



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

LUAN DE LUCENA FELIPE

**SOBRE A GEOMETRIA DE QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS: DUAS
DEMONSTRAÇÕES E UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PTOLOMEU**

**PATOS
2021**

LUAN DE LUCENA FELIPE

**SOBRE A GEOMETRIA DE QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS: DUAS
DEMONSTRAÇÕES E UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PTOLOMEU**

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática – CCEA – UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Geometria

Orientador: Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira

**PATOS
2021**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

F754a Felipe, Luan de Lucena.
Sobre a geometria de quadriláteros inscritíveis [manuscrito]
: duas demonstrações e uma aplicação do Teorema de
Ptolomeu / Luan de Lucena Felipe. - 2021.
40 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em
Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de
Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2021.

"Orientação : Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira ,
Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Quadriláteros inscritíveis. 2. Teorema de Ptolomeu. 3.
Teorema de Carnot. I. Título

21. ed. CDD 516

LUAN DE LUCENA FELIPE

**SOBRE A GEOMETRIA DE QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS: DUAS
DEMONSTRAÇÕES E UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PTOLOMEU**

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo)
apresentado ao Curso de Licenciatura em
Matemática do CCEA, Campus VII, UEPB,
como requisito parcial à obtenção do título
de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Aprovado em: 13/10/2021.

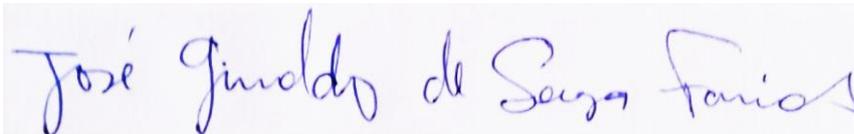
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof.ª Dr.ª Kelyane Barboza de Abreu
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof.ª Me. José Ginaldo de Souza Farias
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

“Deixe que tudo aconteça a você
Beleza e terror
Apenas continue seguindo
Nenhum sentimento é definitivo”
Rainer Maria Rilke

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
2	ELEMENTOS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA	7
2.1	Triângulos	7
2.1.1	<i>Semelhança de triângulos</i>	12
2.1.1.1	<i>Casos de semelhança de triângulos</i>	14
2.2	Circunferência	16
2.2.1	<i>Elementos da circunferência</i>	16
2.2.2	<i>Ângulos na circunferência</i>	17
2.2.3	<i>Relações métricas na circunferência</i>	19
2.2.4	Circunferência Inscrita em um triângulo	19
2.2.5	Circunferência circunscrita em um triângulo	20
2.3	Quadriláteros	21
2.3.1	<i>Quadriláteros Inscritíveis</i>	22
2.4	Áreas de Polígonos	25
3	O TEOREMA DE PTOLOMEU	27
3.1	Demonstração via áreas	28
3.2	Demonstração via Teorema de Stewart	31
4	TEOREMA DE CARNOT	32
4.1	Caso do triângulo agudo	34
4.2	Caso do triângulo obtuso	36
4.3	Caso do triângulo retângulo	37
5	CONCLUSÃO	38
	REFERÊNCIAS	38

SOBRE A GEOMETRIA DE QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS: DUAS DEMONSTRAÇÕES E UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PTOLOMEU

Luan de Lucena Felipe*

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos duas demonstrações de um importante resultado da Geometria Euclidiana Plana que estabelece uma relação métrica entre as diagonais e os lados de um quadrilátero inscritível: o Teorema de Ptolomeu. Para isso, inicialmente apresentamos os conceitos, propriedades e resultados geométricos necessários. Uma vez feitas as prometidas demonstrações, provamos com o auxílio do Teorema de Ptolomeu uma relação entre as distâncias com sinal do circuncentro de um triângulo até seus lados em função dos raios das circunferências circunscrita e inscrita, conhecida como Teorema de Carnot.

Palavras-chave: Quadriláteros inscritíveis. Teorema de Ptolomeu. Teorema de Carnot.

ABSTRACT

In this work, we present two proofs of an important result from Euclidean Plane Geometry that establishes a metric relationship between the diagonals and sides of an cyclic quadrilateral: the Ptolemy's Theorem. For this, we initially present the necessary geometric concepts, properties and results. Once we give the promised proofs, we proved with the help of Ptolemy's Theorem a relationship between the signed distances from the circumcenter of a triangle to its sides as a function of the radius of the circumscribed and inscribed circles, known as Carnot's Theorem.

Keywords: Cyclic quadrilaterals. Ptolemy's Theorem. Carnot's Theorem.

*Aluno de graduação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, Campus VII – Governador Antônio Mariz (Patos–PB), Universidade Estadual da Paraíba. E-mail: luanlucena53@gmail.com. Este artigo de conclusão de curso foi escrito sob orientação do Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira.

1 INTRODUÇÃO

Cláudio Ptolomeu (c. 100 - c. 170 d.C., Alexandria, Egito) foi um matemático, astrônomo, geógrafo, astrólogo e teórico da música que escreveu cerca de uma dúzia de tratados, três dos quais foram fundamentais para as ciências bizantina, islâmica e ocidental: o tratado astronômico *Almagest* (originalmente, *Tratado Matemático*, que depois passou a ser conhecido como *O Grande Tratado*); a *Geografia*, uma discussão detalhada sobre mapas e o conhecimento geográfico do mundo greco-romano; e um tratado astrológico no qual Ptolomeu tentou a astrologia baseada no horóscopo à filosofia natural aristotélica. Ele citou filósofos gregos, usou observações babilônicas e a teoria lunar babilônica. Mas pouco se sabe sobre sua vida.

Figura 1: Cláudio Ptolomeu retratado em gravura do século XVI



Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy>

Um dos maiores astrônomos e geógrafos de seu tempo, Ptolomeu propôs a teoria geocêntrica numa forma que se manteve por 1400 anos, com base no sistema planetário centrado na Terra descrito por Aristóteles. Essa teoria só foi suplantada em 1543 quando o astrônomo Nicolau Copérnico (1473-1543) formulou sua teoria heliocêntrica. Em sua *Geografia*, dividida em oito livros, Ptolomeu tentou mapear o mundo conhecido atribuindo coordenadas aos principais lugares em termos de latitude e longitude.

Ptolomeu usou modelos geométricos para prever as posições do sol, da lua e dos planetas, usando combinações de movimentos circulares conhecidos como epiciclos. Após estabelecer este modelo, ele passou a descrever a Matemática de que ele precisava para o resto do trabalho. Em particular, ele apresenta métodos trigonométricos baseados na função corda crd (que está relacionada com a função seno por $\text{crd}(\theta) = \sin(2\theta)/120^\circ$).

Ele desenvolveu novos teoremas e demonstrações geométricos. Usando cordas de um círculo e um polígono inscrito com 360 lados, ele obteve a seguinte aproximação

$$\pi = 3 \frac{17}{120} = 3,14166$$

e, usando $\sqrt{3} = \text{crd}(60^\circ)$,

$$\sqrt{3} = 1,73205.$$

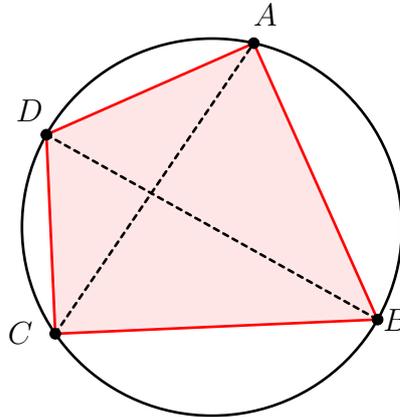
Ele usou fórmulas para a função crd que são análogas às nossas fórmulas para $\sin(a + b)$ e $\sin(a - b)$ e criou uma tabela dessa função com intervalos de $0,5^\circ$.

Para desenvolver a supracitada tabela, e dentre suas notáveis contribuições à Geometria Euclidiana, ele fez uso de um resultado que hoje leva seu nome e que é o objeto de estudo deste trabalho:

Teorema de Ptolomeu. *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência (Fig. 2). Então o produto das medidas das diagonais \overline{AC} e \overline{BD} é igual à soma dos produtos das medidas dos lados opostos:*

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}.$$

Figura 2: Quadrilátero $ABCD$ inscrito numa circunferência



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Este teorema é de grande importância para o estudo da Geometria e Trigonometria, pois a partir dele podemos obter, por exemplo, o Teorema de Pitágoras, a Lei dos Cossenos e o Teorema de Carnot, que estabelece uma relação entre as distâncias com sinal do circuncentro de um triângulo até seus lados em função dos raios das circunferências circunscrita e inscrita.

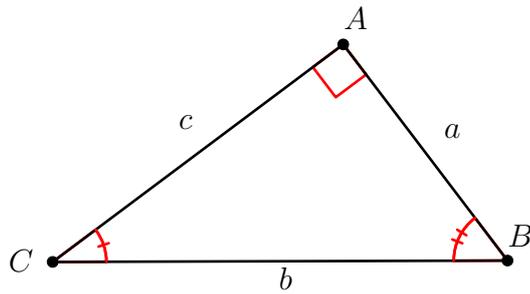
Neste trabalho, apresentamos duas demonstrações do Teorema de Ptolomeu, devidas a Ayyangar (1923). Inicialmente, na Seção 2, apresentamos os conceitos, propriedades e resultados geométricos necessários para que, na Seção 3, possamos oferecer as prometidas demonstrações. Por fim, na Seção 4, como consequência do Teorema de Ptolomeu, apresentamos a demonstração do Teorema de Carnot contida no site *Cut The Knot* e que é lá atribuída essencialmente a Amini (2014).

2 ELEMENTOS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

Nesta secção, apresentamos os conceitos, resultados e propriedades que serão utilizados na demonstração dos principais resultados deste trabalho. Baseamo-nos em Barbosa (2006), Muniz Neto (2018) e Posamentier e Salkind (1996).

2.1 Triângulos

Um **triângulo** é, por definição, um polígono formado por três pontos não-colineares. Sendo A , B e C três tais pontos, dizemos que A , B e C são os **vértices** do triângulo $\triangle ABC$, cujas medidas dos **lados** são $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ e $\overline{AC} = c$ e cujos **ângulos internos** são \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} .

