



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LARISSA CRISTINE DOS SANTOS COSTA

O TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES AUTOADJUNTOS

CAMPINA GRANDE

2022

LARISSA CRISTINE DOS SANTOS COSTA

O TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES AUTOADJUNTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Álgebra Linear

Orientadora: Prof^a Ma. Isabella Silva Duarte

CAMPINA GRANDE

2022

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

C837t Costa, Larissa Cristine dos Santos.
O teorema espectral para operadores autoadjuntos
[manuscrito] / Larissa Cristine dos Santos Costa. - 2022.
65 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em
Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de
Ciências e Tecnologia, 2022.
"Orientação : Profa. Ma. Isabella Silva Duarte ,
Departamento de Matemática - CCT."

1. Teorema espectral . 2. Operador autoadjunto. 3.
Diagonalização de operadores. 4. Álgebra linear. I. Título
21. ed. CDD 512.5

LARISSA CRISTINE DOS SANTOS COSTA

O TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES AUTOADJUNTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Álgebra Linear

Aprovado em: 04/03/2022.

BANCA EXAMINADORA



Prof^ª Ma. Isabella Silva Duarte (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof^ª Ma. Joselma Soares dos Santos
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. Vinicius Coelho dos Santos
Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB)

Dedico aos meus pais,
que são meu alicerce e
força.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, mesmo sendo *clichê*, porém é inegável que não teria chegado até aqui se não tivesse uma força do alto que me sustentou e não me deixou desistir. Em cada oração do Santo Terço pedi forças necessárias para chegar ao fim, mesmo com o mundo desabando ao meu redor, Nossa Senhora (como gosto de chamar, Gracinha), como uma boa mãe, sempre intercedeu por minhas realizações. E este fim também é uma prova de que ela sempre esteve comigo.

Ao meu pai, Paulo Sérgio; minha mãe, Maria Lindacy; e meu irmão, Gustavo, que foram meu alicerce em cada um dos dias de minha vida. Meus pais que sempre acreditaram em mim e me incentivaram a estudar e correr atrás de cada um dos meus sonhos. Meu sucesso e cada passo que eu der é graças à dedicação, abdicação e força deles.

Aos meus amigos de caminhada e vida, anjos que o Senhor colocou em minha vida para me ajudar a caminhar. Aqueles que me incentivaram e com suas palavras me fizeram acreditar que eu conseguiria, mesmo quando minhas inseguranças me faziam acreditar no contrário. Cito aqui Luciene Vieira e Hermerson Virginio, obrigado por me darem toda força até aqui. E a todos meus outros anjos, que fizeram e fazem parte da minha caminhada, dos quais não citarei os nomes para não correr o risco de esquecer de alguém, meu muito obrigada.

Aos presentes que a universidade me trouxe, Gabriela Velozo, Vanessa Silva, Thálya Millena, das quais surgiram a força e a certeza que juntas poderíamos vencer cada um dos desafios advindos em nossa caminhada acadêmica. Minhas meninas super poderosas, juntas entendemos que podemos conquistar tudo que quisermos, obrigada por cada força, por cada dúvida, por cada grupo de estudos. Além destas, como deixar de citar Vitória Silva, Dielly Ziwane, Renata Gleice, Nielson Alves (vulgo Jorginho), que fizeram parte dos desafios vencidos.

Por fim, agradeço à minha orientadora Isabella Duarte, por estar presente em cada momento e nunca me deixar sozinha em minhas dúvidas e questionamentos. Por tudo que abriu mão para estar comigo, por toda a inspiração, força e conselhos acadêmicos durante este período. Obrigada Bella, a melhor orientadora.

“O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis.”

José de Alencar

RESUMO

Neste trabalho, abordamos o Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos, um clássico teorema da Álgebra Linear, cujo tema central é diagonalizar um operador, tendo em vista uma aplicação na diagonalização de matrizes simétricas. Este teorema nos assegura que, em um espaço vetorial euclidiano, no qual está definido um operador T , T será autoadjunto se, e somente se, T for diagonalizável. Já a sua aplicação nos garante que podemos diagonalizar qualquer matriz simétrica, sendo um importante aliado para simplificar cálculos relativos a estas matrizes. Inicialmente, estudamos tópicos da Álgebra Linear, tais como Espaço Vetorial, Transformações Lineares e Operador Autoadjunto, que dão sustento para as demonstrações dos teoremas citados.

Palavras-chave: Teorema Espectral. Operador Autoadjunto. Diagonalização de Operadores.

ABSTRACT

In this work we address the Spectral Theorem for Self-Adjoint Operators, a classic theorem of Linear Algebra, which central theme is to diagonalize an operator, aiming at application in the diagonalization of symmetric matrices. This theorem assures us that, in a Euclidean vector space in which an operator T is defined, T will be self-adjoint if, and only if, T is diagonalizable. Its application guarantees that we can diagonalize any symmetric matrix, being an important ally to simplify calculations concerning these matrices. Initially, we study topics from Linear Algebra, such as Vector Space, Linear Transformations and Self-Adjoint Operator, which support the proofs of the aforementioned theorems.

Keywords: Spectral Theorem. Self-Adjoint Operator. Diagonalization of Operators.

SUMÁRIO

	Página
1	INTRODUÇÃO 9
2	ESPAÇOS VETORIAIS 11
2.1	Espaços Vetoriais 11
2.2	Subespaços Vetoriais 13
2.3	Combinações Lineares 17
2.4	Dependência Linear 19
2.5	Base e Dimensão de um Espaço Vetorial 22
2.6	Matriz de Mudança de Base 27
3	APLICAÇÕES ENTRE ESPAÇOS VETORIAIS 32
3.1	Transformações Lineares 32
3.1.1	Imagem e Núcleo 36
3.1.2	Autovalores e Autovetores 39
3.1.3	Subespaços Invariantes 40
3.1.4	Polinômio Característico 40
3.2	Produto Interno e Norma 47
3.2.1	Complemento Ortogonal 51
4	TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES AUTOADJUN- TOS 55
4.1	Operadores Autoadjuntos 55
4.2	Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos 58
4.3	Aplicação 60
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS 64
	REFERÊNCIAS 65

1 INTRODUÇÃO

Os conceitos e objetos matemáticos estudados pela Álgebra Linear são encontrados em muitas áreas da Matemática, tornando-se útil na resolução de sistemas de equações lineares, equações diferenciais, entre outros. Possui ainda muitas aplicações em áreas como Administração, Economia, Engenharia, Física, Ciência da Computação, Teoria da Aproximação, Ecologia, Demografia e Genética (ANTON e RORRES, 2012).

Dentre os muitos resultados estudados na Álgebra Linear, destaca-se o Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos, sobre o qual se trata esse trabalho. Nosso objetivo aqui é apresentar um estudo da teoria básica que nos permita enunciar e demonstrar esse teorema, para o qual nos apoiamos em Hoffman e Kunze (1971). Esse resultado é de grande importância por garantir a existência de uma base ortonormal de autovetores, cujos vetores são todos ortogonais e unitários, para espaços onde estão definidos alguns tipos de operadores, facilitando determinados cálculos relativos a estes. Neste trabalho, abordamos resultados sobre espaços de dimensão finita, porém, segundo Ben-Artzi (2008), generalizando-os para espaços com dimensão infinita, tornam-se uma importante ferramenta no estudo de Equações Diferenciais Parciais (EDP's), assim como na Mecânica Quântica.

Iniciamos o Capítulo 2 estudando os *espaços vetoriais*, que são conjuntos não vazios munido de duas operações, as quais satisfazem algumas propriedades intrínsecas, cujos elementos chamamos de *vetores*. Desses, podemos extrair um subconjunto que conserva as mesmas propriedades, o qual chamaremos de *subespaço vetorial*. A partir dos vetores presentes em um espaço vetorial, podemos fazer combinações e obter outros vetores. Diante disso, buscaremos encontrar um conjunto de vetores dentro de um espaço vetorial, de modo que todos os outros vetores desse espaço possam ser obtidos pelos vetores deste conjunto, o qual chamaremos de *base*.

Já no Capítulo 3, trabalharemos com funções entre dois espaços vetoriais que preservam a soma de vetores e o produto por escalar, chamadas de *transformações lineares*. Os *autovetores*, que são os vetores que possuem um múltiplo seu como imagem de uma transformação linear, podem ser encontrados resolvendo um polinômio que obtemos através da base de um espaço vetorial e uma transformação linear, o qual chamaremos de *polinômio característico*. O estudo dos *autovalores*, que são os valores que acompanham os autovetores, surgiu com Leonard Euler(1707 - 1783), no século XVIII, quando este se debruçou sobre equações de segundo grau com duas ou três variáveis no plano e no espaço, respectivamente. Nos trabalhos de Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) e Pierre-Simon Laplace(1749 - 1827), encontram-se a noção de polinômio característico explicitamente.

Finalmente, no Capítulo 4, definimos um tipo especial de operador linear, que chamamos de *operadores autoadjuntos*, para então apresentarmos o resultado que é o objetivo

principal de nosso estudo, o *Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos*. Por fim, exibiremos uma aplicação deste teorema no estudo das matrizes simétricas.

Vários matemáticos contribuíram no desenvolvimento da Teoria Espectral, como por exemplo Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857), que provou em 1829 que os autovalores de uma matriz simétrica são iguais. Porém, podemos dizer que foi David Hilbert (1862 - 1943) que culminou o desenvolvimento desta teoria, no início do século XX, quando definiu o Espectro (NASCIMENTO, 2013).

2 ESPAÇOS VETORIAIS

A noção de Espaço Vetorial é a base da Álgebra Linear. Sendo assim, neste capítulo encontramos a definição e alguns exemplos deste objeto matemático tão importante em nosso estudo, além de propriedades importantes do mesmo.

2.1 Espaços Vetoriais

Definição 2.1. Seja V um conjunto não vazio munido das operações:

$$\begin{array}{l} + : V \times V \rightarrow V \\ (a, b) \mapsto a + b \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} \cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V \\ (\alpha, a) \mapsto \alpha \cdot a \end{array}$$

e \mathbb{R} o corpo dos números reais. Dizemos que V é um **espaço vetorial** sobre o corpo dos números reais se, para quaisquer $a, b, c \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, são satisfeitas as seguintes propriedades:

(i) Vale a comutatividade da adição,

$$a + b = b + a.$$

(ii) Vale a associatividade com relação a adição,

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

(iii) Existe o elemento neutro aditivo, ou seja, existe um $\vec{0} \in V$, tal que:

$$a + \vec{0} = a = \vec{0} + a, \quad \forall a \in V.$$

(iv) Existe o elemento simétrico aditivo, ou seja, $\forall a \in V, \exists a' \in V$, tal que:

$$a + a' = \vec{0} = a' + a.$$

(v) Vale a associatividade com relação à multiplicação,

$$\alpha(\beta c) = (\alpha\beta)c.$$

(vi) Vale a distributividade,

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \quad \text{e} \quad (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a.$$

(vii) Existe o elemento neutro multiplicativo, ou seja, existe um $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\lambda a = a = a\lambda, \forall a \in V.$$

Os elementos de V são chamados de **vetores**, e os elementos do corpo \mathbb{R} são chamados de **escalares**.

Observação 2.1. *Podemos generalizar o corpo dos escalares para um corpo qualquer \mathbb{K} , porém, neste trabalho, será sempre o \mathbb{R} .*

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.1. Seja $V = \mathbb{R}^n$, munido das operações de soma e produto usuais, sejam $a = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $b = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $c = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, note que:

(i)

$$\begin{aligned} a + b &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) + (x_1, x_2, \dots, x_n) = b + a. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= [(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)] + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + [(y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)] = a + (b + c). \end{aligned}$$

(iii) Existe $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$a + \vec{0} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = a.$$

(iv) Existe $-a = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$, tal que:

$$\begin{aligned} a + (-a) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \\ &= (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), \dots, x_n + (-x_n)) \\ &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \dots, x_n - x_n) = (0, 0, \dots, 0) = \vec{0}. \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} \alpha(\beta a) &= \alpha[\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_n) = (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), \dots, \alpha(\beta x_n)) \\ &= ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, \dots, (\alpha\beta)x_n) = (\alpha\beta)(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha\beta)a \end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned}
\alpha(a + b) &= \alpha[(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)] = \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\
&= (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \dots, \alpha(x_n + y_n)) \\
&= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \dots, \alpha x_n + \alpha y_n) \\
&= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \dots, \alpha y_n) \\
&= \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + \alpha(y_1, y_2, \dots, y_n) \\
&= \alpha a + \alpha b.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)a &= (\alpha + \beta)(x_1, x_2, \dots, x_n) = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2, \dots, (\alpha + \beta)x_n) \\
&= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \dots, \alpha x_n + \beta x_n) \\
&= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_n) \\
&= \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + \beta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha a + \beta a.
\end{aligned}$$

(vii) Existe $1 \in \mathbb{R}$, tal que:

$$1 \cdot a = 1 \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, \dots, 1 \cdot x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = a$$

e

$$a \cdot 1 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot 1 = (x_1 \cdot 1, x_2 \cdot 1, \dots, x_n \cdot 1) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = a.$$

Dos itens (i) – (vii), concluímos que \mathbb{R}^n é um espaço vetorial.

Exemplo 2.2. Seja $V = \mathbb{R}^2$ munido das operações:

$$\begin{array}{lcl}
+ : V \times V & \rightarrow & V \\
(a, b) + (c, d) & \mapsto & (a + c, b + d)
\end{array}
\quad \text{e} \quad
\begin{array}{lcl}
\cdot : \mathbb{R} \times V & \rightarrow & V \\
\alpha \cdot (a, b) & \mapsto & (\alpha \cdot a, b)
\end{array}$$

Seja $a = (1, 5) \in V$ e $\alpha = 3, \beta = 2 \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)a &= (3 + 2)(1, 5) = 5(1, 5) = (5, 5) \\
&\neq (5, 25) = (3 \cdot 1, 3 \cdot 5) + (2 \cdot 1, 2 \cdot 5) = 3(1, 5) + 2(1, 5) = \alpha a + \beta a.
\end{aligned}$$

Logo, o \mathbb{R}^2 munido das operações dadas, não é um espaço vetorial.

