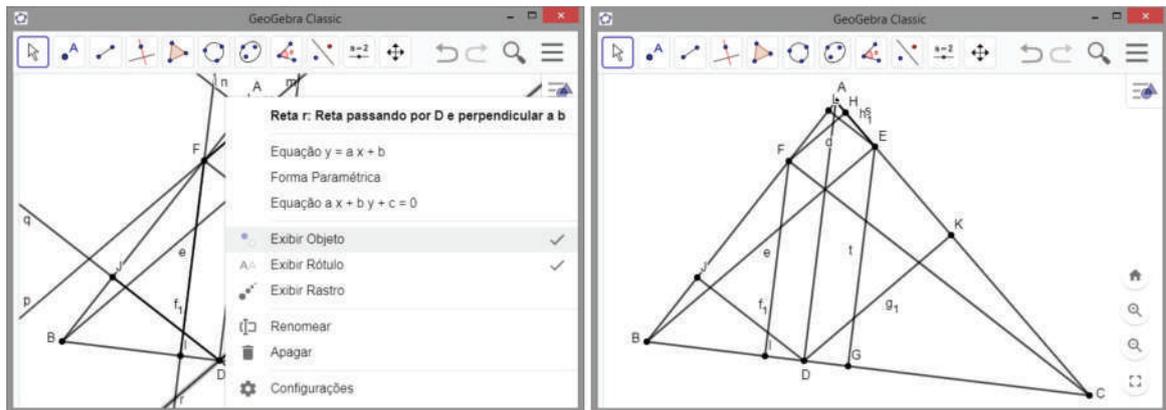
Figura 5.27 – Construção da circunferência de Taylor 02



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

4. Clique com o botão direito sobre as retas perpendiculares criadas anteriormente e desmarque a opção *Exibir Objeto*;

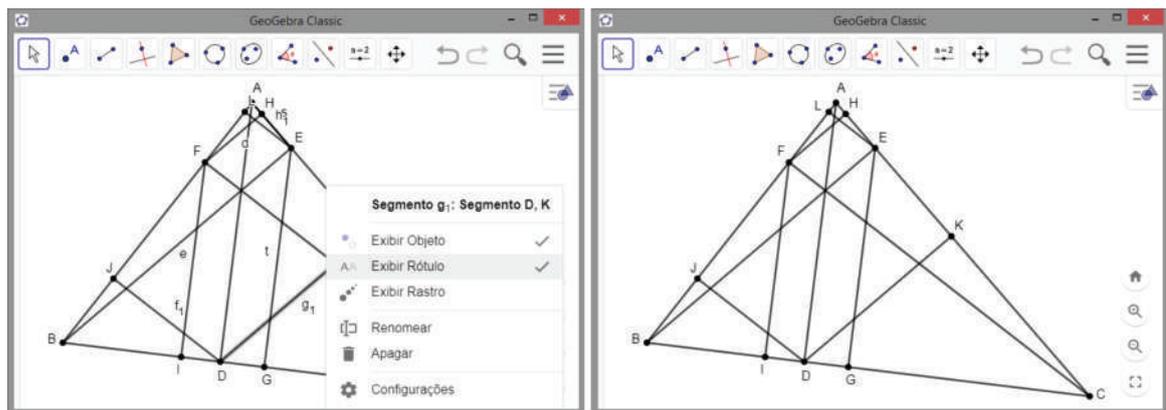
Figura 5.28 – Construção da circunferência de Taylor 03