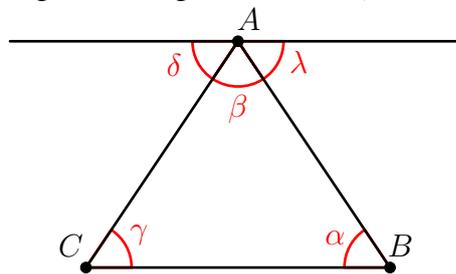
Figura 3: Triângulo $\triangle ABC$ 

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Teorema 2.1 (Soma dos ângulos internos de um triângulo). *A soma dos três ângulos internos de um triângulo $\triangle ABC$ é igual a 180° . Ou seja,*

$$\hat{A}BC + \hat{B}CA + \hat{C}AB = 180^\circ$$

Demonstração. Considere o triângulo $\triangle ABC$ abaixo, com os ângulos β , α e γ . Agora, trace a única reta que passa pelo ponto A e é paralela ao lado BC , a qual formará com as transversais AC e AB os ângulos δ e λ indicados na figura.

Figura 4: Ângulos internos β , α e γ 

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Agora, observe que δ e γ são ângulos **alternos internos**, então $\delta = \gamma$. O mesmo acontece com os ângulos λ e α , donde $\lambda = \alpha$. Como os ângulos δ , β e λ formam um **ângulo raso**, segue que:

$$\beta + \alpha + \gamma = 180^\circ,$$

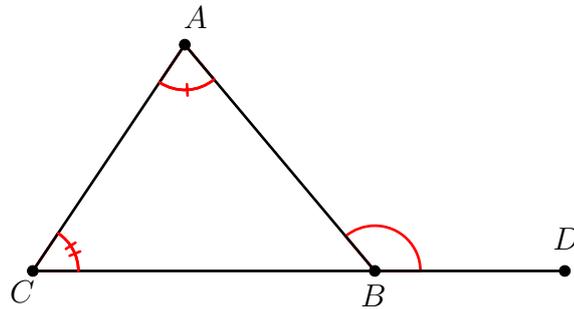
isto é,

$$\hat{A}BC + \hat{B}CA + \hat{C}AB = 180^\circ.$$

□

Teorema 2.2 (Ângulo externo). *Em todo triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Ou seja,*

$$\hat{B}AC + \hat{A}CB = \hat{A}BD$$

Figura 5: Ângulo externo $\hat{A}BD$ 

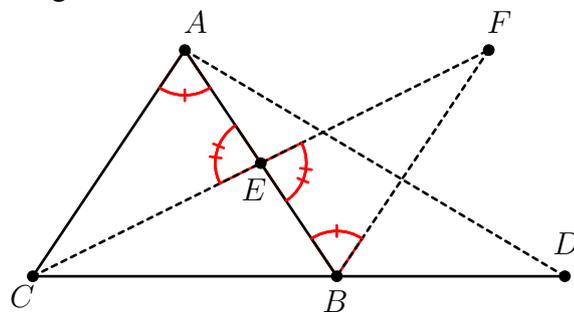
Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Demonstração. Imediata a partir do Teorema 2.2. □

Observação 2.1. Sem fazer uso de paralelismo, podemos provar o seguinte. Considere o $\triangle ABC$. Em seguida, prolongue o segmento CB até o ponto D . Queremos mostrar que

$$\hat{A}BD > \hat{B}AC \quad e \quad \hat{A}BD > \hat{B}CA.$$

Para isso, seja E o ponto médio do segmento AB , donde $\overline{AE} = \overline{BE}$. Seja ainda F um ponto sobre a semirreta \overrightarrow{CE} , tal que $\overline{EF} = \overline{CE}$.

Figura 6: $\hat{B}AC = \hat{E}BF$ e $\hat{A}EC = \hat{B}EF$ 

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Temos $\hat{A}EC = \hat{B}EF$, por serem opostos pelo vértice. Assim, $\triangle AEC = \triangle BEF$, pelo caso **LAL** (veja a Subsubseção 2.1.1).

Portanto, $\hat{B}AC = \hat{E}BF$. Como BF divide $\hat{A}BD$, então

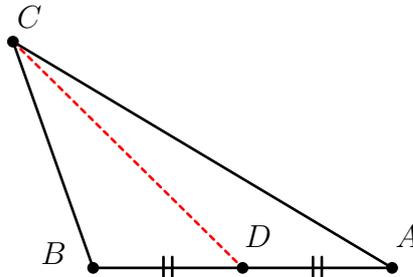
$$\hat{A}BD > \hat{E}BF \implies \hat{A}BD > \hat{B}AC.$$

Analogamente, $\hat{A}BD > \hat{B}CA$. Este resultado mais geral é por vezes chamado Teorema do Ângulo Externo.

Definição 2.1. **Ceviana** é o nome dado a qualquer segmento que parte de um vértice de um triângulo até a reta suporte do lado oposto a esse vértice. A **altura**, a **mediana** e a **bissetriz** do triângulo são casos particulares de cevianas. Dado um $\triangle ABC$, considere o segmento AB e tome D como o ponto médio desse segmento; chamamos de **mediana** a ceviana que liga o vértice C , de onde ela parte, ao ponto médio D do segmento AB (Fig. 7). Agora, se o segmento

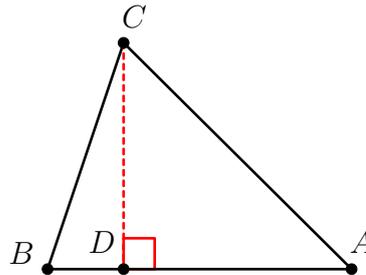
CD for perpendicular ao segmento AB (notação: $CD \perp AB$), chamamos de **altura** a ceviana CD (Fig. 8). Se CD divide o ângulo $\hat{A}CB$ em dois ângulos congruentes, damos a essa ceviana o nome de **bissetriz**. (Fig. 9).

Figura 7: A ceviana CD é a mediana do segmento AB



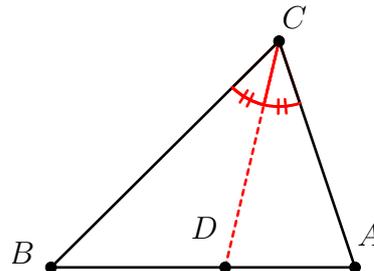
Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Figura 8: A ceviana CD é a altura do triângulo $\triangle ABC$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Figura 9: A ceviana CD é a bissetriz do ângulo $\hat{A}CB$



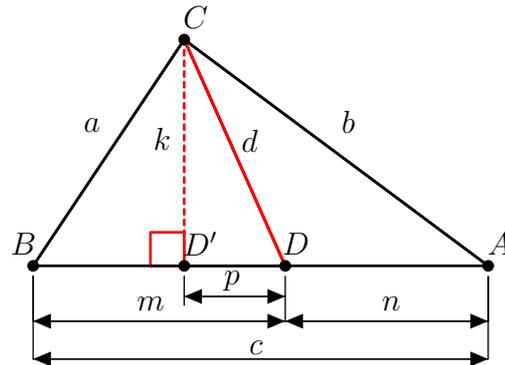
Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Teorema 2.3 (Teorema de Stewart). *Sejam um triângulo $\triangle ABC$, cujos lados medem $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, e D um ponto de AB . Pondo $\overline{CD} = d$ e denotando por m e n as medidas dos segmentos determinados pela ceviana CD no segmento AB , então vale a relação*

$$a^2n + b^2m - d^2c = cmn.$$

Demonstração. Considere o triângulo $\triangle ABC$ abaixo:

Figura 10: Teorema de Stewart



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Sejam $p = \overline{DD'}$ a medida da projeção da ceviana CD sobre o lado AB e $k = \overline{CD'}$ a medida da altura CD' do triângulo $\triangle ABC$.

I. Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos $\triangle BCD'$ e $\triangle DCD'$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= k^2 + (m - p)^2 \\
 \implies a^2 &= k^2 + m^2 - 2mp + p^2 \\
 \implies -k^2 &= -a^2 + m^2 - 2mp + p^2 \\
 \implies k^2 &= a^2 - m^2 + 2mp - p^2
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

e

$$\begin{aligned}
 d^2 &= k^2 + p^2 \\
 \implies -k^2 &= -d^2 + p^2 \\
 \implies k^2 &= d^2 - p^2.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Substituindo (2.2) em (2.1), encontramos

$$\begin{aligned}
 d^2 - p^2 &= a^2 - m^2 + 2mp - p^2 \\
 \implies -a^2 &= -d^2 - m^2 + 2mp - p^2 + p^2,
 \end{aligned}$$

isto é,

$$a^2 = d^2 + m^2 - 2mp. \tag{2.3}$$

II. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle ACD'$ e fazendo manipulações algébricas similares às anteriores, encontramos

$$k^2 = b^2 - p^2 - 2pn - n^2. \tag{2.4}$$

Substituindo (2.2) em (2.4), obtemos

$$\begin{aligned}
 d^2 - p^2 &= b^2 - p^2 - 2pn - n^2 \\
 \implies -b^2 &= -d^2 - n^2 - 2pn - p^2 + p^2,
 \end{aligned}$$

isto é,

$$b^2 = d^2 + n^2 + 2pn. \tag{2.5}$$

Montamos um sistema com as equações (2.3) e (2.5):

$$\begin{cases} a^2 = d^2 + m^2 - 2mp \\ b^2 = d^2 + n^2 + 2pn \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por n e a segunda por m , chegamos a

$$\begin{cases} a^2n = d^2n + m^2n - 2mnp \\ b^2m = d^2m + n^2m + 2mnp \end{cases}$$

Somando as duas últimas equações, obtemos:

$$a^2n + b^2m = m^2n + n^2m + d^2n + d^2m$$

Organizando os termos, temos:

$$a^2n + b^2m = m(m + n) + d^2(m + n) \quad (2.6)$$

Como m e n são segmentos determinados pela ceviana no segmento de medida $\overline{AB} = c$, então:

$$c = m + n \quad (2.7)$$

Substituindo (2.7) em (2.6), encontramos:

$$a^2n + b^2m = mnc + d^2c.$$

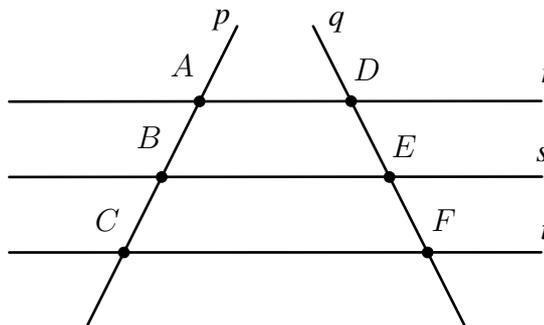
□

2.1.1 Semelhança de triângulos

Lema 2.1. *Um feixe de retas paralelas determina sobre duas retas transversais segmentos proporcionais. Em outras palavras, se $r \parallel s \parallel t$,*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}.$$

Figura 11: Feixe de retas paralelas sobre duas transversais



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

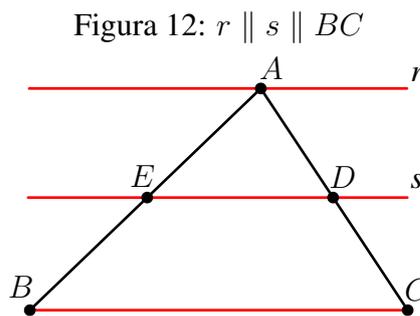
Demonstração. Veja a prova do Teorema 4.2 em Muniz Neto (2018).