2.2 Subespaços Vetoriais

Em alguns espaços vetoriais, é necessário analisar um subconjunto deste, que seja um espaço vetorial “menor” e que mantém suas propriedades. Estes subconjuntos serão chamados de *subespaços vetoriais*.

Definição 2.2. Seja V um espaço vetorial, dizemos que o subconjunto $W \subset V$, $W \neq \emptyset$, é um **subespaço vetorial** de V se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $\vec{0} \in W$;

- (ii) Se $a, b \in W$ então $a + b \in W$;
- (iii) Se $a \in W$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ então $\gamma a \in W$.

Observação 2.2. *Todo espaço vetorial V possui pelo menos dois subespaços vetoriais, chamados **subespaços triviais de V** , são eles $\{\vec{0}\}$ e V .*

O eixo- x do plano cartesiano, é um subespaço do \mathbb{R}^2 , como podemos ver no próximo exemplo.

Exemplo 2.3. Seja $W = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, W é subespaço do \mathbb{R}^2 , munido das operações de soma e produto usuais.

- (i) Sabemos que o elemento neutro aditivo do \mathbb{R}^2 é o $\vec{0} = (0, 0)$. $\vec{0} \in W$, pois perceba que $\vec{0} = (0, 0) = (x, 0)$, para $x = 0$.
- (ii) Sejam $a = (x_1, 0)$, $b = (x_2, 0) \in W$, daí temos:

$$a + b = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0).$$

Como $x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$, pois $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, então $a + b \in W$.

- (iii) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $a = (x_1, 0) \in W$, temos que:

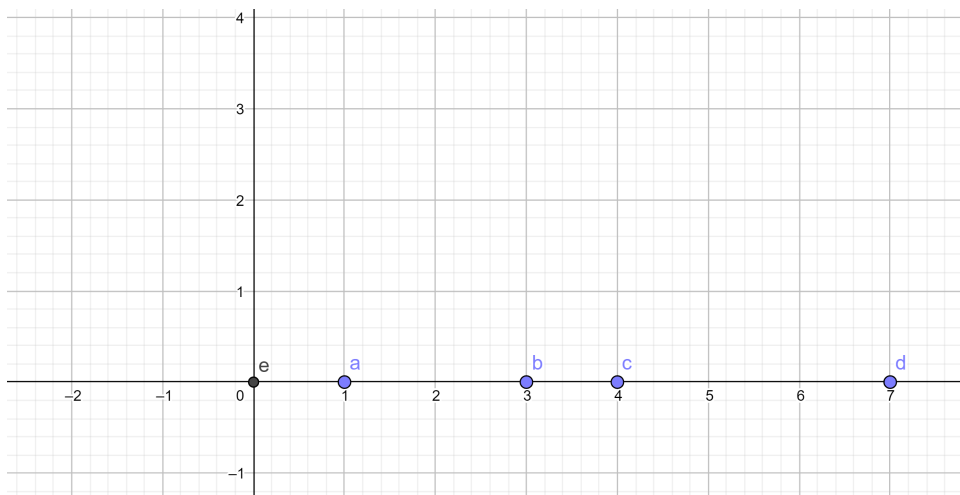
$$\lambda a = \lambda(x_1, 0) = (\lambda x_1, 0).$$

Como $\lambda x_1 \in \mathbb{R}$, pois $\lambda, x_1 \in \mathbb{R}$, então $\lambda a \in W$.

Dos itens (i) – (iii), concluímos que W é um subespaço de \mathbb{R}^2 .

Na Figura 1 temos a representação geométrica desse subespaço. Para exemplificar utilizamos $a = (1, 0)$, $b = (3, 0)$, com $a, b \in W$, $c = a + b$ e $d = \lambda a \in W$, com $\lambda = 7$.

Figura 1 – Representação do subespaço W .



De maneira análoga, podemos provar que a eixo- y também é um subespaço do \mathbb{R}^2 .

Exemplo 2.4. Assumindo a soma de funções e o produto por escalar usuais, seja $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é função}\}$ um espaço vetorial. O conjunto das funções pares, $W = \{f \in V; f(x) = f(-x)\}$, é subconjunto de V . Vejamos:

(i) Note que o elemento neutro aditivo de V é $\vec{0}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, onde $\vec{0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Daí $\vec{0}(x) = 0$ e $\vec{0}(-x) = 0$, logo $\vec{0}(x) = 0 \in W$.

(ii) Sejam $f, g \in W$, onde $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$, temos que:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x).$$

Daí, $(f + g)(x) \in W$.

(iii) Sejam $f \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $f(x) = f(-x)$, daí:

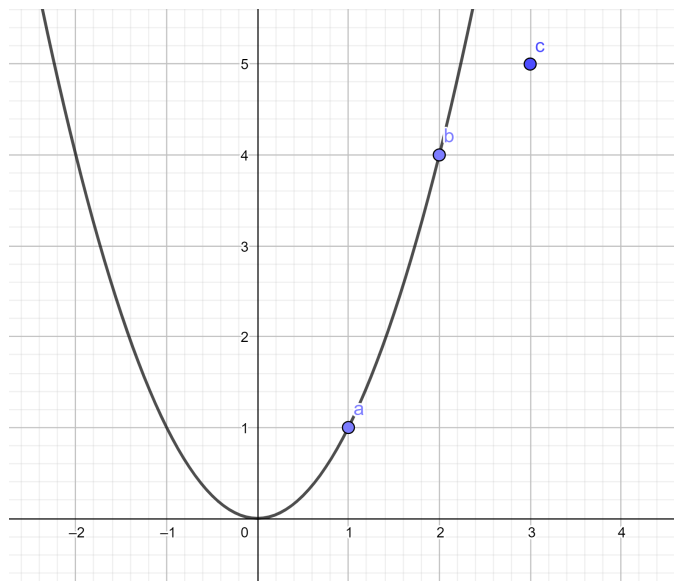
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda f(-x) = (\lambda f)(-x).$$

Logo $(\lambda f)(x) \in W$.

Dos itens (i) – (iii), concluímos que W é um subespaço de V .

Exemplo 2.5. Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$, conforme Figura 2.

Figura 2 – $W = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$



Fonte: Do Autor, 2022

Note que W não é um subespaço de V , pois sejam $a = (1, 1), b = (2, 4) \in W$,

$$c = a + b = (1, 1) + (2, 4) = (1 + 2, 1 + 4) = (3, 5) \notin W$$

Logo, nem todo subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço vetorial. Contudo, a interseção entre dois subespaços de um espaço vetorial V sempre é um subespaço de V . Essa afirmação é garantida pelo resultado abaixo.

Proposição 2.1. *Sejam V um espaço vetorial e W_1 e W_2 subespaços de V , então $W_1 \cap W_2$ também é um subespaço de V .*

Prova:

Seguindo a definição de subespaço:

- (i) Note que, como W_1 e W_2 são subespaços então, $\vec{0} \in W_1$ e $\vec{0} \in W_2$, logo $\vec{0} \in W_1 \cap W_2$.
- (ii) Sejam $a, b \in W_1 \cap W_2$, sabemos que $a, b \in W_1$ e $a, b \in W_2$, e por serem ambos subespaços então $a + b \in W_1$ e $a + b \in W_2$, logo $a + b \in W_1 \cap W_2$.
- (iii) Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $a \in W_1 \cap W_2$. Como $a \in W_1 \cap W_2$, conseqüentemente, a pertence a cada um dos subespaços, W_1 e W_2 , e por serem ambos subespaço, $\lambda a \in W_1$ e $\lambda a \in W_2$. Logo $\lambda a \in W_1 \cap W_2$.

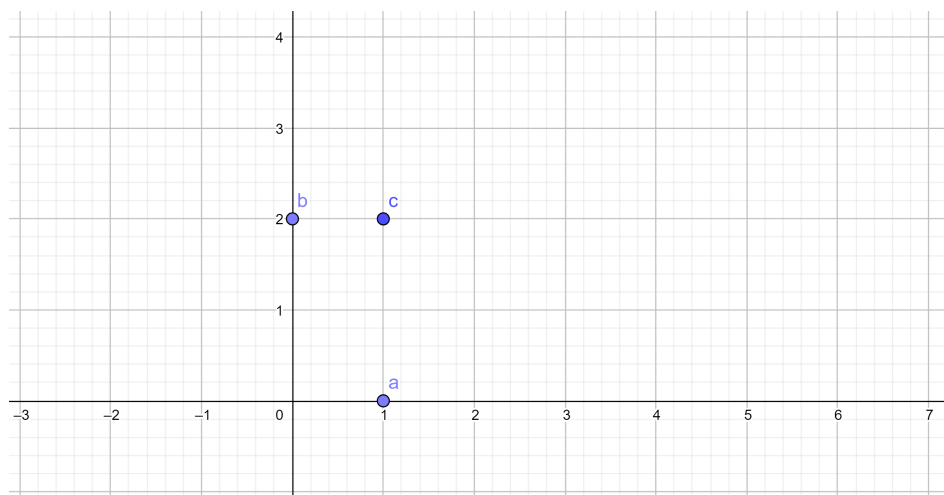
Dos itens (i) – (iii), concluímos que $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V . ■

Observação 2.3. *Se W_1 e W_2 são subespaços de V , $W_1 \cup W_2$ não é, necessariamente, um subespaço de V . Pois, sejam $V = \mathbb{R}^2$ um espaço vetorial, $W_1 = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$, subespaços de V . Considere $a = (1, 0) \in W_1$ e $b = (0, 2) \in W_2$, então $a, b \in W_1 \cup W_2$. Mas, note que*

$$c = a + b = (1, 0) + (0, 2) = (1, 2) \notin W_1 \cup W_2,$$

conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – W_1 é o eixo- x e W_2 é o eixo- y



2.3 Combinações Lineares

Uma das características importantes de um espaço vetorial, é que podemos, através de *combinações lineares*, obter novos vetores a partir de vetores dados.

Definição 2.3. Sejam a_1, a_2, \dots, a_n vetores de um espaço vetorial V e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ escalares. Dizemos que a é **combinação linear** de a_1, a_2, \dots, a_n se ele pode ser escrito da forma:

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n.$$

Exemplo 2.6. Assumindo \mathbb{R}^2 como espaço vetorial munido das operações usuais. O vetor $a = (3, 7) \in \mathbb{R}^2$ é uma combinação linear de $(0, 1)$ e $(1, 1)$, pois pode ser escrito como

$$(3, 7) = 3(1, 1) + 4(0, 1).$$

Exemplo 2.7. Assumindo que $M_2(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial, munido de suas operações usuais. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Note que A é uma combinação linear de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pois:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definição 2.4. Fixados $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$, o conjunto formado pelos vetores que são combinação linear de a_1, a_2, \dots, a_n é chamado de **subespaço gerado** por a_1, a_2, \dots, a_n e é denotado por:

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \{a \in V; a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n, \text{ com } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}.$$

Proposição 2.2. $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ é um subespaço de V .

Prova:

(i) Seja $a_i \in [a_1, a_2, \dots, a_n]$, com $i = 1, 2, \dots, n$, então $\vec{0} = 0a_i$.

Logo, $\vec{0} \in [a_1, a_2, \dots, a_n]$.

(ii) Sejam $a, b \in [a_1, a_2, \dots, a_n]$, e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$, de forma que tenhamos $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$ e $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$.

Temos que:

$$\begin{aligned} a + b &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n \\ &= \lambda_1 a_1 + \beta_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \beta_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n + \beta_n a_n \\ &= (\lambda_1 + \beta_1) a_1 + (\lambda_2 + \beta_2) a_2 + \dots + (\lambda_n + \beta_n) a_n. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda_i + \beta_i = \alpha_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos:

$$a + b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n.$$

Daí, concluímos que $a + b \in [a_1, a_2, \dots, a_n]$.

(iii) Sejam $a \in [a_1, a_2, \dots, a_n]$, e $\alpha, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$, de forma que tenhamos $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$.

Temos que:

$$\begin{aligned} \alpha a &= \alpha(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n) \\ &= \alpha \lambda_1 a_1 + \alpha \lambda_2 a_2 + \dots + \alpha \lambda_n a_n. \end{aligned}$$

Tomando $\alpha \lambda_i = \alpha_i$, com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos:

$$\alpha a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n.$$

Donde concluímos que $\alpha a \in [a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Dos itens (i) – (iii), concluímos que $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ é um subespaço de V . ■

Exemplo 2.8. Seja $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Note que:

$$\begin{aligned} [(1, 0)] &= \{a \in \mathbb{R}^2, a = \alpha(1, 0), \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a \in \mathbb{R}^2, a = (\alpha, 0), \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Além disso, $[(1, 0)]$ é subespaço do \mathbb{R}^2 , conforme mostrado no Exemplo 2.3.

Observação 2.4. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$. Então $[a_1, a_2, \dots, a_n] \subset V$.

De fato, pela Proposição 2.2 sabemos que $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ é um subespaço de V e, pela definição de subespaço, $[a_1, a_2, \dots, a_n] \subset V$.

Definição 2.5. Um espaço vetorial V é dito **finitamente gerado** se existe $S \subset V$, com S finito, de modo que $V = [S]$.

Exemplo 2.9. O \mathbb{R}^2 é gerado pelos vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$, ou seja, $[(1, 0), (0, 1)] = \mathbb{R}^2$, pois:

Pela Observação 2.4, temos que $[(1, 0), (0, 1)] \subset \mathbb{R}^2$.

Por outro lado, seja $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, note que:

$$a = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Sendo a um vetor arbitrário do \mathbb{R}^2 obtemos, $\mathbb{R}^2 \subset [(1, 0), (0, 1)]$. Consequentemente, concluímos que $[(1, 0), (0, 1)] = \mathbb{R}^2$. Logo, o \mathbb{R}^2 é finitamente gerado.