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

5. Clique com o botão direito sobre os segmentos de reta criados anteriormente e desmarque a opção *Exibir Rótulo*;

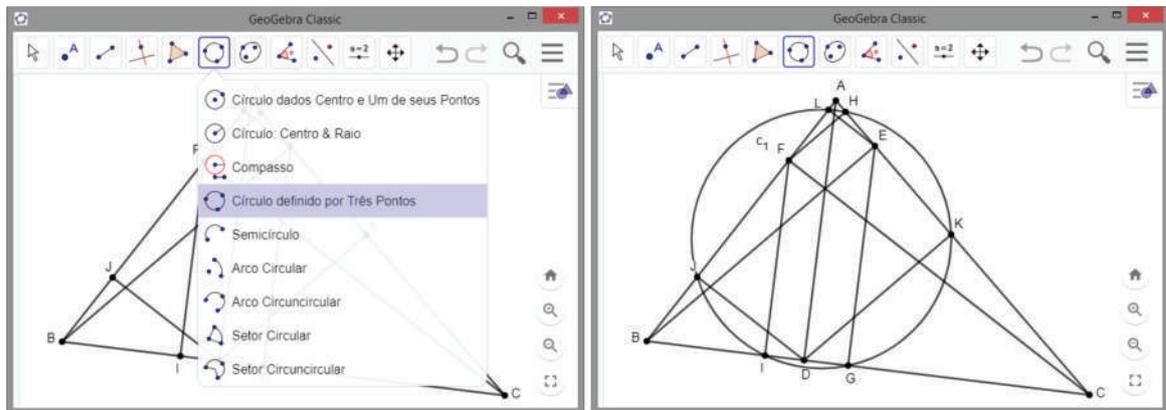
Figura 5.29 – Construção da circunferência de Taylor 04



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

6. Por fim, para construir o círculo de Taylor, ative a opção *Círculo definido por Três Pontos*, e clique em três pontos quaisquer construídos nos lados do triângulo.

Figura 5.30 – Construção da circunferência de Taylor 05



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi possível reunir alguns resultados sobre a geometria plana que geralmente não são vistos nos cursos básicos de geometria, onde foi possível abordar vários conteúdos. Inicialmente, buscamos um contexto histórico sobre a origem da geometria, no qual não conseguimos afirmar de fato de onde e por quem iniciou, apenas temos alguns indícios de conclusões feitas por Heródoto e Aristóteles. Contudo, é bastante evidente que esta área é utilizada por grande parte das pessoas, visto que, por todo lugar se encontra vestígios dela.

Ao longo do trabalho foi necessário explorar vários conteúdos, que serviram para um melhor entendimento sobre os círculos notáveis construídos em um triângulo. No qual fizemos um capítulo com apenas teorias preliminares sobre circunferência, círculos e triângulos, com definições, classificações, elementos e alguns resultados. Posteriormente, buscamos enfatizar os resultados principais do trabalho, os quais tratam dos círculos notáveis formados de diferentes modos em um triângulo. Para isso, foi indispensável a utilização de recursos tecnológicos, que nos serviram como auxílio didático para o ensinamento de forma gradativa na construção de alguns círculos notáveis, não apenas de maneira virtual, como foi visto no *software GeoGebra*, mas como na construção clássica, com a régua e compasso que fizemos no *software OpenBoard*.

Concluindo este trabalho, acreditamos que houve uma grande contribuição ao reunir os resultados abordados, pois sem dúvida, foi essencial tratar de diversos conteúdos que raramente são ministrados nos cursos básicos de geometria plana, e que propomos a utilização de recursos tecnológicos para as construções das figuras.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. Marques. **Geometria euclidiana plana**. Editora: SBM, 1985.

BOYER, Carl Bejamin. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

CAMARGO, Maria. **Arcos e cordas - Conceitos de desenho geométrico**. Disponível em: <https://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica/arcos-e-cordas-conceitos-de-desenho-geometrico.htm>. Acesso em: 4 de jun. de 2021.

CIRCUNFERÊNCIA EX-INSCRITAS. **Clubes de Matemática da OBMEP Disseminando o estudo da matemática**. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-para-leitura_030-circunferencias-ex-inscritas/. Acesso em: 01 de mar. de 2021.

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS. Disponível em: <https://www.professores.uff.br/dirceusu/wp-content/uploads/sites/38/2017/07/GBaula2.pdf>. Acesso em: 05 de ago. de 2021.

EVES, Howard. **História da Geometria**; trad. Hygino H. Domingues. São Paulo, 1992.

LACHLAN, R. “**The Lemoine Circle**.” 131-132 in *An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry*. London: Macmillian, pp. 76-77, 1893.

MUNIZ NETO, A. C. *Geometria*. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

PINHEIRO, Plácido Rogério. **O Círculo dos Nove Pontos**. Fortaleza, CE. RPM 14, 1989. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/14/12.htm>. Acesso em: 25 de jun. de 2021.

SILVA, Luiz Paulo. Elementos do círculo e da circunferência. **Mundo Educação**, 2021. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/elementos-circulo-e-circunferencia.htm>. Acesso em: 23 de fev. de 2021.

TAYLOR, H. M. (1883). **The Relations of the Intersections of a Circle with a Triangle**. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-15(1), 122–139.