□

Teorema 2.4 (Teorema de Tales em triângulos). *Se traçarmos uma reta paralela a um dos lados de um triângulo que intersecta os outros dois lados desse triângulo, então ela divide esses lados em partes proporcionais. Ou seja, quando $DE \parallel CB$,*

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}.$$

Demonstração. Considere o $\triangle ABC$. Traçando uma reta $s \parallel BC$, que intersecta AB e CD nos pontos E e D , respectivamente, e traçando uma reta r de maneira que $r \parallel s \parallel BC$ e $A \in r$, perceba que temos um feixe de paralelas cortadas por duas transversais.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Daí, pelo Lema 2.1, temos

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}.$$

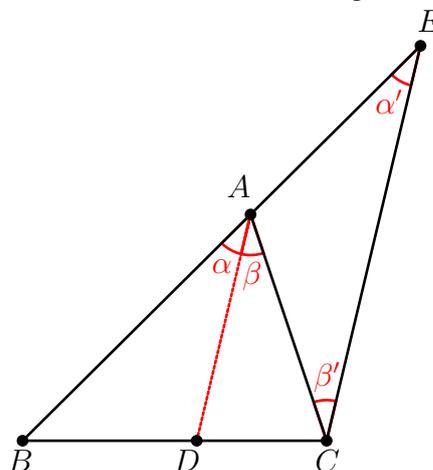
□

Teorema 2.5 (Teorema da Bissetriz interna). *Seja, num triângulo $\triangle ABC$, AD a bissetriz que do ângulo $B\hat{A}C$. Então:*

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Demonstração. Seja E a interseção da semirreta \overrightarrow{BA} com a reta que passa por C e é paralela a AD .

Figura 13: Bissetriz AD do ângulo $B\hat{A}C$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Então:

- (i) $\alpha = \beta$, pela definição de bissetriz;
- (ii) $\beta = \beta'$, pois são ângulos alternos internos;
- (iii) $\alpha = \alpha'$, pois são ângulos correspondentes nas paralelas AD e BE .

Logo, concluímos que $\alpha' = \beta'$, donde $\overline{AC} = \overline{AE}$.

Pelo Teorema 2.4, temos que

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}.$$

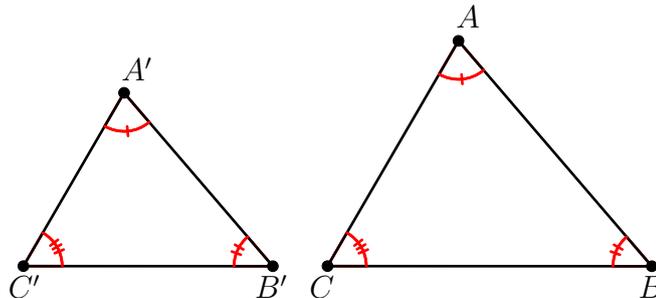
Como $\overline{AB} = \overline{AE}$, o resultado segue. □

Definição 2.2. Dois triângulos são ditos semelhantes quando podemos estabelecer uma correspondência entre seus pares de vértices de modo que ângulos internos correspondentes tenham a mesma medida e lados correspondentes sejam proporcionais. Se dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes, fato que denotaremos por $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, e se a correspondência é a que leva A em A' , B em B' e C em C' , então as relações a seguir se verificam:

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \kappa.$$

O número κ chama-se **constante de proporcionalidade**. Quando $\kappa = 1$, dizemos que os triângulos são **congruentes** e, neste caso, escrevemos $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Figura 14: Semelhança dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

2.1.1.1 Casos de semelhança de triângulos

Aqui, apresentamos casos de semelhança de triângulos, isto é, conjuntos menores de hipóteses (com relação à lista exigida pela definição) que, uma vez atendidas, garantem a semelhança dos triângulos em questão. Os dois últimos casos apresentados reduzem-se naturalmente aos conhecidos casos de congruência de triângulos quando $\kappa = 1$.¹ O primeiro caso de semelhança de triângulos não tem análogo para a congruência de triângulos. O terceiro caso de congruência, que enunciamos aqui como resultado auxiliar e para cuja prova remetemos o leitor a Barbosa (1994), é o seguinte:

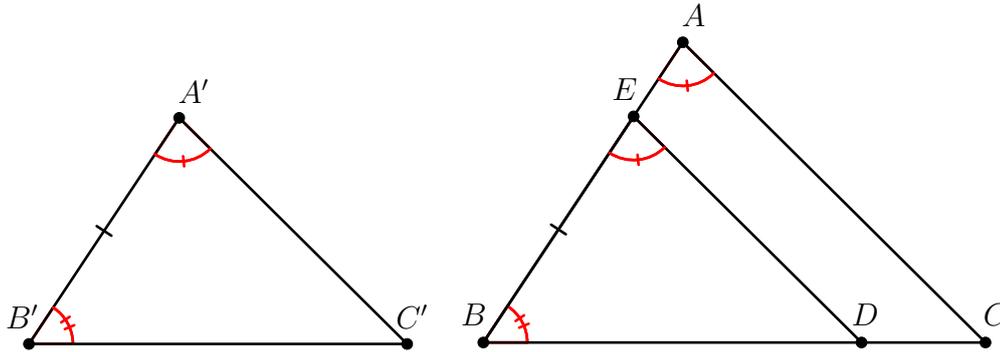
¹Uma discussão acerca dos casos de congruência nos levaria muito longe dos objetivos deste trabalho. Recomendamos ao leitor interessado consultar Barbosa (1994).

Lema 2.2 (Caso ALA de congruência de triângulos). *Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, se $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, então $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.*

Teorema 2.6 (1º caso de semelhança - AA). *Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, se $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.*

Demonstração. Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, seja E o ponto de AB de modo que $\overline{EB} = \overline{A'B'}$. Traçamos, então, a única reta paralela a AC passando por E a qual encontra o lado BC num ponto, digamos D .

Figura 15: Caso de semelhança AA



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Daí, como

$$\hat{E} = \hat{A}', \overline{EB} = \overline{A'B'}, B = B',$$

segue-se do Caso ALA de congruência de triângulos que

$$\triangle BDE = \triangle A'B'C'.$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.4, temos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BA}}.$$

Usando o fato de que $\triangle BDE = \triangle A'B'C'$, podemos reescrever a igualdade acima da seguinte forma:

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{BA}}.$$

De maneira análoga, mostramos que

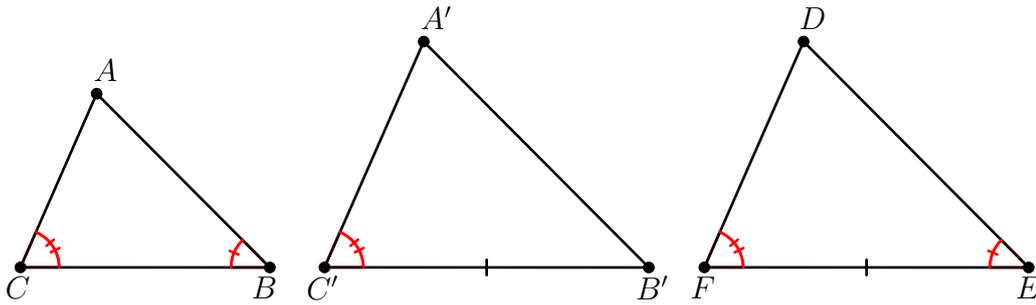
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}.$$

Por fim, observamos que, pelo Teorema 2.1, $\hat{C} = \hat{C}'$. Logo, $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. \square

Teorema 2.7 (2º caso de semelhança - LAL). *Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, se $\hat{C} = \hat{C}'$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.*

Demonstração. Construa um triângulo $\triangle DEF$, tal que $\overline{EF} = \overline{B'C'}$, $\hat{E} = \hat{B}$ e $\hat{F} = \hat{C}$.

Figura 16: Caso de semelhança LAL



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

De acordo com o teorema anterior, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Em particular, temos

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}. \quad (2.8)$$

Como, por construção,

$$\overline{EF} = \overline{B'C'} \quad (2.9)$$

e, por hipótese,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}, \quad (2.10)$$

combinando (2.9), (2.8) e (2.10), concluímos que $\overline{DF} = \overline{A'C'}$. Como $\hat{F} = \hat{C} = \hat{C}'$, pelo caso LAL, concluímos que $\triangle A'B'C' \cong \triangle DEF$.

Como $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, concluímos que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. \square

Teorema 2.8 (3º caso de semelhança - LLL). *Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, se $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.*

Demonstração. A demonstração é análoga à do critério anterior, agora com a construção de um triângulo $\triangle DEF$ tal que $\hat{F} = \hat{C}$, $\overline{EF} = \overline{BC}$ e $\overline{DF} = \overline{A'C'}$. \square

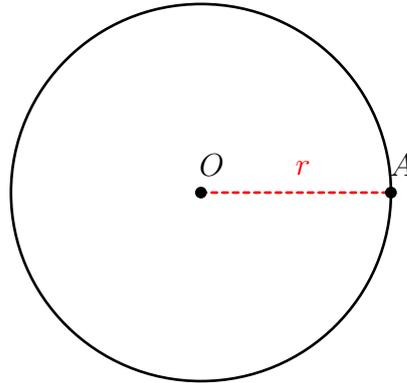
2.2 Circunferência

Nesta subseção, serão apresentadas algumas propriedades e resultados sobre a circunferência.

2.2.1 Elementos da circunferência

Dados um ponto O do plano e um número real $r > 0$, definimos a circunferência de **centro** O e **raio** r como o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância até o ponto O é igual a r .

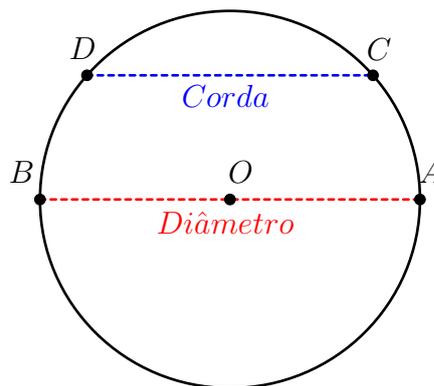
Figura 17: Circunferência de centro O e raio $\overline{OA} = r$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Chamamos de **corda** qualquer segmento que liga dois pontos de uma circunferência. Agora, se a corda contém o centro da circunferência, ela é chamada de **diâmetro** da circunferência.