Teorema 2.1. (Soma de subespaços) *Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V . Então o conjunto:*

$$U + W = \{v \in V; v = u + w, \quad u \in U \text{ e } w \in W\}$$

é subespaço de V .

Demonstração:

(i) Sabemos que $\vec{0} \in U$ e $\vec{0} \in W$, pois ambos são subespaços. Note que

$$\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \Rightarrow \vec{0} \in U + W.$$

(ii) Sejam $v_1 = u_1 + w_1$, $v_2 = u_2 + w_2 \in U + W$, então sabemos que $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$. Então:

$$v_1 + v_2 = u_1 + w_1 + u_2 + w_2 = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2)$$

E como $u_1 + u_2 \in U$ e $w_1 + w_2 \in W$, pois U e W são subespaços, então $v_1 + v_2 \in U + W$.

(iii) Sejam $v = u_1 + w_1 \in U + W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Vejamos

$$\alpha v = \alpha(u_1 + w_1) = \alpha u_1 + \alpha w_1$$

Como U e W são subespaços, temos

$$u_1 \in U \Rightarrow \alpha u_1 \in U \text{ e } w_1 \in W \Rightarrow \alpha w_1 \in W.$$

Então, $\alpha v \in U + W$.

Dos itens (i)-(iii), concluímos que $U + W$ é um subespaço de V . ■

Definição 2.6. Sejam U e V dois subespaços vetoriais de V . Quando $U \cap V = \{\vec{0}\}$, então $U + V$ é chamado de **soma direta de U com V** , denotamos por $U \oplus V$.

2.4 Dependência Linear

No estudo de espaços vetoriais, é essencial sabermos se um vetor é uma combinação linear de outros vetores, pois estamos interessados em encontrar um subconjunto de vetores que podem gerar todo o espaço, de modo que seja um conjunto restrito a elementos considerados essenciais. Para isso, a seguir, definiremos *dependência e independência linear*.

Definição 2.7. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dizemos que a_1, a_2, \dots, a_n são **linearmente independentes (LI)** quando a equação

$$\vec{0} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n,$$

admitir apenas a solução trivial, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Caso contrário, dizemos que a_1, a_2, \dots, a_n são **linearmente dependentes (LD)**.

Além disso, dizemos que um conjunto W é **LD** se seus vetores são LD, e W é **LI** se seus vetores são LI.

Exemplo 2.10. O conjunto $A = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^4$ é LD, pois, dados $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\begin{aligned} \vec{0} = (0, 0, 0, 0) &= \lambda_1(1, 1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0, 0) + \lambda_3(2, 1, 0, 0) \\ &= (\lambda_1, \lambda_1, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0, 0) + (2\lambda_3, \lambda_3, 0, 0) \\ &= (\lambda_1 + 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, 0, 0). \end{aligned}$$

Temos o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 - \lambda_1 = -\lambda_3 - (-2\lambda_3) = \lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}.$$

Como $\lambda_3 \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ podem assumir qualquer valor, e assim concluímos que esse sistema tem infinitas soluções. Logo, A é um conjunto LD.

Exemplo 2.11. O conjunto $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ é LI, pois, dados $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\begin{aligned} \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Usando a igualdade de matrizes, obtemos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Logo, concluímos que M é LI.

Teorema 2.2. $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset V$ é um conjunto LD se, e somente se, um dos seus vetores é combinação linear dos outros vetores.

Demonstração:

\Rightarrow)

Suponha que $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é LD e $\vec{0} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$, com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
Então, $\lambda_i \neq 0$, para algum i , $1 \leq i \leq n$. Como

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + \lambda_i a_i + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \dots + \lambda_n a_n \\ \Rightarrow -\lambda_i a_i &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \dots + \lambda_n a_n. \\ \Rightarrow a_i &= -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} a_2 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} a_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} a_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} a_n.\end{aligned}$$

Logo, a_i é uma combinação linear dos vetores $\{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n\}$.

\Leftarrow)

Seja $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, de modo que para algum j , $1 \leq j \leq n$,

$$a_j = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{j-1} a_{j-1} + \lambda_{j+1} a_{j+1} + \dots + \lambda_n a_n,$$

com $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Daí,

$$\begin{aligned}a_j &= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{j-1} a_{j-1} + \lambda_{j+1} a_{j+1} + \dots + \lambda_n a_n \\ \Rightarrow \vec{0} &= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{j-1} a_{j-1} + \lambda_{j+1} a_{j+1} + \dots + \lambda_n a_n - a_j.\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos uma combinação linear, onde $\lambda_j = -1 \neq 0$, que resulta no vetor nulo. Logo, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é LD. ■

Vejamos algumas outras propriedades envolvendo dependência e independência linear.

Proposição 2.3. *Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .*

- i) Se $V = \{\vec{0}\}$, então V é LD.*
- ii) Se $V = \{v\}$, com $v \neq \vec{0}$, então V é LI.*
- iii) Sejam $A \subset V$ e $B \subset V$, se $A \subset B$ e A é LD, então B é LD.*
- iv) Sejam $A \subset V$ e $B \subset V$, se $A \subset B$ e B é LI, então A é LI.*

Prova:

(i) Suponha que $V = \{\vec{0}\}$. Note que, $\vec{0} = \lambda \vec{0}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Então concluímos que V é LD.

(ii) Suponha que $V = \{v\}$, com $v \neq \vec{0}$. Se tivermos $\vec{0} = \lambda v$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $v \neq \vec{0}$, então $\lambda = 0$. Concluímos que V é LI.

- (iii) Considere $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ um conjunto LD. Pelo Teorema 2.2, existe um $a_i \in A$ que é combinação dos outros vetores de A , isto é,

$$a_i = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_r a_r.$$

Como $A \subset B$, então $a_i \in B$, e pelo Teorema 2.2 concluímos que B é LD.

- (iv) Suponha, por contradição, que A seja LD. Como $A \subset B$, pelo item (iii) B é LD, o que é um absurdo. Logo, A é LI. ■

2.5 Base e Dimensão de um Espaço Vetorial

Nosso intuito agora é encontrar um conjunto finito de vetores essenciais, dentro de um espaço vetorial V , de modo que todo vetor de V seja combinação linear deste conjunto, o qual denominaremos *base*.

Definição 2.8. Seja V um espaço vetorial e $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset V$. Dizemos que B é uma **base ordenada de V** se:

- (i) $[B] = V$;
- (ii) B é LI.

Se $V = \{\vec{0}\}$ então o conjunto vazio \emptyset é uma base de V , por convenção.

Exemplo 2.12. O conjunto $B = \{(1, 0), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ é uma base do \mathbb{R}^2 .

- (i) Já foi provado no Exemplo 2.9 que $[B] = \mathbb{R}^2$.
- (ii) Sejam $\vec{0} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, e $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

$$(0, 0) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, 0) + (y, 0) = (x, y) \Rightarrow x = y = 0.$$

Logo, B é LI.

De (i)-(ii), concluímos que B é uma base do \mathbb{R}^2 .

Exemplo 2.13. O conjunto $A = \{(0, 1), (0, 2)\}$ não é uma base para o \mathbb{R}^2 , pois:

- (i) Pela Observação 2.4, $[A] \subset \mathbb{R}^2$.

Vamos verificar se $\mathbb{R}^2 \subset [A]$. Sejam $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$(x, y) = a(0, 1) + b(0, 2) = (0, a) + (0, 2b) = (0, a + 2b).$$

Então $x = 0$ e $y = a + 2b$, ou seja, $\mathbb{R}^2 \not\subset [A]$.

Assim, concluímos que A não gera o \mathbb{R}^2 .

Exemplo 2.14. Assumindo que o espaço dos polinômios com as operações usuais é um espaço vetorial, seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{p(x); p(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0\}$. O conjunto $B = \{1, x, x^2\}$ é base para o $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, pois:

(i) $[B] \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Vamos verificar se $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \subset [B]$.

Seja $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Note que:

$$p(x) = c \cdot 1 + b \cdot x + a \cdot x^2.$$

Então, $p(x)$ é combinação linear dos vetores de B , logo $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \subset [B]$.

E, pela teoria dos conjuntos, como $[B] \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \subset [B]$ concluímos que $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = [B]$.

(ii) B é LI, pois, dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= c \cdot 1 + b \cdot x + a \cdot x^2 \\ \Rightarrow 0 + 0x + 0x^2 &= c + bx + ax^2 \\ \Rightarrow a = b = c &= 0. \end{aligned}$$

Dos itens (i)-(ii), concluímos que B é base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

De maneira análoga, podemos provar que o conjunto $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ é base para $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.15. O conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é base de $M_2(\mathbb{R})$, pois:

(i) Temos $[B] \subset M_2(\mathbb{R})$. Vamos verificar se $M_2(\mathbb{R}) \subset [B]$.

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Note que:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, A é uma combinação linear dos vetores de B , então $M_2(\mathbb{R}) \subset [B]$. Ou seja, $M_2(\mathbb{R}) = [B]$.

(ii) B é LI, pois sejam $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \Rightarrow a = b = c = d = 0. \end{aligned}$$

Dos itens (i)-(ii), concluí-se que B é base de $M_2(\mathbb{R})$.

Definição 2.9. Chamamos de **base canônica do \mathbb{R}^n** o conjunto $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ onde:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

O resultado a seguir nos garante que, independente do espaço vetorial que estivermos trabalhando, este admite pelo menos uma base.

Proposição 2.4. *Todo espaço vetorial finitamente gerado admite uma base.*

Prova:

Seja V um espaço vetorial. Se $V = \{\vec{0}\}$ então sabemos que o conjunto vazio \emptyset é uma base de V .

Caso contrário, seja $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Por hipótese V é finitamente gerado, logo existe $B \subset V$, com $B = \{a_1, a_2, \dots, a_i\}, 1 \leq i \leq n$, de forma que $V = [B]$. Se os vetores a_1, a_2, \dots, a_i forem LI, então B é base de V .

Por outro lado, se os vetores a_1, a_2, \dots, a_i são LD, existe $j \in \{1, 2, \dots, i\}$ tal que $a_j \neq \vec{0}$. Por simplicidade, digamos que $a_1 \neq \vec{0}$. Agora, se todo vetor a_j , com $j \in \{2, 3, \dots, i\}$, pode ser escrito como combinação linear de a_1 , então $V = [a_1]$. Além disso, pelo item (ii) da Proposição 2.3, $\{a_1\}$ é LI, consequentemente $\{a_1\}$ é uma base de V . Caso contrário, existe um $a_k \neq \vec{0}$, com $k \in \{2, 3, \dots, i\}$, que não é combinação linear de a_1 , suponhamos, por simplicidade, $a_2 \neq \vec{0}$. Pelo Teorema 2.2, concluímos que $\{a_1, a_2\}$ é LI, e se todo vetor de V pode ser escrito como combinação linear de a_1, a_2 , então $V = [a_1, a_2]$ e, portanto, $\{a_1, a_2\}$ é uma base de V .

Pode-se repetir esse processo e, como $\{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ é finito, a repetição terá fim. Logo, existem vetores LI em $\{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ que geram V , estes formam uma base para V . ■

Além disso, considerando duas bases de um mesmo espaço vetorial, podemos garantir, pelo resultado a seguir, que essas bases possuem o mesmo número de elementos.

Teorema 2.3. (Teorema da Invariância) *Em um espaço finitamente gerado, toda base possui o mesmo número de elementos.*

Demonstração:

Sejam $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ bases para um mesmo espaço V finitamente gerado. Suponha que $m < n$. Como B_2 é base de V e $u_j \in V$, $1 \leq j \leq n$, podemos escrever

$$u_j = \alpha_{1j}v_1 + \alpha_{2j}v_2 + \dots + \alpha_{mj}v_m, \text{ com } 1 \leq j \leq n.$$

Note que, na combinação linear nula

$$x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n = \vec{0},$$

podemos fazer a seguinte substituição $u_j = \alpha_{1j}v_1 + \alpha_{2j}v_2 + \dots + \alpha_{mj}v_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}v_i$, onde obtemos:

$$x_1\left(\sum_{i=1}^m \alpha_{i1}v_i\right) + x_2\left(\sum_{i=1}^m \alpha_{i2}v_i\right) + \dots + x_n\left(\sum_{i=1}^m \alpha_{in}v_i\right) = \vec{0}.$$

Ou ainda,

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j\alpha_{1j}\right)v_1 + \left(\sum_{j=1}^n x_j\alpha_{2j}\right)v_2 + \dots + \left(\sum_{j=1}^n x_j\alpha_{mj}\right)v_m = \vec{0}.$$

Como B_2 é LI, então $\sum_{j=1}^n x_j\alpha_{ij} = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$. Estas m equações formam um sistema linear homogêneo com n incógnitas. Uma vez que $n > m$, temos um sistema possível e indeterminado, ou seja, existe uma solução não trivial. Então, existem x_1, x_2, \dots, x_n onde pelo menos $x_j \neq 0$, para algum j . Assim B_1 é LD, o que é um absurdo pois B_1 é base.

De modo análogo chega-se a um absurdo se supormos que $m > n$. Donde concluímos que $m = n$. ■

Definição 2.10. Seja V um espaço finitamente gerado. Chamamos de **dimensão de V** o número de elementos de uma base qualquer de V , denotado por $\dim V$.

Se $V = \{\vec{0}\}$, então $\dim V = 0$. Se V não for um espaço finitamente gerado, dizemos que V possui **dimensão infinita**.

Exemplo 2.16. De acordo com alguns exemplos vistos anteriormente, temos:

- (i) $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, pelo Exemplo 2.12.
- (ii) $\dim \mathbb{R}^n = n$, pela Definição 2.9.
- (iii) $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$, pelo Exemplo 2.14.
- (iv) $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, pelo Exemplo 2.15. De maneira geral, a dimensão do conjunto formado pelas matrizes de ordem $m \times n$ é dada por $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$.

Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V . Como garante o teorema a seguir.

Teorema 2.4. (Teorema do Completamento) *Seja V um espaço vetorial de dimensão n . Se os vetores $u_1, u_2, \dots, u_r \in V$ são LI, com $r < n$, então existem $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n \in V$ de modo que $\{u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n\}$ forma uma base de V .*

Demonstração:

Sabemos que $\dim V = n$ e que u_1, u_2, \dots, u_r , com $r < n$, são LI. Existe $u_{r+1} \in V$ de forma que $u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}$ são LI, pois, caso contrário, os vetores u_1, u_2, \dots, u_r formariam uma base para V , o que, pelo Teorema 2.3, não é possível pois $\dim V = n > r$.

Se $r + 1 = n$, então $u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}$ formam uma base para V .

Se $r + 1 < n$, podemos encontrar $u_{r+2} \in V$ de modo que $u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}$ são LI. Caso contrário, pelo Teorema 2.2 poderíamos escrever:

$$u_j = u_1 + \dots + u_{j-1} + u_{j+1} + \dots + u_r + u_{r+1} + u_{r+2}, \text{ com } j \leq r + 2,$$

o que implicaria que $u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}$ formariam uma base para V , o que não é possível pois $\dim V = n > r + 1$.

Repetindo os argumentos acima, após um número finito de passos, encontra-se vetores $u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{r+k}$, com $r + k = n$, que são LI e, como $\dim V = n = r + k$, segue que essa sequência de vetores é uma base de V . ■

Proposição 2.5. *Todo subespaço de um espaço vetorial finitamente gerado é também finitamente gerado.*

Prova:

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado, W um subespaço de V e $w_1 \in W$. Se $W = [w_1]$, então conclui-se que W é finitamente gerado.

Caso contrário, existe $w_2 \in W$ que não é uma combinação linear de w_1 e, pelo Teorema 2.2, o conjunto $\{w_1, w_2\}$ é LI. Se $W = [w_1, w_2]$, então W é finitamente gerado.

Repetindo esses passos, como V é finitamente gerado, esse processo deve parar, senão haveria em V um conjunto LI infinito.

Desse modo, concluímos que W é finitamente gerado. ■

Proposição 2.6. *Seja W um subespaço vetorial de V . Se $\dim W = \dim V$, então $W = V$.*

Prova:

Pela Proposição 2.5, W é finitamente gerado, logo W possui uma base. Como a $\dim W = \dim V$, toda base de W também é base de V . Logo, todo vetor de V pertence a W , ou seja, $V \subset W$. Como $W \subset V$ por ser subespaço, pela teoria dos conjuntos, segue que $V = W$. ■

2.6 Matriz de Mudança de Base

Em alguns problemas matemáticos, podemos seguir vários caminhos distintos para chegarmos a uma solução, podendo ter diferentes graus de dificuldade. Muitas vezes, é conveniente que tracemos caminhos “mais simples” para chegar à solução esperada. Em nosso estudo, para facilitar os cálculos poderemos fazer uso da **mudança de base**, estudada nessa seção.

Definição 2.11. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado, que tem como base o conjunto $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, e $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \in V$. Os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ serão chamados de **coordenadas de u com relação a B** . A matriz de ordem $n \times 1$, formada pelas n coordenadas de u , da seguinte forma

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

é chamada de **matriz de coordenadas de u em relação a B** .

Exemplo 2.17. Seja $p(x) = 3x^2 + 4x \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, sabemos que $B = \{1, x, x^2\}$ é base para $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Podemos escrever

$$p(x) = 0 \cdot 1 + 4 \cdot x + 3 \cdot x^2$$

A matriz de coordenadas de $p(x)_B$ é:

$$[p(x)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Definição 2.12. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado de dimensão n e sejam $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bases de V . Existe uma única família de escalares α_{ij} , com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$, de maneira que:

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \dots + \alpha_{n1}u_n \\ v_2 &= \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \dots + \alpha_{n2}u_n \\ &\vdots \\ v_n &= \alpha_{1n}u_1 + \alpha_{2n}u_2 + \dots + \alpha_{nn}u_n \end{aligned},$$

ou ainda,

$$v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}u_i, \text{ com } j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

A matriz quadrada de ordem n , da forma:

$$[M]_B^C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

chama-se **matriz de mudança da base B para base C** .

Exemplo 2.18. Encontremos a matriz de mudança da base $B = \{1, 1+t\}$ para base $C = \{1, t\}$ do espaço $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} 1 = x_1 \cdot 1 + y_1(1+t) \\ t = x_2 \cdot 1 + y_2(1+t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = (x_1 + y_1) + y_1 \cdot t \\ t = (x_2 + y_2) + y_2 \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = 1 \\ y_1 = 0 \\ x_2 + y_2 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ y_2 = 1 \end{cases}.$$

Logo, a matriz de mudança da base C para a base B será

$$[M]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposição 2.7. *Sejam B e C bases de um espaço vetorial de dimensão finita V . Seja $[v]_B$ e $[v]_C$ as matrizes de coordenadas de um vetor $v \in V$ com relação às bases B e C , respectivamente, e $[M]_B^C$ a matriz de mudança de base da base B para base C , então:*

$$[v]_B = [M]_B^C[v]_C.$$

Prova:

Suponha que $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ e $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ sejam bases do espaço vetorial V . Ainda,

$$[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } [v]_C = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

as matrizes de coordenadas de um vetor $v \in V$ com relação às bases B e C , respectivamente.

Se $[M]_B^C = (\alpha_{ij})$ representa a matriz de mudança de base de B para C , então:

$$c_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i, \quad \text{com } j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.1)$$

Note que, sendo $v \in V$, podemos escrever

$$v = \sum_{i=1}^n x_i b_i \quad \text{ou} \quad v = \sum_{j=1}^n y_j c_j,$$

donde obtemos

$$v = \sum_{i=1}^n x_i b_i = \sum_{j=1}^n y_j c_j. \quad (2.2)$$

Utilizando (2.1) em (2.2), temos

$$v = \sum_{i=1}^n x_i b_i = \sum_{j=1}^n y_j c_j = \sum_{j=1}^n y_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \right) b_i.$$

Como os vetores de B são LI, então

$$\sum_{i=1}^n x_i b_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \right) b_i \Rightarrow x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j, \quad \text{com } 1 \leq i \leq n.$$

Escrevendo essas n equações na forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Ou simplesmente,

$$[v]_B = [M]_B^C [v]_C.$$

■

Proposição 2.8. *Sejam B, C e D bases de um espaço vetorial V de dimensão n . Temos que:*

$$[M]_B^D = [M]_B^C [M]_C^D$$

Prova:

Sejam $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ bases de V . Denotemos por $[M]_B^C = (\alpha_{ij})$, $[M]_C^D = (\beta_{ij})$, $[M]_B^D = (\gamma_{ij})$. Note que:

$$c_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i, \quad d_k = \sum_{j=1}^n \beta_{jk} c_j, \quad d_k = \sum_{i=1}^n \gamma_{ik} b_i. \quad (2.3)$$

Assim,

$$d_k = \sum_{j=1}^n \beta_{jk} c_j = \sum_{j=1}^n \beta_{jk} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk} \right) b_i. \quad (2.4)$$

Como os vetores de B são LI, então utilizando (2.3) e (2.4):

$$d_k = \sum_{i=1}^n \gamma_{ik} b_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk} \right) b_i \quad \Rightarrow \quad \gamma_{ik} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk} \text{ com } 1 \leq i, k \leq n.$$

Além disso, note que $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk}$ representa a soma do i -ésimo termo da k -ésima coluna da matriz $[M]_B^C [M]_C^D$. Então, podemos escrever

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk},$$

na forma matricial

$$[M]_B^D = [M]_B^C [M]_C^D.$$

■

Proposição 2.9. *Sejam B e C bases de um espaço vetorial V de dimensão n . Então a matriz $[M]_B^C$ possui inversa, que é dada por $[M]_C^B$.*

Prova:

Pela proposição 2.8, temos

$$[M]_B^C [M]_C^B = [M]_B^B \quad \text{e} \quad [M]_C^B [M]_B^C = [M]_C^C.$$

Seja $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. A matriz $[M]_B^B = (\alpha_{ij})$ satisfaz o seguinte:

$$b_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i \text{ com } 1 \leq j \leq n.$$

Como os vetores de B são LI, a única solução de cada equação será dada por

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} .$$

Donde concluímos que $[M]_B^B$ é a matriz identidade. E de modo análogo concluímos que $[M]_C^C$ também é a matriz identidade. Logo, $[M]_C^B$ é a matriz inversa de $[M]_B^C$. ■

Teorema 2.5. *Se B e C são bases de um espaço vetorial de dimensão finita e consideremos I uma função sobre o espaço V , que identifica cada vetor u com ele mesmo:*

$$\begin{aligned} I : V &\rightarrow V \\ u &\mapsto I(u) = u \end{aligned} ,$$

então $[I]_B^C = M_C^B$.

Demonstração:

Sejam $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $[I]_B^C = (\alpha_{ij})$, com $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Note que,

$$u_j = I(u_j) = \alpha_{1j}v_1 + \alpha_{2j}v_2 + \dots + \alpha_{nj}v_n,$$

é o mesmo elemento da matriz $[M]_C^B$. Donde concluímos que $[I]_B^C = [M]_C^B$. ■

3 APLICAÇÕES ENTRE ESPAÇOS VETORIAIS

Neste capítulo, trabalharemos com funções entre dois espaços vetoriais que preservam a soma de vetores e o produto por escalar, chamadas de *transformações lineares*. Veremos também os conceitos de *autovalores* e *autovetores*, que são os vetores que possuem um múltiplo seu como imagem de uma transformação linear e como determiná-los através de um polinômio, o *polinômio característico*.

3.1 Transformações Lineares

Definição 3.1. Sejam U e V dois espaços vetoriais. Dizemos que a função $T : U \rightarrow V$ de forma que $T(u) = v$, com $u \in U$ e $v \in V$, é uma **transformação linear** se satisfaz as seguintes condições:

- (i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$, $\forall u, v \in U$;
- (ii) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, $\forall u \in U$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Ou, de maneira equivalente, se T satisfaz:

$$T(\lambda a + \alpha b) = \lambda T(a) + \alpha T(b), \quad \forall a, b \in U, \quad \forall \lambda, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Chamaremos de **operador linear** uma transformação linear de um espaço vetorial V nele mesmo, isto é, $T : V \rightarrow V$.

Exemplo 3.1. Seja $T : U \rightarrow V$ dada por $T(u) = \vec{0}$, $\forall u \in U$, é uma transformação linear, chamada de **transformação nula**. De fato, dados $a, b \in U$ e $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$T(\lambda a + \alpha b) = \vec{0} = \lambda \vec{0} + \alpha \vec{0} = \lambda T(a) + \alpha T(b).$$

Exemplo 3.2. Seja $I : U \rightarrow U$ dada por $I(u) = u$, $\forall u \in U$, é uma transformação linear, chamada de **transformação identidade**. Com efeito, dados $a, b \in U$ e $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$I(\lambda a + \alpha b) = \lambda a + \alpha b = \lambda I(a) + \alpha I(b).$$

Logo, a função citada no Teorema 2.5 é a *transformação identidade*.

Exemplo 3.3. Seja V o espaço das funções polinomiais, a função $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

é uma transformação linear. De fato, sejam $f, g \in V$ e $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} T(\lambda f + \alpha g) &= \int_a^b (\lambda f(x) + \alpha g(x)) dx \\ &= \int_a^b \lambda f(x) dx + \int_a^b \alpha g(x) dx \\ &= \lambda \int_a^b f(x) dx + \alpha \int_a^b g(x) dx \\ &= \lambda T(f) + \alpha T(g). \end{aligned}$$

Proposição 3.1. *Seja $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então:*

$$(i) \quad T(\vec{0}_u) = \vec{0}_v$$

$$(ii) \quad T(-u) = -T(u)$$

$$(iii) \quad T(u - v) = T(u) - T(v)$$

Prova:

$$(i) \quad T(\vec{0}_u) = T(\vec{0}_u + \vec{0}_u) = T(\vec{0}_u) + T(\vec{0}_u) = 2 \cdot T(\vec{0}_u).$$

Logo,

$$2 \cdot T(\vec{0}_u) = T(\vec{0}_u) \Rightarrow T(\vec{0}_u) = \vec{0}_v.$$

(ii) Pelo item (i) e pela linearidade de T ,

$$\vec{0}_v = T(\vec{0}_u) = T(u - u) = T(u) + T(-u) \text{ pelo item (i) da Definição 3.1.}$$

Então,

$$T(u) + T(-u) = \vec{0}_v \Rightarrow T(-u) = \vec{0}_v - T(u) \Rightarrow T(-u) = -T(u).$$

(iii) Pela linearidade de T e pelo item (ii), temos:

$$T(u - v) = T(u) + T(-v) = T(u) - T(v).$$

■

Teorema 3.1. *Sejam U e V espaços vetoriais e $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base de U . Dada $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V , existe uma única transformação linear $T : U \rightarrow V$ tal que $T(u_i) = v_i$, com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Demonstração:

Sejam $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bases de U e V , respectivamente, e seja $u \in U$. Vamos definir $T : U \rightarrow V$ tal que:

$$T(u) = T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Provaremos que esta função é uma transformação linear. Para isso, sejam $a, b \in U$. Sabemos que:

$$a = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \quad \text{e} \quad b = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n, \quad \text{com } \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n.$$

Além disso,

$$a + b = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) u_i.$$

Então,

$$T(a + b) = T\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) u_i\right) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = T(a) + T(b).$$

De modo análoga, temos:

$$\begin{aligned} T(\lambda a) &= T(\lambda(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n)) = T(\lambda \alpha_1 u_1 + \lambda \alpha_2 u_2 + \dots + \lambda \alpha_n u_n) \\ &= \lambda \alpha_1 v_1 + \lambda \alpha_2 v_2 + \dots + \lambda \alpha_n v_n = \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \lambda T(a). \end{aligned}$$

Donde concluímos que esta função é uma transformação linear. Verifiquemos sua unicidade.