Figura 18: Corda CD e diâmetro AB



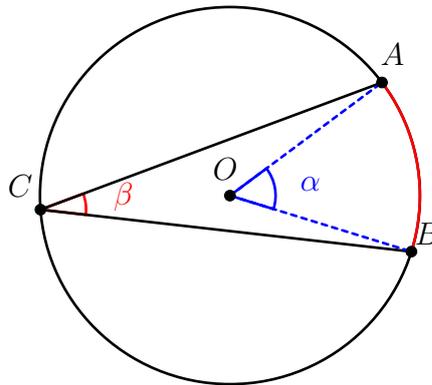
Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

2.2.2 Ângulos na circunferência

Definição 2.3. Dada uma circunferência de centro O , chamamos de **ângulo inscrito** a um ângulo \hat{ACB} cujo vértice C é um ponto dessa circunferência e cujos lados encontram a circunferência em dois outros pontos A e B . Neste caso, o ângulo \hat{AOB} é chamado de **ângulo central correspondente** a \hat{ACB} . O arco determinado por A e B nessa circunferência que está no semi-plano que não contém o ponto C é denominado **arco correspondente** (Fig. 19).

Lema 2.3. A medida do ângulo inscrito é igual a metade da medida do ângulo central correspondente a ele. Ou seja, na figura, $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

Figura 19: Ângulo inscrito β , ângulo central correspondente α e arco \widehat{AB}

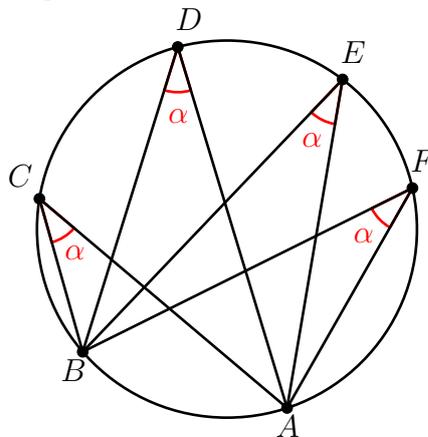


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

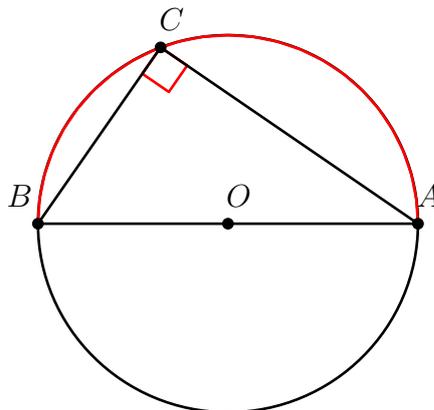
Demonstração. Veja a Proposição 8.5 de Barbosa (1994). □

Corolário 2.1. Todos os ângulos inscritos que tem um mesmo arco em comum têm medidas iguais. Em particular, todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto.

Figura 20: $\hat{C} = \hat{D} = \hat{E} = \hat{F} = \alpha$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Figura 21: O ângulo $\hat{A}CB$ é um ângulo reto

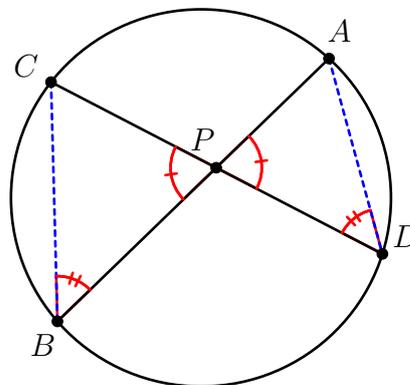
Fonte: Elaborado pelo autor, 2021.

2.2.3 Relações métricas na circunferência

Proposição 2.1. *Sejam AB e CD duas cordas em uma circunferência que concorrem em um ponto P . Então,*

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}.$$

Demonstração. Considere os triângulos $\triangle APD$ e $\triangle BCP$. Perceba que $\hat{BPC} = \hat{APD}$, por serem opostos pelo vértice, e de acordo com o Corolário 2.1, $\hat{CBP} = \hat{ADP}$.

Figura 22: Cordas AB e CD concorrentes em um ponto P interno

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Logo, pelo Teorema 2.6, os dois triângulos são semelhantes, donde obtemos

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PD}} \implies \overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}.$$

□

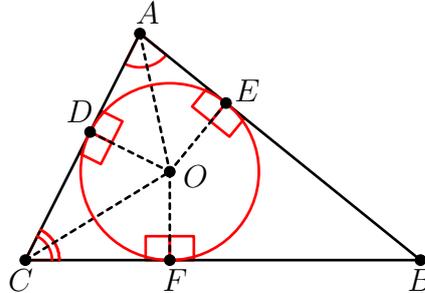
2.2.4 Circunferência Inscrita em um triângulo

Dizemos que uma circunferência está **inscrita** em um triângulo quando ela está dentro da região plana limitada por ela e possui um ponto em comum com cada um de seus lados. O centro da circunferência inscrita é chamado de **incentro** (Fig.23).

Proposição 2.2. *Todo triângulo possui um círculo inscrito.*

Demonstração. Considere o triângulo $\triangle ABC$. Trace as bissetrizes de \hat{A} e \hat{C} , as quais se encontram em um ponto O . A partir de O , trace os segmentos perpendiculares OD , OE e OF aos lados AC , AB e BC , respectivamente. Queremos provar que $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$.

Figura 23: Circunferência inscrita em um triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Para isso, perceba que $\triangle OEA$ e $\triangle ODA$ são triângulos retângulos, $\widehat{OAE} = \widehat{OAD}$ (veja a Definição 2.1) e o lado OA é comum aos dois triângulos; daí, $\triangle OEA = \triangle ODA$, donde $\overline{OE} = \overline{OD}$. Agora, perceba que o mesmo acontece com os triângulos $\triangle ODC$ e $\triangle OFC$, pois são triângulos retângulos, $\widehat{OCD} = \widehat{OCF}$ e OC é comum aos dois triângulos. Então $\triangle OCD = \triangle OFC$, donde $\overline{OD} = \overline{OF}$. Portanto, $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$ como queríamos mostrar.

Então, O é o centro do círculo procurado e os lados de $\triangle ABC$ são perpendiculares aos raios OD , OE e OF . \square

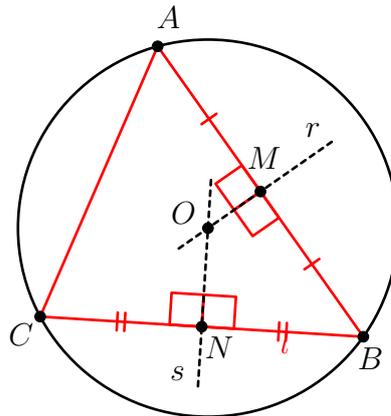
2.2.5 Circunferência circunscrita em um triângulo

Dizemos que uma circunferência está **circunscrita** a um triângulo quando ela passa por todos os seus vértices. O centro da circunferência circunscrita é chamado de **circuncentro** (Fig.24).

Teorema 2.9. *Todo triângulo está inscrito em um círculo.*

Demonstração. Considere o triângulo $\triangle ABC$. Queremos mostrar que existe um ponto O que equidista dos vértices A , B e C . Para isso, tome a reta r perpendicular no ponto M ao segmento AB e a reta s perpendicular no ponto N ao segmento BC , sendo M e N os pontos médios dos segmentos aos quais pertencem.

Figura 24: Circunferência circunscrita em um triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Perceba que todo ponto da reta r é equidistante de A e B . O mesmo acontece com os pontos da reta s com relação aos pontos B e C .

Portanto, O é equidistante dos pontos A , B , e C , como queríamos. \square

2.3 Quadriláteros

Nesta subseção, serão apresentadas algumas propriedades e resultados sobre quadriláteros convexos, em especial, os *paralelogramos*. Também serão apresentados alguns resultados acerca dos *quadriláteros inscritíveis*, que serão de grande importância para o decorrer do trabalho.

Definimos quadrilátero como um polígono formado por quatro pontos A , B , C e D distintos e três não colineares. Os ângulos \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} são chamados de **ângulos (internos)**; os segmentos AB , BC , CD e DA , de **lados**; e os segmentos AC e BD são chamados de **diagonais** do quadrilátero $ABCD$.

Definição 2.4. Um **paralelogramo** $ABCD$ é um quadrilátero convexo cujos lados opostos são paralelos. Ou seja, $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$.

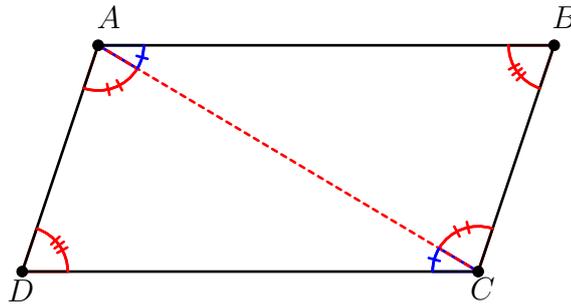
Proposição 2.3. Em um paralelogramo $ABCD$ lados e ângulos opostos são iguais.

Demonstração. Considere o paralelogramo $ABCD$. Trace a diagonal AC . Como $AB \parallel CD$, então $\hat{BAC} = \hat{ACD}$ (alternos internos). Como $AD \parallel BC$, o mesmo ocorre $\hat{CAD} = \hat{BCA}$. Perceba que o lado \overline{AC} é comum aos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$, o que implica $\triangle ABC = \triangle ACD$. Logo, $\hat{B} = \hat{D}$, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$ e, por fim, $\hat{A} = \hat{C}$. \square

Proposição 2.4. Um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, dois lados opostos são congruentes e paralelos.

Demonstração. Na proposição anterior provamos a ida, ou seja, que todo paralelogramo tem lados opostos congruentes.

Agora, suponha que o quadrilátero $ABCD$ é tal que $AB \parallel CD$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$. Em seguida, traçando a diagonal AC , temos $\hat{BAC} = \hat{ACD}$ (alternos internos). Então, $\triangle ABC = \triangle ACD$, pois ambos tem AC em comum. Daí, $\hat{CAD} = \hat{BCA}$. Portanto, $AD \parallel BC$, e $ABCD$ é um paralelogramo. \square

Figura 25: Quadrilátero $ABCD$ 

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

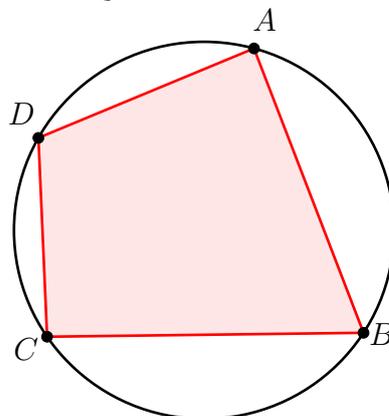
Definição 2.5. O **retângulo** é um quadrilátero convexo que possui os quatro ângulos internos medindo 90° cada.