Seja $T' : U \rightarrow V$ uma outra transformação linear de forma que para cada $u \in U$ tem-se $T'(u) = v$, com $v \in V$. Então, seja $a \in U$,

$$T'(a) = T'(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) = T'\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i T'(u_i)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = T(a).$$

Logo $T \equiv T'$. ■

Exemplo 3.4. Vamos encontrar a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(1, 0) = (2, -1, 0) \quad \text{e} \quad T(0, 1) = (0, 0, 1). \quad (3.1)$$

Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, como $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é base do \mathbb{R}^2 , temos que:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1). \quad (3.2)$$

Aplicando a transformação T e usando sua linearidade, em ambos os lados da equação (3.2), obtemos:

$$T(x, y) = T(x(1, 0) + y(0, 1)) = xT((1, 0)) + yT((0, 1)).$$

Ainda, utilizando os itens (i) e (ii) da Definição 3.1,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= xT((1, 0)) + yT((0, 1)) = x(2, -1, 0) + y(0, 0, 1) \\ &= (2x, -x, 0) + (0, 0, y) = (2x, -x, y). \end{aligned}$$

Então, a transformação procurada é $T(x, y) = (2x, -x, y)$.

Definição 3.2. Seja $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear, com $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ bases de U e V , respectivamente. Como B é uma base de V , pelo Teorema 3.1, podemos determinar, de modo único escalares α_{ij} , com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, tais que:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \dots + \alpha_{m1}v_m \\ T(u_2) &= \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \dots + \alpha_{m2}v_m \\ &\vdots \\ T(u_j) &= \alpha_{1j}v_1 + \alpha_{2j}v_2 + \dots + \alpha_{mj}v_m. \end{aligned}$$

A matriz relativa a T nas bases A e B é dada por:

$$[T]_B^A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.5. Vamos determinar a matriz relativa a T às bases canônicas, onde a transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por:

$$T(x, y, z) = (x - 2y, 2x + 3y - z)$$

Sabemos que as bases canônicas do \mathbb{R}^3 e do \mathbb{R}^2 são, respectivamente:

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \text{ e } B' = \{(1, 0), (0, 1)\}.$$

Aplicando a transformação T nos vetores de B :

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (1 - 2 \cdot 0, 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 0) \\ &= (1, 2) \\ &= 1(1, 0) + 2(0, 1). \\ T(0, 1, 0) &= (0 - 2 \cdot 1, 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 0) \\ &= (-2, 3) \\ &= -2(1, 0) + 3(0, 1). \\ T(0, 0, 1) &= (0 - 2 \cdot 0, 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 1) \\ &= (0, -1) \\ &= 0(1, 0) - 1(0, 1). \end{aligned}$$

Daí,

$$[T]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.1.1 Imagem e Núcleo

Definição 3.3. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. A **imagem de T** , $Im(T)$, é o conjunto dos vetores $w \in W$, tais que existe um vetor $v \in V$, que satisfaz $T(v) = w$. Ou seja,

$$Im(T) = \{w \in W; T(v) = w, \text{ para algum } v \in V\}.$$

Observe que $Im(T)$ é subconjunto de W e, além disso, é subespaço vetorial de W .

Definição 3.4. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = \vec{0}$ é chamado de **núcleo de T** , sendo denotado por $ker(T)$. Isto é:

$$ker(T) = \{v \in V; T(v) = \vec{0}\}.$$

Observe que $ker(T)$ é subconjunto de V e, além disso, é subespaço vetorial de V .

Exemplo 3.6. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$. Então,

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(x, 2y, 0), x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0) + y(0, 2, 0), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1, 0, 0), (0, 2, 0)]. \end{aligned}$$

Note que $\dim Im(T) = 2$.

O núcleo de T é:

$$\begin{aligned} ker(T) &= \{(x, y, z); T(x, y, z) = \vec{0}\} = \{(x, y, z); (x, 2y, 0) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\} = \{z(0, 0, 1); z \in \mathbb{R}\} \\ &= [(0, 0, 1)]. \end{aligned}$$

Observe que $\dim ker(T) = 1$.

Definição 3.5. Dada uma transformação linear $T : V \rightarrow W$, dizemos que T é **injetora** se dados $u, v \in V$ com $T(u) = T(v)$, tivermos $u = v$. Ou, de maneira equivalente, T é injetora se dados $u, v \in V$ com $u \neq v$, então $T(u) \neq T(v)$.

Definição 3.6. A transformação linear $T : V \rightarrow W$ será **sobrejetora** se a imagem de T coincidir com W , ou seja, $T(V) = W$.

Teorema 3.2. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então $ker(T) = \{\vec{0}\}$ se, e somente se, T é injetora.

Demonstração:

\Rightarrow)

Suponhamos que $\ker(T) = \{\vec{0}\}$. Sejam $u, v \in V$ tais que $T(u) = T(v)$. Então:

$$T(u) - T(v) = \vec{0} \Rightarrow T(u - v) = \vec{0}.$$

Donde concluímos que $u - v \in \ker(T)$. Mas, por hipótese o único elemento do núcleo é o $\vec{0}$. Então:

$$u - v = \vec{0} \Rightarrow u = v.$$

Logo, T é injetora.

\Leftarrow)

Suponha que T é injetora. Seja $v \in \ker(T)$, então $T(v) = \vec{0}$. Pelo item (i) da Proposição 3.1 sabemos que $T(\vec{0}) = \vec{0}$, então $T(v) = T(\vec{0})$. Como T é injetora, obtemos $v = \vec{0}$.

Logo, o único elemento do núcleo é $\vec{0}$, ou seja, $\ker(T) = \{\vec{0}\}$. ■

Teorema 3.3. (Teorema do Núcleo e da Imagem) *Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então :*

$$\dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim V.$$

Demonstração: Considere $B_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base do $\ker(T)$. Como $\ker(T) \subset V$ é subespaço de V , pelo Teorema 2.4, podemos completar B_1 de modo a obter uma base de V .

Seja $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_m\}$ a base de V .

Queremos demonstrar que $B_3 = \{T(w_1), T(w_2), \dots, T(w_m)\}$ é uma base da $\operatorname{Im}(T)$, ou seja:

- (i) Dado $w \in \operatorname{Im}(T)$, existe $u \in V$ tal que $T(u) = w$. Se $u \in V$, então u pode ser escrito como combinação linear dos vetores de B_2 ,

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_m w_m.$$

Mas,

$$\begin{aligned} w &= T(u) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_m w_m) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) + \beta_1 T(w_1) + \beta_2 T(w_2) + \dots + \beta_m T(w_m). \end{aligned}$$

Como os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in \ker(T)$, então $T(v_i) = \vec{0}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Assim:

$$w = \beta_1 T(w_1) + \beta_2 T(w_2) + \dots + \beta_m T(w_m).$$

Logo, $[T(w_1), T(w_2), \dots, T(w_m)] = \text{Im}(T)$.

(ii) Consideremos agora a combinação linear:

$$\alpha_1 T(w_1) + \alpha_2 T(w_2) + \dots + \alpha_m T(w_m) = \vec{0} \quad (3.3)$$

e mostremos que os α_i , com $i = 1, 2, \dots, m$, são nulos.

Ora, como T é linear, por (3.3), temos que:

$$T(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m) = \vec{0}.$$

Então $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m \in \ker(T)$ e pode ser escrito como combinação linear dos vetores de B_1 , ou seja, existem $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ de modo que:

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n.$$

Ou ainda,

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m - \beta_1 v_1 - \beta_2 v_2 - \dots - \beta_n v_n = \vec{0}$$

E como $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_m\}$ é base de V , então

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \beta_1 = \dots = \beta_n = 0$$

Logo, B_3 é LI.

Por fim, $\dim \ker(T) = n$, $\dim \text{Im}(T) = m$ e $\dim V = m + n$, então:

$$\dim \ker(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim V$$

■

Exemplo 3.7. No Exemplo 3.6, estudamos a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$ e encontramos $\text{Im}(T) = 2$ e $\ker(T) = 1$. Vejamos,

$$\text{Im}(T) + \ker(T) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

Satisfazendo o Teorema do Núcleo e da Imagem.

Definição 3.7. Dizemos que uma transformação linear $T : U \rightarrow V$ é **isomorfismo** quando ela for bijetora. No caso em que $U = V$ dizemos que T é **automorfismo**.

3.1.2 Autovalores e Autovetores

Definição 3.8. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se existirem $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, e $\lambda \in \mathbb{R}$, tais que

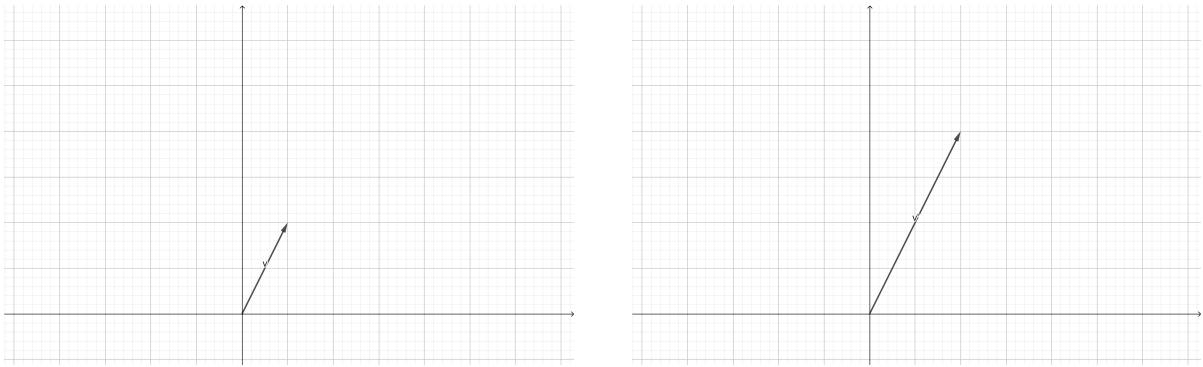
$$T(v) = \lambda v,$$

dizemos que λ é um **autovalor de T** e v é chamado de **autovetor de T associado a λ** .

Exemplo 3.8. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(v) = 2v$. Nesse caso, 2 é um autovalor de T e qualquer $v \neq \vec{0}$ é um autovetor de T associado ao autovalor 2.

Podemos observar geometricamente na Figura 1:

Figura 1 – $T(v) = 2v$



Fonte: Do Autor, 2022.

De um modo geral, todo operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ do tipo $T(v) = \alpha v$, $\alpha \neq 0$, tem α como autovalor e qualquer $v \neq \vec{0}$ como autovetor correspondente.

Exemplo 3.9. Dado o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (y, x)$, temos que $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-1, -1)$ são autovetores de T , pois:

$$T(1, 1) = 1 \cdot (1, 1) \quad \text{e} \quad T(-1, -1) = 1 \cdot (-1, -1).$$

Para cada um desses autovetores temos o autovalor $\lambda = 1$ associado a v_1 e v_2 .

Observação 3.1. Seja $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$, $V_\lambda \subset V$. Note que V_λ é subespaço de V .

De fato,

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \{v \in V : T(v) = \lambda v\} \\ &= \{v \in V : T(v) - \lambda v = \vec{0}\} \\ &= \{v \in V : T(v) - \lambda I(v) = \vec{0}\} \\ &= \{v \in V : (T - \lambda I)(v) = \vec{0}\} \\ &= \ker(T - \lambda I), \end{aligned}$$

que é subespaço de V .

Definição 3.9. O subespaço $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ é chamado de **subespaço associado ao autovalor λ** .

3.1.3 Subespaços Invariantes

Definição 3.10. Dizemos que um subespaço $F \subset V$ é **invariante** pelo operador linear $T : V \rightarrow V$ quando $T(F) \subset F$. Ou seja, dado um $v \in F$ então $T(v) \in F$, ou ainda, $Im(T)|_F \subset F$.

Exemplo 3.10. Os subespaços triviais, a $Im(T)$ e o $ker(T)$ são invariantes por qualquer operador linear $T : V \rightarrow V$. Vejamos:

- (i) Se $F = \{\vec{0}\}$. Note que, $T(\vec{0}) = \vec{0} \in F$.
- (ii) Se $F = V$. Seja $v \in V$, notemos que $T(v) \in V$ e como $F = V$, então $T(v) \in F$.
- (iii) Se $F = ker(T)$. Seja $v \in ker(T)$, então $T(v) = \vec{0}$. Por outro lado $T(\vec{0}) = \vec{0} \in ker(T)$, logo $T(v) \in ker(T)$.
- (iv) Se $F = Im(T)$. Seja $v \in Im(T)$, sabemos que $v \in V$ então $T(v) \in Im(T)$.

Exemplo 3.11. O subespaço associado ao autovalor λ , $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ é um subespaço invariante.

De fato, seja $v \in V_\lambda$, então $T(v) = \lambda v$.

Como V_λ é subespaço e $v \in V$, então $\lambda v \in V_\lambda$. Logo, V_λ é um subespaço invariante.

Observação 3.2. *Pelo Exemplo 3.11, podemos observar que achar um autovetor ou, equivalentemente, um autovalor de um operador linear T é o mesmo que achar um subespaço de dimensão 1 invariante por T .*

3.1.4 Polinômio Característico

Definição 3.11. Dada $A \in M_{m \times n}$ definimos o **polinômio característico de A** , como sendo:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

onde I é a matriz identidade de ordem n .

Definição 3.12. Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear, com $\dim V = n$, B uma base de V e $[T]_B^B$ a matriz relativa a T na base B . Definimos **polinômio característico de T** como sendo:

$$p_T(\lambda) = p_{[T]_B^B}(\lambda).$$

De acordo com Boldrini (1980, p. 193), independente da base que escolhermos para o espaço vetorial, o polinômio característico será o mesmo.