Figura 26: Retângulo $ABCD$ 

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

2.3.1 Quadriláteros Inscritíveis

Definição 2.6. Dizemos que um quadrilátero é **inscritivo** em uma circunferência se todos os seus vértices pertencem à circunferência.

Figura 27: Quadrilátero $ABCD$ inscrito

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Teorema 2.10 (Teorema dos Quadriláteros Inscritíveis). *Um quadrilátero é inscrito em uma circunferência se, e somente se, possui dois ângulos opostos suplementares. Ou seja,*

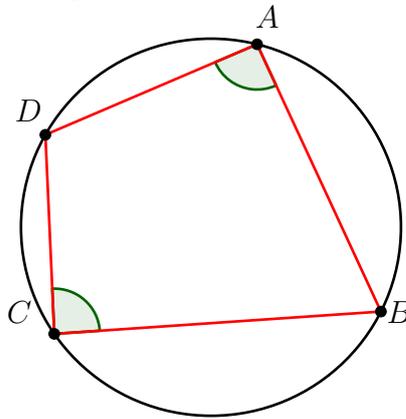
$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ.$$

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrilátero. Inicialmente, suponha que ele possa ser inscrito em um círculo. Considere \hat{A} e \hat{C} como as medidas dos ângulos $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$, respectivamente. Note que cada um desses ângulos subtende um dos dois arcos determinados por B e D . Como a soma das medidas dos dois arcos é 360° , pelo Lema 2.3, temos

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{B\hat{A}D}{2} + \frac{B\hat{C}D}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Portanto, eles são suplementares.

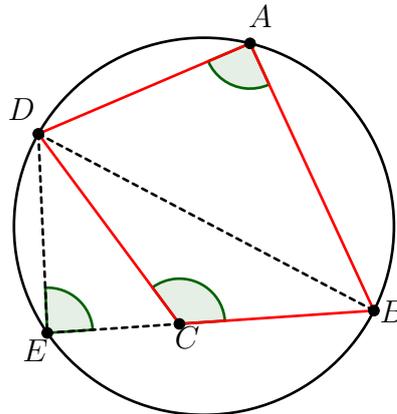
Figura 28: $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Para provar a recíproca do teorema, suponha que $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$. Considere a circunferência que passa por A , B e D . Vamos supor que C não pertença a essa circunferência. O que nos leva a dois casos:

- (i) C é um ponto interno da circunferência. Prolongando o segmento CB até ele interceptar a circunferência em E , o quadrilátero $ABCE$ é inscritível. Daí, vale

Figura 29: C é interno à circunferência

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

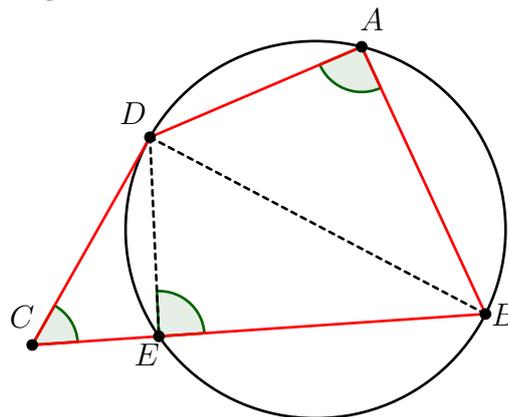
$$\widehat{BAD} + \widehat{CED} = 180^\circ.$$

Por hipótese temos

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ.$$

Das igualdades anteriores, concluímos que $\widehat{CED} = \widehat{BCD}$. Daí, pelo Teorema 2.2, temos $\widehat{BCD} = \widehat{CED} + \widehat{CDE}$, donde $\widehat{BCD} > \widehat{CED}$. Como antes vimos que $\widehat{CED} = \widehat{BCD}$, chegamos a uma contradição! Então, C não é um ponto interior a circunferência.

- (ii) C é um ponto externo à circunferência. Usaremos o mesmo raciocínio anterior, considerando agora E o ponto de intersecção de BC com a circunferência.

Figura 30: C é externo à circunferência

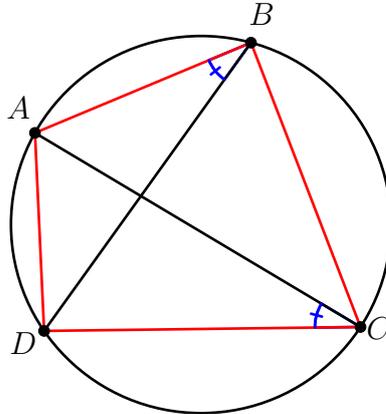
Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

□

Teorema 2.11. *Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, o ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível. É claro que $\hat{A}BD = \hat{A}CD$, pois subtendem o mesmo arco.

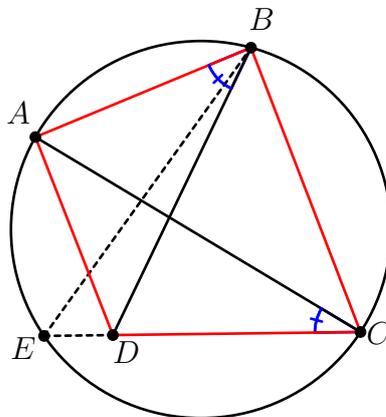
Figura 31: $\hat{A}BD = \hat{A}CD$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Suponha que $\hat{A}BD = \hat{A}CD$ e que $ABCD$ não é inscritível. Vamos considerar o caso em que D está na região interna da circunferência. Tome E como o ponto de intersecção da circunferência com o prolongamento de CD .

Figura 32: Ponto D interno à circunferência



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Pelo Corolário 2.1, $\hat{A}BE = \hat{A}CE$. Como estamos supondo que $\hat{A}BD = \hat{A}CD$, então $\hat{A}BD = \hat{A}BE$, um absurdo! pois $\hat{A}BD = \hat{A}BE + \hat{E}BD$. O caso em que D seria um ponto exterior é análogo e também leva a uma contradição. Portanto, $ABCD$ é inscritível. \square

2.4 Áreas de Polígonos

Nesta subseção, serão apresentados alguns conceitos e resultados sobre área de polígonos, em específico de paralelogramos e triângulos. Para isso, *postulamos* o seguinte:

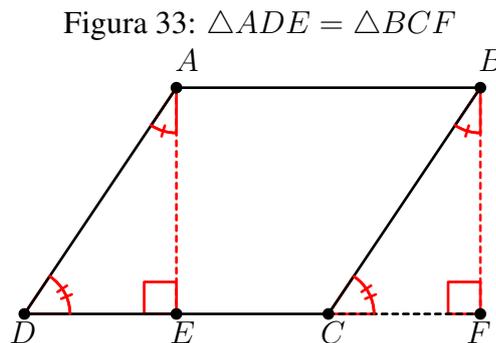
- I. Polígonos congruentes têm áreas iguais.

II. Se um polígono é a união de um número finito de outros polígonos, de maneira que dois deles não possuem pontos interiores em comum, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

III. Se $ABCD$ é um retângulo, então sua área é dada por $\text{Área}(ABCD) = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$.

Proposição 2.5. A área de um paralelogramo cuja base é a e a altura h é dada por $a \cdot h$.

Demonstração. Considere o paralelogramo $ABCD$ de diagonais AC e BD , sejam E o ponto de intersecção de CD com a reta perpendicular a CD que passa por A e F o ponto de intersecção do prolongamento de CD com a reta perpendicular a CD que passa por B .



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Perceba que os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle BCF$ são congruentes, pois $\hat{A}ED = \hat{B}FC = 90^\circ$, $AD = BC$, (lados opostos do paralelogramo; veja a Proposição 2.3) e $\hat{A}DE = \hat{B}CF$ (pois são correspondentes formados pela transversal CD e as paralelas $AD \parallel BC$).

Daí, pelo Postulado I, temos $\text{Área}\triangle ADE = \text{Área}\triangle BCF$. Então,

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABCD) &= \text{Área}\triangle ADE + \text{Área}(ABCE) \\ &= \text{Área}\triangle BCF + \text{Área}(ABCE) \\ &= \text{Área}(ABFE). \end{aligned}$$

Agora, $CDEF$ é um retângulo com altura h e base

$$\overline{EF} = \overline{EC} + \overline{CF} = \overline{EC} + \overline{DE} = \overline{DC} = a.$$

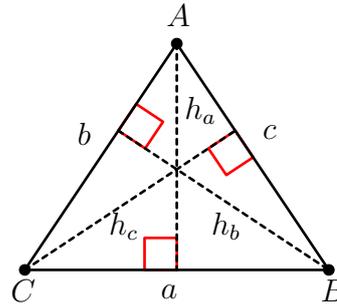
Portanto, $\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(CDEF) = a \cdot h$. □

Proposição 2.6. A área de um triângulo $\triangle ABC$ qualquer é igual à metade do produto do comprimento de qualquer um de seus lados pela altura relativa a este lado.

Considere o $\triangle ABC$ de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$ e alturas relativas aos lados BC , AC e AB medindo h_a , h_b e h_c , respectivamente. Então

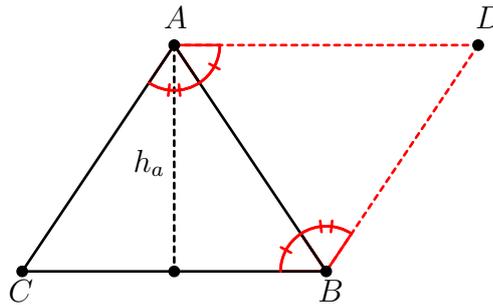
$$\text{Área}(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2},$$

donde $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$.