Proposição 3.2. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, B uma base de V e T um operador linear. Então λ é um autovalor de T se, e somente se, $p_T(\lambda) = 0$. Ou seja, os autovetores de T são as raízes de seu polinômio característico.*

Prova:

\Rightarrow)

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear e λ um autovalor de T . Então, existe um $v \neq \vec{0}$ tal que $T(v) = \lambda v$. Note que

$$T(v) = \lambda v \Rightarrow \vec{0} = T(v) - \lambda v = T(v) - \lambda I(v).$$

Onde

$$(T - \lambda I)(v) = \vec{0} \Rightarrow v \in \ker(T - \lambda I) \Rightarrow \ker(T - \lambda I) \neq \{\vec{0}\}.$$

Então, pelo Teorema 3.2, $T - \lambda I : V \rightarrow V$ não é injetora, e, conseqüentemente, não é invertível. Donde concluímos que, sendo B uma base para V ,

$$p_T(\lambda) = \det([T]_B^B - \lambda I) = 0.$$

\Leftarrow)

Se $p_T(\lambda) = 0$, então o $\det([T]_B^B - \lambda I) = 0$. Isso implica que $T - \lambda I : V \rightarrow V$ não é invertível, ou seja, não é injetora. Logo, concluímos que existe $v \neq \vec{0}$, tal que:

$$\vec{0} = (T - \lambda I)(v) = T(v) - \lambda I(v) = T(v) - \lambda v \Rightarrow T(v) = \lambda v.$$

Ou seja, λ é um autovalor de T . ■

Exemplo 3.12. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y).$$

Vamos utilizar o polinômio característico para descobrir os autolavores e autovetores de T . Utilizemos a base canônica do \mathbb{R}^2 , $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, para encontrar $[T]_B^B$. Vejamos:

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= (-3, -1) = -3(1, 0) - 1(0, 1) \\ T(0, 1) &= (4, 2) = 4(1, 0) + 2(0, 1). \end{aligned}$$

Com isso,

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, o polinômio característico de T será:

$$\begin{aligned}
 p_T(\lambda) &= \det([T]_B^B - \lambda I) \\
 &= \det\left(\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
 &= \det\begin{pmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \\
 &= (-3 - \lambda)(2 - \lambda) + 4 \\
 &= \lambda^2 + \lambda - 2.
 \end{aligned}$$

Os autovalores de T serão as raízes do polinômio $p_T(\lambda)$, vejamos:

$$p_T(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = 1.$$

Agora, basta encontrar os autovetores associados a esses autovalores. Tomemos um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, daí:

(i) Para $\lambda = -2$, como $T(x, y) = \lambda(x, y)$, temos:

$$(-3x + 4y, -x + 2y) = -2(x, y) = (-2x, -2y).$$

Donde obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -3x + 4y = -2x \\ -x + 2y = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4y.$$

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -2$ serão os vetores da forma $v = (4y, y)$, com $y \neq 0$. O subespaço associado ao autovalor -2 é

$$V_{-2} = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = (4y, y), y \neq 0\}.$$

(ii) Para $\lambda = 1$, como $T(x, y) = \lambda(x, y)$, temos:

$$(-3x + 4y, -x + 2y) = 1(x, y) = (x, y)$$

Donde obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -3x + 4y = x \\ -x + 2y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y.$$

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 1$ serão os vetores da forma $v = (x, x)$, com $x \neq 0$. O subespaço associado ao autovalor 1 é

$$V_1 = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = (x, x), x \neq 0\}.$$

Exemplo 3.13. Podemos calcular também os autovetores associados a uma matriz, seja ela

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar os autovalores e autovetores de A , utilizamos

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

onde $I \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ é a matriz identidade. Vejamos:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + \lambda) \end{pmatrix} \\ &= (\lambda + 1)^2(-\lambda + 3). \end{aligned}$$

Assim, os autovalores de A serão as raízes do polinômio característico $p(\lambda)$, vejamos:

$$p(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda + 1)^2(-\lambda + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 3.$$

Onde $\lambda = -1$ é uma raiz com multiplicidade 2. Agora, vamos encontrar os autovetores associados a esses autovalores. Seja $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ um autovetor arbitrário, temos:

(i) Para $\lambda = -1$:

$$A \cdot v = -1 \cdot v \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a - 2b \\ -2a + b \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}.$$

De onde obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a - 2b = -a \\ -2a + b = -b \\ -c = -c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 2b = 0 \\ -2a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b.$$

Então, os autovetores associados a $\lambda = -1$ são os da forma $\begin{pmatrix} a \\ a \\ c \end{pmatrix}$. Além disso,

$$v = \begin{pmatrix} a \\ a \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde concluímos que $V_{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$.

(ii) Para $\lambda = 3$:

$$A \cdot v = 3 \cdot v \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a - 2b \\ -2a + b \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \\ 3c \end{pmatrix}.$$

De onde obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a - 2b = 3a \\ -2a + b = 3b \\ -c = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 2b = 0 \\ -2a - 2b = 0 \\ 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -b \text{ e } c = 0.$$

Então, os autovetores associados a $\lambda = 3$ são os da forma $\begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$. Além disso,

$$v = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde concluímos que $V_3 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$.

Teorema 3.4. *Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.*

Demonstração:

Provemos para o caso de dois autovalores distintos.

Sejam λ_1, λ_2 autovalores distintos de T , e v_1, v_2 autovetores associados a λ_1, λ_2 respectivamente. Queremos provar que v_1 e v_2 são LI.

Para isso, considere a equação:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \vec{0}. \quad (3.4)$$

Aplicamos a esta equação a transformação $T - \lambda_2 I$. Usando a linearidade de T e lembrando que $T(v_i) = \lambda_i v_i$ e $I(v_i) = v_i$, para $i = 1, 2$, temos:

$$\begin{aligned} (T - \lambda_2 I)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= (T - \lambda_2 I)(\vec{0}) \\ \Rightarrow (T - \lambda_2 I)(\alpha_1 v_1) + (T - \lambda_2 I)(\alpha_2 v_2) &= \vec{0} - \lambda_2 \vec{0} \\ \Rightarrow \lambda_1 \alpha_1 v_1 - \lambda_2 \alpha_1 v_1 + \lambda_2 \alpha_2 v_2 - \lambda_2 \alpha_2 v_2 &= \vec{0} \\ \Rightarrow \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2) v_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_2) v_2 &= \vec{0} \\ \Rightarrow \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2) v_1 &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Como $v_1 \neq \vec{0}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\alpha_1 = 0$.

De maneira análoga, vamos aplicar a transformação $T - \lambda_1 I$ na equação (3.4), obtendo:

$$\begin{aligned} (T - \lambda_1 I)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= (T - \lambda_1 I)(\vec{0}) \\ \Rightarrow \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Então $\alpha_2 = 0$. Portanto, v_1, v_2 são LI.

Para $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ autovalores distintos, a demonstração é feita de maneira análoga. Partindo da igualdade:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0},$$

aplicamos $T - \lambda_i I$ para mostrar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. ■

Corolário 3.0.1. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se $\dim V = n$ e T possui n autovalores distintos, então V possui uma base formada de autovetores de T .*

Prova:

Pelo Teorema 3.4, existe um conjunto de autovetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de T linearmente independentes. Além disso, $\dim [\{v_1, v_2, \dots, v_n\}] = n = \dim V$, então, pela Proposição 2.6, $[\{v_1, v_2, \dots, v_n\}] = V$.

Logo, concluímos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base para V . ■

Proposição 3.3. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear que admite uma base B . A matriz $[T]_B^B$ é diagonal se, e somente se, B for formada por autovetores de T .*

Prova:

\Rightarrow)

Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V , tal que:

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Note que, pela definição de $[T]_B^B$, temos:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \alpha_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n &\Rightarrow & T(v_1) = \alpha_1 v_1 \\ T(v_2) &= 0v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + 0v_n &\Rightarrow & T(v_2) = \alpha_2 v_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ T(v_n) &= 0v_1 + 0v_2 + \dots + \alpha_n v_n &\Rightarrow & T(v_n) = \alpha_n v_n. \end{aligned}$$

Donde concluímos que v_1, v_2, \dots, v_n são necessariamente autovetores de T com autovalores $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, respectivamente.

\Leftarrow)

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, e seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V formada por autovetores de T . Então:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \alpha_1 v_1 &\Rightarrow & T(v_1) = \alpha_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ T(v_2) &= \alpha_2 v_2 &\Rightarrow & T(v_2) = 0v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + 0v_n \\ \vdots & & & \vdots \\ T(v_n) &= \alpha_n v_n &\Rightarrow & T(v_n) = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \alpha_n v_n. \end{aligned}$$

Logo, a matriz $[T]_B^B$ será dada por:

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Donde concluímos que $[T]_B^B$ é uma matriz diagonal. ■

Diremos que um operador linear é *diagonalizável* quando, a partir dele, pudermos obter uma base formada por autovetores para o espaço vetorial no qual ele está definido, como nos diz a definição a seguir.

Definição 3.13. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que T é um **operador diagonalizável** se existe uma base de V cujos elementos são autovetores de T .

Exemplo 3.14. No Exemplo 3.12, para o operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y),$$

encontramos o subespaço $V_{-2} = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = (4y, y), \quad y \neq 0\} = [(4, 1)]$ associado ao autovalor -2 e $V_1 = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = (x, x), \quad x \neq 0\} = [(1, 1)]$ associado ao autovalor 1 .

Considerando $B = \{(4, 1), (1, 1)\}$ como base para \mathbb{R}^2 , temos:

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $[T]_B^B$ é uma matriz diagonal, pela Proposição 3.3 concluímos que T é um operador diagonalizável.

3.2 Produto Interno e Norma

Uma aplicação que associa um par de vetores de um espaço vetorial a número real, é chamada de *produto interno*.

Definição 3.14. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Um **produto interno** sobre V é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada par $(u, v) \in V \times V$ associa um número real denotado por $\langle u, v \rangle$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \quad \forall u, v, w \in V;$
- (ii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in V \text{ e } \alpha \in \mathbb{R};$
- (iii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \quad \forall u, v \in V;$
- (iv) Se $u \neq \vec{0}$ então $\langle u, u \rangle > 0;$
- (v) $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}.$

Definição 3.15. O espaço vetorial V munido de um produto interno é chamado de **espaço euclidiano**.

Observação 3.3. Podemos destacar algumas propriedades de produto interno que seguem imediatamente da Definição 3.14.

(a) $\langle \vec{0}, u \rangle = 0, \forall u \in V$. De fato:

$$\begin{aligned} \langle \vec{0}, u \rangle &= \langle \vec{0} + \vec{0}, u \rangle \stackrel{\text{item (i)}}{=} \langle \vec{0}, u \rangle + \langle \vec{0}, u \rangle \\ \Rightarrow \langle \vec{0}, u \rangle - \langle \vec{0}, u \rangle &= \langle \vec{0}, u \rangle + \langle \vec{0}, u \rangle - \langle \vec{0}, u \rangle \\ \Rightarrow \langle \vec{0}, u \rangle &= 0. \end{aligned}$$

(b) $\langle u, v + \alpha w \rangle = \langle u, v \rangle + \alpha \langle u, w \rangle, \forall u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Pela Definição 3.14, temos

$$\begin{aligned} \langle u, v + \alpha w \rangle &\stackrel{\text{item (iii)}}{=} \langle v + \alpha w, u \rangle \\ &\stackrel{\text{item (i)}}{=} \langle v, u \rangle + \langle \alpha w, u \rangle \\ &\stackrel{\text{item (iii)}}{=} \langle u, v \rangle + \langle u, \alpha w \rangle \\ &\stackrel{\text{item (ii)}}{=} \langle u, v \rangle + \alpha \langle u, w \rangle. \end{aligned}$$

Exemplo 3.15. Se $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, vamos verificar se

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

é produto interno.

Sejam $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

(i)

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= \langle (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle \\ &= (x_1 + y_1)z_1 + \dots + (x_n + y_n)z_n \\ &= (x_1 z_1 + \dots + x_n z_n) + (y_1 z_1 + \dots + y_n z_n) \\ &= \langle (x_1, \dots, x_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle + \langle (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle \\ &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \langle \alpha x, y \rangle &= \langle \alpha(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle \\ &= \langle (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle \\ &= \alpha x_1 y_1 + \dots + \alpha x_n y_n \\ &= \alpha(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) \\ &= \alpha \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle \\ &= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \\ &= y_1 x_1 + \dots + y_n x_n \\ &= \langle y, x \rangle. \end{aligned}$$

(iv) Seja $x = (x_1, \dots, x_n) \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle x, x \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle = x_1x_1 + \dots + x_nx_n = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Note que $\langle x, x \rangle \geq 0$ e, como $x \neq \vec{0}$, então existe $x_i \neq 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Logo $\langle x, x \rangle > 0$.

(v) Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Queremos provar que $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$.
 \Rightarrow)

Suponha que $\langle x, x \rangle = 0$. Sabemos que,

$$\langle x, x \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle = x_1x_1 + \dots + x_nx_n = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0.$$

O que só é possível se $x_1 = \dots = x_n = 0$. Logo $x = \vec{0}$

\Leftarrow)

Agora seja $x = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$. Então:

$$\langle x, x \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle = x_1x_1 + \dots + x_nx_n = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0^2 + \dots + 0^2 = 0.$$

Este produto interno é chamado de **produto interno canônico do \mathbb{R}^n** .

Podemos calcular o *comprimento* de um vetor, utilizando o produto interno, através da *norma*.

Definição 3.16. Seja V um espaço vetorial euclidiano. Definimos a **norma** (ou comprimento) de um vetor de $v \in V$ em relação a seu produto interno como sendo:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Se $\|v\| = 1$, isto é, $\langle v, v \rangle = 1$, v é chamado de **vetor unitário**, e, neste caso, dizemos que v está **normalizado**.

Observação 3.4. Seja V um espaço vetorial euclidiano. Note que o vetor $v \in V$ pode ser normalizado, tomando $u = \frac{v}{\|v\|}$.