Figura 34: Alturas do $\triangle ABC$ 

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Demonstração. Traçando por A a reta paralela ao segmento BC e por B a reta paralela ao segmento AC , elas se encontrarem em um ponto D . Por construção, $ABCD$ é um paralelogramo cuja base mede a e a altura, h_a . Os triângulos $\triangle ABC = \triangle ADB$, pelo Caso ALA, pois $\widehat{BAC} = \widehat{ABD}$ (alternos internos), possuem o lado AB em comum e $\widehat{ABC} = \widehat{BAD}$ (alternos internos). Daí,

Figura 35: $\triangle ABC = \triangle ADB$ 

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

$$\text{Área}(ADBC) = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(ADB) \quad \text{e} \quad \text{Área}(ABC) = \text{Área}(ADB).$$

Então

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \text{Área}(ABCD).$$

Da proposição anterior, segue que $\text{Área}(ABCD) = a \cdot h_a$. Portanto,

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a.$$

As outras duas igualdades são obtidas de modo análogo. □

3 O TEOREMA DE PTOLOMEU

Estamos finalmente em condições de enunciar e provar nosso principal resultado:

Teorema 3.1 (Teorema de Ptolomeu). *Em um quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual a soma dos produtos dos lados opostos. Ou seja, se $ABCD$ é inscritível, então*

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}. \quad (3.1)$$

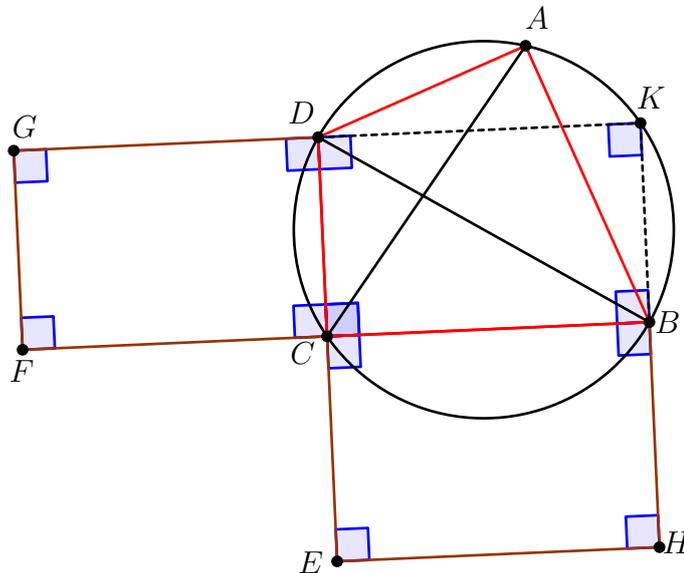
Apresentaremos duas demonstrações geométricas deste teorema, devidas a Ayyangar (1923).

3.1 Demonstração via áreas

Primeira demonstração do Teorema 3.1. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito.

Construa, fora do quadrilátero, dois retângulos $BHEC$ e $DCFG$ nos lados BC e CD , respectivamente, tais que $\overline{CE} = \overline{AD}$ e $\overline{CF} = \overline{AB}$. Em seguida, prolongue os segmentos BH e GD , fazendo com que eles se encontrem em um ponto K . Perceba que K se encontra na circunferência, pois como $BHEC$ e $DCFG$ são retângulos então $\hat{C}BK = \hat{C}DK = 90^\circ$, donde $\hat{C}BK + \hat{C}DK = 180^\circ$. De acordo com o Teorema 2.10, o quadrilátero $KBCD$ é inscrito. Como B, C e D já estão sobre uma circunferência, então K pertence a essa mesma circunferência.

Figura 36: Retângulos $BHEC$, $DCFG$ e $KBCD$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

A partir do retângulo $KBCD$ podemos tirar algumas conclusões:

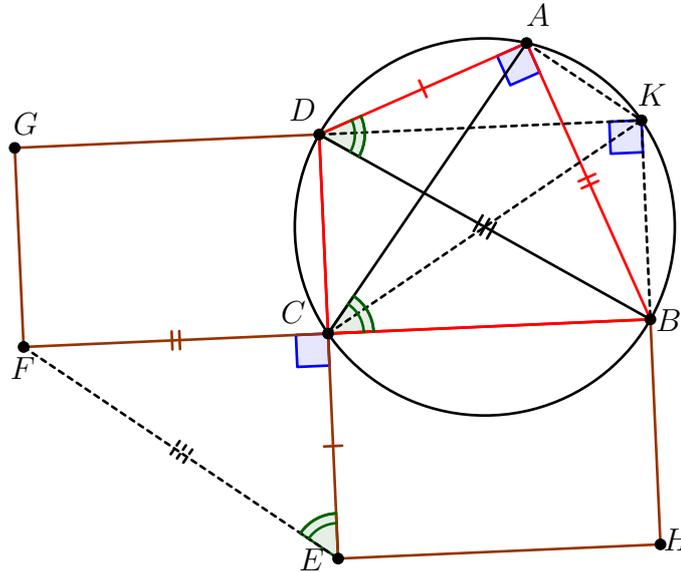
- (i) Como $KBCD$ é um retângulo, suas diagonais DB e KC são diâmetros da circunferência (pois $\hat{B}KD$ e $\hat{B}CD$ subtendem semi-círculos; veja o Corolário 2.1).
- (ii) $\hat{B}AD = \hat{B}KD$, pois são inscritos no mesmo arco. Além disso, de acordo com o mesmo Corolário 2.1, todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto. Então $\hat{B}AD = \hat{B}KD = 90^\circ$.
- (iii) $\hat{B}CD = \hat{E}CF$, por serem ângulos opostos pelo vértice. Como $\hat{B}CD = \hat{B}KD$, temos $\hat{B}AD = \hat{B}KD = \hat{E}CF = 90^\circ$.
- (iv) Como KC é diâmetro, traçando KA , temos $\hat{K}AC = 90^\circ$, o que implica $KA \perp AC$.

Agora, trace o segmento EF . Como $\overline{CE} = \overline{AD}$, $\overline{CF} = \overline{AB}$ e $\hat{B}AD = \hat{E}CF$, pelo caso LAL, temos $\triangle ABD = \triangle CFE$. Segue-se que

$$\hat{A}DB = \hat{C}EF \quad \text{e} \quad \overline{BD} = \overline{EF}.$$

Aplicando o Teorema 2.11 ao quadrilátero inscrito $ABCD$, obtemos $\hat{A}DB = \hat{A}CB$. Logo, $\hat{A}DB = \hat{A}CB = \hat{C}EF$.

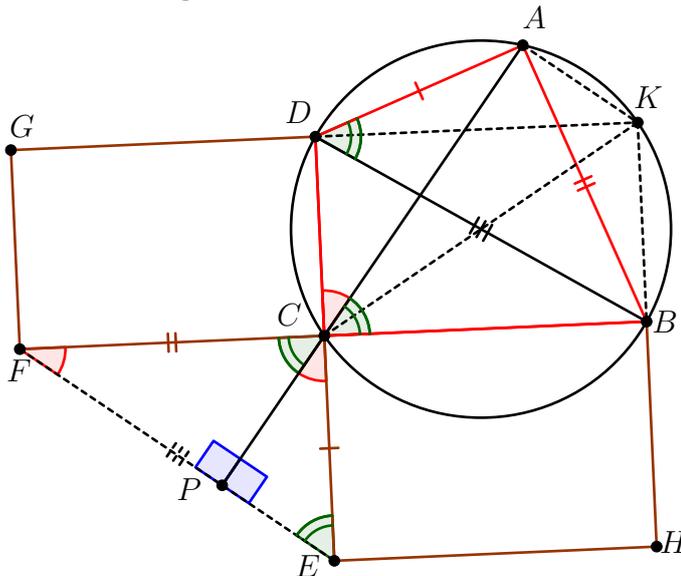
Figura 37: $\triangle ABD = \triangle CFE$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Seja P o pé da perpendicular baixada do ponto C até EF . Com a ajuda do Teorema 2.1, não é difícil ver que $\hat{C}FP = \hat{P}CE$ e $\hat{P}CF = \hat{C}EP$. Ademais, é claro que $\hat{C}EP + \hat{P}CE = 90^\circ$. Daí e de $\hat{C}FP = \hat{A}CD$, seque que $\hat{A}CD + \hat{P}CE = 90^\circ$. Como o ângulo $\hat{B}CE$ é reto, concluímos que o ângulo $\hat{A}CP$ é raso. Portanto, $AC \perp EF$. Além disso, pelo Caso AA de semelhança, temos $\triangle CEF \sim \triangle CEP$.

Figura 38: $\triangle CEF \sim \triangle CEP$



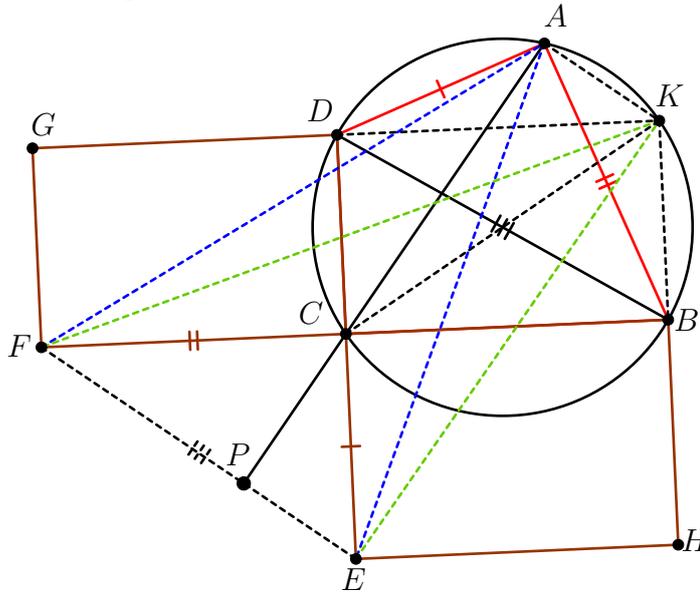
Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Como KA e EF são perpendiculares a AC , então $KA \parallel EF$. Traçando os triângulos $\triangle KEF$ e $\triangle AEF$, percebe-se que ambos possuem a mesma base EF e a mesma altura que mede

\overline{AP} . Então temos que $\text{Área}\triangle KEF = \text{Área}\triangle AEF$. Agora, subtraindo de ambos os lados a área de $\triangle CEF$, temos

$$\text{Área}\triangle KCE + \text{Área}\triangle KCF = \text{Área}\triangle ACE + \text{Área}\triangle ACF. \quad (3.2)$$

Figura 39: $\text{Área}\triangle KEF = \text{Área}\triangle AEF$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Para calcular o primeiro lado da igualdade (3.2), veja que, para encontrar a área de $\triangle KCE$, considerando CE como base, como $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{BH} = \overleftrightarrow{BK}$, então a altura desse triângulo mede \overline{BC} . Procedimento aplica-se ao cálculo da área de $\triangle KCF$. Segue-se que

$$\text{Área}\triangle KCE + \text{Área}\triangle KCF = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CE} + \frac{1}{2} \cdot \overline{CF} \cdot \overline{CD}. \quad (3.3)$$

Para calcular o outro lado da igualdade (3.2), veja que

$$\begin{aligned} \text{Área}\triangle ACE + \text{Área}\triangle ACF &= \text{Área}\triangle AEF - \text{Área}\triangle CEF \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AP} \cdot \overline{EF} - \frac{1}{2} \cdot \overline{CP} \cdot \overline{EF} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{AP} - \overline{CP}) \cdot \overline{EF} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{EF}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) e (3.3) em (3.2), temos

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CE} + \frac{1}{2} \cdot \overline{CF} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{EF}.$$

Daí, como $\overline{CE} = \overline{AD}$, $\overline{CF} = \overline{AB}$ e $\overline{EF} = \overline{BD}$, temos

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD},$$

o que encerra a prova do teorema. □

3.2 Demonstração via Teorema de Stewart

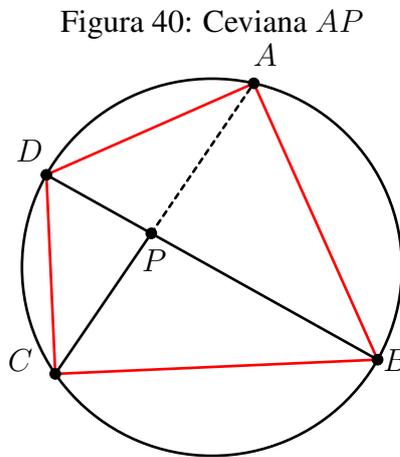
Segunda demonstração do Teorema 3.1. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível, com diagonais AC e BD encontrando-se no ponto P .