Proposição 3.4. Seja V um espaço euclidiano. Para quaisquer $v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

(i) $\|v\| \geq 0$;

(ii) $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = \vec{0}$;

(iii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$;

(iv) $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ (*Desigualdade de Schwarz*);

(v) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (*Desigualdade triangular*).

Prova:

(i) Pela Definição 3.14, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$.

(ii) (\Rightarrow)

Suponha que $\|v\| = 0$, então $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle = 0$. Pelo item (v) da Definição 3.14, temos que $v = \vec{0}$.

(\Leftarrow)

Suponha que $v = \vec{0}$, pela Definição de Produto Interno, temos que $\langle v, v \rangle = 0$. Então:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{0} = 0.$$

(iii)

$$\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\alpha| \|v\|, \quad (3.5)$$

a segunda igualdade é justificada pelo item (ii) da Definição 3.14.

(iv) Se $v = \vec{0}$, pelo item (a) da Observação 3.3, temos que:

$$|\langle v, w \rangle| = |\langle \vec{0}, w \rangle| = 0. \quad (3.6)$$

Por outro lado, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = 0$.

Dessa forma,

$$\|v\| \|w\| = 0 \cdot \|w\| = 0. \quad (3.7)$$

De (3.6) e (3.7), concluímos

$$|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|. \quad (3.8)$$

Se $v \neq \vec{0}$, sabemos que $\langle v, v \rangle > 0$. Além disso, seja $t \in \mathbb{R}$, $\langle tv + w, tv + w \rangle \geq 0$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle tv + w, tv + w \rangle &= \langle tv, tv + w \rangle + \langle w, tv + w \rangle \\ &= \langle tv, tv \rangle + \langle tv, w \rangle + \langle w, tv \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= t^2 \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle t + \langle w, w \rangle. \end{aligned}$$

Assim, chegamos em uma inequação de 2º grau, que deve ser não negativa para qualquer valor de t . Além disso, como o coeficiente $\langle v, v \rangle$ de t^2 é sempre positivo,

logo a concavidade da parábola que representa o trinômio dessa inequação é voltada para cima, então o discriminante deve ser não positivo:

$$\Delta = 4\langle v, w \rangle^2 - 4\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \leq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 4\langle v, w \rangle^2 - 4\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \leq 0 &\Rightarrow 4\langle v, w \rangle^2 \leq 4\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \\ &\Rightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \\ &\Rightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 \\ &\Rightarrow |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pelas expressões (3.8) e (3.9), concluímos que $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$.

(v) Note que,

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2. \quad (3.10)$$

Pela desigualdade de Schwarz, provada no item (iv), sabemos que

$$\langle v, w \rangle \leq \|v\| \|w\|. \quad (3.11)$$

Substituindo 3.11 em 3.10, obtemos:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 \\ \Rightarrow \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\|. \end{aligned}$$

■

3.2.1 Complemento Ortogonal

Quando o produto interno entre dois vetores resultar em 0, diremos que esses vetores são *ortogonais* ou *perpendiculares*. O conjunto de todos os vetores ortogonais de um espaço vetorial será chamado de *complemento ortogonal*.

Definição 3.17. Seja V um espaço euclidiano. Dois vetores $u, v \in V$ chamam-se **ortogonais** ou **perpendiculares** quando $\langle u, v \rangle = \vec{0}$. Denota-se $u \perp v$.

Definição 3.18. Seja V um espaço euclidiano e $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V . Chamamos B de **base ortonormal de V** se:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}.$$

Proposição 3.5. Seja $S = \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ um subconjunto ortonormal do espaço euclidiano V . Então, o vetor

$$v = u - \langle u, g_1 \rangle g_1 - \dots - \langle u, g_r \rangle g_r, \quad \forall u \in V$$

é ortogonal a todo vetor do subespaço gerado pelos vetores de S .

Prova:

Seja $w \in [S]$, $w = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_r g_r$, e $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, então, por Definição:

$$\langle v, w \rangle = \langle v, \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_r g_r \rangle = \alpha_1 \langle v, g_1 \rangle + \dots + \alpha_r \langle v, g_r \rangle. \quad (3.12)$$

Sabemos que S é um subconjunto ortonormal, logo

$$\langle g_i, g_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}. \quad (3.13)$$

Podemos afirmar que $v \perp g_i$, com $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. De fato, utilizando (3.13), para $i = 1$:

$$\begin{aligned} \langle v, g_1 \rangle &= \langle (u - \langle u, g_1 \rangle g_1 - \dots - \langle u, g_r \rangle g_r), g_1 \rangle \\ &= \langle u, g_1 \rangle - \langle u, g_1 \rangle \langle g_1, g_1 \rangle - \langle u, g_2 \rangle \langle g_2, g_1 \rangle - \dots - \langle u, g_r \rangle \langle g_r, g_1 \rangle \\ &= \langle u, g_1 \rangle - \langle u, g_1 \rangle \cdot 1 - \langle u, g_2 \rangle \cdot 0 - \dots - \langle u, g_r \rangle \cdot 0 \\ &= \langle u, g_1 \rangle - \langle u, g_1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Donde concluímos que $v \perp g_1$. De maneira análoga, repetindo esses processo com $i = 2, 3, \dots, n$, podemos provar que

$$\langle v, g_2 \rangle = \dots = \langle v, g_r \rangle = 0. \quad (3.14)$$

Substituindo (3.14) na Equação (3.12), temos:

$$\langle v, w \rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_r \cdot 0 = 0.$$

Logo, $v \perp w$. ■

Definição 3.19. Seja V um espaço euclidiano e U um subespaço de V . O conjunto

$$U^\perp = \{v \in V; \langle u, v \rangle = 0, \forall u \in U\}$$

é chamado de **complemento ortogonal de U** .

Proposição 3.6. *Seja V um espaço euclidiano e U um subespaço de V . U^\perp é subespaço vetorial de V .*

Prova:

(i) Pela Observação 3.3 sabemos que $\vec{0} \in U^\perp$, pois

$$\langle \vec{0}, u \rangle = 0, \forall u \in U.$$

(ii) Sejam $v, w \in U^\perp$, sabemos que $\langle v, u \rangle = \langle w, u \rangle = 0$. Daí,

$$\langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Logo $v + w \in U^\perp$.

(iii) Sejam $v \in U^\perp$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, como $\langle v, u \rangle = 0$, então:

$$\langle \alpha v, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Logo, $\alpha v \in U^\perp$.

Dos itens (i)-(iii), concluímos que U^\perp é subespaço de V . ■

Teorema 3.5. *Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita e U um subespaço vetorial de V . Então, $V = U \oplus U^\perp$.*

Demonstração: Sabemos que $U + U^\perp$ é um subespaço de V e, pela definição de subespaço $U + U^\perp \subset V$.

Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de U . Pela Proposição 3.5, dado $u \in V$, o vetor

$$v = u - \langle u, v_1 \rangle v_1 - \dots - \langle u, v_n \rangle v_n,$$

é ortogonal a todo vetor de U , ou seja, $v \in U^\perp$. Além disso, notemos que

$$v = u - \langle u, v_1 \rangle v_1 - \dots - \langle u, v_n \rangle v_n \Rightarrow u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n + v.$$

Assim $u \in U + U^\perp$, pois a soma das n primeiras parcelas de u pertencem a U e v pertence a U^\perp . Com isso, $V \subset U + U^\perp$. Donde concluímos que $V = U + U^\perp$.

Provemos agora que $U + U^\perp$ é soma direta de U com U^\perp , ou seja, $U \cap U^\perp = \{0\}$.

Tomando $w \in U \cap U^\perp$, temos $w \in U^\perp$. Então, w é ortogonal a todo vetor de U , em particular,

$$\langle w, w \rangle = 0.$$

E, pelo item (v) da Definição 3.14, concluímos que $w = \vec{0}$.

Logo, $U \oplus U^\perp = \{ \vec{0} \}$. E portanto $V = U \oplus U^\perp$. ■

Proposição 3.7. *Sejam U e W subespaços não nulos de um espaço vetorial V , tais que $V = U \oplus W$. Sejam B_1 e B_2 bases de U e W , respectivamente, ambas formadas por autovetores de V . Então, $B_1 \cup B_2$ é base para V .*

Demonstração:

De fato, como $V = U \oplus W$, temos que para todo $v \in V$, existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que:

$$v = u + w$$

Por outro lado, sejam $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_{n-p}\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$, então:

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-p} u_{n-p} \quad \text{e} \quad w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_p w_p.$$

Assim,

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-p} u_{n-p} + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_p w_p.$$

Logo, $v \in [B_1 \cup B_2]$, conseqüentemente, $V = [B_1 \cup B_2]$.

Uma vez que B_1 e B_2 são formadas por autovetores de V , pelo Teorema 3.4, obtemos que $B_1 \cup B_2$ é LI. Isto é $B_1 \cup B_2$ é base de V . ■

4 TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES AUTOADJUNTOS

Nossos estudos agora se voltarão para um tipo especial de operador linear, chamado de *operador autoadjunto*. Dentre os resultados relativos a este tipo de operador, destaca-se o *Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos*, que é de grande importância por garantir a existência de uma base ortonormal de autovetores, cujos vetores são todos ortogonais e unitários.

4.1 Operadores Autoadjuntos

Definição 4.1. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Chamamos $T^* : V \rightarrow V$ de **adjunto de T** , se satisfaz

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle, \quad \forall u, v \in V.$$

Exemplo 4.1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear dado por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Sejam $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e consideremos o produto interno canônico:

$$\langle u, v \rangle = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Sabemos que

$$T(u) = (ax_1 + by_1, cx_1 + dy_1).$$

Daí, o adjunto de T é dado por

$$\begin{aligned} \langle T(u), v \rangle &= (ax_1 + by_1)x_2 + (cx_1 + dy_1)y_2 = ax_1x_2 + by_1x_2 + cx_1y_2 + dy_1y_2 \\ &= ax_1x_2 + cx_1y_2 + by_1x_2 + dy_1y_2 = x_1(ax_2 + cy_2) + y_1(bx_2 + dy_2) \\ &= \langle (x_1, y_1), (ax_2 + cy_2, bx_2 + dy_2) \rangle. \end{aligned}$$

Donde concluímos que $T^*(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$.

Teorema 4.1. *Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear, onde V é um espaço euclidiano de dimensão finita. Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de V . Então*

$$[T^*]_B = ([T]_B)^t.$$

Demonstração: Seja $[T]_B = (\alpha_{ij})$. Sabemos que

$$T(v_j) = \alpha_{1j}v_1 + \alpha_{2j}v_2 + \dots + \alpha_{ij}v_i + \dots + \alpha_{nj}v_n, \quad \text{com } \alpha_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

dessa forma:

$$\begin{aligned} \langle T(v_j), v_i \rangle &= \langle \alpha_{1j}v_1 + \alpha_{2j}v_2 + \dots + \alpha_{ij}v_i + \dots + \alpha_{nj}v_n, v_i \rangle \\ &= \alpha_{1j}\langle v_1, v_i \rangle + \alpha_{2j}\langle v_2, v_i \rangle + \dots + \alpha_{ij}\langle v_i, v_i \rangle + \dots + \alpha_{nj}\langle v_n, v_i \rangle. \end{aligned}$$

Como B é uma base ortonormal, pela Definição 3.18 temos

$$\begin{aligned}\langle T(v_j), v_i \rangle &= \alpha_{1j} \cdot 0 + \alpha_{2j} \cdot 0 + \dots + \alpha_{ij} \cdot 1 + \dots + \alpha_{nj} \cdot 0 \\ &= \alpha_{ij}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Assim, $\langle T(v_j), v_i \rangle = \alpha_{ij}$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Pela Definição de Adjunto e pela expressão (4.1)

$$\langle T^*(v_j), v_i \rangle = \langle v_j, T(v_i) \rangle = \langle T(v_i), v_j \rangle = \alpha_{ji},$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Logo, concluímos que $[T^*]_B = ([T]_B)^t$. ■

Definição 4.2. Seja V um espaço euclidiano e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que T é um **operador autoadjunto** se

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle, \quad \forall u, v \in V.$$

Exemplo 4.2. O operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x + 4y, 4x - y)$ é um operador autoadjunto. De fato, sejam $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, consideremos o produto interno canônico:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Vejam, as imagens de u e v pelo operador T são, respectivamente,

$$T(u) = (2x_1 + 4y_1, 4x_1 - y_1) \quad \text{e} \quad T(v) = (2x_2 + 4y_2, 4x_2 - y_2)$$

e

$$\begin{aligned}\langle T(u), v \rangle &= \langle (2x_1 + 4y_1, 4x_1 - y_1), (x_2, y_2) \rangle = (2x_1 + 4y_1)x_2 + (4x_1 - y_1)y_2 \\ &= 2x_1 x_2 + 4y_1 x_2 + 4x_1 y_2 - y_1 y_2.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle u, T(v) \rangle &= \langle (x_1, y_1), (2x_2 + 4y_2, 4x_2 - y_2) \rangle = x_1(2x_2 + 4y_2) + y_1(4x_2 - y_2) \\ &= 2x_1 x_2 + 4x_1 y_2 + 4y_1 x_2 - y_1 y_2.\end{aligned}$$

Donde concluímos que

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle.$$

Logo, T é um operador autoadjunto.

Teorema 4.2. *Se T é um operador autoadjunto e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ são autovalores distintos de T , então os autovetores correspondentes, v_1, v_2, \dots, v_m , são dois a dois ortogonais.*

Demonstração:

Para $i \neq j$ qualquer e pelo fato de T ser autoadjunto, temos

$$\begin{aligned} (\lambda_i - \lambda_j)\langle v_i, v_j \rangle &= \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle - \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle \\ &= \langle T(v_i), v_j \rangle - \langle v_i, T(v_j) \rangle, \text{ por ser auto-adjunto} \\ &= \langle T(v_i), v_j \rangle - \langle T(v_i), v_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

Como $\lambda_i \neq \lambda_j$ obtemos $(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$, desta forma $\langle v_i, v_j \rangle = 0$. Ou seja, v_i e v_j são ortogonais. ■

Definição 4.3. Seja $A(a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Dizemos que A é uma **matriz simétrica** quando $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$. Isto é, quando $A = A^t$.

Teorema 4.3. *Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. T é autoadjunto se, e somente se, $[T]_B$ é simétrica, onde B é uma base ortonormal de V .*

Demonstração:

\Rightarrow)

Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal do espaço vetorial V . Pelo Teorema 4.1, $[T^*]_B = ([T]_B)^t$. Como T é autoadjunto, então $[T]_B = [T^*]_B$. Logo,

$$[T]_B = [T^*]_B = ([T]_B)^t,$$

ou seja, $[T]_B$ é simétrica.

\Leftarrow)

Suponha que $[T]_B$ é simétrica, ou seja, $[T]_B = ([T]_B)^t$, onde $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V . Dessa forma,

$$\langle T(v_i), v_j \rangle = \langle T(v_j), v_i \rangle, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (4.2)$$

são as entradas das matrizes $[T]_B$ e $([T]_B)^t$, respectivamente.

Sejam $u, v \in V$, sabemos que $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, $v = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$. Com isso,

$$\begin{aligned} \langle u, T(v) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, T\left(\sum_{j=1}^n \beta_j v_j\right) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \left\langle \sum_{i=1}^n v_i, T\left(\sum_{j=1}^n v_j\right) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \left\langle T\left(\sum_{j=1}^n v_j\right), \sum_{i=1}^n v_i \right\rangle. \end{aligned}$$

A última igualdade sendo justificada por (4.2). Assim

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \langle T(\sum_{j=1}^n v_j), \sum_{i=1}^n v_i \rangle &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \langle T(\sum_{i=1}^n v_i), \sum_{j=1}^n v_j \rangle \\ &= \langle T(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i), \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \rangle \\ &= \langle T(u), v \rangle. \end{aligned}$$

Donde concluímos que T é autoadjunto. ■

4.2 Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos

Para os operadores autoadjuntos apresentaremos o resultado que é o objetivo principal de nosso estudo, o *Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos*.

Teorema 4.4. *Seja V um espaço euclidiano e T um operador linear sobre V . Suponhamos que W seja um subespaço de V que seja invariante sob T . Então, W^\perp é invariante sob T^* .*

Demonstração:

Seja $u \in W$ e $v \in W^\perp$. Como W é invariante sob T , então $T(u) \in W$. Desta forma,

$$\langle T(u), v \rangle = 0. \quad (4.3)$$

Além disso, seja T^* o adjunto de T , temos

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle. \quad (4.4)$$

De (4.3)e (4.4) concluímos que

$$\langle u, T^*(v) \rangle = 0.$$

Assim, $T^*(v) \in W^\perp$. Consequentemente, pela arbitrariedade de v , W^\perp é invariante por T^* . ■

Corolário 4.0.1. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador autoadjunto e $W \subset V$ um subespaço invariante de V . Então, $T : W \rightarrow W$ é autoajunto.*

Demonstração:

De fato, sejam $u, v \in W$, sabemos que $T(u), T(v) \in W$, pois W é invariante.

Uma vez que $W \subset V$, temos $u, v \in V$. Além disso, por $T : V \rightarrow V$ ser autoadjunto:

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle.$$

Como u e v são dois vetores arbitrários de W , concluímos que $T : W \rightarrow W$ é autoadjunto. ■

Teorema 4.5. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador autoadjunto, com $\dim V = 1$. Então, T possui um autovetor não nulo.*

Demonstração:

Por hipótese, $\dim V = 1$. Logo, existe v não nulo tal que $V = [v]$.

Considere $T : V \rightarrow V$ não nulo. Temos que $T(v) \in V$. Assim, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $T(v) = \alpha v$.

Seja $u \in V$, então $u = \beta v$, com $\beta \in \mathbb{R}$. Com isso,

$$\begin{aligned} T(u) &= T(\beta v) = \beta T(v) = \beta(\alpha v) = \alpha(\beta v) \\ \Rightarrow T(u) &= \alpha u \end{aligned} \tag{4.5}$$

Logo, $T(u) = \alpha u$, $\forall u \in V$, ou seja, α é um autovalor associado ao autovetor u .

Afirmção: $T(v) \in V$, definido em (4.5) é autoadjunto.

De fato, sejam $x, y \in V$,

$$\langle T(x), y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$$

Como T é autoadjunto e $T(u) = \alpha u$, então qualquer vetor não nulo de V é autovetor de T . Donde concluímos que T possui um autovetor não nulo. ■

Teorema 4.6. (Teorema Espectral para operadores autoadjuntos) *Seja V um espaço vetorial euclidiano e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Então, T é autoadjunto se, e somente se, T é diagonalizável.*

Demonstração:

\Rightarrow)

Faremos indução finita sobre a dimensão de V .

Se $\dim V = 1$, pelo Teorema 4.5 sabemos que T possui um autovetor v' não nulo e pelo Corolário 3.0.1, V possui uma base formada por esse autovetor, $B' = \{v'\}$. Podemos normalizar este vetor tomando $v = \frac{v'}{\|v'\|}$, que também é autovetor de T . Desta forma, $B_1 = \{v\}$ é uma base ortonormal de V , formada por autovetores de T . Assim, T é diagonalizável.

Agora, suponha que se $\dim V = n - 1$, então V possui uma base ortonormal de autovetores de T . Seja ela $B = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$.

Seja $\dim V = n$ e v um autovetor de T . Considere o subespaço $[v]$ que é invariante por T , pela Observação 3.2. Ainda, pelo Teorema 4.4, o $[v]^\perp$ é invariante por T . Uma vez que $V = [v] \oplus [v]^\perp$ e $\dim [v] = 1$, concluímos que $\dim [v]^\perp = n - 1$. Considere $T : [v]^\perp \rightarrow [v]^\perp$, então, pelo Corolário 4.0.1, T é autoadjunto. Por nossa hipótese de indução, $[v]^\perp$ possui uma base ortonormal de autovetores de T . Seja ela, $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$. Pela Proposição 3.7, o conjunto $B = B_1 \cup B_2$ é base para V . Assim, a base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v\}$ é uma base ortonormal de V , formada por autovetores de T , implicando que T é diagonalizável.

\Leftarrow)

Suponha que T seja diagonalizável, ou seja, existe uma base ortonormal de autovetores de V , $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, tal que $[T]_B$ é uma matriz diagonal, onde cada λ_i é autovalor de T associado ao vetor v_i .

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Note que, a transposta $([T]_B)^t$ é igual a $[T]_B$, ou seja, $[T]_B$ é simétrica. Pelo Teorema 4.3, concluímos que T é autoadjunto. ■

Exemplo 4.3. Retomando o Exemplo 4.1, o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, não é diagonalizável. De fato, sejam $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, provamos que

$$\langle T(u), v \rangle = \langle (x_1, y_1), (ax_2 + cy_2, bx_2 + dy_2) \rangle.$$

Por outro lado,

$$\langle u, T(v) \rangle = \langle (x_1, y_1), (ax_2 + by_2, cx_2 + dy_2) \rangle.$$

Então,

$$\langle T(u), v \rangle \neq \langle u, T(v) \rangle$$

Donde concluímos que T não é autoadjunto. Uma vez que o Teorema 4.6 é um resultado de caracterização para operadores diagonalizáveis, não sendo T autoadjunto, também não será diagonalizável.

4.3 Aplicação

Uma aplicação do Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos, no estudo das matrizes simétricas, está na diagonalização dessas matrizes. Diagonalizar uma matriz

simétrica consiste em associar a ela uma matriz diagonal cujos elementos não nulos são justamente seus autovalores.

Definição 4.4. Uma matriz $A \in M_{n \times n}$ é dita **ortogonal** quando $A^{-1} = A^t$, ou seja, $AA^t = A^tA = I$.

Teorema 4.7. (Teorema Espectral para matrizes simétricas) *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Então, existe uma matriz ortogonal P , tal que $D = P^tAP$, onde D é uma matriz diagonal, constituída de autovalores de A .*

Demonstração:

Seja $V = \mathbb{R}^n$ e C a base canônica desse espaço vetorial.

Seja $T : V \rightarrow V$ o operador linear tal que $[T]_C = A$. Uma vez que C é ortonormal e A é simétrica, pelo Teorema 4.3, T é autoadjunto. Existe uma base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V , formada por autovetores de T , de forma que $T(v_j) = \beta_j v_j$, com $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Logo,

$$D = [T]_B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Considere P sendo a matriz de mudança da base B para a base C , onde $P = M_B^C$. Seja $v_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}) \in \mathbb{R}^n$, com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, então:

$$P = M_B^C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Vamos mostrar que P é ortogonal. De fato,

$$PP^t = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

cujo produto resulta na matriz

$$PP^t = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \langle v_n, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Uma vez que B é uma base ortonormal, a partir de (4.7) concluimos

$$PP^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Ou seja, P é ortogonal, isto é, $P = P^{-1}$.

Agora basta mostrar que $D = P^tAP$. Pela Proposição 2.9, sabemos que

$$(M_B^C)^{-1} = M_C^B.$$

Com isso, perceba que

$$\begin{aligned} P^tAP &= P^{-1}AP \\ &= M_C^B [T]_C M_B^C. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.5, $[I]_C^B = M_C^B$, então:

$$P^tAP = M_C^B [T]_C M_B^C = [I]_C^B [T]_C [I]_B^C. \quad (4.8)$$

Utilizando a Proposição 2.8 em (4.8), temos:

$$P^tAP = [I]_C^B [T]_C [I]_B^C = [I]_C^B [T]_B^C = [T]_B.$$

Logo,

$$D = [T]_B = P^tAP. \quad \blacksquare$$

Exemplo 4.4. No Exemplo 3.13, encontramos os autovetores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, associados a matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Então, a base $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base formada por autovetores de A . Além disso, utilizando o produto interno canônico, B é uma base ortogonal. Podemos obter uma base ortonormal, B , normalizando os vetores de B_1

$$B = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

Desta forma, pelo Teorema 4.7, tomando

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuja inversa é

$$P^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

podemos diagonalizar a matriz A ,

$$P^t A P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D.$$

Onde D é a matriz diagonal que procuravamos, formada pelos autovalores de A em sua diagonal.

O Teorema Espectral para Matrizes Simétricas nos permite que, a partir de agora, diagonalizar uma matriz simétrica se resume a associar a ela uma matriz diagonal, cujos elementos não nulos são justamente seus autovalores. Não sendo mais necessárias as contas que envolvem P e P^t , por exemplo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, estudamos importantes resultados da Álgebra Linear, tais como as definições de espaços vetoriais e subespaços vetoriais, com seus vetores e propriedades, essenciais para compreender os conteúdos aqui propostos. Alcançando assim o conceito de base, a partir da qual podemos encontrar todos os vetores pertencentes a um espaço vetorial. Entendemos que todo espaço vetorial possui pelo menos uma base e que se houverem outras, sempre terão a mesma quantidade de elementos, resultado garantido pelo Teorema da Invariância, demonstrado durante nosso estudo. Permitindo, dessa forma, que seja definida dimensão de um espaço vetorial como o número de elementos presentes na base relativa a este.

Estudamos funções entre dois espaços vetoriais que conservam a soma e o produto por escalar, chamada de Transformação Linear, e relevantes subespaços de seu domínio e contradomínio, o núcleo e a imagem da transformação, respectivamente. Prontamente, apresentamos um valioso resultado que relaciona a dimensão desses conjuntos, o Teorema do Núcleo e da Imagem. Em decorrência das transformações lineares e seus resultados, obtivemos componentes primordiais para o processo de diagonalização de um operador ou de sua matriz, como os autovalores e autovetores.

Através do Teorema Espectral certificamos que todo operador linear autoadjunto é diagonalizável, sendo verdadeira também sua recíproca. Uma aplicação do resultado destaque desse trabalho é a diagonalização de matrizes simétricas. Esse resultado, denominado Teorema Espectral para Matrizes Simétricas, nos assegura que diagonalizar uma matriz simétrica consiste em associar a ela uma matriz diagonal cujos elementos não nulos são justamente seus autovalores.

O Teorema Espectral pode ser também estendido para espaços vetoriais complexos, além de possuir versões para outros tipos de operadores, como os normais ou compactos. Assim como sua versão para espaços de dimensão infinita, estudada na disciplina de Análise Funcional, o que o torna uma importante ferramenta no estudo de equações diferenciais parciais (EDP's) e na mecânica quântica, por exemplo. Tendo alcançado nosso objetivo, acreditamos que este trabalho possa ser um proveitoso alicerce para os estudos posteriores da autora e, possivelmente, dos futuros leitores dele.

REFERÊNCIAS

- ANTON, Howard. RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- BARBOSA, Danilo F. MELO, Wilberclay G. **Álgebra Linear**. Notas de aula utilizadas no curso de Álgebra Linear II, UFS.
- BEN-ARZTI, J. The Spectral Theorem. **Semantic Scholar**, 2008. Disponível em: <http://twixar.me/BXF1>. Acesso em: 06 de Dez. de 2019.
- BOLDRINI, José L. COSTA, Sueli I. R. FIGUEIREDO, Vera L. WETZLER, Henry G. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- CALIOLLI, Carlos A. DOMINGUES, Hygino H. R. COSTA, Roberto C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1990.
- HOFFMAN, Kenneth. KUNZE, Ray. **Linear Algebra**. 2. ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, INC., 1971.
- LIMA, Elon L. **Álgebra Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- NASCIMENTO, José F. **Teorema Espectral: Operadores Autoadjuntos e Aplicação**. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande. Cuité, p. 61. 2013.
- ZANI, Sérgio L. **Álgebra Linear**. Notas de aula utilizadas no curso de Álgebra Linear, USP.