No triângulo $\triangle ABD$, de lados AB , BD e AD , traçamos a ceviana AP , a qual divide o lado BD em dois segmentos, BP e DP . Aplicando o Teorema de Stewart (Teorema 2.3), obtemos

$$\overline{AD}^2 \cdot \overline{BP} + \overline{AB}^2 \cdot \overline{PD} - \overline{AP}^2 \cdot \overline{BD} = \overline{BD} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{PD},$$

donde

$$\overline{AD}^2 \cdot \overline{BP} + \overline{AB}^2 \cdot \overline{PD} = \overline{BD} \cdot (\overline{AP}^2 + \overline{BP} \cdot \overline{PD}). \quad (3.5)$$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Da Proposição 2.1, vem

$$\overline{BP} \cdot \overline{PD} = \overline{AP} \cdot \overline{PC},$$

de maneira que

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP} \cdot \overline{PD} = \overline{AP}^2 + \overline{AP} \cdot \overline{PC} = \overline{AP} \cdot (\overline{AP} + \overline{PC}) = \overline{AP} \cdot \overline{AC}. \quad (3.6)$$

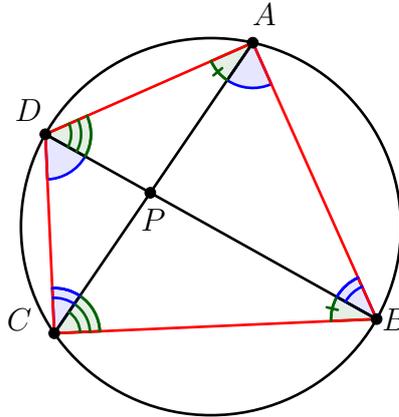
Agora, perceba que $\hat{BAP} = \hat{CDP}$ e $\hat{ABP} = \hat{DCP}$, em virtude do Teorema 2.11. Então, pelo caso AA, $\triangle ABP \sim \triangle CDP$. Daí, obtemos a seguinte relação entre seus lados:

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}. \quad (3.7)$$

De maneira análoga, vemos que $\triangle BCP \sim \triangle ADP$, donde

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}. \quad (3.8)$$

Figura 41: $\triangle ABP \sim \triangle CDP$ e $\triangle BCP \sim \triangle ADP$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Agora, dividindo (3.5) por AP , temos

$$\overline{AD}^2 \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} + \overline{AB}^2 \cdot \frac{\overline{PD}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AP}} \cdot (\overline{AP}^2 + \overline{BP} \cdot \overline{PD}). \quad (3.9)$$

Substituindo (3.6), (3.7) e (3.8) em (3.9), temos

$$\overline{AD}^2 \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} + \overline{AB}^2 \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AP}} \cdot (\overline{AP} \cdot \overline{AC})$$

isto é,

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{BD} \cdot \overline{AC},$$

e novamente o teorema está provado. \square

Observação 3.1. Revertendo os passos da demonstração anterior, obtemos o Teorema de Stewart como consequência do Teorema de Ptolomeu.

4 TEOREMA DE CARNOT

Nesta secção, usamos o Teorema de Ptolomeu para derivar um teorema devido a Lazare Carnot² e que leva seu nome.

²Lazare Nicolas Marguerite, Conde de Carnot (1753 - 1823), foi um matemático, físico e político francês que é mais conhecido por seu trabalho em Geometria. Em 1801, publicou *De la Correlation des Figures de géométrie* no qual tentava dar uma abordagem global à geometria pura. Ele mostrou que vários dos teoremas d'*Os Elementos* de Euclides podem ser estabelecidos a partir de um único teorema. Em 1803, publicou *Géométrie de position*, obra na qual pela primeira vez foram usadas sistematicamente na Geometria magnitudes com sinal.

Figura 42: Lazare Carnot.



Fonte: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Carnot/pictdisplay/>

O resultado principal desta seção estabelece uma relação entre as distâncias com sinal do circuncentro de um triângulo até seus lados em função dos raios das circunferências circunscrita e inscrita:

Teorema 4.1 (Teorema de Carnot). *Em qualquer triângulo $\triangle ABC$ a soma (algébrica) das distâncias do circuncentro O do triângulo para os lados AB , AC e BC desse triângulo é igual a $R + r$, onde R é a medida do raio da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$ e r a medida do raio da circunferência inscrita no triângulo. Ou seja,*

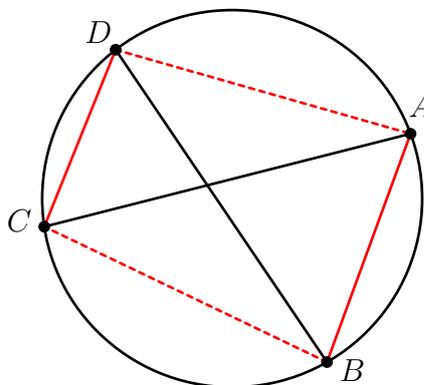
$$\pm \overline{OA'} \pm \overline{OB'} \pm \overline{OC'} = R + r.$$

em que as perpendiculares OA' , OB' e OC' são precedidas do sinal de menos se sua intersecção com o interior de $\triangle ABC$ for vazia e do sinal de mais, caso contrário.

Agora, vamos obter o Teorema de Carnot do Teorema de Ptolomeu.

Apresentamos a demonstração contida no site *Cut The Knot* e que é lá atribuída essencialmente a Amini (2014).

Observe que, se um quadrilátero com auto-intersecção $ABCD$ está inscrito em um círculo, então, pelo Teorema 3.1, temos:

Figura 43: Quadrilátero inscritível $ABCD$ 

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC},$$

isto é,

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} - \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}. \quad (4.1)$$

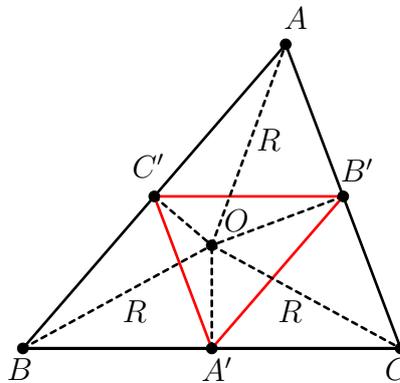
Vamos considerar três casos, conforme o triângulo seja agudo, obtuso e reto.

4.1 Caso do triângulo agudo

Num triângulo agudo, o circuncentro se encontra sempre dentro do triângulo (Fig. 44).

Sejam $\triangle ABC$ um triângulo agudo e A' , B' e C' os pontos médios dos lados BC , AC e AB , respectivamente. Sejam OA' , OB' e OC' os segmentos perpendiculares aos lados BC , AC e AB , respectivamente. Além disso, faça $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$.

Figura 44: Triângulo agudo $\triangle ABC$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Veja que o quadrilátero $AB'OC'$ é inscrito (pelo Teorema 2.10). Aplicando a ele o teorema de Ptolomeu, obtemos

$$\overline{AO} \cdot \overline{B'C'} = \overline{AB'} \cdot \overline{OC'} + \overline{AC'} \cdot \overline{OB'}.$$

Daí,

$$\overline{AO} \cdot \frac{a}{2} = \frac{b}{2} \cdot \overline{OC'} + \frac{c}{2} \cdot \overline{OB'}.$$

Observando que $\overline{AO} = R$ e multiplicando a última equação por 2, temos

$$a \cdot R = b \cdot \overline{OC'} + c \cdot \overline{OB'}.$$

Procedendo de forma análoga, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} a \cdot R = b \cdot \overline{OC'} + c \cdot \overline{OB'} \\ b \cdot R = c \cdot \overline{OA'} + a \cdot \overline{OC'} \\ c \cdot R = a \cdot \overline{OB'} + b \cdot \overline{OA'} \end{cases}$$

Somando as equações anteriores, encontramos

$$R \cdot (a + b + c) = \overline{OA'} \cdot (b + c) + \overline{OB'} \cdot (c + a) + \overline{OC'} \cdot (a + b). \quad (4.2)$$

Como a área do triângulo $\triangle ABC$ é a soma das áreas dos triângulos $\triangle COB$, $\triangle COA$ e $\triangle AOB$, cujas alturas medem $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$ e $\overline{OC'}$, respectivamente, então

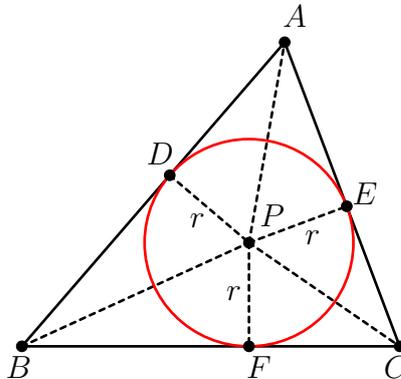
$$\text{Área}(\triangle ABC) = \frac{a \cdot \overline{OA'}}{2} + \frac{b \cdot \overline{OB'}}{2} + \frac{c \cdot \overline{OC'}}{2}.$$

Multiplicando por 2 a igualdade anterior, obtemos

$$2 \cdot \text{Área}(\triangle ABC) = a \cdot \overline{OA'} + b \cdot \overline{OB'} + c \cdot \overline{OC'}. \quad (4.3)$$

Agora, considere a área do triângulo $\triangle ABC$ como a soma das áreas dos triângulos $\triangle BPC$, $\triangle CPA$ e $\triangle APB$, todos os quais têm altura medindo r , o raio do círculo inscrito cujo centro denotaremos por P .

Figura 45: Circunferência inscrita em $\triangle ABC$ agudo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Calculando dessa forma a área de $\triangle ABC$, temos

$$\text{Área}(\triangle ABC) = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2},$$

donde

$$2 \cdot \text{Área}(\triangle ABC) = a \cdot r + b \cdot r + c \cdot r = r \cdot (a + b + c). \quad (4.4)$$

Igualando os lados esquerdos de (4.3) e (4.4), temos

$$a \cdot \overline{OA'} + b \cdot \overline{OB'} + c \cdot \overline{OC'} = r \cdot (a + b + c). \quad (4.5)$$

De (4.2) e (4.5), temos

$$R \cdot (a + b + c) + r \cdot (a + b + c) = \overline{OA'} \cdot (a + b + c) + \overline{OB'} \cdot (a + b + c) + \overline{OC'} \cdot (a + b + c).$$

Isto é,

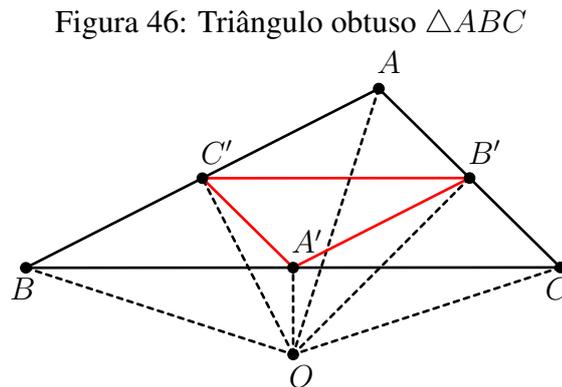
$$R + r = \overline{OA'} + \overline{OB'} + \overline{OC'},$$

que é o Teorema de Carnot neste caso.

4.2 Caso do triângulo obtuso

No caso de triângulos obtusos, o procedimento é o mesmo usado anteriormente; as únicas diferenças são as seguintes: em vez de (3.1) usaremos (4.1); alteramos uma das fórmulas do cálculo de área; e levaremos em consideração que, num triângulo obtuso, o circuncentro se encontra fora do triângulo.

No triângulo obtuso $\triangle ABC$, com \hat{A} obtuso, sejam A' , B' e C' os pontos médios dos segmentos \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. Sejam OA' , OB' e OC' segmentos perpendiculares aos lados BC , AC e AB , respectivamente, como indicado na figura abaixo. Além disso, faça $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Adaptando o procedimento da demonstração do caso anterior e usando (4.1), encontramos:

$$\begin{cases} a \cdot R = b \cdot \overline{OC'} + c \cdot \overline{OB'} \\ b \cdot R = a \cdot \overline{OC'} - c \cdot \overline{OA'} \\ c \cdot R = a \cdot \overline{OB'} - b \cdot \overline{OA'} \end{cases}$$

Somando-os as equações acima, temos

$$R \cdot (a + b + c) = -\overline{OA'} \cdot (b + c) + \overline{OB'} \cdot (c + a) + \overline{OC'} \cdot (a + b). \quad (4.6)$$

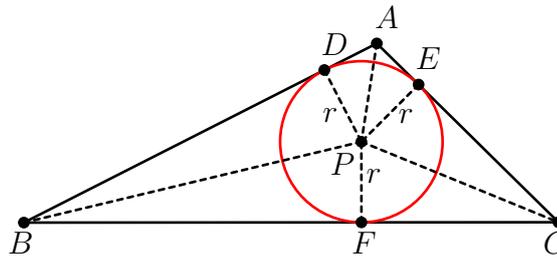
Calculando a área de $\triangle ABC$, temos

$$\begin{aligned} \text{Área}(\triangle ABC) &= \text{Área}(\triangle OCA) + \text{Área}(\triangle OBA) - \text{Área}(\triangle OCB) \\ &= -\frac{a \cdot \overline{OA'}}{2} + \frac{b \cdot \overline{OB'}}{2} + \frac{c \cdot \overline{OC'}}{2}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$2 \cdot \text{Área}(\triangle ABC) = -a \cdot \overline{OA'} + b \cdot \overline{OB'} + c \cdot \overline{OC'}. \quad (4.7)$$

Agora, considere a área do triângulo $\triangle ABC$ como a soma das áreas dos triângulos $\triangle BPC$, $\triangle CPA$ e $\triangle APB$, que têm altura medindo r , o raio do círculo inscrito de centro P .

Figura 47: Circunferência inscrita em $\triangle ABC$ obtuso

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Calculando a área de $\triangle ABC$ dessa segunda forma e fazendo uma manipulação algébrica simples, encontramos

$$2 \cdot \text{Área}(\triangle ABC) = a \cdot r + b \cdot r + c \cdot r = r \cdot (a + b + c). \quad (4.8)$$

Igualando (4.7) e (4.8), temos

$$-a \cdot \overline{OA'} + b \cdot \overline{OB'} + c \cdot \overline{OC'} = r \cdot (a + b + c). \quad (4.9)$$

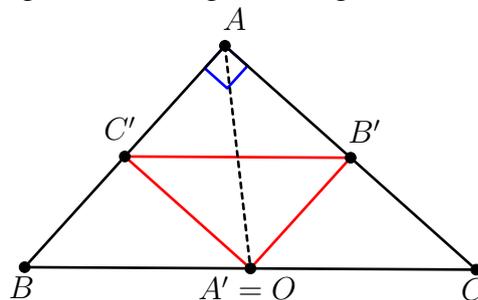
De (4.6) e (4.9), concluímos que

$$R + r = -\overline{OA'} + \overline{OB'} + \overline{OC'}.$$

4.3 Caso do triângulo retângulo

No caso de um triângulo retângulo, usamos o fato de o teorema de Ptolomeu para retângulos se reduzir ao teorema de Pitágoras. No triângulo retângulo, o circuncentro coincide com o ponto médio da hipotenusa (Fig. 48).

Considere o triângulo $\triangle ABC$ reto em \hat{A} . Sejam A' , B' e C' os pontos médios dos segmentos BC , AC e AB , respectivamente. Sejam $\overline{OB'}$ e $\overline{OC'}$ segmentos perpendiculares aos lados AC e AB , respectivamente. Além disso, ponha $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$.

Figura 48: Triângulo retângulo $\triangle ABC$ 

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Perceba que o circuncentro O coincide com o ponto médio A' do segmento \overline{BC} , que é a hipotenusa do triângulo $\triangle ABC$. [Para ver isso, trace a reta paralela a AB passando por A' . Esta reta encontrará AC em seu ponto médio B' , conforme nos diz o Teorema de Tales. Os triângulos $\triangle AB'A'$ e $\triangle CB'A'$ são congruentes pelo caso LAL, donde, em particular, $\overline{AA'} = \overline{CA'}$.] Segue-se que $R = \frac{a}{2}$.

Calculando $\text{Área}(\triangle ABC)$ com o auxílio do incentro e do raio r do círculo inscrito, chegamos a

$$\frac{1}{2}cb = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc = \frac{1}{2}r(a + b + c),$$

a qual, resolvida em r , nos dá

$$r = \frac{cb}{a + b + c},$$

ou, equivalentemente, usando o Teorema de Pitágoras,

$$r = \frac{1}{2}(b + c - a).$$

Assim, neste caso, o Teorema de Carnot é imediato, pois

$$R + r = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}(b + c - a) = \overline{OA'} + \overline{OB'} + \overline{OC'},$$

observando que, aqui, $\overline{OA'} = 0$.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo realizar um estudo sobre o Teorema de Ptolomeu, segundo Ayyangar (1923), que mostra a relação métrica entre as diagonais e os lados de quadriláteros inscritíveis. As demonstrações aqui apresentadas, do Teorema de Ptolomeu, contribuíram para que o autor realizasse um maior aprofundamento no estudo da história da matemática e da geometria euclidiana plana, e conhecesse alguns resultados até então desconhecidos.

A partir deste estudo, o Teorema de Ptolomeu mostrou-se uma ferramenta muito importante para o estudo da geometria. A partir do mesmo, estabelecemos um dos resultados mais importantes da matemática, que trata da relação entre as distâncias com sinal do circuncentro de um triângulo até seus lados em função dos raios das circunferências circunscrita e inscrita, conhecida como Teorema de Carnot. Dessa forma, com o presente trabalho, almejamos novos estudos sobre o tema na área da pós-graduação.

REFERÊNCIAS

AMINI, A. R. Lazar Karno's Theorem. **Mathematical Spectrum**, Volume 47, Issue 1, September 2014, p. 41-42.

AYYANGAR, A. A. K. Ptolemy's Theorem. **The Mathematical Gazette**, vol. 11, no. 162 (1923): 236-37.

CARNOT'S Theorem from Ptolemy's Theorem. In: BOGOMOLNY, A. **Cut The knot**. [entre 1996 e 2018]. Disponível em:
<https://www.cut-the-knot.org/proofs/CarnotFromPtolemy.shtml>.
 Acesso em: 05 out. 2021.

LAZARE Nicolas Marguerite Carnot. In: MacTutor History of Mathematics Archive. 2020. Disponível em:
<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Carnot/>.
 Acesso em: 05 out. 2021.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 4a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1994.

MUNIZ NETO, A. C.. **An Excursion through Elementary Mathematics Volume II: Euclidean Geometry**. [S. l.]: Springer International Publishing AG, 2018.

CLAUDIUS Ptolemy. In: O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F. **MacTutor History of Mathematics Archive**. 1999. Disponível em:
<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ptolemy/>.
Acesso em: 05 out. 2021.

POSAMENTIER, A. S.; SALKIND, C. T. **Challenging Problems in Geometry**. New York: Dover Publications: 1996.

PTOLEMY. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. São Francisco, CA: Fundação Wikimedia, 2013. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy>. Acesso em: 05 out. 2021.

PTOLEMY. In: Encyclopedia Britannica. Disponível em:
<https://www.britannica.com/biography/Ptolemy>. Acesso em: 05 out. 2021.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por sua presença em minha vida.

À minha família, em especial, meus pais Joacil e Maria da Guia, por terem me dado a vida.

Aos meus irmãos Mariana, Marijane, Ryckelme e Taís, por me acompanharem nessa jornada.

Aos meus professores por todos os ensinamentos, em especial, ao meu orientador Arlandson por toda dedicação na construção deste trabalho.

A todos os meus colegas da UEPB, pela amizade ao longo desses anos. Em especial aos meus amigos: Angela, Eduarda, Eugênio, Francinete, José, Janclesio, Mayrlla, Vinicius e Wélisson.

Às minhas amigas, Suzanny e Renata, pelo incentivo.

Muito Obrigado!